Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Universität Freiburg
WS 2017/18

# Übungen zur Garbenkohomologie – Blatt 2

**Aufgabe 1.** Gegeben eine Adjunktion von Funktoren $\alpha : L \dashv R$ mit Einheit $\hat{\alpha}$ und Koeinheit $\check{\alpha}$ zeige man, daß die Verknüpfung $(\check{\alpha}L) \circ (L\hat{\alpha}) : L \Rightarrow LRL \Rightarrow L$ die identische Transformation des Funktors $L$ zu sich selber ist. Ebenso ist $(R\check{\alpha}) \circ (\hat{\alpha}R)$ die Identität auf $R$. Diese Beziehungen werden manchmal als die **Dreiecksidentitäten** bezeichnet. Sind umgekehrt Funktoren $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gegeben und Transformationen $\varepsilon : \mathrm{Id} \Rightarrow RL$ und $\eta : LR \Rightarrow \mathrm{Id}$ mit der Eigenschaft $(R\eta) \circ (\varepsilon R) = \mathrm{id}$ und $(\eta L) \circ (L\varepsilon) = \mathrm{id}$, so gibt es genau eine Adjunktion von Funktoren $\alpha : L \dashv R$ mit $\hat{\alpha} = \varepsilon$ und $\check{\alpha} = \eta$. Hinweis: Man betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(LX, Y) & \stackrel{\sim}{\to} & \mathcal{A}(X, RY) \\ \circ Lf \downarrow & & \downarrow \circ f \\ \mathcal{B}(LZ, Y) & \stackrel{\sim}{\to} & \mathcal{A}(Z, RY) \end{array}$$

mit $Y = LA$ und $Z = A$ und $X = RLA$ und verfolge das Bild der Identität auf $RLA$ für $f : A \to RLA$ die Koeinheit.

**Aufgabe 2.** Man zeige, daß der vergeßliche Funktor von der Kategorie der Körper in die Kategorie der Mengen keinen Linksadjungierten besitzt. Es gibt also keine „freien Körper über einer Menge".

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Besitzt ein Funktor einen Rechtsadjungierten, so vertauscht er mit beliebigen Kolimites. Besitzt ein Funktor einen Linksadjungierten, so vertauscht er mit beliebigen Limites.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Sei $X$ ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Der Halmfunktor $\mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ hat als Rechtsadjungierten den Wolkenkratzerfunktor $A \mapsto A_{(x)}$.