Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Universität Freiburg
WS 2017/18

Übungen zur Garbenkohomologie – Blatt 8

Aufgabe 1. Sei $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor. Ein Morphismus $\kappa : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in $\mathscr{C}$ heißt **stark kartesisch**, wenn für alle Objekte $\mathcal{E} \in \mathscr{C}$ und alle Morphismen $g : p\mathcal{E} \to p\mathcal{F}$ in $\mathscr{B}$ das Nachschalten von κ eine Bijektion

$$(\kappa\circ) : \mathscr{C}_g(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_{p(\kappa)\circ g}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$$

induziert. Man zeige, daß jede Verknüpfung stark kartesischer Morphismen wieder stark kartesisch ist. Man zeige weiter, daß ein Funktor genau dann ein Faserfunktor ist, wenn jeder Morphismus in der Bildkategorie einen stark kartesischen Lift besitzt, und daß dann alle kartesischen Morphismen sogar stark kartesisch sind. Man zeige auch: Ist $\beta\alpha$ kartesisch und β stark kartesisch, so ist α kartesisch.

Aufgabe 2. Seien $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor und κ ein Morphismus in $\mathscr{C}$. Ist $p(\kappa)$ ein Isomorphismus, so ist κ genau dann kartesisch, wenn es selbst ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Bifaserfunktor und sei in der Basis $\mathscr{B}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "k"] \arrow[d, "r"'] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ T \arrow[r, "h"'] & Z \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

gegeben. So stimmt der Basiswechsel im einhüllenden Rechteck überein mit der in der hoffentlich offensichtlichen Weise aus den Basiswechseln in den einzelnen Quadraten und Identifikationen gebildeten Transformation $r_\dagger(gk)^\dagger \Rightarrow r_\dagger k^\dagger g^\dagger \Rightarrow h^\dagger q_\dagger g^\dagger \Rightarrow h^\dagger f^\dagger p_\dagger \Rightarrow (fh)^\dagger p_\dagger$.

Aufgabe 4 (Offener Basiswechsel). Sind in einem kartesischen Diagramm $fq = pg$ von topologischen Räumen die Horizontalen f, g offene Einbettungen, so ist der Basiswechsel für Garben eine Isotransformation

$$f^* p_* \stackrel{\sim}{\Rightarrow} q_* g^*$$