Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Universität Freiburg
WS 2017/18

Übungen zur Garbenkohomologie – Blatt 6

Aufgabe 1. Seien $f : X \to Y$ stetig, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und $s \in \Gamma\mathcal{F}$ ein globaler Schnitt. Man zeige, daß für den induzierten globalen Schnitt $f_* s$ von $f_*\mathcal{F}$ gilt

$$\operatorname{supp}(f_* s) = \overline{f(\operatorname{supp} s)}$$

Aufgabe 2. Ist $f : X \to Y$ eine finale Surjektion mit zusammenhängenden Fasern, so ist für jede Garbe von Mengen $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_* f^* \mathcal{G}$. Hinweis: Man ziehe sich darauf zurück, eine Bijektion auf globalen Schnitten zu zeigen. Dann interpretiere man Schnitte der zurückgeholten Garbe als Lifts von f zu Abbildungen in den étalen Raum von $\mathcal{G}$.

Aufgabe 3. Man zeige für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem Kubus $[0,1]^n$ die Abschätzung $\mathrm{H}^q([0,1]^n; \mathcal{F}) = 0$ für $q > n$. Hinweis: Man erinnere den Beweis der Homotopieinvarianz und unsere Erkenntnisse zur Kohomologie von Teilmengen der Zahlengeraden und versuche eine Induktion.

Aufgabe 4. Für einen topologischen Raum X bezeichne X^{dis} die Menge X versehen mit der diskreten Topologie und $d : X^{\mathrm{dis}} \to X$ die Identität. Man zeige, daß für eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ die Einheit der Adjunktion $\mathcal{F} \to d_* d^* \mathcal{F}$ mit der Einbettung in die Garbe der unstetigen Schnitte in den étalen Raum unserer Garbe identifiziert werden kann.