Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Tobias Schedlmeier

Universität Freiburg
WS 2016/17

Übungen zur Algebraischen Topologie – Blatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so gibt es für $M \in$ Mod-S und $N \in S$-Mod genau einen Homomorphismus $M \otimes_R N \to M \otimes_S N$ von abelschen Gruppen mit $m \otimes n \mapsto m \otimes n$. Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus derart, daß S als Ring erzeugt wird vom Bild $\varphi(R)$ von R mitsamt den Inversen der Elemente aus $\varphi(R) \cap S^\times$, so ist diese Abbildung eine Bijektion

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} M \otimes_S N$$

Speziell liefert für ein Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ und $M \in$ Mod-$R/\mathfrak{m}$ sowie $N \in R/\mathfrak{m}$-Mod die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} M \otimes_{R/\mathfrak{m}} N$, und für je zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume M, N liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $M \otimes_\mathbb{Z} N \xrightarrow{\sim} M \otimes_\mathbb{Q} N$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Genau dann besteht eine abelsche Gruppe M nur aus Elementen endlicher Ordnung, wenn gilt $M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} = 0$. Das Torsionsprodukt $M * N$ von zwei abelschen Gruppen besitzt niemals Elemente unendlicher Ordnung. Hinweis: Man zeige $(M * N) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} = 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Man zeige, daß das Torsionsprodukt mit beliebigen direkten Summen vertauscht.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Gegeben Kettenkomplexe A, B, C konstruiere man einen natürlichen Isomorphismus

$$\operatorname{Ket}(A \otimes B, C) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ket}(A, \operatorname{Hom}(B, C))$$

von abelschen Gruppen. Hier bezeichnet $\operatorname{Ket}(X, Y)$ die Gruppe der Kettenabbildungen von X nach Y und Hom den Hom-Komplex.

Abgabefrist: Donnerstag, den 13. Juli in der Vorlesung.