Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Universität Freiburg
WS 2017/18

Übungen zur Garbenkohomologie – Blatt 5

Aufgabe 1. Seien M, N Objekte einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ und $\ldots \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow M$ eine projektive Auflösung von M und $N \hookrightarrow I^0 \to I^1 \to \ldots$ eine injektive Auflösung von N. So liefern die offensichtlichen Kettenabbildungen Quasiisomorphismen zwischen Hom-Komplexen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, N) \xrightarrow{\breve{}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, I) \xleftarrow{\breve{}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, I)$$

Insbesondere erhalten wir, wenn es in $\mathcal{A}$ genug Projektive und genug Injektive gibt, kanonische Isomorphismen $\mathrm{lExt}^q_{\mathcal{A}}(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{A}}(M, N)$.

Aufgabe 2. Man zeige, daß die Kohomologie der Kreislinie mit Koeffizienten in der nichttrivialen lokal konstanten abelschen Garbe $\mathcal{F}$ mit Fasern frei vom Rang Eins gegeben wird durch $\mathrm{H}^1(S^1; \mathcal{F}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und durch Null in allen anderen Graden. Man zeige dasselbe für $\mathbb{C}^\times$ statt S^1.

Aufgabe 3. Hier noch eine allgemeinere Version der vorigen Aufgabe für Mutige, die keine Angst vor Monodromie haben. Sei $\mathcal{F}$ eine lokal konstante abelsche Garbe auf $\mathbb{C}^\times$ und $(\mathcal{F}_1, T)$ ihr Halm bei 1 mit seinem Monodromieautomorphismus. Man zeige

$$\mathrm{H}^q(\mathbb{C}^\times; \mathcal{F}) \cong \begin{cases} \{a \in \mathcal{F}_1 \mid T(a) = a\} & q = 0; \\ \mathcal{F}_1 / \operatorname{im}(T - \mathrm{id}) & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige dasselbe für S^1 statt $\mathbb{C}^\times$.

Aufgabe 4. Geben Sie eine abelsche Garbe auf der reellen Zahlengeraden an, deren erste Kohomologie Sie ausrechnen können und wo dabei nicht Null herauskommt.

Aufgabe 5. Man rechne die Details aus dem Beweis der Proposition über Morphismen von Dreiecken nach.