Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Universität Freiburg
WS 2017/18

Übungen zur Garbenkohomologie – Blatt 4

Aufgabe 1. Gegeben eine Kettenabbildung $A \to B$ und ein Komplex C konstruiere man einen Isomorphismus von Kettenkomplexen, der als mittlerer vertikaler Pfeil das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
([1]A) \Rrightarrow C \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (\mathrm{Keg}(A \to B)) \Rrightarrow C \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (B \Rrightarrow C) \arrow[d, equal] \\
{[-1]}(A \Rrightarrow C) \arrow[r] & {[-1]}\,\mathrm{Keg}((B \Rrightarrow C) \to (A \Rrightarrow C)) \arrow[r] & (B \Rrightarrow C)
\end{tikzcd}$$

mit der offensichtlichen linken Vertikale zum Kommutieren bringt. Man mag auch das Analogon in der anderen Variable formulieren.

Aufgabe 2. Ein Quasiisomorphismus zwischen zwei injektiven gegen die Pfeile beschränkten Komplexen ist stets eine Homotopieäquivalenz, in anderen Worten ein Isomorphismus in $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$.

Unter einer Erweiterung einer abelschen Gruppe M durch eine abelsche Gruppe N versteht man eine kurze exakte Sequenz $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$. Eine zweite solche Erweiterung $N \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow M$ heißt **isomorph** oder genauer **erweiterungsisomorph** zu unserer ersten Erweiterung, wenn es einen Isomorphismus $E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
N & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & M \\
\| & & \downarrow & & \| \\
N & \hookrightarrow & E' & \twoheadrightarrow & M
\end{array}$$

zum Kommutieren bringt.

Aufgabe 3. Man zeige zunächst für abelsche Gruppen, daß wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Erweiterungen von } M \text{ durch } N, \\ \text{bis auf Erweiterungsisomorphie} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}(M, N)$$

erhalten, indem wir jeder kurzen exakten Sequenz $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$ das Bild in $\mathrm{Ext}(M, N)$ der Identität auf M unter dem Randoperator der zugehörigen Ext-Sequenz im zweiten Eintrag zuordnen. Hinweis: Gegeben $e \in \mathrm{Ext}(M, N)$ wähle man einen Repräsentanten $\tilde{e} : KM \to N$ und bilde durch pushout in die Mitte ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
KM & \hookrightarrow & \mathbb{Z}M & \twoheadrightarrow & M \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
N & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & M
\end{array}$$

Mutige erweitern auf eine abelsche Kategorie mit genug Projektiven.