Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Universität Freiburg
WS 2017/18

Übungen zur Garbenkohomologie – Blatt 3

Aufgabe 1. Man überlege sich, daß in der Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum beliebige Produkte und Koprodukte existieren, aber: (1) Die globalen Schnitte vertauschen mit dem Bilden beliebiger Produkte, aber nicht mit dem Bilden beliebiger Koprodukte. (2) Ein beliebiges Koprodukt kurzer exakter Sequenzen von Garben ist eine kurze exakte Sequenz von Garben, aber die analoga Aussage für Produkte gilt nicht.

Aufgabe 2. In einer präabelschen Kategorie zeige man die folgenden Aussagen. (1) Für einen Morphismus $f : A \to B$ sind gleichbedeutend: (a) f ist epi, (b) $\operatorname{cok} f = 0$ und (c) $\operatorname{im} f \xrightarrow{\sim} B$. Man formuliere auch die duale Aussage. (2) Genau dann ist ein Morphismus ein Isomorphismus, wenn er mono und epi ist. (3) Ist $A \twoheadrightarrow B \hookrightarrow C$ eine Komposition eines Epi mit einem Mono, so ist B das Bild dieser Verknüpfung.

Aufgabe 3. Besitzt ein Funktor zwischen präabelschen Kategorien einen linksadjungierten Funktor, so ist er linksexakt. Besitzt ein Funktor zwischen präabelschen Kategorien einen rechtsadjungierten Funktor, so ist er rechtsexakt.

Aufgabe 4. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von abelschen Kategorien und es besitze $\mathcal{A}$ genug Injektive. Man zeige, daß für injektives $I \in \mathcal{A}$ gilt $(\mathrm{R}^q F)(I) = 0$ falls $q > 0$.

Aufgabe 5. Man berechne $\operatorname{Ext}^q_{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.