Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Universität Freiburg
SS 2018

Übungen zur Garbenkohomologie II – Blatt 4

Aufgabe 1 (Verschwindungskriterium). Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}^+(\mathrm{Ab}_{/X})$ ein gegen die Pfeile beschränkter Komplex von abelschen Garben. Besitzt jeder Punkt $x \in X$ ein konfinales System von offenen Umgebungen $U \Subset X$ mit $\mathrm{fin}_* j^* \mathcal{F} = 0$ für $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung, so gilt bereits $\mathcal{F} = 0$. Mit den Resultaten aus **??** zeige man dasselbe allgemeiner für einen beliebigen Komplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$. Vermittels der Anwendung dieses Verschwindungskriteriums auf Abbildungskegel erhält man auch ein **Isomorphismuskriterium**, das ich nicht ausbuchstabiere. Hinweis: Da nach **??** das Ausdehnen durch Null unter einer offenen Einbettung ein exakter Funktor ist, macht der Rückzug unter einer offenen Einbettung homotopieinjektive Komplexe zu homotopieinjektiven Komplexen.

Aufgabe 2 (Verschwindungskriterium, Variante). Seien X, Y topologische Räume und $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}^+(\mathrm{Ab}_{/X \times Y})$ ein gegen die Pfeile beschränkter Komplex von abelschen Garben. Besitzt jeder Punkt $x \in X$ ein konfinales System von offenen Umgebungen $U \Subset X$ mit $\mathrm{pr}_{Y*}(j \times \mathrm{id})^* \mathcal{F} = 0$ für $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung, so gilt bereits $\mathcal{F} = 0$. Mit den Resultaten aus **??** zeige man dasselbe allgemeiner für einen beliebigen Komplex $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X \times Y})$. Vermittels der Anwendung dieses Verschwindungskriteriums auf Abbildungskegel erhält man ein weiteres **Isomorphismuskriterium**, das ich auch nicht ausbuchstabiere.

Aufgabe 3. Gegeben ein Schmelzfunktor F liefern die universellen Eigenschaften für je zwei Objekte X, Y, für die die fraglichen internen Hom-Objekte existieren, einen natürlichen Morphismus

$$F(X \Rrightarrow Y) \to (FX \Rrightarrow FY)$$

Er muß kein Isomorphismus sein, wie der Schmelzfunktor $\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$ zeigt. Ist er stets ein Isomorphismus, so sagen wir, unser Schmelzfunktor sei **verträglich mit internem Hom**. Ist der Rückzug abelscher Garben verträglich mit internem Hom?