Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Tobias Schedlmeier

Universität Freiburg
WS 2016/17

Übungen zur Algebraischen Topologie – Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Gegeben ein topologischer Raum X erklärt man seine **Suspension** als den Raum

$$\Sigma X := X \times [0,1]/\sim$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ alle Punkte von $X \times \{0\}$ und ebenso alle Punkte von $X \times \{1\}$ zu jeweils einem Punkt identifiziert. Die lange exakte Sequenz der reduzierten Homologie von $(\tilde{\Sigma} X, X \times \{1\})$ mit $\tilde{\Sigma} X := X \times [0,1]/X \times \{0\}$ liefert dann Isomorphismen $\tilde{\mathrm{H}}_{i+1}(\tilde{\Sigma} X, X \times \{1\}) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{H}}_i(X \times \{1\})$ für $X \neq \emptyset$, und mit **??** erhalten wir wieder für $X \neq \emptyset$ und alle i kanonische Isomorphismen

$$\tilde{\mathrm{H}}_{i+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{H}}_i(X)$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Man zeige, daß der Abbildungungskegel von $S^1 \to S^1$ gegeben durch $z \mapsto z^2$ homöomorph zur reell projektiven Ebene ist und berechne deren Homologie.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Man zeige, daß $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ nicht orientierbar ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Gegeben $A, B \Subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebungen des Ursprungs und $g : A \xrightarrow{\sim} B$ ein Diffeomorphismus mit $g(0) = 0$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_n(A, A\backslash 0) & \to & \mathrm{H}_n(B, B\backslash 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash 0) & \to & \mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash 0) \end{array}$$

mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante $\det(\mathrm{d}_0 g)$ als unterer Horizontale. Hinweis: Für vom Ursprung verschiedene Punkte p nahe am Ursprung gilt die Abschätzung $\|g(p) - (\mathrm{d}_0 g)(p)\| < \|(\mathrm{d}_0 g)(p)\|$.

Abgabefrist: Donnerstag, den 29. Juni in der Vorlesung.