Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Oliver Straser

Topologie
SoSe 2014

7. Übungsblatt

Abgabe: Am Dienstag, den 24.6.2014 im Kasten Ihrer Übungsgruppe

Aufgabe 1:

i) Sei in einer Kategorie ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

gegeben. Sind die zwei Quadrate kartesisch, so ist auch das einhüllende Rechteck kartesisch, mit den horizontalen Verknüpfungen als Pfeilen.

ii) Ist in einem kartesischen oder kokartesischen Diagramm ein Ursprungspfeil ein Isomorphismus, so auch der gegenberliegende Pfeil aus dem pull-back bzw. in den push-out.

4 Punkte

Aufgabe 2: Ist $i : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung eines Teilraums und $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung, so ist das folgende Diagramm kartesisch in der Kategorie der topologischen Räume:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(Z) \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, hook, "i"] & X \end{tikzcd}$$

4 Punkte

Aufgabe 3: Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und U, $V \subseteq X$ offene Teilmengen die X überdecken. Ist $U \cap V$ wegzusammenhängendend und V zusammenziehbar, dann induziert die Einbettung $U \hookrightarrow X$ einen surjektiven Homomorphismus

$$\pi_1(U, x) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x)$$

für alle $x \in U \cap V$. Der Kern des obigen Homomorphismus ist gleich dem kleinsten Normalteiler von $\pi_1(U, x)$, der das Bild von $\pi_1(U \cap V, x)$ unter dem Homomorphismus $\pi_1(U \cap V, x) \to \pi_1(U, x)$ enthällt. **4 Punkte**

Aufgabe 4: Ist M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 3$ und $E \subset M$ eine endliche Teilmenge, so induziert die Einbettung $M \setminus E \hookrightarrow M$ einen Isomorphismus $\pi_1(M \setminus E, p) \cong \pi_1(M, p)$ für ein beliebigen Punkt $p \in M \setminus E$. **4 Punkte**