Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Tobias Schedlmeier

Universität Freiburg
WS 2016/17

Übungen zur Algebraischen Topologie – Blatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei (X, Z) ein Raumpaar. Bezeichne X/Z den Raum mit Quotiententopologie, der entsteht, wenn man Z zu einem Punkt identifiziert. Man zeige: Ist Z abgeschlossen und gibt es U mit $Z \subset U^\circ \subset X$ derart, daß die Einbettungen $Z \hookrightarrow U$ und $Z/Z \hookrightarrow U/Z$ Homotopieäquivalenzen sind, so liefert die offensichtliche Abbildung Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q(X, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X/Z, Z/Z)$$

Hinweis: Ausschneidung.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $X = U \cup V$ ein topologischer Raum mit einer Überdeckung durch zwei offene Teilmengen. Man zeige, daß die Verknüpfungen

$$\mathrm{H}_q(X, U) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}_q(V, U \cap V) \to \mathrm{H}_{q-1}(U \cap V)$$

eines umgedrehten Ausschneidungsisomorphismus mit einem Randoperator zusammen mit den offensichtlichen anderen Vertikalen einen Homomorphismus

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \mathrm{H}_q(U \cap V) & \to & \mathrm{H}_q U \oplus \mathrm{H}_q V & \to & \mathrm{H}_q X & \to & \mathrm{H}_{q-1}(U \cap V) & \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \uparrow & \\
\dots & \mathrm{H}_{q+1}(X, U) & \to & \mathrm{H}_q U & \to & \mathrm{H}_q X & \xrightarrow{-1} & \mathrm{H}_q(X, U) & \dots
\end{array}$$

von der wie angedeutet durch Vorzeichen leicht veränderten langen Homologiesequenz des Raumpaars (X, U) zur Mayer-Vietoris-Sequenz liefern.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Ein topologischer Raum X werde von zwei offenen Teilmengen überdeckt, $X = U \cup V$, und beide sowie ihr Schnitt mögen im Sinne von **??** eine wohldefinierte Eulercharakteristik besitzen. Man zeige, daß dann auch der ursprüngliche Raum eine wohldefinierte Eulercharakteristik besitzt und daß gilt

$$\chi(X) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Man leite die Mayer-Vietoris-Sequenz in der reduzierten Homologie her.

Abgabefrist: Donnerstag, den 8. Juni in der Vorlesung.