Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Universität Freiburg
WS 2017/18

Übungen zur Garbenkohomologie – Blatt 7

Aufgabe 1. Gegeben ein filtrierendes System abelscher Garben auf einem topologischen Raum ist die offensichtliche Abbildung eine Injektion $\operatorname{colf} \Gamma_! \mathcal{F}_i \hookrightarrow \Gamma_! \operatorname{colf} \mathcal{F}_i$. Man zeige auch, daß die entsprechende Aussage für Γ gar nicht stimmt.

Aufgabe 2. Seien $j : X \hookrightarrow Y$ eine offene Einbettung von lokal kompakten Hausdorffräumen und $\varphi : \mathcal{F} \to j_! \mathcal{F}$ der offensichtliche Morphismus von abelschen Garben über j. So sind die zugehörigen Abbildungen Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_!(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(Y; j_! \mathcal{F})$$

Aufgabe 3. Man zeige für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}^n$ die Abschätzung $\mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n; \mathcal{F}) = 0$ für $q > n$. Hinweis: Nach einer anderen Aufgabe wissen wir für den Kubus bereits $\mathrm{H}^q([0,1]^n; \mathcal{G}) = 0$ für $q > n$ und jede abelsche Garbe $\mathcal{G}$ auf dem Kubus.

Aufgabe 4 (**Mayer-Vietoris-Squenz der kompakten Kohomologie**)**.** Gegeben offene Teilmengen U, V eines lokal kompakten Hausdorffraums X und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ konstruiere man eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{H}^q(U \cap V; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(U; \mathcal{F}) \oplus \mathrm{H}^q(V; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(U \cup V; \mathcal{F}) \to \ldots$$

Hinweis: Sie gehört zu einer kurzen exakten Garbensequenz.

Aufgabe 5. Ist $A \subsetneq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene echte Teilmenge $A \neq \mathbb{R}^n$, so gilt $\mathrm{H}^n_! A = 0$.