Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Oliver Straser



# 9. Übungsblatt

Abgabe: Am Dienstag, den 8.7.2014 im Kasten Ihrer Übungsgruppe

**Aufgabe 1:** Der Polyeder $\Delta(K)$ zu einem Simplizialkomplex $(E; K)$ ist stets Hausdorff und jede kompakte Teilmenge $A \subseteq \Delta(K)$ ist schon enthalten in einer Vereinigung von endlich vielen Simplizes.
*Hinweis:* Eine Teilmenge von $\Delta(K)$, die jeden Simplex in höchstens endlich vielen Punkten trifft, ist stets abgeschlossen und diskret. Besteht unser Simplizialkomplex aus abzählbar vielen Kanten, die in einen zentralen Punkt hereinlaufen, so gälte diese Aussage nicht für die von den Auswertungen an allen Ecken induzierte Kofinaltopologie! **4 Punkte**

**Aufgabe 2:** Ein abstrakter Simplizialkomplex ist eine partiell geordnete Menge derart, dass folgendes gilt

1) jede zweielementige Teilmenge eine grösste untere Schranke besitzt
2) die Menge aller Elemente kleinergleich einem beliebig vorgegebenen Element als partiell geordnete Menge isomorph ist zum System aller Teilmengen einer endlichen Menge.

Zeigen Sie: Für jeden Simplizialkomplex definiert die Menge seiner Simplizes mit der durch die Inklusion gegebenen Ordnung einen abstrakten Simplizialkomplex. Man zeige zudem, dass umgekehrt auch jeder abstrakte Simplizialkomplex isomorph ist zur partiell geordneten Menge der Simplizes eines bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmten Simplizialkomplexes.
**4 Punkte**

**Aufgabe 3:** Für eine beliebige Menge $E$ ist die Menge $K$ aller endlichen Teilmengen von $E$ ein Simplizialkomplex. Den zugehörigen Polyeder schreiben wir $\Delta(E)$ und nennen ihn den vollen Simplex mit Ecken $E$. Man zeige, dass für $E \neq \emptyset$ der volle Simplex $\Delta(E)$ zusammenziehbar ist. **4 Punkte**

**Aufgabe 4:** Seien $G_1$, $G_2$ Gruppen. Man zeige, dass sich jedes Element des freien Produkts $G_1 * G_2$ in eindeutiger Weise als ein Produkt $g_1 \cdot g_2 \cdots g_n$ schreiben lässt mit $n \geq 0$ und $g_k \in G_{\epsilon(k)}$ nicht das neutrale Element und $\epsilon(k) \neq \epsilon(k+1)$ für $1 \leq k < n$. Wie üblich soll hier das leere Produkt mit $n = 0$ das neutrale Element von $G_1 * G_2$ darstellen. Hinweis: Man orientiere sich an Aufgabe 4 auf Blatt 8. **4 Punkte**