

# DERIVIERTE KATEGORIEN UND FUNKTOREN

Wolfgang Soergel

25. April 2024

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lokalisierung von Kategorien</b>	<b>4</b>
1.1	Pfadkategorie eines Köchers . . . . .	4
1.2	Lokalisierung von Kategorien . . . . .	5
1.3	Lokalisierung und Entfaltung . . . . .	10
1.4	Lokalisierung unter Orebedingungen . . . . .	15
1.5	Quotienten abelscher Kategorien* . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Triangulierte und derivierte Kategorien</b>	<b>30</b>
2.1	Abbildungskegel in Homotopiekategorien . . . . .	30
2.2	Triangulierte Kategorien . . . . .	33
2.3	Triangulierung von Homotopiekategorien . . . . .	40
2.4	Triangulierte Funktoren . . . . .	45
2.5	Quotienten triangulierter Kategorien . . . . .	48
2.6	Derivierte Kategorien . . . . .	51
2.7	Beschränkte derivierte Kategorien . . . . .	61
2.8	Vergleich verschiedener Kohomologieringe* . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Faktorierte und derivierte Funktoren</b>	<b>69</b>
3.1	Limites in Funktorkategorien . . . . .	69
3.2	Faktorierte Funktoren auf Ore-Lokalisierungen . . . . .	75
3.3	Faktorisieren über triangulierte Quotienten . . . . .	84
3.4	Derivierte Funktoren . . . . .	87
3.5	Derivierte Funktoren und Kohomologie . . . . .	95
3.6	Derivieren homologisch endlicher Funktoren . . . . .	97
3.7	Exaktheit von Totalkomplexen abelscher Gruppen . . . . .	100
3.8	Derivieren von Tensor und Hom . . . . .	103
3.9	Derivierte Produkte und Koprodukte . . . . .	111
3.10	Universelle derivierte Funktoren* . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Derivierte Kategorien und dg-Ringoid*</b>	<b>120</b>
4.1	Ringoid und ihre Moduln . . . . .	120
4.2	Differentielle graduierte Ringoid und Moduln . . . . .	122
4.3	Kippen, Realisierung, Gewichtskomplex . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Danksagung</b>	<b>135</b>
<b>6</b>	<b>Die Vorlesung Garbenkohomologie II im SS 18</b>	<b>136</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>138</b>

<b>Indexvorwort</b>	<b>140</b>
<b>Index</b>	<b>141</b>

# 1 Lokalisierung von Kategorien

## 1.1 Pfadkategorie eines Köchers

*Vorschau* 1.1.1. Jede Kategorie kann als ein Köcher aufgefaßt werden, indem man die Komposition von Morphismen vergißt. Dieser Funktor hat als Linksadjungierten den Funktor, der jedem Köcher die Kategorie zuordnet, deren Morphismen Pfade in unserem Köcher sind. Diese Konstruktion soll in diesem Abschnitt ausgeführt werden.

1.1.2. Ich erinnere an die Begriffswelt der Köcher. Ein **Köcher** ist ein Datum  $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$  bestehend aus zwei Mengen  $P, E$  und zwei Abbildungen  $a, e : P \rightarrow E$ . Wir nennen die Elemente von  $E$  die **Ecken** des Köchers und die Elemente von  $P$  seine **Pfeile**. Für einen Pfeil  $p \in P$  nennen wir  $a(p)$  seinen **Anfangspunkt** und  $e(p)$  seinen **Endpunkt**. Die Köcher bilden in offensichtlicher Weise eine Kategorie, die wir nach französisch „carquois“ als  $\text{Car}$  notieren.

**Definition 1.1.3.** Gegeben ein Köcher  $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$  bilden wir seine **Pfadkategorie**  $\tilde{\mathcal{K}}$  wie folgt: Als Objekte nehmen wir die Ecken  $\text{Ob } \tilde{\mathcal{K}} := E$  des Köchers, als Menge von Morphismen von einer Ecke  $x$  in eine weitere Ecke  $y$  die Menge aller Folgen von Pfeilen  $p_1, \dots, p_n$  mit  $a(p_1) = x$ ,  $e(p_n) = y$  und  $e(p_i) = a(p_{i+1})$  für  $1 \leq i < n$ , disjunkt vereinigt mit einem weiteren Element  $\text{Id}_x$  im Fall  $y = x$ . Die Verknüpfung ist das „Aneinanderhängen“, unsere Folge wäre also die Verknüpfung  $p_n \circ \dots \circ p_1 \in \tilde{\mathcal{K}}(x, y)$ . Wir nennen die Morphismen in der Pfadkategorie  $\tilde{\mathcal{K}}$  die **Pfade** in unserem Köcher.

*Beispiel* 1.1.4. Gegeben ein Köcher  $\mathcal{K}$  mit nur einer Ecke ist seine Pfadkategorie die Ein-Objekt-Kategorie zum freien Monoid über der Menge  $P$  seiner Pfeile.

1.1.5. Der offensichtliche Köchermorphismus von einem Köcher in seine Pfadkategorie  $\text{can} : \mathcal{K} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$  hat die folgende **universelle Eigenschaft**: Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Morphismus von Köchern, so gibt es genau einen Funktor  $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $\tilde{\varphi} \circ \text{can} = \varphi$ . Ist  $\mathcal{K}$  ein Köcher und  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, so liefert die Restriktion sogar einen Isomorphismus von Kategorien

$$\text{Cat}(\tilde{\mathcal{K}}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\cong} \text{Car}(\mathcal{K}, \mathcal{C})$$

Hier machen wir beide Seiten dadurch zu Kategorien, daß wir als Morphismen die Transformationen nehmen. In anderen Worten ist das Bilden der Pfadkategorie  $\text{Car} \rightarrow \text{Cat}$  der Linksadjungierte zum Vergessen der Verknüpfung  $\text{Cat} \rightarrow \text{Car}$ .

1.1.6 (**Notationen für Köcher und Kategorien**). Manchmal ist es wichtig, die verwendeten Universen zu spezifizieren. Wir deuten bei Köchern wie bei Kategorien durch ein vorgestelltes  $\mathcal{U}_\epsilon$  beziehungsweise  $\mathcal{U}_\mathcal{C}$  an, daß die Menge der

Punkte ein Element beziehungsweise eine Teilmenge eines vorgegebenen Mengensystems  $\mathfrak{U}$  ist, und durch ein vorgestelltes  $\mathfrak{U}_\epsilon^\rightarrow$  beziehungsweise  $\mathfrak{U}_\epsilon^\rightarrow$ , daß die Menge der Pfeile zwischen zwei beliebig vorgegebenen Punkten ein Element beziehungsweise eine Teilmenge eines vorgegebenen Mengensystems  $\mathfrak{U}$  ist.

*Ergänzung 1.1.7.* Gegeben ein Universum  $\mathfrak{U}$  mit  $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$  und ein  $\mathfrak{U}_\epsilon$ - $\mathfrak{U}_\epsilon^\rightarrow$ -Köcher ist seine Pfadkategorie eine  $\mathfrak{U}_\epsilon$ - $\mathfrak{U}_\epsilon^\rightarrow$ -Kategorie.

## 1.2 Lokalisierung von Kategorien

1.2.1. Die Morphismen aus einer ausgezeichneten Menge  $S$  von Morphismen einer Kategorie nennen wir im folgenden  **$S$ -Morphismen**.

**Satz 1.2.2 (Lokalisierung von Kategorien).** *Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  eine Menge von Morphismen in  $\mathcal{C}$ . So gibt es ein Paar  $(\mathcal{C}_S, Q)$  bestehend aus einer Kategorie  $\mathcal{C}_S$  mitsamt einem Funktor  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  derart, daß gilt:*

1. *Jeder  $S$ -Morphismus wird unter  $Q$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{C}_S$ ;*
2. *Ist  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor, der alle  $S$ -Morphismen zu Isomorphismen macht, so gibt es genau einen Funktor  $\tilde{F} : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $F = \tilde{F} \circ Q$ .*

1.2.3. Natürlich ist ein derartiges Paar  $(\mathcal{C}_S, Q)$  in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir konstruieren im Beweis sogar explizit ein derartiges Paar und nennen es die **Lokalisierung von  $\mathcal{C}$  an  $S$** . Manchmal verwenden wir auch die ausführlicheren Notationen  $\mathcal{C}_S = S^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{C}[S^{-1}]$ . Gegeben Objekte  $A, B \in \mathcal{C}$  schreiben wir manchmal  $A \rightarrow_S B$  für einen Morphismus aus  $\mathcal{C}_S(A, B)$ .

*Ergänzung 1.2.4.* Gegeben ein Universum  $\mathfrak{U}$  mit  $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$  und ein  $\mathfrak{U}_\epsilon$ - $\vec{\mathfrak{U}}_\epsilon$ -Köcher ist seine Pfadkategorie eine  $\mathfrak{U}_\epsilon$ - $\vec{\mathfrak{U}}_\epsilon$ -Kategorie.

1.2.5 (**Herkunft der Terminologie**). Der Begriff der Lokalisierung kommt aus der Ringtheorie, in der man das formale Einführen von Inversen aus geometrischen Gründen als Lokalisierung bezeichnet, vergleiche [KAG] 4.4. Mehr zur Kategorientheorie findet man in [Bor94].

1.2.6 (**Lokalisierung von Monoiden als Spezialfall**). Man kann insbesondere zu jedem Paar  $G \supset S$  bestehend aus einem Monoid mit einer Teilmenge ein weiteres Monoid  $S^{-1}G$  mit einem Monoidhomomorphismus  $G \rightarrow S^{-1}G$  konstruieren derart, daß alle Elemente von  $S$  unter diesem Morphismus invertierbar werden und daß jeder Monoidhomomorphismus  $G \rightarrow H$ , unter dem alle Elemente von  $S$  invertierbar werden, auf genau eine Weise über  $G \rightarrow S^{-1}G$  faktorisiert. Die Ein-Objekt-Kategorie  $[S^{-1}G]$  ist in diesem Fall genau die Lokalisierung  $[G]_S$  der Ein-Objekt-Kategorie zu  $G$ .

*Beweis.* Wir vergrößern den unserer Kategorie  $\mathcal{C}$  zugrundeliegenden Köcher zu einem neuen Köcher  $\mathcal{C} \sqcup S^{-1}$ , indem wir für jeden Morphismus  $s : X \rightarrow Y$  aus  $S$  einen Pfeil  $\bar{s} : Y \rightarrow X$  neu hinzunehmen. Zu dem so vergrößerten Köcher bilden wir dann die Pfadkategorie 1.1.3. Wir notieren  $[p]$  den Morphismus in der Pfadkategorie zu einem Pfeil  $p$  aus dem Köcher  $\mathcal{C} \sqcup S^{-1}$  und  $\text{Id}_X$  beziehungsweise  $\text{id}_X$  die Identität auf einem Objekt  $X$  in unserer Pfadkategorie beziehungsweise in unserer ursprünglichen Kategorie  $\mathcal{C}$ . Nun betrachten wir auf der Menge der Morphismen unserer Pfadkategorie die kleinste Äquivalenzrelation  $\sim$  derart, daß gilt:

1.  $[s] \circ [\bar{s}] \sim \text{Id}_Y$  und  $[\bar{s}] \circ [s] \sim \text{Id}_X$  für alle  $s : X \rightarrow Y$  aus  $S$ ;
2.  $\text{Id}_X \sim [\text{id}_X]$  und  $[f] \circ [g] \sim [f \circ g]$  für alle verknüpfbaren Morphismen  $f$  und  $g$  aus  $\mathcal{C}$ ;
3.  $v \sim w \Rightarrow u \circ v \sim u \circ w$  und  $v \circ x \sim w \circ x$  für beliebige entsprechend verknüpfbare Morphismen  $u, v, w, x$  unserer Pfadkategorie.

Schließlich erklären wir die Kategorie  $\mathcal{C}_S$ , indem wir als Objekte die Objekte von  $\mathcal{C}$  nehmen, als Morphismen jedoch Äquivalenzklassen von Wegen in der Pfadkategorie des Köchers  $\mathcal{C} \sqcup S^{-1}$  unter unserer Äquivalenzrelation  $\sim$ . Die letzte Bedingung an unsere Äquivalenzrelation stellt dabei sicher, daß die Verknüpfung solcher Äquivalenzklassen wohldefiniert ist. Man folgert leicht, daß  $\mathcal{C}_S$  mit dieser Verknüpfung von Morphismen eine Kategorie ist. Bezeichne nun wie zuvor  $\tilde{\mathcal{K}}$  die Pfadkategorie eines Köchers  $\mathcal{K}$ . Die vorletzte Bedingung in unserer Definition der Äquivalenzrelation erzwingt, daß die Verknüpfung

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \sqcup S^{-1} \rightarrow \widetilde{\mathcal{C} \sqcup S^{-1}} \rightarrow \mathcal{C}_S$$

von Morphismen von Köchern sogar ein Funktor ist, und die erste Bedingung erzwingt, daß jeder Morphismus aus  $S$  unter diesem Funktor ein Isomorphismus der Kategorie  $\mathcal{C}_S$  wird. Wir bezeichnen unseren Funktor mit  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  und überlassen den Nachweis der universellen Eigenschaft dem Leser.  $\square$

**Definition 1.2.7.** Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt ein **Lokalisierungsfunktor**, wenn für die Menge  $S$  aller Morphismen von  $\mathcal{C}$ , die er zu Isomorphismen macht, der induzierte Funktor eine Äquivalenz von Kategorien  $\tilde{F} : \mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$  ist.

*Beispiel 1.2.8 (Erweiterung der Skalare als Lokalisierungsfunktor).* Das Erweitern der Skalare ist ein Lokalisierungsfunktor

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} : \text{Modf}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Modf}_{\mathbb{Q}}$$

von der Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen zur Kategorie der endlichdimensionalen  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume. Um das zu sehen, bilden wir zunächst eine

Hilfskategorie  $\text{Modf}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}}$ , indem wir dieselben Objekte nehmen wie bei  $\text{Modf}_{\mathbb{Z}}$  aber als Morphismenräume die Lokalisierungen

$$\text{Modf}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}}(M, N) := P^{-1} \text{Modf}_{\mathbb{Z}}(M, N)$$

nach der Menge  $P := \mathbb{Z}_{>0}$  im Sinne der kommutativen Algebra. Es ist dann leicht zu sehen, daß der offensichtliche Funktor

$$\text{Modf}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Modf}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}}$$

die universelle Eigenschaft hat, die die Lokalisierung von  $\text{Modf}_{\mathbb{Z}}$  nach der Menge  $S$  aller Morphismen  $n \text{id}_M$  für  $n > 0$  und  $M \in \text{Modf}_{\mathbb{Z}}$  charakterisiert. Andererseits ist leicht zu sehen, daß die Erweiterung der Skalare eine Äquivalenz  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} : \text{Modf}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \text{Modf}_{\mathbb{Q}}$  induziert. Daraus folgt die Behauptung.

**Satz 1.2.9.** *Besitzt ein Funktor einen volltreuen globalen Rechts- oder Linksadjungierten, so ist er ein Lokalisierungsfunktor.*

*Beispiel 1.2.10 (Erweiterung der Skalare als Lokalisierungsfunktor).* Die Erweiterung der Skalare  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} : \text{Mod}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Q}}$  ist ein Lokalisierungsfunktor, denn sie hat einen volltreuen Rechtsadjungierten, das Vergessen der Operation der nicht ganzen Skalare. Man beachte, daß auch der analog zu 1.2.8 konstruierte Funktor  $\text{Mod}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}}$  mit der dort gegebenen Argumentation ein Lokalisierungsfunktor ist, daß aber der von der Erweiterung der Skalare induzierte Funktor  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} : \text{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Q}}$  keine Äquivalenz ist.

*Beweis.* Wir behandeln nur einen der beiden Fälle, der andere folgt durch Übergang zu den opponierten Kategorien. Sei  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  volltreu und rechtsadjungiert zu  $L$ . Sei  $S$  die Klasse aller Morphismen in  $\mathcal{C}$ , die unter  $L$  Isomorphismen werden. Erklären wir eine Kategorie  $\mathcal{C}_{(S)}$ , indem wir als Objekte dieselben nehmen wie die Objekte von  $\mathcal{C}$ , als Morphismen jedoch setzen  $\mathcal{C}_{(S)}(X, Y) := \mathcal{D}(LX, LY)$  mit der offensichtlichen Verknüpfung von Morphismen, so ist der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz  $\mathcal{C}_{(S)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ , da die Koeinheit der Adjunktion für alle  $D \in \mathcal{D}$  ein Isomorphismus  $LRD \xrightarrow{\sim} D$  ist nach [TF] 4.3.9, da wir  $R$  volltreu angenommen hatten. Wenden wir diesen Isomorphismus an auf  $LX$  für  $X \in \mathcal{C}$ , so folgt mit der Dreiecksidentität [TF] 4.8.1, daß die Sequenz von kanonischen Morphismen  $LX \rightarrow LRLX \rightarrow LX$ , die man mithilfe der Adjunktion erhält, aus Isomorphismen besteht. Ist nun  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  ein Funktor, der  $S$ -Morphismen zu Isomorphismen macht, so faktorisiert er über  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{(S)}$  mittels eines Funktors  $\tilde{G} : \mathcal{C}_{(S)} \rightarrow \mathcal{E}$ , wobei wir auf den Morphismen  $\tilde{G} : \mathcal{C}_{(S)}(X, Y) \rightarrow \mathcal{E}(GX, GY)$  für  $f \in \mathcal{C}_{(S)}(X, Y) = \mathcal{D}(LX, LY)$  erklären

durch die Kommutativität des Diagramms mit Isomorphismen in den Vertikalen

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}X & \xrightarrow{\tilde{G}f} & \tilde{G}Y \\ \downarrow \wr & & \wr \downarrow \\ GRLX & \xrightarrow{GRf} & GRLY \end{array}$$

Diese Faktorisierung ist, wie man leicht sieht, auch die einzig mögliche.  $\square$

**Beispiel 1.2.11 (Garbifizierung als Lokalisierung).** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  ist die Garbifizierung  $p\text{Ens}/_X \rightarrow \text{Ens}/_X$  ein Lokalisierungsfunktor, denn sie ist linksadjungiert zum volltreuen Einbettungsfunktor. Dasselbe gilt für die Garbifizierung  $p\text{Ab}/_X \rightarrow \text{Ab}/_X$  von Prägarben abelscher Gruppen und analog für Prägarben von Ringen und dergleichen mehr. Dasselbe gilt auch für die von der Garbifizierung induzierten Funktoren  $\text{Ket}(p\text{Ab}/_X) \rightarrow \text{Ket}(\text{Ab}/_X)$  und  $\text{Hot}(p\text{Ab}/_X) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab}/_X)$ .

**Beispiel 1.2.12 (Funktoren mit einem volltreuen Adjungierten).** Funktoren mit einem volltreuen Rechtsadjungierten, die nach Satz 1.2.9 folglich Lokalisierungsfunktoren sind, sind jede Lokalisierung von Moduln über einem Ring nach einer Teilmenge des Rings oder auch die Abelisierung  $\text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$ . Ein Funktor mit einem volltreuen Linksadjungierten, der nach Satz 1.2.9 folglich auch ein Lokalisierungsfunktor ist, wäre etwa die zweite Erweiterung der Skalare  $\text{Ab} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Mod}$  gegeben durch  $M \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, M)$ . Diese zweite Erweiterung der Skalare ist durchaus verschieden von der gewöhnlichen Erweiterung der Skalare, wie etwa das Anwenden auf  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  zeigt.

**Beispiel 1.2.13 (Vervollständigung metrischer Räume als Lokalisierung).** Wir betrachten den Funktor der Vervollständigung  $Q : \text{Met} \rightarrow \text{Metv}$  von der Kategorie der metrischen Räume in die Kategorie der vollständigen metrischen Räume. Morphismen sind jeweils alle Abbildungen, die die Abstände erhalten. Unser Funktor  $Q$  der Vervollständigung hat als Rechtsadjungierten den volltreuen Einbettungsfunktor  $R : \text{Metv} \rightarrow \text{Met}$ . Das Vervollständigen metrischer Räume ist also ein Lokalisierungsfunktor.

**Beispiel 1.2.14.** Gegeben ein Köcher mit zwei Ecken und nur einem Pfeil, der seinerseits von einer Ecke zur anderen Ecke geht, erhalten wir zwei Lokalisierungsfunktoren von der Kategorie der Darstellungen unseres Köchers in die Kategorie der abelschen Gruppen, indem wir jeder Darstellung den Wert an einer festen unserer beiden Ecken zuordnen. Auch das folgt aus Satz 1.2.9 folgen, denn diese Funktoren haben einen volltreuen Links- beziehungsweise Rechtsadjungierten.

**Lemma 1.2.15.** Seien  $\mathcal{C} \supset \mathcal{C}' \supset \mathcal{C}''$  eine Kategorie mit zwei vollen Unterkategorien und sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Lokalisierungsfunktor derart, daß auch seine

Einschränkung  $F : \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{D}$  ein Lokalisierungsfunktor ist und daß es zu jedem  $X' \in \mathcal{C}'$  einen Morphismus  $X'' \rightarrow X'$  aus  $X'' \in \mathcal{C}''$  gibt, der unter  $F$  ein Isomorphismus  $FX'' \xrightarrow{\sim} FX'$  wird. So ist auch die Einschränkung  $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$  ein Lokalisierungsfunktor.

1.2.16. Dies Lemma zeigen wir, um noch reichhaltigere Beispiele für Lokalisierungsfunktoren zur Verfügung stellen zu können.

*Beweis.* Bezeichne  $S, S', S''$  die Menge aller Morphismen in  $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ , die jeweils unter  $F$  zu Isomorphismen werden. Gegeben  $X'', Y'' \in \mathcal{C}''$  ist in den Notationen des Beweises von 1.2.2 offensichtlich jeder Pfad im Köcher  $\mathcal{C}' \sqcup S'^{-1}$  von  $X''$  nach  $Y''$  äquivalent zu einem Pfad im Köcher  $\mathcal{C}'' \sqcup S''^{-1}$ . Mithin induziert der offensichtliche Funktor  $\mathcal{C}''_{S''} \rightarrow \mathcal{C}'_{S'}$  Surjektionen auf den Morphismenräumen, ist also voll. Andererseits ist nach unseren Annahmen die Verknüpfung  $\mathcal{C}''_{S''} \rightarrow \mathcal{C}'_{S'} \rightarrow \mathcal{C}_S$  eine Äquivalenz von Kategorien, folglich ist  $\mathcal{C}''_{S''} \rightarrow \mathcal{C}'_{S'}$  sogar volltreu. Daß dieser Funktor essentiell surjektiv ist, ist eh klar. Das Lemma folgt.  $\square$

*Beispiel 1.2.17 (Allgemeinere Lokalisierungsfunktoren).* Wir betrachten die Kategorie  $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\text{loke}}$  aller abelschen Gruppen  $M$  mit  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \in \text{Modf}_{\mathbb{Q}}$ . Für jede volle Unterkategorie  $\mathcal{A} \subset \text{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\text{loke}}$  mit  $\text{Modf}_{\mathbb{Z}} \subset \mathcal{A}$  ist die Erweiterung der Skalare ein Lokalisierungsfunktor

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Modf}_{\mathbb{Q}}$$

Das folgt aus Lemma 1.2.15, da die Skalarerweiterung  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}}$  auf  $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\text{loke}}$  und auf  $\text{Modf}_{\mathbb{Z}}$  jeweils ein Lokalisierungsfunktor ist nach 1.2.9 und 1.2.8.

1.2.18. Ist  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Lokalisierungsfunktor, so ist  $F$  surjektiv auf Isomorphieklassen von Objekten und jeder Morphismus in  $\mathcal{D}(FA, FB)$  läßt sich schreiben als eine Verknüpfung

$$F(g_1) \circ F(s_1)^{-1} \circ F(g_2) \circ F(s_2)^{-1} \circ \dots \circ F(g_n) \circ F(s_n)^{-1}$$

mit Morphismen  $g_i$  in  $\mathcal{C}$  und  $s_i \in S$ . Das folgt unmittelbar aus unseren Konstruktionen und Definitionen.

1.2.19. Wir nennen einen Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  **voll dicht**, wenn für jede weitere Kategorie  $\mathcal{C}$  das Vorschalten von  $F$  auf den Funktorkategorien einen volltreuen Funktor  $\mathcal{C}^{\mathcal{B}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$  liefert.

*Beispiele 1.2.20.* Jede Äquivalenz von Kategorien ist voll dicht. Ist ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  bijektiv auf Objekten und läßt sich jeder Morphismus in  $\mathcal{B}$  darstellen als Verknüpfung von Bildern von Morphismen aus  $\mathcal{A}$  und Inversen derartiger Bilder, so ist  $F$  voll dicht. Das folgt ohne größere Schwierigkeiten daraus, daß ein quadratisches Diagramm mit Isomorphismen in den Horizontalen kommutiert genau dann, wenn es kommutiert nach Ersetzen der Horizontalen durch ihre Inversen. Insbesondere ist nach 1.2.18 **jeder Lokalisierungsfunktor voll dicht**.

**Beispiel 1.2.21 (Fall der Ein-Objekt-Kategorien).** Ein Morphismus von Monoiden  $G \rightarrow H$  liefert einen volllichten Funtor auf den zugehörigen Ein-Objekt-Kategorien  $[G] \rightarrow [H]$ , wenn  $H$  erzeugt wird von den Bildern der Elemente von  $G$  und den Inversen der Bilder der Elemente von  $G$  mit invertierbarem Bild. Nun haben wir einen natürlichen Isomorphismus von Kategorien  $G\text{-Ens} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}^{[G]}$ . Spezialisieren wir  $\mathcal{C}$  aus 1.2.20 zu  $\text{Ens}$ , so besagt das insbesondere, daß unter den gegebenen Annahmen die Restriktion ein volltreuer Funtor  $H\text{-Ens} \xrightarrow{\sim} G\text{-Ens}$  ist. Das scheint mir auch ohne die vorhergehenden Überlegungen unmittelbar einsehbar.

### 1.2.1 Übungen

*Übung 1.2.22.* Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  und darin ein System von Morphismen  $S$  ist der von  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  induzierte Funtor  $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow (\mathcal{C}_S)^{\text{opp}}$  eine Lokalisierung von  $\mathcal{C}^{\text{opp}}$  an  $S^{\text{opp}}$ . Gegeben zwei Kategorien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  und darin Systeme von Morphismen  $S, T$  ist das Produkt der Lokalisierungsfunktoren  $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_S \times \mathcal{D}_T$  eine Lokalisierung der Produktkategorie an  $S \times T$ . Die Verknüpfung von zwei Lokalisierungen ist auch selbst wieder eine Lokalisierung.

*Übung 1.2.23.* Jeder Lokalisierungsfuntor ist auch als Funtor zwischen den zugehörigen opponierten Kategorien ein Lokalisierungsfuntor. Gegeben zwei Lokalisierungsfunktoren  $F : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  und  $G : \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$  ist auch ihr Produkt  $(F \times G) : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{B}}$  ein Lokalisierungsfuntor. Die Verknüpfung von zwei Lokalisierungsfunktoren ist auch selbst wieder ein Lokalisierungsfuntor.

## 1.3 Lokalisierung und Entfaltung

**1.3.1 (Entfaltete Objekte).** Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funtor. Ein Objekt  $I \in \mathcal{A}$  nennen wir **rechtsentfaltet für  $F$**  oder  **$F$ -rechtsentfaltet**, wenn der Funtor  $F$  für alle  $X \in \mathcal{A}$  eine Bijektion

$$\mathcal{A}(X, I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FX, FI)$$

induziert. Das ist gleichbedeutend zu der Forderung, daß der partielle Rechtsadjungierte  $R$  von  $F$  bei  $FI$  existiert und  $\text{id}_{FI}$  unter der Adjunktion einem Isomorphismus  $I \xrightarrow{\sim} RFI$  entspricht. Opponiert werden **linksentfaltete Objekte** erklärt.

**Beispiel 1.3.2 (Vervollständigung metrischer Räume).** Wir betrachten den Funtor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  der Vervollständigung 1.2.13 von der Kategorie der metrischen Räume in die Kategorie der vollständigen metrischen Räume, jeweils mit Isometrien als Morphismen. In diesem Fall sind genau die vollständigen Räume rechtsentfaltet.

*Beispiel 1.3.3 (Vervollständigung abzählbarer metrischer Räume).* Wir betrachten den Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  der Vervollständigung 1.2.13 von der Kategorie der abzählbaren metrischen Räume in die Kategorie der vollständigen metrischen Räume, jeweils mit Isometrien als Morphismen. In diesem Fall sind genau die vollständigen abzählbaren metrischen Räume rechtsentfaltet.

*Beispiel 1.3.4 (Erweiterung der Skalare).* Für den Funktor  $F : \text{Ab} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Mod}$  der Erweiterung der Skalare gegeben durch  $M \mapsto \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$  sind alle abelschen Gruppen, die bereits  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume sind, rechtsentfaltet.

1.3.5 (**Entfaltungen**). Gegeben ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  verstehen wir unter einer  **$F$ -Rechtsentfaltung** eines Objekts  $Y \in \mathcal{A}$  einen Morphismus  $Y \rightarrow I$  von  $Y$  zu einem rechtsentfalteten Objekt  $I$ , der unter  $F$  ein Isomorphismus wird. Gegeben Rechtsentfaltungen  $Y \rightarrow I$  und  $Z \rightarrow J$  und ein Morphismus  $Y \rightarrow Z$  gibt es genau einen Morphismus  $I \rightarrow J$ , der ein kommutatives Quadrat entstehen läßt. In der Tat ist ja der induzierte Morphismus  $FI \rightarrow FJ$  offensichtlich eindeutig bestimmt. Insbesondere ist eine  $F$ -Rechtsentfaltung von  $Y$ , wenn sie denn existiert, als Objekt von  $\mathcal{A}^Y$  eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Opponiert gilt Analoges für **Linksentfaltungen**.

*Beispiele 1.3.6.* Für den Funktor der Vervollständigung metrischer Räume ist eine Entfaltung eine isometrische Einbettung mit dichtem Bild in einen vollständigen metrischen Raum. Für den Funktor der Vervollständigung abzählbarer metrischer Räume 1.3.3 besitzen nur diejenigen abzählbaren metrischen Räume eine Rechtsentfaltung, deren Vervollständigung auch abzählbar ist. Für den Funktor der Erweiterung der Skalare von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Q}$  ist eine Entfaltung ein Gruppenhomomorphismus zu einem  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, dessen Kern aus allen Torsionselementen besteht und dessen Bild unseren  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum erzeugt.

1.3.7. Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  mit einer ausgezeichneten Menge  $S$  von Morphismen nennen wir ein Objekt  $B \in \mathcal{C}$  **rechtsentfaltet für  $S$**  oder  **$S$ -rechtsentfaltet**, wenn für alle  $X \in \mathcal{C}$  die natürliche Abbildung eine Bijektion

$$\mathcal{C}(X, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX, QB)$$

ist, wenn  $B$  also  $Q$ -rechtsentfaltet ist in Bezug auf den Lokalisierungsfunktor  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  im Sinne von 1.3.1. Wie bereits in 1.3.1 erwähnt ist das gleichbedeutend dazu, daß der Rechtsadjungierte  $R$  zu  $Q$  bei  $QB$  definiert ist und die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $B \xrightarrow{\sim} RQB$ . Weiter nennen wir einen Morphismus  $Y \rightarrow B$  eine  **$S$ -Rechtsentfaltung**, wenn er unter  $Q$  ein Isomorphismus  $QY \xrightarrow{\sim} QB$  wird und  $B$  rechtsentfaltet ist. Nach 1.3.5 ist eine  $S$ -Rechtsentfaltung von  $Y$  eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus als Objekt von  $\mathcal{C}^Y$ , wenn sie existiert. Opponiert verwenden wir analog **linksentfaltet** und **Linksentfaltung**.

*Beispiel 1.3.8.* Für den Funktor  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} : \text{Mod}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Q}}$  sind genau diejenigen abelschen Gruppen rechtsentfaltet, die bereits  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume sind. Ebenso sind für den Funktor

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Modf}_{\mathbb{Q}}$$

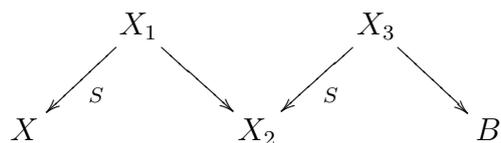
von einer Kategorie  $\mathcal{A}$  von abelschen Gruppen mit  $\text{Modf}_{\mathbb{Z}} \subset \mathcal{A} \subset \text{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\text{loke}}$  wie in 1.2.17 genau diejenigen abelschen Gruppen aus  $\mathcal{A}$  rechtsentfaltet, die bereits  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume sind. Das sind mithin auch genau die  $S$ -rechtsentfalteten Objekte für  $S$  die Menge aller Morphismen, die unter  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}}$  zu Isomorphismen werden.

**Satz 1.3.9 (Entfaltung und Adjunktion bei Lokalisierungen).** *Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $S$  eine Menge von Morphismen in  $\mathcal{C}$  und  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  die Lokalisierung.*

1. *Ein Objekt  $B \in \mathcal{C}$  ist  $S$ -rechtsentfaltet genau dann, wenn der zugehörige Funktor  $\hat{B} = \mathcal{C}(\_, B) : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ens}$  alle  $S$ -Morphismen zu Bijektionen macht;*
2. *Besitzt für  $D \in \mathcal{C}_S$  der Lokalisierungsfunktor  $Q$  einen partiellen Rechtsadjungierten  $R$  bei  $D$ , so ist  $RD$  rechtsentfaltet und die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $QRD \xrightarrow{\sim} D$ ;*
3. *Besitzt für  $Y \in \mathcal{C}$  der Lokalisierungsfunktor  $Q$  einen partiellen Rechtsadjungierten  $R$  bei  $QY$ , so ist die Einheit der Adjunktion eine Rechtsentfaltung  $Y \rightarrow RQY$ ;*
4. *Genau dann besitzt  $Q$  einen globalen Rechtsadjungierten, wenn jedes Objekt  $Y \in \mathcal{C}$  eine  $S$ -Rechtsentfaltung besitzt;*
5. *Jeder partielle Rechtsadjungierte eines Lokalisierungsfunktors volltreu.*

1.3.10. Die in unserem Satz speziell für  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  formulierten Aussagen folgen unmittelbar für jeden Lokalisierungsfunktor. Alles geht opponiert genauso. Das Beispiel 1.2.17 mag instruktiv sein.

1.3.11. Ich deute an, wie die Umkehrabbildung  $\mathcal{C}_S(QX, QB) \rightarrow \mathcal{C}(X, B)$  so ungefähr konstruiert werden kann. Ein Morphismus links wird repräsentiert durch ein Zick-Zack-Diagramm wie etwa



mit  $S$ -Morphismen als Pfeilen nach links. Anwenden von  $\mathcal{C}(\_, B)$  macht daraus ein ein Zick-Zack-Diagramm wie etwa

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}(X_1, B) & & \mathcal{C}(X_3, B) & & \\ & \nearrow \sim & & \nwarrow & \nearrow \sim & & \\ \mathcal{C}(X, B) & & & & & & \mathcal{C}(B, B) \\ & \nwarrow & & \swarrow & \nwarrow & & \\ & & \mathcal{C}(X_2, B) & & & & \end{array}$$

mit Bijektionen als Pfeilen nach rechts. Das Bild der Identität auf  $B$  unter der Komposition von rechts nach links ist der gesuchte Morphismus in  $\mathcal{C}(X, B)$ . Nun muß gezeigt werden, daß er von der Darstellung des Ausgangsmorphismus als Zick-Zack-Diagramm unabhängig ist. Das kann man direkt angehen, wir nehmen aber im folgenden Beweis einen anderen Weg.

*Beweis.* 1. Daß rechtsentfaltete Objekte die behauptete Eigenschaft haben, ist klar. Umgekehrt gilt es zu zeigen, daß für  $B$  mit der besagten Eigenschaft die Transformation

$$\eta : \hat{B} \Rightarrow (QB)^\wedge \circ Q$$

von Funktoren  $(\mathcal{C}_S)^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ens}$  gegeben nach dem Yonedalemma durch  $\eta_B(\text{id}_B) = \text{id}_{QB}$  eine Isotransformation ist. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung gibt es genau einen Funktor  $\tilde{B} : (\mathcal{C}_S)^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ens}$  mit  $\tilde{B} \circ Q = \hat{B}$  und wir erhalten eine eindeutig bestimmte Transformation

$$\eta : \tilde{B} \circ Q \Rightarrow (QB)^\wedge \circ Q$$

mit  $\eta_B(\text{id}_B) = \text{id}_{QB}$ . Da  $Q$  als Lokalisierungsfunktor volllicht ist nach 1.2.20, gibt es mithin genau eine Transformation

$$\hat{\eta} : \tilde{B} \Rightarrow (QB)^\wedge$$

mit  $\hat{\eta}Q = \eta$  alias  $\hat{\eta}_{QB}(\text{id}_B) = (\hat{\eta}Q)_B(\text{id}_B) = \eta_B(\text{id}_B) = \text{id}_{QB}$ . Umgekehrt gibt es nach dem Yonedalemma auch genau eine Transformation

$$\tau : (QB)^\wedge \Rightarrow \tilde{B}$$

mit  $\tau_{QB}(\text{id}_{QB}) = \text{id}_B$ . Wegen  $(\hat{\eta} \circ \tau)_{QB}(\text{id}_{QB}) = \text{id}_{QB}$  folgt mit dem Yonedalemma  $\hat{\eta} \circ \tau = \text{id}$  und a fortiori  $\eta \circ \tau Q = \hat{\eta}Q \circ \tau Q = \text{id}$ . Umgekehrt finden wir aber auch  $(\tau Q \circ \eta)_B(\text{id}_B) = (\tau Q)_B(\text{id}_{QB}) = \tau_{QB}(\text{id}_{QB}) = \text{id}_B$  und so wieder nach dem Yonedalemma  $\tau Q \circ \eta = \text{id}$ . Damit sind  $\tau Q$  und  $\eta$  zueinander inverse Isotransformationen.

2. Sicher liefert jeder  $S$ -Morphismus  $X \rightarrow Y$  einen Isomorphismus  $QX \xrightarrow{\sim} QY$  und dann auch eine Bijektion  $\mathcal{C}_S(QY, D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX, D)$  und schließlich eine Bijektion  $\mathcal{C}(Y, RD) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, RD)$ . Damit zeigt Teil 1, daß  $RD$  rechtsentfaltet sein

muß. Insbesondere induziert der Lokalisierungsfunktor  $Q$  für unser  $D \in \mathcal{C}_S$  und alle  $X \in \mathcal{C}$  Isomorphismen  $\mathcal{C}(X, RD) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX, QRD)$ . Da jedes Objekt in  $\mathcal{C}_S$  von einem Objekt  $X \in \mathcal{C}$  herkommt, ist damit die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $QRD \xrightarrow{\sim} D$  in  $\mathcal{C}_S$ .

3. Nach der partiellen Dreiecksidentität [TF] 4.8.12 ist die Verknüpfung der natürlichen Morphismen  $QY \rightarrow QRQY \rightarrow QY$  die Identität. Nach Teil 2 steht hinten ein Isomorphismus. Also muß auch hinten ein Isomorphismus stehen und nach Teil 2 ist  $RQY$  rechtsentfaltet.

4. Besitzt  $Q$  einen globalen Rechtsadjungierten  $R$ , so besitzt nach Teil 3 jedes Objekt  $Y$  eine Rechtsentfaltung  $Y \rightarrow RQY$ . Besitzt umgekehrt jedes Objekt  $Y$  eine Rechtsentfaltung  $Y \rightarrow B$ , so gilt  $QY \xrightarrow{\sim} QB$  und nach 1.3.7 ist der partielle Rechtsadjungierte  $R$  zu  $Q$  bei  $QB$  definiert. Da zusätzlich  $Q$  essentiell surjektiv, ja sogar surjektiv ist auf Objekten, ist damit der partielle Rechtsadjungierte  $R$  zu  $Q$  global definiert;

5. Das folgt mit einer Variante von [TF] 4.3.9 für partielle Adjungierte aus den Erkenntnissen in Teil 2.  $\square$

*Vorschau* 1.3.12. Gegeben Kategorien  $\mathcal{I}, \mathcal{C}$  und eine Menge von Morphismen  $S$  von  $\mathcal{C}$  können wir eine Menge  $S(\mathcal{I})$  von Morphismen in der Funktorkategorie  $\text{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  erklären als diejenigen Transformationen  $\tau$  mit  $\tau_i \in S$  für alle  $i \in \mathcal{I}$ . Der Funktor des konstanten Systems  $\text{const} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  induziert dann einen Funktor auf den Lokalisierungen

$$\text{konst} : \mathcal{C}_S \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})_{S(\mathcal{I})}$$

Der linksadjungierte Funktor dazu hinwiederum heißt der **Homotopiekolimes** und wird  $\text{hocol}$  notiert. In diesem Fall ist, anders als bei normalen Kolimites, auch die Struktur von  $\mathcal{I}$  als Kategorie und nicht nur der zugrundeliegende Köcher relevant.

## Übungen

*Übung* 1.3.13 (**Entfaltung und Spaltung**). Gegeben  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor und  $I$  ein  $F$ -rechtsentfaltetes Objekt und  $f : I \rightarrow C$  ein Morphismus, der unter  $F$  ein Isomorphismus wird, gibt es stets einen Morphismus  $g : C \rightarrow I$  mit  $gf = \text{id}_I$ .

*Übung* 1.3.14 (**Kolimites und Lokalisierung**). Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  eine Menge von Morphismen von  $\mathcal{C}$  und  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  der Lokalisierungsfunktor. Ist jedes Objekt von  $\mathcal{C}$  rechtsentfaltbar für  $S$ , so besitzt  $Q$  nach 1.3.9 einen globalen Rechtsadjungierten und vertauscht nach [TS] 7.1.30 mit Kolimites. Opponiertes gilt für Limites.

**Übung 1.3.15 (Limites rechtsentfalteter Objekte).** Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein essentiell surjektiver Funktor. Landet eine Köcherdarstellung  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$  in den  $F$ -rechtsentfalteten Objekten von  $\mathcal{A}$  und existiert ihr Limes und ist selbst wieder  $F$ -rechtsenfaltet, so besitzt auch  $FD : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$  einen Limes und der offensichtliche Morphismus ist ein Isomorphismus

$$F \left( \lim_{i \in \mathcal{I}} D_i \right) \xrightarrow{\sim} \lim_{i \in \mathcal{I}} (FD_i)$$

**Übung 1.3.16 (Limites rechtsentfalteter Objekte in Lokalisierungen).** Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  eine Menge von Morphismen. Landet eine Köcherdarstellung  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  in den  $S$ -rechtsentfalteten Objekten von  $\mathcal{C}$  und existiert ihr Limes und ist selbst wieder  $S$ -rechtsenfaltet, so besitzt auch  $QD : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}_S$  einen Limes und der offensichtliche Morphismus ist ein Isomorphismus

$$Q \left( \lim_{i \in \mathcal{I}} D_i \right) \xrightarrow{\sim} \lim_{i \in \mathcal{I}} (QD_i)$$

Das ist nur eine offensichtliche Spezialisierung von 1.3.15.

## 1.4 Lokalisierung unter Orebedingungen

1.4.1. Mit zusätzlichen Bedingungen an das System der zu invertierenden Morphismen erhält man feinere Aussagen über die Lokalisierung, wie wir im folgenden ausführen.

**Definition 1.4.2.** Eine Menge von Morphismen einer Kategorie heißt **multiplikativ** oder ein **multiplikatives System**, wenn sie stabil ist unter Verknüpfung und alle Identitäten enthält.

**Definition 1.4.3.** Eine Menge  $S$  von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt ein **Rechts-Ore-System**, wenn sie multiplikativ ist und zusätzlich die beiden folgenden Eigenschaften hat:

1. Gegeben  $X \xleftarrow{s} C \xrightarrow{g} Y$  mit  $s \in S$  gibt es  $X \xrightarrow{h} D \xleftarrow{t} Y$  mit  $t \in S$  und  $hs = tg$ ;
2. Gegeben  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  und  $s \in S$  mit  $fs = gs$  gibt es  $t \in S$  mit  $tf = tg$ .

Ein Diagramm der Gestalt  $X \xrightarrow{h} D \xleftarrow{t} Y$  mit  $t \in S$  interpretieren wir als Morphismus  $t^{-1}h : X \rightarrow Y$  und nennen es einen **Rechtsbruch**, weil der Zähler eben rechts steht.

1.4.4. Eine Menge  $S$  von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt ein **Links-Ore-System**, wenn sie ein Rechts-Ore-System in der opponierten Kategorie ist. Ein **Ore-System** in einer Kategorie ist ein Menge von Morphismen, die Rechts-Ore und Links-Ore ist.

*Ergänzung* 1.4.5. Ist unsere Kategorie eine Ein-Objekt-Kategorie mit additiver Struktur, so sind diese Bedingungen die bei der Lokalisierung nichtkommutativer Ringe üblichen **Ore-Bedingungen**.

**Lemma 1.4.6.** *Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  mit einem Rechtsoresystem  $S$  und ein Objekt  $X \in \mathcal{C}$  bilden die von  $X$  ausgehenden  $S$ -Morphismen mit ihrer Struktur als volle Unterkategorie von  $\mathcal{C}^X$  eine filtrierende Kategorie  $S^X$ .*

*Beweis.* Gegeben Objekte  $i, j \in S^X$  gilt es zunächst, ein weiteres Objekt  $k$  zu finden mit Morphismen  $\alpha : i \rightarrow k$  und  $\beta : j \rightarrow k$ . Gegeben  $S$ -Morphismen  $i : X \rightarrow D_i$  und  $j : X \rightarrow D_j$  gilt es also, einen  $S$ -Morphismus  $k : X \rightarrow D_k$  zu finden und  $\mathcal{C}$ -Morphismen  $\alpha : D_i \rightarrow D_k$  mit  $\alpha \circ i = k$  sowie  $\beta : D_j \rightarrow D_k$  mit  $\beta \circ j = k$ . Das gelingt mühelos mit der ersten Orebedingung. Gegeben Objekte  $i, j \in S^X$  und Morphismen  $\phi, \psi : i \rightarrow j$  gilt es weiter, ein Objekt  $k$  und einen Morphismus  $\zeta : j \rightarrow k$  zu finden mit  $\zeta \phi = \zeta \psi$ . Gegeben  $\mathcal{C}$ -Morphismen  $\phi, \psi : D_i \rightarrow D_j$  mit  $\phi \circ i = j = \psi \circ i$  gilt es also, einen  $S$ -Morphismus  $k : X \rightarrow D_k$  und einen  $\mathcal{C}$ -Morphismus  $\zeta : D_j \rightarrow D_k$  zu finden mit  $\zeta \circ j = k$  und  $\zeta \circ \phi = \zeta \circ \psi$ . Das gelingt mühelos mit der zweiten Orebedingung. Daß schließlich  $S^X$  nicht leer ist, folgt aus  $\text{id}_X \in S$ .  $\square$

1.4.7. Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Wir betrachten für  $X, Y \in \mathcal{C}$  die Menge  $\mathcal{B}(X, Y)$  aller Diagramme  $D = (f, D, s)$  der Gestalt

$$X \xrightarrow{f} D \xleftarrow{s} Y$$

mit  $s \in S$  und nennen derartige Diagramme **Brüche** oder genauer **Rechtsbrüche von  $X$  nach  $Y$** . Wir sagen, ein Bruch  $(f, D, s)$  gehe hervor aus einem weiteren Bruch  $(f', D', s') \in \mathcal{B}(X, Y)$  durch **Kürzen**, wenn es einen Morphismus  $h : D \rightarrow D'$  gibt mit  $s' = hs$  und  $f' = hf$ . Wir fordern dabei nicht  $h \in S$  und notieren diese Aussage

$$D \dashrightarrow D'$$

Bezeichne  $\bar{\mathcal{B}}(X, Y)$  die Menge aller Äquivalenzklassen von Brüchen von  $X$  nach  $Y$  unter der Äquivalenzrelation, die gegeben wird durch die Vorschrift, daß gilt  $(f, D, s) \sim (f', D', s')$  genau dann, wenn es einen weiteren Bruch  $(f'', D'', s'')$  gibt mit  $D' \dashrightarrow D'' \dashleftarrow D$ . Bezeichne  $[f, D, s]$  die Äquivalenzklasse des Bruches  $(f, D, s)$ . Per definitionem haben wir dann

$$\bar{\mathcal{B}}(X, Y) = \text{colf}_{Y \xrightarrow{S} D} \mathcal{C}(X, D)$$

mit dem Kolimes über die Kategorie  $S^Y$  aller von  $Y$  ausgehenden  $S$ -Morphismen, aufgefaßt als volle Unterkategorie von  $\mathcal{C}^Y$ , oder genauer mit dem Kolimes des Funktors  $S^Y \rightarrow \text{Ens}$ ,  $(Y \rightarrow D) \mapsto \mathcal{C}(X, D)$ .

1.4.8. Ich komme mit Rechts und Links in diesem Zusammenhang leicht durcheinander. Als Eselsbrücke mag man sich einen Rechtsbruch als eine Komposition der Form  $s^{-1} \circ f$  denken, bei der der Zähler eben rechts steht. Der erste Teil der Rechtsorebedingung sagt dann, salopp gesprochen, daß man jeden Linksbruch zu einem Rechtsbruch umschreiben kann. Der zweite Teil der Rechtsorebedingung besagt, ebenso salopp gesprochen, daß zwei Brüche mit einer Eins im Nenner, die durch Erweiterung zu einem Linksbruch gleich gemacht werden können, auch durch Erweiterung zu einem Rechtsbruch gleich gemacht werden können.

1.4.9 (**Bezug zur Lokalisierung von Kringsen**). Bei der Lokalisierung eines kommutativen Rings  $R$  nach einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge  $S$  definiert man die Äquivalenzrelation auf Brüchen meist durch die Bedingung, daß unsere Brüche gleich gemacht werden können, wenn wir sie beide mit jeweils einem Element von  $S$  erweitern. Unsere Äquivalenzrelation hier würde vielmehr bedeuten, daß sie gleich gemacht werden können, wenn wir sie beide mit jeweils einem Element von  $R$  erweitern unter der Maßgabe, daß dabei die Nenner in  $S$  bleiben müssen. Man überlegt sich jedoch unschwer, daß diese beiden Äquivalenzrelationen im Fall kommutativer Ringe übereinstimmen.

**Proposition 1.4.10 (Kategorien von Brüchen als Lokalisierung).** *Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  und ein Rechtsoresystem  $S$  von Morphismen von  $\mathcal{C}$  liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion*

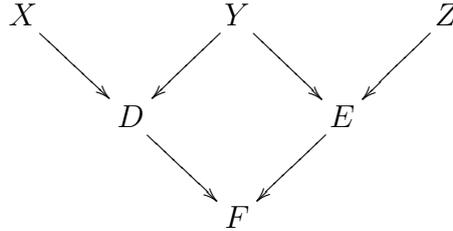
$$\bar{\mathcal{B}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(X, Y)$$

*zwischen der Menge der Äquivalenzklassen von Rechtsbrüchen und der Menge der Morphismen in der lokalisierten Kategorie.*

*Vorschau 1.4.11.* Für Leser, die bereits die Kategorie der „Ind-Objekte“ einer vorgegebenen Kategorie 3.1.12 kennen, sei bemerkt, daß die ersten Zeilen des folgenden Beweises eine Bijektion zwischen  $\bar{\mathcal{B}}(X, Y)$  und der Menge der Morphismen vom Ind-Objekt der von  $X$  ausgehenden  $S$ -Morphismen zum Ind-Objekt der von  $Y$  ausgehenden  $S$ -Morphismen liefert. In diesem Rahmen ist es dann offensichtlich, wie wir Äquivalenzklassen von Brüchen zu verknüpfen haben und daß wir so eine Kategorie erhalten, genauer eine volle Unterkategorie der Kategorie der Ind-Objekte.

*Beweis.* Zunächst überlegen wir uns, daß das Vorschalten eines  $S$ -Morphismus  $Y \rightarrow D$  eine Bijektion  $\bar{\mathcal{B}}(D, Z) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{B}}(Y, Z)$  induzieren muß. Die Surjektivität

dieser Abbildung folgt leicht aus der ersten Orebedingung, die es salopp gesprochen erlaubt, jeden Linksbruch zu einem Rechtsbruch umzuschreiben. Die Injektivität folgt ebenso leicht aus der zweiten Orebedingung. Dann erklären wir eine Verknüpfung  $\bar{\mathcal{B}}(X, Y) \times \bar{\mathcal{B}}(Y, Z) \rightarrow \bar{\mathcal{B}}(X, Z)$  dadurch, daß  $([f, D, s], (g, E, t))$  abgebildet wird auf die Äquivalenzklasse eines Bruches der Gestalt



mit  $E \rightarrow F$  aus  $S$  und kommutierendem schiefen Quadrat. Die so gebildete Äquivalenzklasse ist unabhängig von der Wahl von  $F$  und  $E$ , denn wir können sie auch dadurch beschreiben, daß wir unserem  $[g, E, t]$  erst sein Urbild in  $\bar{\mathcal{B}}(D, Z)$  zuordnen und dann dessen Bild unter dem Vorschalten von  $X \rightarrow D$  nehmen. Des weiteren erhalten wir dieselbe Äquivalenzklasse, wenn wir  $(f, D, s)$  durch einen gekürzten Bruch  $(f', D', s')$  ersetzen, denn das Vorschalten von  $X \rightarrow D'$  liefert auch eine Bijektion  $\bar{\mathcal{B}}(D', Z) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{B}}(Y, Z)$  und damit liefert das Vorschalten von  $D' \rightarrow D$  eine Bijektion  $\bar{\mathcal{B}}(D, Z) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{B}}(D', Z)$ . Unsere Verknüpfung induziert mithin eine Verknüpfung  $\bar{\mathcal{B}}(X, Y) \times \bar{\mathcal{B}}(Y, Z) \rightarrow \bar{\mathcal{B}}(X, Z)$ . Nun zeigen wir, daß die Objekte von  $\mathcal{C}$  mit den Morphismenmengen  $\bar{\mathcal{B}}(X, Y)$  und der eben eingeführten Verknüpfung eine Kategorie bilden. Die Identitätsmorphisme sind hier unproblematisch, und die Assoziativität der Verknüpfung scheint mir auch recht offensichtlich durch Rechnen mit Repräsentanten. Aus der Konstruktion wird jedoch zusätzlich klar, daß für die eben konstruierte Kategorie  $\bar{\mathcal{B}}$  der Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$ , der die Identität ist auf Objekten und jeden Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  auf die Äquivalenzklasse  $[f, X, \text{id}_X]$  abbildet, dieselbe universelle Eigenschaft hat wie unsere Lokalisierung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ .  $\square$

**1.4.12 (Morphismen in einer Orelokalisierung).** Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Linksoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . In der Terminologie aus [TS] 7.1.14 liefert nach 1.4.10 die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\text{colf } \mathcal{C}(D, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX, QY)$$

mit dem filtrierenden Kolimes über das System  $S_X$  aller  $S$ -Morphismen  $s : D \rightarrow X$  nach  $X$  oder genauer über die filtrierende Kategorie  $S_X^{\text{opp}}$ .

**1.4.13 (Morphismen in einer Orelokalisierung).** Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Linksoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . In der Terminologie aus [TS] 7.1.14

liefert nach 1.4.12 die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\text{colf } \mathcal{C}(D, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX, QY)$$

mit dem filtrierenden Kolimes über das System  $S_X^{\text{opp}}$  aller  $S$ -Morphismen  $s : D \rightarrow X$  in das Objekt  $X$ . Ist hier  $S$  ein Oresystem, so erhalten wir sogar ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}_S(QX, QY) & \\ \nearrow \sim & & \nwarrow \sim \\ \text{colf } \mathcal{C}(D, Y) & & \text{colf } \mathcal{C}(X, C) \\ \nwarrow \sim & & \nearrow \sim \\ & \text{colf } \mathcal{C}(D, C) & \end{array}$$

mit den filtrierenden Kolimites über das System aller  $S$ -Morphismen  $s : D \rightarrow X$  in das Objekt  $X$ , das System aller  $S$ -Morphismen  $s : Y \rightarrow C$  aus dem Objekt  $Y$  und das System aller Paare derartiger Morphismen. Um das zu sehen, verwendet man die Transitivität von Kolimites [TS] 7.1.34 zusammen mit der Erkenntnis, daß der zweite Kolimes auf dem Weg nach unten jeweils über ein konstantes System gebildet wird.

**Satz 1.4.14.** *Gegeben ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  mit einem volltreuen Rechtsadjungierten ist das System  $S$  der Morphismen in  $\mathcal{C}$ , die unter  $F$  zu Isomorphismen werden, ein Rechtsoresystem.*

1.4.15. Man mag sich als  $F$  den Funktor der Vervollständigung von der Kategorie der metrischen Räume in die Kategorie der vollständigen metrischen Räume denken. In diesem Fall ist  $S$  die Menge aller Isometrien mit dichtem Bild.

*Beweis.* Nach 1.3.9 hat jedes Objekt von  $\mathcal{C}$  eine  $F$ -Rechtsentfaltung. In unserem Beispielfall wäre so eine Rechtsentfaltung eine Isometrie mit dichtem Bild in einen vollständigen metrischen Raum. Gegeben die durchgezogenen Pfeile im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

mit  $s \in S$  finden wir  $D$  und die gestrichelten Pfeile mit  $t \in S$ , indem wir für  $t : Y \rightarrow D$  eine Rechtsentfaltung von  $Y$  nehmen. Morphismen nach  $D$  sind dann dieselben in  $\mathcal{C}$  und in  $\mathcal{C}_S$  und in  $\mathcal{C}_S$  finden wir offensichtlich ein  $g$ , daß unser Diagramm zum Kommutieren bringt. Das zeigt die erste Orebedingung, jeder Linksbruch läßt sich zu einem Rechtsbruch umschreiben. Gegeben  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  und

$s \in S$  mit  $fs = gs$  gilt weiter für jede Rechtsentfaltung  $t : Y \rightarrow D$  bereits  $tf = tg$ . In der Tat gilt offensichtlich

$$fs = gs \Rightarrow Q(fs) = Q(gs) \Rightarrow Q(f) = Q(g) \Rightarrow Q(tf) = Q(tg) \Rightarrow tf = tg$$

mit dem letzten Schritt, da Morphismen nach  $D$  dieselben sind in  $\mathcal{C}$  und in  $\mathcal{C}_S$ . Das zeigt die zweite Orebedingung.  $\square$

**Definition 1.4.16.** Ein multiplikatives System  $S$  von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **gesättigt**, wenn für einen beliebigen Morphismus  $f$  gilt: Gibt es Morphismen  $g, h$  mit  $fg \in S$  und  $hf \in S$ , so folgt  $f \in S$ .

1.4.17. Der Begriff eines gesättigten Oresystems scheint mir für die Diskussion triangulierter Kategorien praktisch. Für einzelne der im folgenden diskutierten Konsequenzen dieser Eigenschaft sind jedoch auch schwächere Bedingungen ausreichend.

*Beispiel* 1.4.18. Das System aller Isomorphismen einer Kategorie ist gesättigt. Das Urbild eines gesättigten multiplikativen Systems unter einem Funktor ist stets wieder ein gesättigtes multiplikatives System.

**Lemma 1.4.19.** *Gegeben ein gesättigtes Oresystem  $S$  von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist  $S$  genau die Menge aller Morphismen von  $\mathcal{C}$ , die unter dem Lokalisierungsfunktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  Isomorphismen werden.*

*Beweis.* Gibt es für den Rechtsbruch  $\text{id}^{-1}f$  einen Rechtsbruch  $s^{-1}a$  mit der Eigenschaft  $s^{-1}a \text{id}^{-1}f = \text{id}$  in der Kategorie der Rechtsbrüche  $\bar{\mathcal{B}}$ , so gibt es  $b$  mit  $ba f = bs$  und  $bs \in S$ , also  $(ba)f \in S$ . Argumentiert man analog mit Linksbrüchen, so erkennt man, daß für jedes  $f$ , das in der Lokalisierung ein Isomorphismus wird, mit unserer Sättigungsbedingung 1.4.16 bereits  $f \in S$  folgt.  $\square$

1.4.20. Lemma 1.4.19 impliziert insbesondere, daß jedes gesättigte Oresystem  $S$  die **Zwei-aus-Drei-Eigenschaft** hat: Sind Morphismen  $f, g, h$  gegeben mit  $fg = h$  und gehören zwei der drei Morphismen  $f, g, h$  zu  $S$ , so auch der Dritte.

**Satz 1.4.21 (Orelokalisierung und volltreue Einbettungen).** *Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit einem Rechtsoresystem  $S$ . Ist  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  eine volle Unterkategorie und  $S' \subset S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}'$  mit der Eigenschaft, daß es für alle  $s \in S$ , die von einem Objekt von  $\mathcal{C}'$  ausgehen, einen Morphismus  $h$  in  $\mathcal{C}$  gibt mit  $h \circ s \in S'$ , so ist der offensichtliche Funktor ein volltreuer Funktor*

$$\mathcal{C}'_{S'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S$$

*Beweis.* Das erkennt man sofort an der Realisierung 1.4.10 der lokalisierten Kategorie als Kategorie von Brüchen. Formal kommt es von unserer Erkenntnis her, daß filtrierende Kolimites sich nicht ändern, wenn wir zu einem konfinalen Teilsystem übergehen.  $\square$

1.4.22. Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit einem Rechtssoresystem von Morphismen  $S$ , so lassen sich zwei Brüche  $(f, E, r) \in \mathcal{B}(X, Y)$  und  $(g, F, t) \in \mathcal{B}(W, Y)$  stets **auf einen Hauptnenner bringen**. Das folgt aus der Filtrierungseigenschaft 1.4.6 von  $S^Y$ , nach der wir Morphismen von Objekten  $a : E \rightarrow D, b : F \rightarrow D$  so finden, daß gilt  $ar = bt \in S$ . Nennen wir diesen Morphismus  $s : Y \rightarrow D$ , so entstehen unsere beiden Brüche durch Kürzen aus Brüchen der Gestalt  $(f', D, s)$  und  $(g', D, s)$ .

1.4.23 (**Übertragung additiver Strukturen auf Orelokalisierungen**). Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechtssoresystem. Gegeben eine additive Struktur auf  $\mathcal{C}$  im Sinne von [TG] 2.5.1 gibt es genau eine additive Struktur auf  $\mathcal{C}_S$ , für die der Lokalisierungsfunktor mit der additiven Struktur verträglich ist. Man addiert dazu eben Brüche, indem man sie auf einen Hauptnenner bringt, anders geht es auch nicht, und prüft, daß die Verknüpfung biadditiv bleibt. Dasselbe gilt für die Lokalisierung nach Linkssoresystemen. Besitzt  $\mathcal{C}$  nur ein Objekt, so ist diese Konstruktion die sogenannte **Orelokalisierung** von nicht notwendig kommutativen Ringen.

**Proposition 1.4.24 (Koprodukte in Orelokalisierungen)**. *Gegeben  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechtssoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$  vertauscht der Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  mit dem Bilden von Kolimites über beliebige endliche Diagramme alias Darstellungen endlicher Köcher.*

1.4.25. Insbesondere vertauscht der Übergang zur Lokalisierung unter diesen Annahmen mit endlichen Koprodukten.

*Beweis.* Seien  $\mathcal{I}$  ein endlicher Köcher und  $C \in \text{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  ein Diagramm dieser Gestalt in  $\mathcal{C}$ . Gegeben  $X \in \mathcal{C}$  bezeichne  $\text{konst}(X) \in \text{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  das zugehörige konstante Diagramm. Ich behaupte, daß die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\text{colf}_{Y \xrightarrow{S} D} \text{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C})(C, \text{konst}(D)) \xrightarrow{\sim} \text{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C}_S)(C, \text{konst}(Y))$$

induziert. Die Surjektivität zeigt man, indem man Brüche von den  $C_i$  nach  $Y$  auf einen Hauptnenner bringt und den noch für alle Pfeile in  $\mathcal{I}$  hinreichend vergrößert. Die Injektivität ist eh klar und die Proposition folgt unmittelbar.  $\square$

**Proposition 1.4.26 (Orelokalisierung additiver Kategorien)**. *Ist  $\mathcal{C}$  eine additive Kategorie und  $S$  ein Rechtssoresystem von Morphismen, so ist auch  $\mathcal{C}_S$  eine additive Kategorie und  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  ist additiv.*

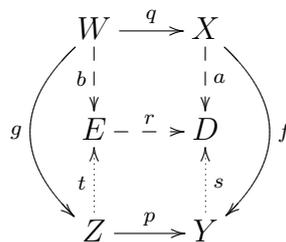
*Beweis.* Das folgt sofort aus der Existenz einer additiven Struktur 1.4.23 in der Lokalisierung, die mit dem Lokalisierungsfunktor verträglich ist, und der Existenz endlicher Koprodukte in der Lokalisierung sowie der Verträglichkeit des Lokalisierungsfunktors mit endlichen Koprodukten 1.4.24.  $\square$

### 1.4.1 Übungen

**Übung 1.4.27 (Entfaltung und Spaltung, Variante).** Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechtsosystem. Genau dann ist  $I \in \mathcal{C}$  ein  $S$ -rechtsentfaltetes Objekt im Sinne von 1.3.7, wenn es für jeden  $S$ -Morphismus  $s : I \rightarrow C$  einen Morphismus  $g : C \rightarrow I$  gibt mit  $gf = \text{id}_I$ . Hinweis: Daß Rechtsentfaltung Spaltungen liefert, wissen wir bereits aus 1.3.13. Unter der Annahme der Spaltungen ist umgekehrt  $\text{id}_I$  konfinal in  $S^I$  und die Beschreibung 1.4.12 von Morphismen in  $\mathcal{C}_S$  als Kolimes zeigt die andere Richtung.

**Übung 1.4.28.** Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechtsosystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Genau dann liefern Morphismen  $f, g : X \rightarrow Y$  aus  $\mathcal{C}$  denselben Morphismus in  $\mathcal{C}_S$ , wenn es  $s \in S$  gibt mit  $sf = sg$ .

**Übung 1.4.29 (Liften kommutativer Quadrate).** Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechtsosystem von Morphismen. Gegeben ein kommutatives Quadrat  $f = pg$  in  $\mathcal{C}_S$  mit den horizontalen Morphismen  $p, q$  in  $\mathcal{C}$  und eine Darstellung von  $g$  als Rechtsbruch  $g = t^{-1}b$  finden wir stets eine Darstellung von  $f$  als Rechtsbruch  $f = s^{-1}a$  und einen Morphismus  $r$  wie im Diagramm angedeutet mit  $rb = aq$  und  $rt = sp$ , so daß also im Diagramm



die beiden Quadrate kommutieren. Das wird gebraucht für das Bilden von Quotienten triangulierter Kategorien.

**Übung 1.4.30 (Oresysteme in Produktkategorien).** Gegeben Kategorien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  mit multiplikativen Systemen  $S, T$  ist auch  $S \times T$  ein multiplikatives System in  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ . Sind  $S$  und  $T$  rechtsore beziehungsweise linksore, so auch  $S \times T$ . Sind  $S$  und  $T$  gesättigt, so auch  $S \times T$ .

**Übung 1.4.31.** Wir betrachten in der Kategorie  $\text{Ab}$  der abelschen Gruppen die Menge  $S := \{n \text{id}_A \mid A \in \text{Ab}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$  aller Vielfachen von Identitätsmorphismen mit von Null verschiedenen ganzen Zahlen. Man betrachte andererseits die Kategorie  $\text{Ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  mit abelschen Gruppen als Objekten und Morphismen  $(\text{Ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})(A, B) := \text{Ab}(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  und der hoffentlich offensichtlichen Verknüpfung von Morphismen. Man zeige, daß der offensichtliche Funktor ein Isomorphismus von Kategorien  $\text{Ab}_S \xrightarrow{\sim} \text{Ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  ist.

## 1.5 Quotienten abelscher Kategorien\*

**Definition 1.5.1.** Seien  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $\mathcal{K}$  eine Menge von Objekten von  $\mathcal{A}$ . Ein **Quotient von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{K}$**  ist ein Paar  $(\mathcal{A}/\mathcal{K}, \text{can})$  bestehend aus einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}/\mathcal{K}$  und einem Funktor  $\text{can} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}$  derart, daß gilt:

1. Jedes Objekt aus  $\mathcal{K}$  wird unter  $\text{can}$  ein Nullobjekt in  $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ ;
2. Ist  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  ein exakter Funktor in eine weitere abelsche Kategorie, der alle Objekte aus  $\mathcal{K}$  zu Null macht, so gibt es genau einen Funktor  $\tilde{F} : \mathcal{A}/\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $F = \tilde{F} \circ \text{can}$ .

1.5.2. Wir zeigen gleich in 1.5.4, daß solch ein Quotient stets existiert. Wenn er existiert, ist er offensichtlich in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Ist  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  ein exakter Funktor in eine weitere abelsche Kategorie, der Objekte aus  $\mathcal{K}$  zu Null macht und für den der induzierte Funktor eine Äquivalenz von Kategorien  $\tilde{F} : \mathcal{A}/\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$  ist, so nennen wir den Funktor  $F$  einen **Quotientenfunktor** oder genauer, wenn Verwechslungen mit Quotientenfunktoren im Kontext triangulierter Kategorien zu befürchten sind, einen **exakten Quotientenfunktor**.

1.5.3. Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Eine Menge von Objekten  $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$  heißt eine **Serre'sche Unterkategorie**, wenn sie alle Nullobjekte enthält und für jede kurze exakte Sequenz von  $\mathcal{A}$  die Mitte zu  $\mathcal{K}$  gehört genau dann, wenn beide Enden zu  $\mathcal{K}$  gehören. Die kleinste Serre'sche Unterkategorie, die eine gegebene Menge von Objekten enthält, heißt die **von diesen Objekten erzeugte Serre'sche Unterkategorie**. Sie kann explizit beschrieben werden als die Menge aller Objekte, die eine endliche Filtrierung besitzen derart, daß alle Subquotienten dieser Filtrierung isomorph sind zu Subquotienten der erzeugenden Objekte.

**Satz 1.5.4 (Quotienten abelscher Kategorien).** 1. Gegeben eine Menge von Objekten einer abelschen Kategorie existiert stets ein Quotient von besagter Kategorie nach besagter Menge von Objekten;

2. Genau dann wird ein Objekt vom zugehörigen Quotientenfunktor annulliert, wenn es in der von unserer Menge von Objekten erzeugten Serre'schen Unterkategorie liegt;
3. Jede kurze exakte Sequenz in der Quotientenkategorie kommt her von einer kurzen exakten Sequenz in der ursprünglichen Kategorie;
4. Jeder Quotientenfunktor ist ein Lokalisierungsfunktor.

*Ergänzung 1.5.5.* Gegeben ein Universum  $\mathcal{U}$  mit  $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$  und eine abelsche  $\mathcal{U}_\epsilon\text{-}\vec{\mathcal{U}}_\epsilon$ -Kategorie ist auch jeder Quotient eine  $\mathcal{U}_\epsilon\text{-}\vec{\mathcal{U}}_\epsilon$ -Kategorie.

1.5.6. Wir werden den ersten und den letzten Teil zusammen durch eine explizite Konstruktion eines Quotienten als Lokalisierung zeigen und führen dazu zunächst noch weitere Begriffe ein.

**Proposition 1.5.7.** *Jede Lokalisierung einer abelschen Kategorie an einem Oresystem von Morphismen ist wieder eine abelsche Kategorie.*

*Beweis.* Unsere Lokalisierung ist additiv nach 1.4.26 und es bleibt nur, die Exaktheit der Lokalisierung zu zeigen. Der Kern eines Morphismus in unserer ursprünglichen Kategorie ist gerade sein Egalisator mit dem Nullmorphismus und bleibt deshalb nach 1.4.24 der Kern in der Lokalisierung. Der Kern eines Bruches ist offensichtlich schlicht der Kern seines Zählers. Damit ist die Existenz von Kernen und dual von Kokernen in der Lokalisierung gezeigt. Die Gleichheit von Bild und Kobild muß nur für den Zähler eines jeden Bruches gezeigt werden und ist damit auch klar.  $\square$

**Proposition 1.5.8.** *Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$  eine Serre'sche Unterkategorie, so ist das System aller Morphismen mit Kern und Kokern in  $\mathcal{K}$  ein Oresystem in  $\mathcal{A}$ .*

*Beweis.* Die Identitäten gehören natürlich zu unserem System. Um die Stabilität unter Verknüpfung zu zeigen wende man auf das kartesische Quadrat im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \ker gf & \rightarrow & \ker g & & \end{array}$$

das Lemma [TG] 2.3.13 über die Gleichheit der Kerne paralleler Pfeile auf die horizontalen Pfeile an und verwende das duale Argument für  $\text{cok}$ . Die Orebedingung folgt durch kartesische beziehungsweise kokartesische Ergänzung mit 1.5.9 und die letzte Bedingung erkennt man, da  $t \circ f = t \circ g$  gleichbedeutend ist zu  $t \circ (f - g) = 0$  und das zu  $\text{im}(f - g) \in \mathcal{K}$ , einer selbstdualen Bedingung.  $\square$

*Beweis von 1.5.4.* Wir zeigen zunächst den ersten und den letzten Teil. Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$  eine Serre'sche Unterkategorie, so notieren wir

$$\mathcal{A}/\mathcal{K}$$

die Lokalisierung von  $\mathcal{A}$  am Oresystem aller Morphismen mit Kern und Kokern in  $\mathcal{K}$  und nennen sie die **Quotientenkategorie**. Ist allgemeiner  $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$  eine beliebige Menge von Objekten, so betrachten wir die davon erzeugte Serre'sche Unterkategorie  $\langle \mathcal{K} \rangle \subset \mathcal{A}$  und setzen  $\mathcal{A}/\mathcal{K} = \mathcal{A}/\langle \mathcal{K} \rangle$ . Der Funktor  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}$  hat

dann offensichtlich die von einem Quotientenfunktor geforderte universelle Eigenschaft und Teil 1 sowie Teil 4 des Satzes sind bewiesen.

2. Es gilt, für jede Serre'sche Unterkategorie  $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$  die Identität  $\mathcal{K} = \ker(\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K})$  zu zeigen. Nur die Inklusion  $\supset$  ist problematisch. Haben wir jedoch ein Objekt  $A \in \mathcal{A}$ , das verschwindet in  $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ , so ist die Identität auf  $A$  die Nullabbildung in  $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ , der Bruch  $(\text{id}, A, \text{id})$  läßt sich also erweitern zu  $(s, D, 0)$  als da heißt, es gibt ein  $D$  derart, daß die Nullabbildung  $D \rightarrow A$  zu  $S$  gehört. Daraus folgt sofort  $A \in \mathcal{K}$ .

3. Sei  $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$  unsere kurze exakte Sequenz in  $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ . Wir schreiben den ersten Morphismus als Bruch, betrachten dessen Zähler  $f$  und nehmen in  $\mathcal{A}$  die kurze exakte Sequenz  $f \hookrightarrow A \twoheadrightarrow \text{cok } f$ .  $\square$

**Proposition 1.5.9.** *Jedes kartesische Diagramm in einer abelschen Kategorie induziert Isomorphismen zwischen den Kernen paralleler Pfeile und Monomorphismen zwischen den Kokernen paralleler Pfeile.*

1.5.10. Die erste Aussage ist ein Spezialfall von Übung [TG] 2.3.13. Wir beweisen die zweite Aussage zu Ende dieses Abschnitts im Anschluß an die Behandlung von zwei Spezialfällen. Im Fall von abelschen Gruppen prüft man die zweite Aussage auch leicht explizit.

**Lemma 1.5.11.** *Ist in einem kartesischen Diagramm in einer abelschen Kategorie ein Ursprungspfeil epi, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt.*

1.5.12. Ist ein Ursprungspfeil mono, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt. Das gilt sogar in beliebigen Kategorien, vergleiche [TG] 2.3.12.

*Beweis.* Wir notieren unser kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & M \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{g} & Q \end{array}$$

Ersetzen wir  $M$  durch  $M_0 := \text{im}(P \rightarrow M)$ , so bleibt unser Diagramm kartesisch. Jetzt betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M_0 \times N & \hookrightarrow & M \times N & \twoheadrightarrow & \text{cok} \times N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Q & \xlongequal{\quad} & Q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die nichttrivialen Vertikalen darin seien durch die Zeilenmatrix  $(f, -g)$  erklärt. Die Kerne der beiden linken Vertikalen sind dann gerade die beiden Faserprodukte  $M_0 \times_Q N$  beziehungsweise  $M \times_Q N$  und wir folgern aus der langen exakten Homologiesequenz  $\text{cok} \times N = 0$ , also  $\text{cok} = 0$  und  $M = M_0$ .  $\square$

**Lemma 1.5.13.** *Ein kartesisches Diagramm in einer präabelschen Kategorie, in dem zwei gegenüberliegende Pfeile Monomorphismen sind, induziert einen Monomorphismus zwischen den Kokernen dieser Pfeile.*

*Beweis.* Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M & \hookrightarrow & P & \twoheadrightarrow & \text{cok} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N & \hookrightarrow & Q & \twoheadrightarrow & \text{cok} \end{array}$$

In diesem Diagramm sieht man leicht, daß  $M \hookrightarrow P$  der Kern der Verknüpfung  $P \hookrightarrow Q \twoheadrightarrow \text{cok}$  ist. Damit ist aber  $P \twoheadrightarrow \text{cok}$  in der oberen Horizontalen das Bild dieser Verknüpfung und damit ist die rechte Vertikale ein Monomorphismus.  $\square$

*Beweis von 1.5.9.* Nun zeigen wir die Proposition. Faktorisieren wir einen Ursprungspfeil in  $\text{mono} \circ \text{epi}$ , so ist die induzierte Faktorisierung des gegenüberliegenden Pfeils auch eine Faktorisierung in  $\text{mono} \circ \text{epi}$  wegen der ersten Aussage der Proposition und 1.5.11. Wir dürfen also annehmen, daß wir die Kokerne von zwei gegenüberliegenden Monomorphismen zu vergleichen haben, und das erledigt 1.5.13.  $\square$

*Beispiel 1.5.14 (Restriktion abelscher Garben als Quotientenfunktor).* Der Rückzug abelscher Garben unter einer topologischen Einbettung ist stets ein Quotientenfunktor. In der Tat hat er nach [TG] 4.3.20 einen volltreuen Rechtsadjungierten und ist damit nach 1.3.9 schon einmal ein Lokalisierungsfunktor. Die zu lokalisierenden Morphismen sind dann offensichtlich genau die, deren Kern und Kokern unter dem Rückzug zu Null werden.

*Beispiel 1.5.15.* Der Rückzug von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln unter einer offenen Einbettung von Schemata ist stets ein Quotientenfunktor. Dasselbe gilt für den Rückzug von quasikohärenten  $\mathcal{O}_X$ -Moduln. Das Argument ist dasselbe wie in 1.5.14.

*Beispiel 1.5.16.* Der Rückzug von kohärenten  $\mathcal{O}_X$ -Moduln unter einer offenen Einbettung von noetherschen Schemata ist stets ein Quotientenfunktor. Das kann man etwa aus dem in 1.5.15 behandelten Fall quasikohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Moduln folgern, indem man Proposition 1.4.21 über die Lokalisierung voller Unterkategorien anwendet. Man beachte, daß der Rückzug in diesem Fall im allgemeinen keinen Adjungierten mehr besitzt: Der Vorschub eines kohärenten  $\mathcal{O}_U$ -Moduls unter einer offenen Einbettung  $U \Subset X$  ist meist nicht mehr kohärent, sondern nur noch quasikohärent.

*Beispiel 1.5.17.* Gegeben ein Ring  $R$  mit einem Ideal  $\mathfrak{m} \subset R$  bilden in der Kategorie aller  $R$ -Moduln die von einer Potenz von  $\mathfrak{m}$  annullierten Moduln eine Serre'sche Unterkategorie. Gegeben ein  $R$ -Modul  $M$  gilt für die Multiplikation  $\mu : \mathfrak{m} \otimes_R M \rightarrow M$  offensichtlich  $\mathfrak{m} \operatorname{cok} \mu = 0 = \mathfrak{m} \ker \mu$ , folglich ist  $\mu$  ein Isomorphismus in besagter Quotientenkategorie.

*Beispiel 1.5.18.* Gegeben ein Ring  $R$  mit einem Ideal  $\mathfrak{m} \subset R$  mit der Eigenschaft  $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$  bilden von  $\mathfrak{m}$  annullierten Moduln eine Serre'sche Unterkategorie. Die Quotientenkategorie heißt dann die Kategorie der **Fast-Moduln** von  $(R, \mathfrak{m})$ . Man kann in diesem Fall leicht zeigen, daß der Funktor  $M \mapsto \mathfrak{m} \otimes_R \mathfrak{m} \otimes_R M$  über den Quotienten faktorisiert. Mit mehr Mühe scheint man sogar zeigen zu können, daß er einen volltreuen Funktor von der Quotientenkategorie in die ursprüngliche Kategorie von Moduln induziert.

1.5.19. Ist  $R \supset \mathfrak{m}$  ein Ring mit einem Ideal und gilt  $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ , so erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathfrak{m} \otimes_R \mathfrak{m} \otimes_R M \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m} \otimes_R \mathfrak{m}$$

durch die Vorschrift  $a \otimes b \otimes c \mapsto ab \otimes c = a \otimes bc$ . Um das zu zeigen, gehen wir aus von der Multiplikation  $\mu : \mathfrak{m} \otimes_R \mathfrak{m} \otimes_R M \rightarrow \mathfrak{m}$ . Sie führt zu einer rechtsexakten Sequenz  $\mathfrak{m} \otimes_R \ker \mu \rightarrow \mathfrak{m} \otimes_R \mathfrak{m} \otimes_R M \rightarrow \mathfrak{m} \otimes_R \mathfrak{m}$  und es reicht zu zeigen, daß die erste Abbildung Null ist. Aber gegeben  $\sum a_i \otimes b_i \in \ker \mu$  und  $c \in \mathfrak{m}$  finden wir in der Tat eine Identität der Form  $c = \sum \alpha_\nu \beta_\nu$  mit  $\alpha_\nu, \beta_\nu \in \mathfrak{m}$  und erhalten

$$c \otimes \sum a_i \otimes b_i = \sum \alpha_\nu \beta_\nu \otimes a_i \otimes b_i = \sum \alpha_\nu \otimes \beta_\nu \otimes a_i b_i = 0$$

**Lemma 1.5.20.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$  eine Serre'sche Unterkategorie. Gegeben  $M, N \in \mathcal{A}$  liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\operatorname{colf} \mathcal{A}(U, Q) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{A}/\mathcal{K})(M, N)$$

Der Kolimes ist dabei zu bilden über alle Unterobjekte  $U$  von  $M$  mit  $M/U \in \mathcal{K}$  und über alle Quotienten  $Q$  von  $N$  mit  $\ker(N \rightarrow Q) \in \mathcal{K}$ .

*Beweis.* Ich gebe nur die inverse Abbildung an und überlasse dem Leser den Rest des Beweises. Für einen Bruch  $M \leftarrow D \rightarrow N$  bilden wir dazu den pushout

$$\begin{array}{ccc} D & \rightarrow & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \rightarrow & P \end{array}$$

und betrachten die induzierte Abbildung auf den Bildern  $U$  und  $Q$  der vertikalen Morphismen. □

**Lemma 1.5.21.** *Gegeben  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$  eine Serre'sche Unterkategorie liefert der Quotientenfunktor auf den Isomorphieklassen einfacher Objekte eine Injektion*

$$(\text{Irr } \mathcal{A}) \setminus (\text{Irr } \mathcal{K}) \hookrightarrow \text{Irr}(\mathcal{A}/\mathcal{K})$$

*Ist  $\mathcal{A}$  langenendlich, so ist auch  $\mathcal{A}/\mathcal{K}$  langenendlich und der Quotientenfunktor liefert sogar eine Bijektion*

$$(\text{Irr } \mathcal{A}) \setminus (\text{Irr } \mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \text{Irr}(\mathcal{A}/\mathcal{K})$$

*Beweis.* Einfache Objekte können dadurch charakterisiert werden, daß jeder Morphismus in besagtes Objekt surjektiv oder Null ist. Nach 1.5.20 werden damit einfache Objekte unter einem Quotientenfunktor stets einfach oder Null, und nichtisomorphe Objekte, die nicht zu Null werden, bleiben nichtisomorph. Mit 1.5.4.2 erkennen wir dann schon einmal, daß ein Quotientenfunktor stets eine Injektion  $(\text{Irr } \mathcal{A}) \setminus (\text{Irr } \mathcal{K}) \hookrightarrow \text{Irr}(\mathcal{A}/\mathcal{K})$  liefert. Ist aber  $A \in \mathcal{A}$  gegeben mit einfachem Bild in  $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ , und ist die Länge von  $A$  endlich, so muß schon ein einfacher Subquotient von  $A$  dasselbe Bild haben in  $\mathcal{A}/\mathcal{K}$  wie  $A$  selbst. Das zeigt die Surjektivität im langenendlichen Fall.  $\square$

*Ergänzung 1.5.22.* Besitzt ein Injektiver von  $\mathcal{A}$  kein von Null verschiedenes Unterobjekt aus  $\mathcal{K}$ , so bleibt er injektiv in  $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ . Besitzt ein Objekt aus  $\mathcal{A}$  kein von Null verschiedenes Unterobjekt aus  $\mathcal{K}$ , so gilt dasselbe für jede injektive Hülle dieses Objekts.

*Ergänzung 1.5.23.* Bei [Gab62] wird die Quotientenkategorie sogar definiert dadurch, daß ihre Objekte dieselben sein sollen wie die Objekte der ursprünglichen Kategorie, ihre Morphismen jedoch gegeben werden durch die direkten Limites aus Lemma 1.5.20. Man muß dann allerdings einige Arbeit investieren, um die Verknufung von Morphismen zu erklären und die Axiome einer abelschen Kategorie zu prüfen.

*Ergänzung 1.5.24.* Die Links- beziehungsweise Rechtsadjungierten eines Quotientenfunktors nennen wir, wenn sie existieren, **Approximationen**. Aus 1.3.9 folgt, daß Approximationen stets volltreu sind. Insbesondere ist nach [TF] 4.3.9 also die Verknufung eines Approximationsfunktors mit dem Quotientenfunktor äquivalent zum Identitätsfunktors unter der Adjunktionstransformation. Bezeichnet  $Q$  den Quotientenfunktor und  $L$  beziehungsweise  $R$  seine Adjungierten, so liefern die kanonischen Abbildungen Surjektionen  $M \twoheadrightarrow RQM$  und Injektionen  $LQM \hookrightarrow M$ . Falls  $L$  existiert, kann genauer  $LQM$  beschrieben werden als das größte Unterobjekt von  $M$  ohne echten Quotienten aus  $\mathcal{K}$  und  $RQM$  als der Quotient von  $M$  nach dem größten Unterobjekt aus  $\mathcal{K}$ . Man erkennt das aus der Beschreibung der Quotientenkategorie in 1.5.20. Es steht in krassem Gegensatz zu [TG] 2.3.11, aber  $Q$  ist ja auch alles andere als treu.

**Satz 1.5.25 (Verallgemeinerte Morita-Äquivalenz).** *Ist  $\mathcal{A}$  eine langenendliche Kategorie und  $P \in \mathcal{A}$  ein projektives Objekt, so ist der Funktor  $\mathcal{A}(P, \_)$  ein Quotientenfunktor*

$$\mathcal{A}(P, \_): \mathcal{A} \rightarrow \text{Modf-}\mathcal{A}(P)$$

*Beweis.* Sicher ist  $\mathcal{K} := \{M \in \mathcal{A} \mid \mathcal{A}(P, M) = 0\}$  eine Serre'sche Unterkategorie und nach 1.5.20 liefert der Quotientenfunktor  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}$  für alle  $M \in \mathcal{A}$  Bijektionen  $\mathcal{A}(P, M) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{A}/\mathcal{K})(P, M)$ . Nun müssen wir nur noch unsere abstrakte Morita-Äquivalenz [NAS] 7.5.3 auf die Quotientenkategorie anwenden.  $\square$

*Beispiel 1.5.26.* Gegeben ein Ring  $A$  und ein Idempotentes  $e \in A$  liefert die Multiplikation mit  $e$  nach in etwa demselben Argument wie beim Beweis von 1.5.25 einen Quotientenfunktor

$$Q: \begin{array}{ccc} A\text{-Mod} & \rightarrow & eAe\text{-Mod} \\ M & \mapsto & eM \end{array}$$

Die Multiplikation und das Auswerten bei  $e$  liefern jeweils Isomorphismen  $eA \otimes_A M \xrightarrow{\sim} eM$  und  $\text{Hom}_A(Ae, M) \xrightarrow{\sim} eM$ . Mit [KAG] 2.8.1 erhalten wir demnach einen Linksadjungierten sowie einen Rechtsadjungierten von  $Q$  mittels der Bildungen

$$LN = Ae \otimes_{eAe} N \quad \text{sowie} \quad RN = \text{Hom}_{eAe}(eA, N)$$

*Ergänzung 1.5.27.* Selbst bei der fünfdimensionalen Kocheralgebra gilt nicht, daß die Multiplikation einen Isomorphismus  $Ae \otimes_{eAe} eA \xrightarrow{\sim} AeA$  induziert. Der durch den Bimodul  $AeA$  gegebene Hom-Funktor wird für einen artinschen Ring  $A$  bei [KM03] kategorientheoretisch beschrieben als „Nimm die größtmögliche Erweiterung durch von  $e$  annullierte Einfache und teile danach soviel wie möglich von Einfachen dieser Sorte weg“. Dort heißt diese Konstruktion eine **partielle Approximation**.

## 2 Triangulierte und derivierte Kategorien

### 2.1 Abbildungskegel in Homotopiekategorien

2.1.1. Ich erinnere an [TS] 5.7.11, wo wir für einen Komplex  $X = (X^n, d_X^n)$  mit  $d_X^n : X^n \rightarrow X^{n+1}$  den Komplex  $[1]X$  definiert hatten, indem wir den Komplex um Eins gegen die Richtung der Pfeile verschieben, in Formeln  $([1]X)^n := X^{n+1}$ , und die Randoperatoren mit Minuszeichen versehen, in Formeln

$$d_{[1]X}^n := -d_X^{n+1}$$

Jede Kettenabbildung  $u : X \rightarrow Y$  liefert in offensichtlicher Weise eine Kettenabbildung  $u : [1]X \rightarrow [1]Y$ , hier fügen wir keine Vorzeichen ein. Im Fall eines Komplexes  $X$  von abelschen Gruppen haben wir schlicht  $[1]X = \mathbb{Z}[1] \otimes X$ .

**Definition 2.1.2.** Seien  $\mathcal{I}$  eine additive Kategorie und  $\text{Hot}_{\mathcal{I}}$  die Homotopiekategorie der Komplexe in  $\mathcal{I}$ .

1. Ein **Dreieck in  $\text{Hot}_{\mathcal{I}}$**  ist die Vorgabe von Objekten und Morphismen der Gestalt

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} [1]X$$

2. Ein **Morphismus von einem Dreieck in ein weiteres Dreieck** ist ein Tripel von Morphismen  $(f, g, h)$  derart, daß das folgende Diagramm mit unseren beiden Dreiecken in den Zeilen kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & [1]X \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & [1]f \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & [1]X' \end{array}$$

3. Ein Dreieck in  $\text{Hot}_{\mathcal{I}}$  heißt ein **ausgezeichnetes Dreieck**, englisch **distinguished triangle**, französisch **triangle distingué**, wenn es isomorph ist zu einem Dreieck der Gestalt

$$X \xrightarrow{u} Y \rightarrow K(u) \rightarrow [1]X$$

mit  $u$  einer Kettenabbildung,  $K(u)$  dem Abbildungskegel von  $u$ , gegeben durch  $K(u)^n := X^{n+1} \oplus Y^n$  mit  $\partial_K : (x, y) \mapsto (-\partial_X(x), u(x) + \partial_Y(y))$  und als weiteren Morphismen der offensichtlichen Injektion und Projektion  $Y \rightarrow K(u) \rightarrow [1]X$ .

2.1.3. Die Beziehung zwischen dem hier eingeführten algebraischen Abbildungskegel und dem topologischen Abbildungskegel aus [TS] 3.4.1 diskutieren wir in [TS] 3.4.6. Kurz gesagt konstruieren wir dort für jede stetige Abbildung  $f : Z \rightarrow X$  eine ausgezeichnete funktorielle Homotopieäquivalenz

$$\tilde{S}(K(f)) \xrightarrow{\sim} \text{Keg}(\tilde{S}f)$$

2.1.4. Sei  $\mathcal{I}$  eine additive Kategorie. Unsere Konstruktion des Abbildungskegels liefert einen Funktor von der Kategorie  $\text{Ket}_{\mathcal{I}}^{\downarrow}$  der Morphismen von Komplexen in die Kategorie der Dreiecke in  $\text{Hot}_{\mathcal{I}}$ , ja sogar in die analog definierte Kategorie der Dreiecke in  $\text{Ket}_{\mathcal{I}}$ .

2.1.5. Ein Dreieck, das zu einem ausgezeichneten Dreieck wird, wenn wir alle drei Morphismen durch ihre Negativen ersetzen, heißt **antiausgezeichnet**.

**Proposition 2.1.6 (Drehen von ausgezeichneten Dreiecken).** *Sei  $\mathcal{I}$  eine additive Kategorie. Ist  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  ein ausgezeichnetes Dreieck in  $\text{Hot}_{\mathcal{I}}$ , so ist auch  $Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X \xrightarrow{-u} [1]Y$  ein ausgezeichnetes Dreieck in  $\text{Hot}_{\mathcal{I}}$ .*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit hat unser erstes Dreieck die Gestalt

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\alpha} K(u) \xrightarrow{\beta} [1]X$$

mit  $\alpha, \beta$  den kanonischen Abbildungen. Es gilt also, eine Homotopieäquivalenz  $\psi : K(\alpha) \xrightarrow{\sim} [1]X$  anzugeben derart, daß kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & K(u) & \rightarrow & K(\alpha) & \rightarrow & [1]Y \\ \parallel & & \parallel & & \psi \downarrow & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{\alpha} & K(u) & \rightarrow & [1]X & \xrightarrow{-u} & [1]Y \end{array}$$

Per definitionem haben wir  $K(\alpha)^n = Y^{n+1} \oplus K(u)^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$  und der Randoperator wird gegeben durch die Matrix

$$\partial_{K(\alpha)} = \begin{pmatrix} -\partial_Y & 0 \\ \alpha & \partial_{K(u)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_Y & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_X & 0 \\ \text{id} & u & \partial_Y \end{pmatrix}$$

Wir nehmen nun  $\psi = (0, \text{id}, 0)$  und erhalten offensichtlich eine Kettenabbildung derart, daß das mittlere Quadrat kommutiert. In die andere Richtung nehmen wir  $\phi = (-u, \text{id}, 0)^{\top} : [1]X \rightarrow K(\alpha)$  und erkennen, daß  $\phi$  eine Kettenabbildung ist und daß mit  $\phi$  nach oben statt  $\psi$  nach unten das rechte Quadrat kommutiert. Offensichtlich gilt  $\psi\phi = \text{id}$  auf  $[1]X$ . Wir haben gewonnen, wenn wir die Homotopie  $\phi\psi \simeq \text{id}$  zeigen. Dazu muß man nur prüfen, daß für

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{id} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : K(\alpha)^{n+1} \rightarrow K(\alpha)^n$$

die Gleichung  $\partial s + s\partial = \text{id} - \phi\psi$  erfüllt ist. □

**Proposition 2.1.7 (Morphismen von Dreiecken).** *Sei  $\mathcal{T}$  eine additive Kategorie. Gegeben ein kommutatives Diagramm in  $\text{Hot}_{\mathcal{T}}$  der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & [1]X \\ f \downarrow & & g \downarrow & & & & f \downarrow \\ \hat{X} & \longrightarrow & \hat{Y} & \longrightarrow & \hat{Z} & \longrightarrow & [1]\hat{X} \end{array}$$

mit ausgezeichneten Dreiecken als Zeilen gibt es ein  $h : Z \rightarrow \hat{Z}$  derart, daß  $(f, g, h)$  ein Morphismus von Dreiecken wird.

2.1.8. Dieses  $h$  ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Unter geeigneten Zusatzannahmen gilt das aber doch, vergleiche 2.3.8. In Übung 2.2.12 dürfen Sie zeigen, daß mit  $f$  und  $g$  auch  $h$  ein Isomorphismus sein muß.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß beide Dreiecke die Standarddreiecke für  $u$  beziehungsweise  $\hat{u}$  sind mit  $Z = K(u)$  und  $\hat{Z} = K(\hat{u})$ . Sei  $s^n : X^n \rightarrow \hat{Y}^{n-1}$  eine Homotopie, die die Kommutativität des ersten Quadrats liefert, also  $sd + ds = gu - \hat{u}f$ . Wir behaupten, daß

$$h = \begin{pmatrix} f & 0 \\ s & g \end{pmatrix} : K(u) \rightarrow K(\hat{u})$$

eine Kettenabbildung ist und daß mit diesem  $h$  die beiden anderen Quadrate sogar kommutieren, ohne daß man zu Homotopieklassen übergehen muß. Diese Rechnung überlassen wir dem Leser. □

2.1.9. Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  liefert das Bilden der Kohomologie eines Komplexes Funktoren  $\mathcal{H}^i : \text{Hot}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$  und wir haben  $\mathcal{H}^0([i]X) = \mathcal{H}^i X$  für beliebiges  $X \in \text{Hot}_{\mathcal{A}}$ .

**Lemma 2.1.10 (Kohomologiesequenz eines ausgezeichneten Dreiecks).** *Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  ein ausgezeichnetes Dreieck in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$ , so erhalten wir mit den natürlichen Abbildungen eine lange exakte Sequenz auf der Kohomologie*

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}^{q-1}Z \rightarrow \mathcal{H}^q X \rightarrow \mathcal{H}^q Y \rightarrow \mathcal{H}^q Z \rightarrow \mathcal{H}^{q+1} X \rightarrow \dots$$

*Beweis.* Da wir nach 2.1.6 Dreiecke drehen können, reicht es, die Exaktheit von  $\mathcal{H}^0 Y \rightarrow \mathcal{H}^0 Z \rightarrow \mathcal{H}^0 [1]X$  zu zeigen. Dazu dürfen wir ausgehen von einem Dreieck der Gestalt  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow K(u) \rightarrow [1]X$ , und dann haben wir schlicht einen Ausschnitt der langen exakten Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen  $Y \hookrightarrow K(u) \twoheadrightarrow [1]X$  vor uns. □

## 2.2 Triangulierte Kategorien

**Definition 2.2.1.** Eine  $\mathbb{Z}$ -Kategorie ist eine Kategorie  $\mathcal{A}$  mitsamt einem Automorphismus  $[1] : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ . Mit Automorphismus meine ich einen Isomorphismus der Kategorie zu sich selbst, nicht etwa bloß eine Äquivalenz von Kategorien.

*Vorschau 2.2.2.* Es gibt durchaus relevante Situationen, in denen man die hier entwickelten Begriffsbildungen auf den Fall erweitern muß, daß unsere Verschiebung  $[1] : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  nur eine Äquivalenz von Kategorien ist. Allgemeiner will man auch Kategorien mit einer Operation allgemeinerer Gruppen erklären wollen. Das alles weckt jedoch Elefanten der Notation, die ich lieber schlafen lasse.

**Definition 2.2.3.** Unter einem **Dreieck** in einer  $\mathbb{Z}$ -Kategorie versteht man ein Diagramm der Gestalt  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} [1]X$ , das suggestiver aber weniger präzise auch in der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & Z & \end{array}$$

[1]

geschrieben werden mag. Wir notieren Dreiecke auch abkürzend  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]$ . Ein **Morphismus von Dreiecken** wird definiert wie im Fall der Homotopiekategorie einer additiven Kategorie in 2.1.2.

**Definition 2.2.4.** Eine **triangulierte Kategorie** ist eine additive  $\mathbb{Z}$ -Kategorie mitsamt einer Vorschrift, die unter allen Dreiecken unserer  $\mathbb{Z}$ -Kategorie gewisse Dreiecke auszeichnet derart, daß die folgenden merkwürdigen durch den Fall 2.1 der Homotopiekategorien motivierten Axiome erfüllt sind:

1. Jedes Dreieck, das isomorph ist zu einem ausgezeichneten Dreieck, ist auch selbst ein ausgezeichnetes Dreieck;
2. Für jedes Objekt  $X$  ist das Dreieck  $X \xrightarrow{\text{id}} X \rightarrow 0 \rightarrow [1]X$  ausgezeichnet;
3. Jeder Morphismus  $X \rightarrow Y$  unserer Kategorie kann in ein ausgezeichnetes Dreieck  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  eingebettet werden. Es wird sich später herausstellen, daß hier  $Z$  eindeutig ist bis auf nicht-eindeutigen Isomorphismus, vergleiche das anschließende Axiom 5. Wir gönnen ihm dennoch einen bestimmten Artikel und nennen  $Z$  in Erinnerung an 2.1.2 auch im allgemeinen den **Abbildungskegel** über dem Morphismus  $X \rightarrow Y$ ;
4. Ein Dreieck  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  ist ausgezeichnet genau dann, wenn das „gedrehte“ Dreieck  $Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X \xrightarrow{-u} [1]Y$  ausgezeichnet ist;

5. Gegeben ein Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen und einem kommutativen Quadrat links

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & [1]X \\
 f \downarrow & & g \downarrow & & & & [1]f \downarrow \\
 X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & [1]X'
 \end{array}$$

gibt es einen Morphismus  $h : Z \rightarrow Z'$  derart, daß die beiden dadurch in der Mitte und rechts entstehenden Quadrate kommutieren. Von diesem Morphismus  $h$  wird nur die Existenz und nicht die Eindeutigkeit gefordert;

6. (**Oktaederaxiom**) Gegeben ausgezeichnete Dreiecke

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow [1]X$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X' \longrightarrow [1]Y$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow [1]X$$

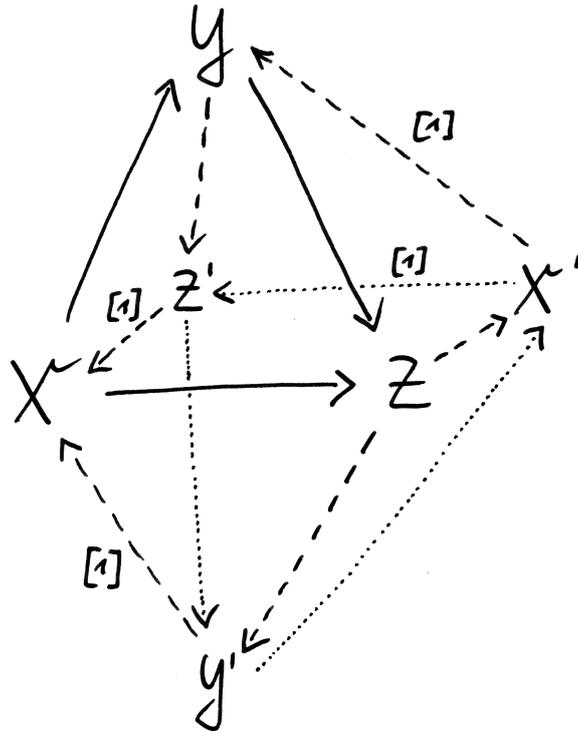
gibt es ein ausgezeichnetes Dreieck  $Z' \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow [1]Z'$  derart, daß im nebenstehenden Oktaeder die beiden Quadrate im Schnitt mit senkrechten Ebenen kommutieren, die vier „zyklischen“ Dreiecke ausgezeichnete Dreiecke sind, und die vier anderen Dreiecke kommutieren.

Die ausgezeichneten Dreiecke einer triangulierten Kategorie heißen, nun, eben **ausgezeichnete Dreiecke**. Eingeführt wurden sie ursprünglich auf Französisch als **triangles distingués**. Auf Englisch nennt man sie **distinguished triangles**.

*Vorschau 2.2.5.* Der Definition einer triangulierten Kategorie haftet etwas Künstliches an und sie ist es auch. Ich hoffe aber, Sie im folgenden davon zu überzeugen, daß diese Begriffsbildung für viele Argumentationen dennoch ein geschickter Rahmen ist.

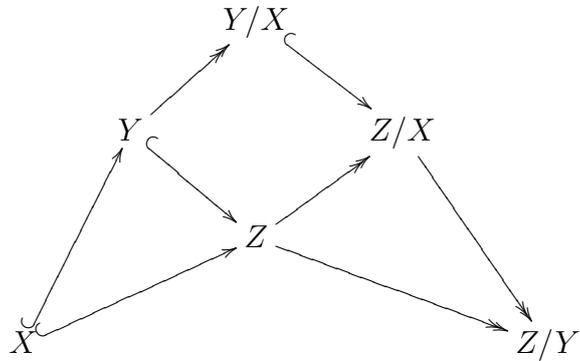
*Vorschau 2.2.6 (Motivation für das Oktaederaxiom).* In 2.6.1 werden wir jeder abelschen Kategorie eine triangulierte Kategorie  $\text{Der}(\mathcal{A})$  zuordnen sowie einen Funktor  $\text{Ket}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$ . In 2.6.4 werden wir weiter einen Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in  $\text{Ket}(\mathcal{A})$  zur Kategorie der ausgezeichneten Dreiecke in  $\text{Der}(\mathcal{A})$  konstruieren. Gegeben  $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$  injektive Kettenabbildungen erhalten wir nun offensichtlich eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$Y/X \hookrightarrow Z/X \twoheadrightarrow Z/Y$$



Die Struktur der Pfeile soll den Aufbau eines solchen Oktaeders verdeutlichen:  
 Man beginnt mit zwei verknüpfbaren Morphismen und ihrer Komposition, dargestellt durch durchgehende Pfeile zwischen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$ . Jeden dieser Morphismen ergänzt man zu einem ausgezeichneten Dreieck, angedeutet durch die gestrichelten Pfeile. Und dann fordert man die Existenz von gepunkteten Pfeilen, die die drei eben konstruierten Objekte zu einem vierten ausgezeichneten Dreieck verbinden, die drei anderen so entstehenden Dreiecke zum Kommutieren bringen (was den horizontalen gepunkteten Pfeil im übrigen bereits eindeutig festlegt), und die beiden in Schnitten unseres Oktaeders mit geeigneten senkrechten Ebenen entstehenden Quadrate zum Kommutieren bringen. Von zwei gegenüberliegenden Flächen ist also stets eine ein kommutatives Diagramm und die andere ein ausgezeichnetes Dreieck. Unser Oktaederdiagramm hat weitaus weniger Symmetrien als ein echter Oktaeder, genauer ist die Symmetriegruppe eine zyklische Gruppe der Ordnung vier, erzeugt vom Drehen um die senkrechte Achse um einen rechten Winkel gefolgt vom Vertauschen der oberen und der unteren Ecke.

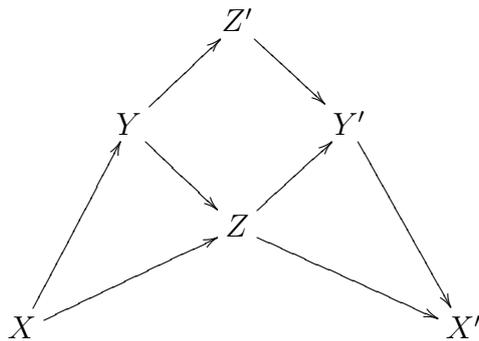
oder diagrammatisch



Es entspricht einem Oktaeder in  $\text{Der}(\mathcal{A})$  und mag die Axiomatik motivieren.

2.2.7. Jede triangulierte Kategorie liefert eine weitere triangulierte Kategorie, wenn man statt der ausgezeichneten Dreiecken die sogenannten **antiausgezeichneten Dreiecke** auszeichnet, die aus ausgezeichneten Dreiecken durch das Ändern des Vorzeichens aller drei Morphismen entstehen.

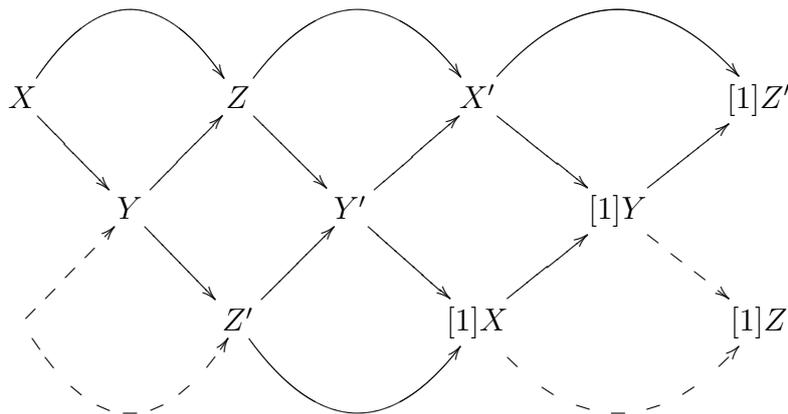
2.2.8. Wir notieren Oktaeder oft vereinfacht in der Form



In dieser Gestalt sind alle vier ausgezeichneten Dreiecke als lediglich gerade Pfeilsequenzen erkennbar, einige kommutative Dreiecke und ein kommutatives Quadrat sind jedoch nicht sichtbar. Eine andere Darstellung ist

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & [1]X \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & [1]X \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & [1]Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 Z' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & [1]Z'
 \end{array}$$

mit einigen Identitäten in den Vertikalen, kommutativen Quadraten und ausgezeichneten Dreiecken als Zeilen. In dieser Darstellung sehen wir alle Information unseres Oktaeders: Alle vier ausgezeichneten Dreiecke als Zeilen, alle vier kommutativen Dreiecke als Quadrate mit einer ist-gleich-Seite, davon eines sogar doppelt, und beide kommutativen Quadrate, davon eines sogar doppelt. Als letzte Variante gebe ich



Dies Diagramm soll man sich periodisch nach rechts und links fortgesetzt denken. Alle vier ausgezeichneten Dreiecke sind hier gut als eckenlose Wege erkennbar, und die vier kommutativen Dreiecke ebenso wie die beiden kommutativen Vierecke sind gleichfalls gut zu sehen.

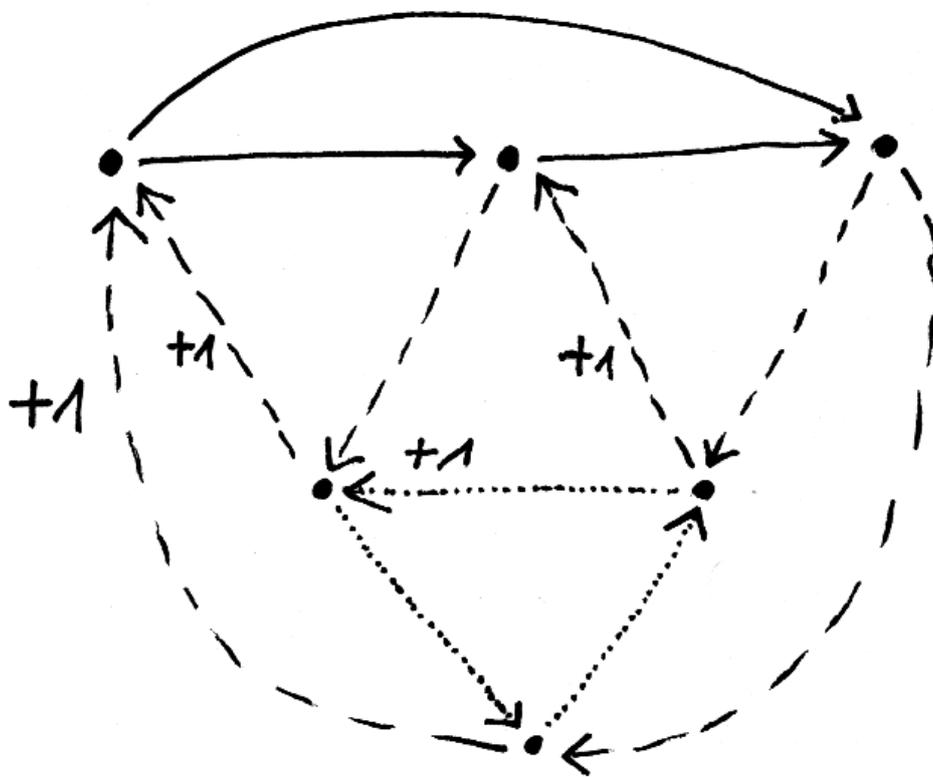
2.2.9. Aus [TG] 2.5.11 folgt, daß jeder Isomorphismus von additiven Kategorien additiv ist. Insbesondere brauchen wir die Additivität des Funktors  $[1]$  einer triangulierten Kategorie nicht extra zu fordern.

2.2.10 (**Komposition von Morphismen in einem Dreieck**). In einem ausgezeichneten Dreieck ist die Komposition von je zwei aufeinanderfolgenden Morphismen Null. In der Tat gibt es für jedes ausgezeichnete Dreieck  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow$  notwendig einen Morphismus von Dreiecken nach  $0 \rightarrow Z \rightarrow Z \rightarrow$  der Gestalt  $(?, v, \text{id})$  mit  $v : Y \rightarrow Z$  dem zweiten Morphismus unseres Ausgangsdreiecks. Folglich ist  $(0, v, \text{id})$  ein Morphismus von Dreiecken, und damit gilt  $v \circ u = 0$  für  $u : X \rightarrow Y$  den ersten Morphismus unseres Ausgangsdreiecks.

**Lemma 2.2.11.** *Ist  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie und  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  darin ein ausgezeichnetes Dreieck, so bilden für jedes Objekt  $W \in \mathcal{T}$  die Morphismen nach  $W$  eine lange exakte Sequenz von abelschen Gruppen*

$$\dots \leftarrow \mathcal{T}(X, W) \leftarrow \mathcal{T}(Y, W) \leftarrow \mathcal{T}(Z, W) \leftarrow \mathcal{T}([1]X, W) \leftarrow \dots$$

*Dasselbe gilt dual auch für die Morphismen von  $W$  in die Objekte unseres ausgezeichneten Dreiecks.*



Noch eine andere Darstellung eines Oktaeders

*Beweis.* In einem ausgezeichneten Dreieck ist die Komposition zweier aufeinanderfolgender Morphismen stets null, also ist unsere lange Sequenz schon einmal ein Komplex. Andererseits ist  $0 \rightarrow W \xrightarrow{\sim} W \rightarrow [1]0$  stets ein ausgezeichnetes Dreieck. Wir können also nach 2.1.7 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & [1]X \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & W & \xrightarrow{\sim} & W & \rightarrow & 0 \end{array}$$

stets kommutativ ergänzen, und das zeigt die Exaktheit unseres Komplexes bei  $\mathcal{T}(Y, W)$ . Drehen von Dreiecken nach 2.1.6 liefert den Rest.  $\square$

## Übungen

*Übung 2.2.12.* Sind bei einem Tripel von Morphismen, die zusammen einen Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken bilden, zwei der Morphismen Isomorphismen, so auch der Dritte. Hinweis: Lange exakte Sequenzen 2.2.11 und Fünferlemma und Yoneda-Lemma. Man beachte, daß wir dazu das Oktaederaxiom nicht benötigen.

*Übung 2.2.13 (Morphismen von ausgezeichneten Dreiecken, Eindeutigkeit).* Sei  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie. Gegeben ein kommutatives Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & [1]X \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' & \rightarrow & [1]X' \end{array}$$

gibt es nach Annahme einen Morphismus  $Z \rightarrow Z'$ , der es kommutativ vervollständigt. Man zeige, daß sowohl unter der Annahme  $\mathcal{T}([1]X, Z') = 0$  als auch unter der Annahme  $\mathcal{T}(Z, Y') = 0$  dieser Morphismus  $Z \rightarrow Z'$  sogar eindeutig bestimmt ist. Im Spezialfall von Homotopiekategorien war das 2.3.8. Hinweis: Dieser Morphismus  $Z \rightarrow Z'$  ist sogar bereits dadurch eindeutig bestimmt, daß er das linke beziehungsweise das rechte durch ihn neu entstehende Quadrat zum Kommutieren bringt.

*Übung 2.2.14 (Morphismen in ausgezeichneten Dreiecken, Eindeutigkeit).* Sei  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie. Gibt es zu einem Morphismus aus einem ausgezeichneten Dreieck keinen von Null verschiedenen Morphismus in die Gegenrichtung, so wird der fragliche Morphismus bereits durch die beiden anderen eindeutig festgelegt. Sind also in Formeln  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{r,s} [1]X$  ausgezeichnete Dreiecke für zwei Morphismen  $r, s : Z \rightarrow [1]X$  und gilt  $\mathcal{T}([1]X, Z) = 0$ , so folgt  $r = s$ . Im Spezialfall von Homotopiekategorien war das 2.3.9.

*Übung 2.2.15.* Wenn man in einem ausgezeichneten Dreieck bei zwei Morphismen das Vorzeichen ändert, entsteht wieder ein ausgezeichnetes Dreieck.

*Übung 2.2.16.* Die opponierte Kategorie einer triangulierten Kategorie  $\mathcal{T}$  ist mit der entgegengesetzten homologischen Verschiebung  $[1]_{\mathcal{T}^{\text{opp}}} := [-1]_{\mathcal{T}}^{\text{opp}}$  und „denselben“ ausgezeichneten Dreiecken versehen auch eine triangulierte Kategorie. Sie heißt die **opponierte triangulierte Kategorie**.

*Übung 2.2.17 (Summen und Produkte von Dreiecken).* Man zeige, daß die direkte Summe von zwei ausgezeichneten Dreiecken  $(X, Y, Z)$  und  $(X', Y', Z')$  wieder ein ausgezeichnetes Dreieck ist. Hinweis: Man betrachte den Abbildungskegel  $K$  über  $X \oplus X' \rightarrow Y \oplus Y'$  und konstruiere Morphismen  $Z \rightarrow K$  und  $Z' \rightarrow K$  und zeige mit Yonedalemma, Fünferlemma und 2.2.11, daß sie einen Isomorphismus  $Z \oplus Z' \xrightarrow{\sim} K$  liefern. Analoges gilt mit demselben Argument für beliebige Summen und Produkte. Man beachte aber, daß der Funktor von der Kategorie der Komplexe einer abelschen Kategorie in ihre Homotopiekategorie keineswegs mit beliebigen Summen oder Produkten verträglich sein muß.

## 2.3 Triangulierung von Homotopiekategorien

**Satz 2.3.1 (Homotopiekategorien als triangulierte Kategorien).** Für jede additive Kategorie  $\mathcal{I}$  ist ihre Homotopiekategorie  $\text{Hot}(\mathcal{I})$  mit ihrer durch Verschiebung und Negativieren der Differentiale 2.1.1 erklärten  $\mathbb{Z}$ -Operation und den in 2.1.2 durch Abbildungskegel erklärten ausgezeichneten Dreiecken eine triangulierte Kategorie.

*Beweis.* Alle Axiome mit Ausnahme des Oktaederaxioms sind entweder offensichtlich erfüllt oder werden in 2.1 bewiesen. Um auch noch das Oktaederaxiom zu prüfen, reicht es zu zeigen, daß für Morphismen von Komplexen  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  die Sequenz

$$\text{Keg}(f) \xrightarrow{u} \text{Keg}(g \circ f) \xrightarrow{v} \text{Keg}(g) \xrightarrow{w} [1] \text{Keg}(f)$$

ein ausgezeichnetes Dreieck ist, wenn diese Komplexe und Morphismen gegeben werden durch

$$\begin{array}{ccccccc} X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} & X^{n+1} \oplus Z^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & Y^{n+1} \oplus Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \\ \downarrow \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ g \circ f & \partial \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ g & \partial \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ -f & -\partial \end{pmatrix} \\ X^{n+2} \oplus Y^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus Z^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & Y^{n+2} \oplus Z^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & X^{n+3} \oplus Y^{n+2} \end{array}$$

Hier und im Folgenden verwenden wir unsere Konvention [KAG] 2.1.17, nach der Elemente von direkten Summen als Spaltenmatrizen aufgefaßt werden, mit den

vorne stehenden Komponenten oben, und Morphismen zwischen direkten Summen durch Matrizen von Homomorphismen zwischen den Summanden, die durch Matrixmultiplikation von links operieren. Um zu zeigen, daß dies Dreieck ausgezeichnet ist, gilt es, eine Homotopieäquivalenz  $h : \text{Keg}(g) \xrightarrow{\sim} \text{Keg}(u)$  anzugeben derart, daß

$$\begin{array}{ccccc} \text{Keg}(g \circ f) & \xrightarrow{v} & \text{Keg}(g) & \xrightarrow{w} & [1] \text{Keg}(f) \\ \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ \text{Keg}(g \circ f) & \longrightarrow & \text{Keg}(u) & \longrightarrow & [1] \text{Keg}(f) \end{array}$$

in der Homotopiekategorie kommutiert. Nun haben wir ja

$$\text{Keg}(u)^n = X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$$

mit Randoperator

$$\begin{pmatrix} \partial & 0 & 0 & 0 \\ f & -\partial & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\partial & 0 \\ 0 & g & g \circ f & \partial \end{pmatrix}$$

und es reicht zu zeigen, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : Y^{n+1} \oplus Z^n \rightarrow X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$$

eine Homotopieäquivalenz  $h$  mit den gewünschten Eigenschaften liefert. Explizite Rechnung zeigt, daß sie eine Kettenabbildung definiert und das rechte Quadrat unseres Diagramms der sechs Komplexe von eben zum Kommutieren bringt. Definieren wir eine Abbildung in die Gegenrichtung  $k : \text{Keg}(u) \rightarrow \text{Keg}(g)$  durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n \rightarrow Y^{n+1} \oplus Z^n$$

so erhalten wir auch eine Kettenabbildung, von der klar ist, daß sie das linke Quadrat mit umgekehrtem Mittelpfeil zum Kommutieren bringt. Weiter gilt offensichtlich  $k \circ h = \text{id}$ , so daß nur zu zeigen bleibt, daß  $h \circ k$  homotop ist zur Identität auf  $\text{Keg}(u)$ . Solch eine Homotopie wird jedoch gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

*Ergänzung 2.3.2.* Wir haben hier genau genommen nicht nur das Oktaederaxiom im Fall der Homotopiekategorie einer additiven Kategorie nachgewiesen, sondern sogar darin einen Funktor von der Kategorie aller Paare von verknüpfbaren Morphismen in die Kategorie aller Oktaeder konstruiert, der darüberhinaus verträglich ist mit unseren funktoriellen Abbildungsregeln aus 2.1.4 in einer Weise, die hier nicht ausbuchstabiert werden soll.

2.3.3. Unter einem **internen Automorphismus** einer Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  mit Einsobjekt  $\mathbb{I}$  verstehen wir einen Automorphismus  $\alpha : \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$  der zugrundeliegenden einfachen Kategorie, der in  $\text{Cat}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  isomorph ist zu einem Funktor der Gestalt  $E \otimes$  für eine Einheit  $E$ . Ein Datum  $(E, \iota)$  bestehend aus einer Einheit  $E$  und einer Isotransformation  $\iota : \alpha \xrightarrow{\cong} (E \otimes)$  nennen wir dann eine **Realisierung** unseres internen Automorphismus. Solch eine Realisierung entspricht eindeutig einem Paar  $(E, \tau)$  bestehend aus einer Einheit und einem Isomorphismus  $\tau : \alpha(\mathbb{I}) \xrightarrow{\sim} E$ , indem wir  $(E, \alpha)$  das Paar  $(E, \tau)$  zuordnen mit  $\tau$  der Komposition  $\alpha(\mathbb{I}) \xrightarrow{\sim} E \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{\sim} E$ . Insbesondere ist so eine Realisierung eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus und jede Realisierung liefert für stabil universell verschmelzbare Objekte  $M, N$  dieselben Isomorphismen

$$\alpha(M \otimes N) \xrightarrow{\sim} \alpha(M) \otimes N \xrightarrow{\sim} M \otimes \alpha(N)$$

Unter einem **Signumsautomorphismus** einer Schmelzkategorie mit Vorzeichen verstehen wir einen internen Automorphismus derart, daß die zugehörige Einheit  $E$  eine Signumseinheit ist, daß also auf  $E \otimes E$  die Vertauschung das Negative der Identität ist.

2.3.4 (**Interne triangulierte Struktur einer Schmelzkategorie**). Eine Struktur von triangulierter Kategorie auf der einfachen Kategorie einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen und internem Hom heiße eine **interne triangulierte Struktur**, wenn der zugehörige Automorphismus  $[1]$  ein Signumsautomorphismus ist und wenn außerdem für jedes ausgezeichnete Dreieck  $L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow [1]L$  und jedes Objekt  $K$  auch die drei Dreiecke

$$\begin{aligned} L \otimes K &\rightarrow M \otimes K \rightarrow N \otimes K \rightarrow [1](L \otimes K) \\ K \rightrightarrows L &\rightarrow K \rightrightarrows M \rightarrow K \rightrightarrows N \rightarrow [1](K \rightrightarrows L) \\ L \rightrightarrows K &\leftarrow M \rightrightarrows K \leftarrow N \rightrightarrows K \leftarrow [-1](L \rightrightarrows K) \end{aligned}$$

ausgezeichnete Dreiecke sind. Bei der Konstruktion des jeweiligen letzten Morphismus haben wir hier stillschweigend Isomorphismen  $([1]L) \otimes K \xrightarrow{\sim} [1](L \otimes K)$  und dergleichen verwendet, die daher rühren, daß unser Automorphismus  $[1]$  intern ist.

*Beispiel 2.3.5.* Die in 2.3.1 eingeführte Struktur als triangulierte Kategorie auf der Kategorie der Homotopiekomplexe  $\text{Hot} = \text{Hot}(\text{Ab})$  ist offensichtlich intern für die in [TSK] 2.5.3 erklärte Struktur als Schmelzkategorie.

**Satz 2.3.6 (Kurze exakte Sequenzen als ausgezeichnete Dreiecke).** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und  $i\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$  die Kategorie aller injektiven Objekte von  $\mathcal{A}$ . Man betrachte die Kategorie  $\text{Hot}^{0+}(i\mathcal{A}) := \{X \in \text{Hot}(i\mathcal{A}) \mid X^q = 0 \text{ falls } q < 0 \text{ und } \mathcal{H}^q X = 0 \text{ falls } q \neq 0\}$ . So gilt:

1. Das Bilden der nullten Kohomologie induziert eine Äquivalenz von Kategorien  $\mathcal{H}^0 : \text{Hot}^{0+}(i\mathcal{A}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}$ ;
2. Das Bilden der nullten Kohomologie induziert eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{ausgezeichnete Dreiecke} \\ X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X \\ \text{in } \text{Hot}(i\mathcal{A}) \text{ mit } X, Y, Z \in \text{Hot}^{0+}(i\mathcal{A}) \end{array} \right\} \xrightarrow{\cong} \left\{ \begin{array}{c} \text{kurze exakte} \\ \text{Sequenzen in } \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

*Vorschau 2.3.7.* Wir werden wir dieses Resultat in einer besseren Terminologie in 2.7.14 wiederfinden.

*Beweis.* Der erste Teil folgt sofort aus dem Hauptlemma der homologischen Algebra [TG] 3.2.6. Für den Rest des Beweises führen wir eine bequeme Terminologie ein und nennen die im Satz beschriebenen ausgezeichneten Dreiecke von  $\text{Hot}(i\mathcal{A})$  „speziell“. Die Homologiesequenz 2.1.10 zeigt, daß  $\mathcal{H}^0$  aus jedem unserer speziellen ausgezeichneten Dreiecke eine kurze exakte Sequenz macht. Nach Teil 1 liefert also  $\mathcal{H}^0$  schon mal einen treuen Funktor von unserer Kategorie von speziellen ausgezeichneten Dreiecken in die Kategorie der kurzen exakten Sequenzen aus  $\mathcal{A}$ . Als nächstes zeigen wir, daß unser Funktor surjektiv ist auf Isomorphieklassen von Objekten. Hierzu müssen wir uns daran erinnern, daß wir in [TG] 3.6.1 gezeigt hatten, daß in einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven jede kurze exakte Sequenz  $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$  isomorph ist zum Kernkomplex eines Doppelkomplexes aus injektiven Objekten mit in positiven Graden exakten Spalten und kurzen exakten Zeilen. Da diese notwendig spalten, hat unser Doppelkomplex die Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & I^2 & \hookrightarrow & I^2 \oplus J^2 & \twoheadrightarrow & J^2 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & I^1 & \hookrightarrow & I^1 \oplus J^1 & \twoheadrightarrow & J^1 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & I^0 & \hookrightarrow & I^0 \oplus J^0 & \twoheadrightarrow & J^0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C \end{array}$$

Die mittlere Vertikale ist folglich der Abbildungskegel  $K(u)$  einer Kettenabbildung  $u : [-1]J \rightarrow I$  und das ausgezeichnete Dreieck  $[-1]J \rightarrow I \rightarrow K(u) \rightarrow J$

liefert mit Drehen ein ausgezeichnetes Dreieck  $I \rightarrow K(u) \rightarrow J \rightarrow [1]I$ . Jetzt müssen wir noch zeigen, daß unser Funktor  $\mathcal{H}^0$  volltreu ist. Seien dazu zwei spezielle ausgezeichnete Dreiecke  $(X, Y, Z)$  und  $(X', Y', Z')$  gegeben. Jeder Morphismus der zugehörigen kurzen exakten Sequenzen liefert ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & [1]X \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & f \downarrow \\ X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' & \rightarrow & [1]X' \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß darin die beiden linken Quadrate kommutieren. Nun beachten wir

$$\text{Hot}([1]X, Z') = 0$$

nach dem Lemma [TG] 3.2.6 über injektive Auflösungen und folgern aus 2.2.11 die Injektivität von  $\text{Hot}(Z, Z') \rightarrow \text{Hot}(Y, Z')$ . In anderen Worten ist unser Morphismus  $h : Z \rightarrow Z'$  der einzige Morphismus von  $Z$  nach  $Z'$ , der das mittlere Quadrat zum Kommutieren bringt. Andererseits gibt es aber nach 2.1.7 einen Morphismus von  $Z$  nach  $Z'$ , der alle drei Quadrate zum Kommutieren bringt. Damit ist klar, daß  $(f, g, h)$  schon ein Morphismus von Dreiecken sein muß.  $\square$

## Übungen

*Übung 2.3.8.* Gegeben ein kommutatives Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & [1]X \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' & \rightarrow & [1]X' \end{array}$$

gibt es nach 2.1.7 einen Morphismus  $Z \rightarrow Z'$ , der es kommutativ vervollständigt. Man zeige, daß unter der Annahme  $\text{Hot}_{\mathcal{I}}([1]X, Z') = 0$  dieser Morphismus  $Z \rightarrow Z'$  sogar eindeutig bestimmt ist.

*Übung 2.3.9.* Gibt es zu einem Morphismus aus einem ausgezeichneten Dreieck keinen von Null verschiedenen Morphismus in die Gegenrichtung, so wird der fragliche Morphismus bereits durch die beiden anderen eindeutig festgelegt. Sind also in Formeln  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{r,s} [1]X$  ausgezeichnete Dreiecke für zwei Morphismen  $r, s : Z \rightarrow [1]X$  und gilt  $\text{Hot}_{\mathcal{I}}([1]X, Z) = 0$ , so folgt  $r = s$ .

*Übung 2.3.10.* Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $M \xrightarrow{\sim} N$  ein Quasiisomorphismus von Komplexen in  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$  und  $P$  ein Komplex projektiver Objekte von  $\mathcal{A}$ , der in Richtung der Differentiale beschränkt ist, so ist auch die auf den Hom-Komplexen induzierte Abbildung ein Quasiisomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, N)$$

Man folgere für eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  mit genug Projektiven und genug Injektiven kanonische Isomorphismen  $\mathbb{L}\text{Ext}_q^{\mathcal{A}}(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^q(M, N)$ . Hinweis: Man ergänze unseren Quasiisomorphismus zu einem ausgezeichneten Dreieck  $M \xrightarrow{\sim} N \rightarrow K \rightarrow$  in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  und beachte, daß dann  $K$  exakt ist. Mit dem Hauptlemma der homologischen Algebra [TS] 5.6.14 folgt  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}([q]P, K) = 0$  für alle  $q$  und mit der langen exakten Sequenz 2.2.11 folgt die Behauptung. Noch stärkere Aussagen in dieser Richtung enthält die Interpretation [TD] 2.6.10 von  $\text{Ext}$  und dem a priori anders definierten  $\mathbb{L}\text{Ext}$  als dieselben Morphismenräume in der derivierten Kategorie.

*Übung 2.3.11.* In einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen und interner triangulierter Struktur bilden die starren Objekte stets eine volle triangulierte Unterkategorie. Hinweis: [TSK] 3.4.10. Insbesondere besteht die vom Einsobjekt erzeugte volle triangulierte Unterkategorie  $\langle \mathbb{I} \rangle_{\Delta}$  stets aus starren Objekten.

*Übung 2.3.12.* Gegeben ein Krings  $R$  endlicher Torsionsdimension ist  $\text{Der}(R\text{-Mod})$  nach ?? eine Schmelzkategorie und  $\langle R \rangle_{\Delta}$  besteht nach [TD] 2.3.11 aus starren Objekten.

## 2.4 Triangulierte Funktoren

2.4.1. Ein  $\mathbb{Z}$ -Funktors  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  von  $\mathbb{Z}$ -Kategorien ist definiert als ein Paar  $(F, u)$  bestehend aus einem Funktors  $F$  nebst einer Isotransformation  $u : [1] \circ F \xrightarrow{\sim} F \circ [1]$ , die die  $\mathbb{Z}$ -Struktur unseres  $\mathbb{Z}$ -Funktors heißen möge. Die Verknüpfung von  $\mathbb{Z}$ -Funktors sei definiert durch  $(F, u) \circ (G, v) = (F \circ G, uG \circ Fv)$ . Sie ist assoziativ.

2.4.2. Gegeben eine  $\mathbb{Z}$ -Struktur  $u$  eines Funktors wie eben ist natürlich auch ihr Negatives  $(-u)$  eine  $\mathbb{Z}$ -Struktur für denselben Funktors.

2.4.3. Die Menge aller  $\mathbb{Z}$ -Funktors von einer  $\mathbb{Z}$ -Kategorie  $\mathcal{A}$  in eine  $\mathbb{Z}$ -Kategorie  $\mathcal{B}$  notieren wir  $\text{Cat}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . Gegeben ein Universum  $\mathfrak{U}$  wie in [LA2] ?? bezeichne  $\mathfrak{U}\text{Cat}^{\mathbb{Z}}$  die Kategorie aller  $\mathbb{Z}$ -Kategorien, deren zugrundeliegende Kategorie eine  $\mathfrak{U}$ -Kategorie ist. Als Morphismen von  $\mathfrak{U}\text{Cat}^{\mathbb{Z}}$  nehmen wir unsere  $\mathbb{Z}$ -Funktors.

**Definition 2.4.4.** Eine  $\mathbb{Z}$ -verträgliche oder kurz **verträgliche Transformation**  $(F, u) \Rightarrow (G, v)$  zwischen  $\mathbb{Z}$ -Funktors ist eine Transformation  $\tau : F \Rightarrow G$ , die mit den jeweiligen  $\mathbb{Z}$ -Strukturen verträglich ist in dem Sinne, daß das Diagramm von Transformationen

$$\begin{array}{ccc} [1] \circ F & \xrightarrow{u} & F \circ [1] \\ [1] \tau \downarrow & & \downarrow \tau[1] \\ [1] \circ G & \xrightarrow{v} & G \circ [1] \end{array}$$

kommutiert. Jede Verknüpfung verträglicher Transformationen ist wieder verträglich und die Menge  $\text{Cat}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  wird mit diesen Transformationen als Morphismen eine Kategorie. Wir notieren die Menge der verträglichen Transformationen

$$\text{Cat}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(F, G)$$

oder abkürzend  $\text{Trans}^{\mathbb{Z}}(F, G)$ . Eine Adjunktion  $(L, R)$  von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren nennen wir eine **verträgliche Adjunktion**, wenn die zugehörigen Transformationen  $\text{Id} \Rightarrow RL$  und  $LR \Rightarrow \text{Id}$  verträglich sind. Gegeben eine Adjunktion zwischen Funktoren zwischen zwei  $\mathbb{Z}$ -Kategorien existiert für jede  $\mathbb{Z}$ -Struktur auf einem der beiden genau eine  $\mathbb{Z}$ -Struktur auf dem anderen derart, daß die Adjunktion mit diesen  $\mathbb{Z}$ -Strukturen verträglich ist.

*Vorschau 2.4.5.* Man kann auch allgemeiner für eine beliebige Gruppe  $\Gamma$  den Begriff einer  $\Gamma$ -Kategorie und eines  $\Gamma$ -Funktors und einer verträglichen Transformation und einer verträglichen Adjunktion von  $\Gamma$ -Funktoren einführen. Das will ich hier nicht weiter verfolgen.

**Definition 2.4.6.** Ein **triangulierter Funktor** von einer triangulierten Kategorie in eine weitere ist ein additiver  $\mathbb{Z}$ -Funktors, der ausgezeichnete Dreiecke zu ausgezeichneten Dreiecken macht.

**Definition 2.4.7.** Eine Menge von Objekten einer triangulierten Kategorie heißt ein **trianguliertes System**, wenn gilt:

1. Das Nullobjekt gehört zu unserer Menge;
2. Mit je zwei Objekten eines ausgezeichneten Dreiecks gehört auch das Dritte zu unserer Menge.

Ein trianguliertes System, das mit jedem Objekt auch alle seine direkten Summanden enthält, nennen wir ein **Verdiersystem**.

2.4.8. Nach der Definition einer triangulierten Kategorie 2.2.4 haben wir für jedes Objekt  $X$  ein ausgezeichnetes Dreieck  $(X, 0, [1]X)$  und jeder Isomorphismus  $X \xrightarrow{\sim} Y$  paßt in ein ausgezeichnetes Dreieck  $(X, Y, 0)$ . Folglich gehören zu einem gegebenen triangulierten System mit einem Objekt  $X$  auch alle  $[n]X$  und alle zu  $X$  isomorphen Objekte.

2.4.9 (**Diskussion der Terminologie**). Kashiwara und Schapira verwenden in [KS90] die Bezeichnung **Nullsystem** für das, was ich ein trianguliertes System nenne. Der Terminologie von Kashiwara und Schapira folge ich nicht, da ich derartige Systeme keineswegs nur betrachten will, um sie wegzuteilen. Die Bezeichnung als „Verdiersystem“ ist nicht üblich. Verdier selbst benutzt die Bezeichnung **souscatégorie épaisse**.

2.4.10. Verstehen wir ein trianguliertes System als volle Unterkategorie, so erbt es in natürlicher Weise die Struktur einer triangulierten Kategorie. Diejenigen Objekte, die von einem triangulierten Funktor zu Null gemacht werden, bilden offensichtlich sogar ein Verdiersystem. Das kleinste triangulierte System beziehungsweise Verdiersystem, das eine vorgegebene Menge von Objekten umfaßt, bezeichnen wir als das **von dieser Menge erzeugte triangulierte System** beziehungsweise **Verdiersystem**. Das von einer Menge von Objekten  $\mathcal{N}$  erzeugte triangulierte System notieren wir  $\langle \mathcal{N} \rangle = \langle {}_! \mathcal{N} \rangle_{\Delta}$ . Hier verwenden wir einen unteren Index  $\Delta$ , wenn wir betonen wollen, daß das triangulierte Erzeugnis gemeint ist, und in Anlehnung an unsere Vereinbarung aus [AL] 3.5.1 das untere Ausrufezeichen, wenn wir betonen wollen, daß das Symbol in der Klammer nicht einen einzelnen Erzeuger meint, sondern ein ganzes System von Erzeugern. Besteht  $\mathcal{N}$  aus einem einzigen Objekt  $N$ , so schreiben wir auch kürzer  $\langle N \rangle$  oder  $\langle N \rangle_{\Delta}$ . Für das von was auch immer erzeugte Verdiersystem verwenden wir analog die Notation  $\langle \rangle_{\Delta \ominus}$ .

*Beispiel 2.4.11.* In der Homotopiekategorie der Kategorie der Vektorräume über einem Körper  $k$  besteht das von  $k^2$  erzeugte Verdiersystem aus allen in beide Richtungen beschränkten Komplexen mit endlichdimensionalen Einträgen. Das von  $k^2$  erzeugte triangulierte System enthält jedoch nur beschränkte Komplexe mit endlichdimensionalen Einträgen und gerader Eulercharakteristik, wir haben also  $\langle k^2 \rangle_{\Delta} \neq \langle k^2 \rangle_{\Delta \ominus}$ .

2.4.12. Ist ein triangulierter Funktor von triangulierten Kategorien volltreu auf einer vollen unter allen Verschiebungen  $[n]$  stabilen Unterkategorie, so ist er auch volltreu auf dem von dieser Unterkategorie erzeugten triangulierten System, ja sogar Verdiersystem. Das folgt sofort aus 2.2.11 und dem Fünferlemma. Das Anwenden dieser Erkenntnis bezeichnet man oft als **dévissage**, französisch für „Aufschrauben“.

## Übungen

*Übung 2.4.13.* Ist ein triangulierter Funktor eine Äquivalenz von Kategorien, so ist auch jeder dazu quasiinverse Funktor trianguliert. In anderen Worten kann man unter keinen Umständen in einer triangulierten Kategorie noch zusätzliche Dreiecke auszeichnen derart, daß man wieder eine triangulierte Kategorie erhält.

*Übung 2.4.14.* Man betrachte den Funktor  $\mathbb{D}$ , der jedem Komplex  $C$  von abelschen Gruppen seinen dualen Komplex  $\mathbb{D}C := C^*$  im Sinne von [TG] 5.1.13 zuordnet, und versehe ihn mit der  $\mathbb{Z}$ -Struktur, die durch diejenigen Morphismen  $[1]\mathbb{D}C \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}[1]C$  erklärt wird, die auf der Komponente vom Grad  $n$  beider Komplexe das  $(-1)^n$ -fache der offensichtlichen Identifikation sind. Mit dieser  $\mathbb{Z}$ -Struk-

tur ist  $\mathbb{D}$  ein triangulierter Funktor

$$\mathbb{D} : \text{Hot}_{\text{Ab}} \rightarrow \text{Hot}_{\text{Ab}}^{\text{opp}}$$

*Übung 2.4.15.* Gegeben ein triangulierter Funktor  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  und  $Y \in \mathcal{T}$  bilden die Objekte  $X \in \mathcal{T}$  mit  $\mathcal{T}(X, [q]Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}'(FX, F[q]Y)$  für alle  $q \in \mathbb{Z}$  ein Verdiersystem in  $\mathcal{T}$ .

## 2.5 Quotienten triangulierter Kategorien

2.5.1. Seien  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie und  $\mathcal{N}$  eine Menge von Objekten von  $\mathcal{T}$ . Im folgenden konstruieren wir ein Paar  $(\mathcal{T}/\mathcal{N}, \text{can})$  bestehend aus einer triangulierten Kategorie  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$  und einem triangulierten Funktor  $\text{can} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$  derart, daß gilt:

1. Jedes Objekt aus  $\mathcal{N}$  wird unter  $\text{can}$  zu Null in  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ ;
2. Ist  $\mathcal{D}$  eine weitere triangulierte Kategorie und  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$  ein triangulierter Funktor, der alle Objekte aus  $\mathcal{N}$  zu Null macht, so gibt es genau einen triangulierten Funktor  $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $F = \tilde{F} \circ \text{can}$ .

Ein derartiges Paar ist in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir nennen es den **triangulierten Quotienten von  $\mathcal{T}$  nach  $\mathcal{N}$** .

2.5.2. Ist  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$  ein triangulierter Funktor in eine weitere triangulierte Kategorie, der die Objekte aus  $\mathcal{N}$  zu Null macht und für den der induzierte Funktor eine Äquivalenz von Kategorien  $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$  ist, so nenne ich  $F$  einen **Quotientenfunktor** oder genauer, wenn ich Verwechslungen mit Quotientenfunktoren im Kontext abelscher Kategorien vermeiden will, einen **triangulierten Quotientenfunktor**. Man erinnere, daß nach 2.4.13 in diesem Fall jeder Quasiinverse zu unserer Äquivalenz auch trianguliert ist.

**Satz 2.5.3 (Triangulierte Quotienten durch Lokalisierung).** *Seien  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie und  $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$  ein trianguliertes System. So gilt:*

1. Die Menge  $S(\mathcal{K})$  aller Morphismen mit Kegel in  $\mathcal{K}$  ist ein Oresystem;
2. Die an  $S(\mathcal{K})$  lokalisierte Kategorie  $\mathcal{T}_{S(\mathcal{K})}$  wird eine triangulierte Kategorie, wenn wir sie mit der von  $\mathcal{T}$  induzierten  $\mathbb{Z}$ -Operation [1] versehen und als ausgezeichnete Dreiecke alle Dreiecke nehmen, die isomorph sind zu Bildern ausgezeichneter Dreiecke von  $\mathcal{T}$ ;

3. Der kanonische Funktor  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_{S(\mathcal{K})}$  ist ein triangulierter Quotient von  $\mathcal{T}$  nach  $\mathcal{K}$ . Die davon annullierten Objekte sind genau alle direkten Summanden von Objekten von  $\mathcal{K}$  und die davon zu Isomorphismen gemachten Morphismen genau alle Morphismen mit Abbildungskegel in derartigen Summanden, die mithin sogar ein gesättigtes Oresystem bilden.

2.5.4. Mit diesem Satz ist auch klar, daß für jede Menge von Objekten  $\mathcal{N}$  einer triangulierten Kategorie  $\mathcal{T}$  der triangulierte Quotient  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$  existiert: Man wendet eben die Konstruktion aus dem Satz an auf das von dieser Menge erzeugte triangulierte System  $\langle \mathcal{N} \rangle_\Delta$  und setzt also in Formeln

$$\mathcal{T}/\mathcal{N} := \mathcal{T}_{S(\langle \mathcal{N} \rangle_\Delta)}$$

Zusätzlich zeigt unser Satz dann, daß die von  $\text{can} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$  zu Null gemachten Objekte genau die Objekte des von  $\mathcal{N}$  erzeugten Verdiersystems sind und daß dieses Verdiersystem aus allen direkten Summanden des von  $\mathcal{N}$  erzeugten triangulierten Systems besteht.

*Beweis.* 1. Daß unser System  $S := S(\mathcal{K})$  stabil ist unter Verknüpfung, folgt sofort aus dem Oktaederaxiom. Daß sich jeder Winkel

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow s & \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

mit  $s \in S$  ergänzen läßt zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & X \\ t \downarrow & & \downarrow s \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

mit  $t \in S$  folgt auch aus dem Oktaederaxiom, indem man nämlich erst das Dreieck  $X \rightarrow Z \rightarrow N \rightarrow$  über  $s$  bildet und damit den Oktaeder zur Komposition  $Y \rightarrow Z \rightarrow N$ . Dessen untere Ecke, also die dritte Ecke des Dreiecks über der Komposition, ist dann das gesuchte  $W$ . Sind schließlich  $f, g : X \rightarrow Y$  gegeben und  $s \in S$  und  $sf = sg$ , also  $s \circ (f - g) = 0$ , so betrachten wir das ausgezeichnete Dreieck über  $s$  und folgern mit 2.2.11 die Existenz von  $h : X \rightarrow W$  mit  $(f - g) = r \circ h$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & & V & \xrightarrow{t} & X & & \\ & & \uparrow [1] & \nearrow h & \downarrow f-g & & \\ W & \xrightarrow{r} & Y & \xrightarrow{s} & Z & \xrightarrow{[1]} & \rightarrow \end{array}$$

Bilden wir nun, wie durch die gepunkteten Pfeile angedeutet, das ausgezeichnete Dreieck über  $h$ , so haben wir  $t \in S$  und  $(f - g) \circ t = 0$ . Damit haben wir gezeigt, daß unser System linksore ist im Sinne von 1.4.3. Daß es auch rechtsore sein muß, folgt durch Übergang zur opponierten Kategorie.

2. Nach 1.4.26 ist unsere lokalisierte Kategorie  $\mathcal{T}_S$  additiv und der kanonische Funktor  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_S$  desgleichen. Die  $\mathbb{Z}$ -Operation geht ohne Schwierigkeiten auf die Lokalisierung über. Es bleibt, die Axiome für ausgezeichnete Dreiecke zu prüfen. Das Gültigkeit des ersten Axioms  $(X, X, 0)$  ist offensichtlich. Da jeder Morphismus von  $\mathcal{T}_S$  isomorph ist zum Bild eines Morphismus von  $\mathcal{T}$ , läßt sich auch jeder Morphismus von  $\mathcal{T}_S$  in ein ausgezeichnetes Dreieck einbetten. Auch das Drehen von Dreiecken ist unproblematisch. Wir zeigen nun das Axiom zur Existenz einer Ergänzung zu einem Morphismus ausgezeichneter Dreiecke. Wir dürfen dazu nach 1.4.29 ausgehen von einem kommutativen Diagramm

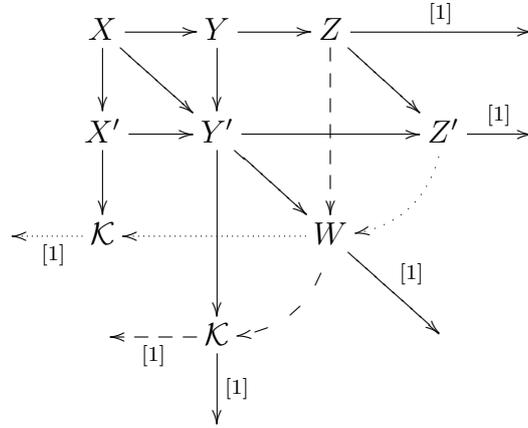
$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & [1]X \\
 \uparrow \cdots & & \uparrow \cdots & & \uparrow \cdots & & \uparrow \cdots \\
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & [1]A \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & [1]X'
 \end{array}$$

in  $\mathcal{T}$  mit ausgezeichneten Dreiecken aus  $\mathcal{T}$  in den Horizontalen, in denen die gepunkteten Pfeile Morphismen aus  $S$  sind und wir die gestrichelten Pfeile nach dem entsprechenden Axiom in  $\mathcal{T}$  dazu finden können. Nach 2.5.5 gehört dann der gestrichelte Pfeil nach oben auch zu  $S$  und das Ergänzungsaxiom folgt für die lokalisierte Kategorie. Das Oktaederaxiom folgt wieder ohne weitere Schwierigkeiten daraus, daß jedes kommutative Dreieck in  $\mathcal{T}_S$  isomorph ist zum Bild eines kommutativen Dreiecks in  $\mathcal{T}$ .

3. Die universelle Eigenschaft scheint mir evident. Geht ein Objekt unter dem Quotientenfunktor nach Null, so muß die Identität darauf zur Nullabbildung werden. Schreiben wir diese Bedingung in der Kategorie der Brüche, so impliziert sie leicht, daß unser Objekt direkter Summand eines Objekts von  $\mathcal{K}$  sein muß.  $\square$

**Lemma 2.5.5.** *Sei  $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$  ein trianguliertes System in einer triangulierten Kategorie. Haben bei einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken zwei der Objektmorphismen Kegel in  $\mathcal{K}$ , so auch der Dritte.*

*Beweis.* Wir argumentieren anhand des Diagramms



Hierin haben wir durch zweimaliges Anwenden des Oktaederaxioms auf die beiden Kompositionen im Rechteck oben links die beiden gestrichelt beziehungsweise gepunktelt gezeichneten ausgezeichneten Dreiecke erhalten und sehen so, daß sowohl  $Z \rightarrow W$  als auch  $Z' \rightarrow W$  Kegel in  $\mathcal{K}$  haben. Mit nochmaligem Anwenden des Oktaederaxioms auf die Komposition  $Z \rightarrow Z' \rightarrow W$  folgt dann, daß auch  $Z \rightarrow Z'$  Kegel in  $\mathcal{K}$  hat.  $\square$

2.5.6. Gegeben eine triangulierte Kategorie  $\mathcal{T}$  und darin eine Menge von Objekten  $\mathcal{N}$  setzen wir

$$\mathcal{N}^\perp := \{I \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(N, I) = 0 \forall N \in \mathcal{N}\}$$

und bezeichnen die Objekte von  $\mathcal{N}^\perp$  als  $\mathcal{N}$ -**rechtsentfalteter**. Offensichtlich ist  $\mathcal{N}^\perp$  stets ein Verdiersystem und nach 1.3.9 besteht es genau aus den  $S(\langle \mathcal{N} \rangle_\Delta)$ -rechtsentfalteten Objekten im Sinne von 1.3.7. Insbesondere induziert der Quotientenfunktor nach 1.3.7 einen volltreuen Funktor  $\mathcal{N}^\perp \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}/\mathcal{N}$  und dessen essentielles Bild besteht aus denjenigen Objekten des Quotienten, auf denen der partielle Rechtsadjungierte des Quotientenfunktors existiert. Opponiert setzen wir  ${}^\perp\mathcal{N} := \{P \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(P, N) = 0 \forall N \in \mathcal{N}\}$  und bezeichnen die Objekte von  ${}^\perp\mathcal{N}$  als  $\mathcal{N}$ -**linksentfalteter** und erhalten die opponierten Aussagen.

2.5.7. Gegeben eine triangulierte Kategorie  $\mathcal{T}$  und darin eine Menge von Objekten  $\mathcal{N}$  ist offensichtlich das Produkt einer Familie  $\mathcal{N}$ -rechtsentfalteter Objekte, wenn es existiert, wieder  $\mathcal{N}$ -rechtsentfalteter. Dasselbe gilt allgemeiner für Limites  $\mathcal{N}$ -rechtsentfalteter Objekte. Opponiert sind Kolimites  $\mathcal{N}$ -linksentfalteter Objekte wieder  $\mathcal{N}$ -linksentfalteter.

## 2.6 Derivierte Kategorien

**Definition 2.6.1.** Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  bezeichnen wir den Verdierquotienten im Sinne von 2.5.3 der zugehörigen Homotopiekategorie nach dem

Verdiersystem aller exakten Komplexe mit

$$\text{Der}_{\mathcal{A}} = \text{Der}(\mathcal{A}) := \text{Hot}(\mathcal{A})/(\text{exakte Komplexe})$$

und nennen diese triangulierte Kategorie die **derivierte Kategorie von  $\mathcal{A}$** .

2.6.2. Nach der in 2.5.3 gegebenen Konstruktion ist die derivierte Kategorie die Lokalisierung der Homotopiekategorie nach allen Quasiisomorphismen im Sinne von [TG] 5.1.15. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung liefert uns folglich Funktoren

$$\mathcal{H}^i : \text{Der}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$$

mit der Eigenschaft, daß jedes ausgezeichnete Dreieck eine lange exakte Sequenz liefert und daß ein Morphismus ein Isomorphismus ist genau dann, wenn er Isomorphismen auf allen  $\mathcal{H}^i$  induziert. Morphismen in der derivierten Kategorie notiere ich manchmal  $\rightarrow_{\text{Der}}$  und Isomorphismen  $\xrightarrow{\sim}_{\text{Der}}$ .

2.6.3. Gegeben ein Ring  $A$  verwenden wir auch die abkürzenden Notationen  $\text{Der}_A := \text{Der}(A\text{-Mod})$  und  $\text{Der}_{-A} := \text{Der}(\text{Mod-}A)$  für die derivierten Kategorien der entsprechenden Kategorien von  $A$ -Moduln.

2.6.4 (**Ausgezeichnetes Dreieck einer kurzen exakten Sequenz**). Gegeben eine kurze exakte Sequenz

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

von Komplexen in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & \text{Keg}(f) & \rightarrow & [1]X \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow? & [1]X \\ \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ [-1]\text{Keg}(g) & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & \text{Keg}(g) \end{array}$$

mit dritter oberer Vertikale  $(0, g)$  und unterer erster Vertikale  $(f, 0)^\top$ . Man erkennt, daß diese Vertikalen Quasiisomorphismen sind. Zum Beispiel betrachten wir für die dritte Vertikale die lange exakte Homologiesequenz der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen  $\text{Keg}(\text{id}_X) \hookrightarrow \text{Keg}(f) \twoheadrightarrow Z$  und prüfen, daß die Homologie von  $\text{Keg}(\text{id}_X)$  verschwindet. Man erkennt weiter, daß die linken und mittleren Quadrate kommutieren, wohingegen das rechte Rechteck in der Homotopiekategorie kommutiert vermittelt der Homotopie  $\text{Keg}(f)^n = Y^n \oplus X^{n+1} \twoheadrightarrow Y^n \hookrightarrow Z^{n-1} \oplus Y^n = \text{Keg}(g)^{n-1}$ . Es gibt also in der derivierten Kategorie genau einen Morphismus  $Z \rightarrow [1]X$ , der das obere und gleichbedeutend das untere Quadrat rechts zum Kommutieren bringt. Das so entstehende ausgezeichnete Dreieck

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow [1]X$$

nennen wir das **ausgezeichnete Dreieck unserer kurzen exakten Sequenz**. Diese Konstruktion liefert sogar einen Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Komplexen in die Kategorie der ausgezeichneten Dreiecke der derivierten Kategorie.

2.6.5. Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  nennen wir die in Bezug auf das Ore-system der Quasiisomorphismen in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  im Sinne von 1.3.7 rechtsentfalteten Komplexe **quisrechtsentfaltet**. Per definitionem ist ein Komplex  $I \in \text{Hot}_{\mathcal{A}}$  quisrechtsentfaltet genau dann, wenn für jeden weiteren Komplex  $X$  die Morphismen nach  $I$  dieselben sind in der Homotopiekategorie und der derivierten Kategorie, in Formeln

$$Q : \text{Hot}_{\mathcal{A}}(X, I) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(QX, QI)$$

Analog erklären wir **quislinksentfaltete Komplexe**.

**Proposition 2.6.6 (Quisrechtsentfaltete Komplexe aus Injektiven).** *Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  ist jeder gegen die Pfeile beschränkte Komplex aus injektiven Objekten quisrechtsentfaltet. Des weiteren ist jeder Komplex aus injektiven Objekten mit verschwindendem Differential quisrechtsentfaltet.*

*Beweis.* Quasiisomorphismen sind ja genau die Morphismen der Homotopiekategorie mit exaktem Abbildungskegel. Nach 2.5.6 ist also  $I$  quisrechtsentfaltet genau dann, wenn für jeden exakten Komplex  $N$  gilt  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(N, I) = 0$ . Das folgt jedoch für jeden gegen die Pfeile beschränkten Komplex injektiver Objekte aus dem Hauptlemma der homologischen Algebra [TG] 3.2.6. Einen beliebigen Komplex mit verschwindendem Differential können wir nach [TG] 3.2.36 als Produkt in der Homotopiekategorie auffassen und Produkte von quisrechtsentfalteten Komplexen sind nach 2.5.7 wieder quisrechtsentfaltet. Alternativ sieht man auch leicht ein, daß sich jeder Quasiisomorphismus  $I \xrightarrow{\sim} Y$  von einem Komplex injektiver Objekte mit verschwindendem Differential zu einem weiteren Komplex so durch  $Y \rightarrow I$  verlängern läßt, daß die Verknüpfung die Identität auf  $I$  ist. Daraus folgt die Behauptung dann auch direkt.  $\square$

2.6.7. Gegeben eine additive Kategorie  $\mathcal{I}$  betrachten wir in der triangulierten Kategorie  $\text{Hot}(\mathcal{I})$  das Verdiersystem  $\text{Hot}^+(\mathcal{I})$  aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe.

**Korollar 2.6.8 (Derivierte Kategorie und Komplexe von Injektiven).** *Seien  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $i\mathcal{A}$  die volle additive Unterkategorie ihrer injektiven Objekte. So restringiert der Quotientenfunktor  $Q : \text{Hot}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$  zu einem volltreuen Funktor*

$$\text{Hot}^+(i\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\mathcal{A})$$

*Beweis.* Das gilt sogar allgemeiner für die volle Unterkategorie aller quisrechtsentfalteten Komplexe der Homotopiekategorie.  $\square$

*Vorschau 2.6.9.* Wir zeigen in 2.6.25, daß gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  endlicher homologischer Dimension mit genug Injektiven jeder Komplex aus injektiven Objekten quisrechtsentfaltet ist und daß die Lokalisierung eine Äquivalenz  $\text{Hot}(\text{i}\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\mathcal{A})$  induziert.

**2.6.10 (Erweiterungen als Morphismen).** Sind  $A, B$  Objekte einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  mit genug Injektiven, so erhalten wir eine Bijektion

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^q(A, B) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]B)$$

durch die Wahl einer injektiven Auflösung  $B \hookrightarrow I^{\triangleleft}$  und die natürlichen Isomorphismen  $\mathcal{H}^q \mathcal{A}(A, I^{\triangleleft}) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, [q]I^{\triangleleft}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]I^{\triangleleft}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]B)$  mit dem mittleren Isomorphismus nach 2.6.8. Man prüft auch leicht, daß unsere Bijektion oben unabhängig ist von der Wahl der injektiven Auflösung von  $B$ . Hat opponiert  $\mathcal{A}$  genug Projektive, so erhalten wir in derselben Weise Bijektionen  $\text{lExt}_{\mathcal{A}}^q(A, B) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]B)$  mit unseren  $\text{lExt}$  aus [TG] 3.2.23. Für allgemeines  $\mathcal{A}$  vereinbaren wir den entsprechenden Morphismenraum in der derivierten Kategorie als Definition von  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^q(A, B)$ . Die Verknüpfung von Morphismen heißt in diesem Fall das **Yoneda-Produkt**

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^p(A, B) \times \text{Ext}_{\mathcal{A}}^q(B, C) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{p+q}(A, C)$$

**2.6.11 (Erweiterungen und Zentrum).** Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  und eine Selbsttransformation des Identitätsfunktors  $z : \text{Id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}}$  und  $A, B \in \mathcal{A}$  gilt für die zugehörigen Endomorphismen  $z_A, z_B$  und jede Erweiterung  $f \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^q(A, B)$  die Identität  $z_B \circ f = f \circ z_A$  für das Yonedaprodukt. In der Tat gilt unsere Identität offensichtlich in der Homotopiekategorie, ja sogar in der Kategorie der Komplexe, und sie folgt direkt für die derivierte Kategorie. Das verallgemeinert unsere Erkenntnisse im Fall von Modulkategorien aus [TG] 3.2.18.

*Vorschau 2.6.12.* Aus 2.7.6 wird folgen, daß auch für eine allgemeine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  und beliebige  $A, B \in \mathcal{A}$  gilt  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]B) = 0$  für  $q < 0$ . In 2.7.3 zeigen wir, daß auch in dieser Allgemeinheit der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus  $\mathcal{A}(A, B) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, B)$  ist.

**2.6.13 (Selbsterweiterungen).** Gegeben ein Objekt  $M \in \mathcal{A}$  einer abelschen Kategorie bilden seine Selbsterweiterungen mit der Komposition von Morphismen der derivierten Kategorie als Multiplikation einen graduierten Ring

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(M) := \bigoplus \text{Ext}_{\mathcal{A}}^q(M, M) = \bigoplus \text{Der}_{\mathcal{A}}(M, [q]M)$$

Wir nennen ihn den **Ring der Selbsterweiterungen von  $M$** .

*Beispiel 2.6.14 (Der Kohomologiering).* Ist speziell  $X$  ein topologischer Raum und bezeichnet  $\text{Ab}/_X$  wie in [TG] 2.2.7 die Kategorie der abelschen Garben auf

$X$ , so liefert für alle  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  das Auswerten auf dem konstanten Schnitt  $1 \in \Gamma(\mathbb{Z}_X)$  einen Isomorphismus  $\text{Ab}/X(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma\mathcal{F}$ . Wir folgern Isomorphismen  $H^q(X; \mathcal{F}) = R^q\Gamma(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} R^q(\text{Ab}/X(\mathbb{Z}_X, \cdot))(\mathcal{F}) = \text{Ext}_{\text{Ab}/X}^q(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\text{Ab}/X}(\mathbb{Z}_X, [q]\mathcal{F})$  nach der Definition [TG] 3.5.1 der Garbenkohomologie als derivierter Funktor, der Definition der Ext-Gruppen in abelschen Kategorien mit genug Injektiven [TG] 3.2.24 und der Interpretation dieser Ext-Gruppen als Morphismen in der derivierten Kategorie 2.6.10. Insbesondere erhalten wir so Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$H^*(X; \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\text{Ab}/X}^*(\mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus \text{Der}_{\text{Ab}/X}(\mathbb{Z}_X, [q]\mathbb{Z}_X)$$

Auf diese Weise erhält die Garbenkohomologie eines topologischen Raums die Struktur eines graduierten Rings. Wir nennen ihn den **garbentheoretischen Kohomologiering**, um ihn vom singulären Kohomologiering aus [TS] 6.1.15 zu unterscheiden. Seine Multiplikation heißt weiter das **cup-Produkt**. Vermittels der Verknüpfung in der derivierten Kategorie von  $\text{Ab}/X$  erhält die Kohomologie jeder abelschen Garbe die Struktur eines graduierten Rechtsmoduls über dem garbentheoretischen Kohomologiering.

*Vorschau 2.6.15 (Graduierte Kommutativität des Kohomologierings).* Die graduierte Kommutativität des garbentheoretischen Kohomologierings eines topologischen Raums  $X$  zeigen wir erst in [TSF] ???. Wir leiten sie aus der Existenz eines derivierten Tensorprodukts abelscher Garben oder genauer der Struktur einer Schmelzkategorie auf  $\text{Der}(\text{Ab}/X)$  ab. Dazu müssen wir jedoch noch tiefer in die homologische Algebra einsteigen und sowohl das Derivieren von Funktoren in mehreren Variablen erklären als auch das Linksderivieren auf Situationen verallgemeinern, in denen es nicht genug projektive Objekte gibt.

2.6.16 (**Triangulierte Funktoren zu exakten Funktoren**). Jeder additive Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  induziert einen triangulierten Funktor  $\text{Hot}_F : \text{Hot}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Hot}_{\mathcal{B}}$  in natürlicher Weise. Sind  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  abelsch und ist  $F$  exakt, so macht  $\text{Hot}_F$  exakte Komplexe zu exakten Komplexen und induziert folglich einen triangulierten Funktor

$$\text{Der}_F : \text{Der}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{B}}$$

auf den derivierten Kategorien. Dieser Funktor hinwiederum induziert für jedes Objekt  $M \in \mathcal{A}$  einen Homomorphismus von graduierten Ringen

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(M) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{B}}^*(FM)$$

*Vorschau 2.6.17 (Triangulierte Funktoren zu additiven Funktoren).* Gegeben ein additiver Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zwischen abelschen Kategorien kann man auch dann, wenn er nicht exakt ist, in vielen Fällen immer noch sinnvoll triangulierte

Funktoren  $RF, LF : \text{Der}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{B}}$  auf den derivierten Kategorien erklären, seinen „Rechtsderivierten“ und seinen „Linksderivierten“. Im allgemeinen sind das aber nur noch partiell definierte triangulierte Funktoren. Mehr dazu wird in 3.4.2 diskutiert.

**2.6.18 (Funktorialität des Kohomologierings).** Speziell erhalten wir für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  nach 2.6.16 mit dem exakten Rückzug  $f^* : \text{Ab}_{/Y} \rightarrow \text{Ab}_{/X}$  und dem offensichtlichen Isomorphismus  $f^*\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$  einen Ringhomomorphismus

$$H^*(Y; \mathbb{Z}_Y) \rightarrow H^*(X; f^*\mathbb{Z}_Y) \xrightarrow{\sim} H^*(X; \mathbb{Z}_X)$$

Der Leser mag zur Übung zeigen, daß dieser Ringhomomorphismus mit unserem Zurückholen auf der Kohomologie aus [TG] 4.3.7 übereinstimmt.

**2.6.19 (Kohomologie eines Komplexes als Morphismenraum).** Gegeben ein Ring  $R$  und ein Komplex  $L \in \text{Hot}(R\text{-Mod})$  erhalten wir speziell mit [TS] 1.4.12 und der opponierten Aussage zu 2.6.8 kanonische Isomorphismen von  $R$ -Moduln

$$\mathcal{H}^q L \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_R([-q]R, L) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_R([-q]R, L)$$

**2.6.20 (Totale Homologie).** Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  betrachten wir die Funktoren  $\mathcal{Z}, \mathcal{B}, \mathcal{H} : \text{Ket}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ , die jedem Komplex  $(X^q)$  den Komplex seiner Zyklen, Bilder, oder Homologieobjekte  $(\mathcal{H}^q X)$  mit verschwindenden Differentialen zuordnen. Wir haben kurze exakte Sequenzen von Komplexen  $\mathcal{Z}X \hookrightarrow X \twoheadrightarrow [1]\mathcal{B}X$  und  $\mathcal{B}X \hookrightarrow \mathcal{Z}X \twoheadrightarrow \mathcal{H}X$ . Hat bereits  $X$  selbst verschwindende Differentiale, so liefern sie Isomorphismen  $X \xleftarrow{\sim} \mathcal{Z}X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}X$ .

**Proposition 2.6.21 (Komplexe mit projektiver Homologie).** Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  ist der offensichtliche Funktor von der Kategorie aller Komplexe mit projektiven Einträgen und verschwindendem Differential in die derivierte Kategorie ein volltreuer Funktor

$$\text{Ket}^{d=0}(\text{p}\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\mathcal{A})$$

und induziert eine Äquivalenz mit der vollen Unterkategorie aller Komplexe  $X$  der derivierten Kategorie mit  $\mathcal{H}^q X$  projektiv für alle  $q$ .

2.6.22. Analoges gilt für Injektive. Ich habe hier die Projektiven vorgezogen, weil mir das Arbeiten mit Zykeln alias den Kernen der Differentiale leichter fällt als das Arbeiten mit den Kokernen der Differentiale.

*Beweis.* Unser Funktor ist volltreu, da der offensichtliche Funktor ein Isomorphismus  $\text{Ket}^{d=0}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}^{d=0}(\mathcal{A})$  ist und da nach 2.6.6 angewandt auf die opponierte Kategorie Komplexe aus projektiven Objekten mit verschwindendem Differential stets quislinksentfaltet sind. Gegeben ein Komplex  $X \in \text{Ket}(\mathcal{A})$  mit

$\mathcal{H}^q X$  projektiv für alle  $q$  gibt einen Morphismus  $s : \mathcal{H}X \rightarrow X$  in  $\text{Ket}(\mathcal{A})$  derart, daß  $\mathcal{H}s : \mathcal{H}\mathcal{H}X \rightarrow \mathcal{H}X$  invers ist zum offensichtlichen Isomorphismus  $\mathcal{H}X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}\mathcal{H}X$  aus 2.6.20. In der Tat können wir in diesem Fall die Surjektion  $\mathcal{Z}^q X \twoheadrightarrow \mathcal{H}^q X$  der Zykel auf die Homologie spalten. Darüberhinaus ist  $s$  in der Homotopiekategorie eindeutig bestimmt. Sind in der Tat  $s_1, s_2$  zwei Spaltungen, so landet  $s_1 - s_2$  in den Bildern und faktorisiert mithin als  $s_1 - s_2 : \mathcal{H}^q X \rightarrow \mathcal{B}^q X$  und dieser Morphismus besitzt einen Lift  $\delta : \mathcal{H}^q X \rightarrow X^{q-1}$  mit  $s_1 - s_2 = d\delta$ . Schließlich ist  $s$  ein Quasiisomorphismus, induziert also einen Isomorphismus in der derivierten Kategorie.  $\square$

2.6.23. Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  heißt das Supremum

$$\text{hdim}(\mathcal{A}) := \sup\{i \mid \exists M, N \in \mathcal{A} \text{ mit } \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, N) \neq 0\}$$

die **homologische Dimension von  $\mathcal{A}$** . Im Fall  $\text{hdim}(\mathcal{A}) < \infty$  sagen wir auch, unsere abelsche Kategorie habe **endliche homologische Dimension**. Homologische Dimension  $-\infty$  haben genau die **Nullkategorien**, als da heißt, diejenigen abelschen Kategorien, bei denen alle Objekte Nullobjekte sind. Homologische Dimension  $\leq 0$  haben genau diejenigen abelschen Kategorien, bei denen alle kurzen exakten Sequenzen spalten. Derartige Kategorien heißen **halbeinfach**. Abelsche Kategorien einer homologischen Dimension  $\leq 1$  bezeichnet man auch als **erbliche Kategorien**, da sich bei ihnen die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt. Diese Terminologie ist allerdings gefährlich, denn es gibt durchaus abelsche Kategorien, die nicht von homologischer Dimension  $\leq 1$  sind, bei denen sich aber dennoch die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt, etwa weil sie außer der Null gar keine projektiven Objekte besitzen.

2.6.24 (**Derivierte Kategorien halbeinfacher Kategorien**). Gegeben eine halbeinfache Kategorie  $\mathcal{A}$  ist jedes Objekt projektiv und nach 2.6.21 ist der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Ket}^{d=0}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\mathcal{A})$$

Insbesondere gilt das für die Kategorie der Vektorräume über einem Körper.

**Proposition 2.6.25 (Derivierte Kategorien und homologische Dimension).** *Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  endlicher homologischer Dimension mit genug Projektiven sind alle Komplexe aus Projektiven quislinksentfaltet und die Lokalisierung liefert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\text{Hot}(\text{p}\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\mathcal{A})$$

2.6.26. Insbesondere gilt das für die Kategorie der abelschen Gruppen  $\mathcal{A} = \text{Ab}$  und allgemeiner für die Kategorie der Moduln über einem Hauptidealring.

*Beweis.* Nach [TG] 9.3.9 gibt es unter unseren Annahmen zu jedem Komplex einen Quasiisomorphismus von einem Komplex projektiver Objekte. Nach der Entfaltung durch Spaltung aus Übung 1.4.27 müssen wir damit nur noch zeigen, daß jeder Quasiisomorphismus in  $\text{Hot}(\text{p}\mathcal{A})$  ein Isomorphismus ist. Jeder Quasiisomorphismus in  $\text{Hot}(\text{p}\mathcal{A})$  hat aber als Abbildungskegel einen exakten Komplex aus projektiven Objekten. Die Zyklen solch eines Komplexes müssen selbst projektiv sein, da sie der Beginn eines exakten Komplexes aus projektiven Objekten sind und wir endliche homologische Dimension angenommen hatten. Damit folgt leicht, daß unser Abbildungskegel nullhomotop sein muß, so daß jeder Quasiisomorphismus in  $\text{Hot}(\text{p}\mathcal{A})$  bereits ein Isomorphismus ist.  $\square$

**Proposition 2.6.27 (Derivierte Kategorien erblicher Kategorien).** *Gegeben eine erbliche Kategorie  $\mathcal{A}$  mit genug Projektiven induziert der offensichtliche Funktor*

$$\text{Ket}^{d=0}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$$

*eine Bijektion auf Isomorphieklassen von Objekten.*

2.6.28. Insbesondere gilt das für die Kategorie der abelschen Gruppen  $\mathcal{A} = \text{Ab}$  und allgemeiner für die Kategorie der Moduln über einem Hauptidealring.

*Beweis.* Jedes Objekt der derivierten Kategorie ist unter unseren Annahmen nach 2.6.25 isomorph zu einem Komplex  $P$  aus projektiven Objekten. Da wir unsere Kategorie erblich angenommen hatten, sind dann auch alle Bilder projektiv und wir finden Spaltungen der kurzen exakten Sequenzen  $\ker \partial \hookrightarrow P^k \twoheadrightarrow \text{im } \partial$ . Die zugehörigen Kompositionen  $P^k \twoheadrightarrow \ker \partial \rightarrow \mathcal{H}^k P$  induzieren einen Quasiisomorphismus  $s : P \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}P$ . Er hat sogar die Eigenschaft, daß  $\mathcal{H}s$  invers ist zum offensichtlichen Isomorphismus  $\mathcal{H}\mathcal{H}P \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}P$ .  $\square$

*Vorschau* 2.6.29. Produkte von Objektfamilien in derivierten Kategorien diskutieren wir in 3.9.2.

## Übungen

*Übung* 2.6.30. Gegeben ein Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  oder allgemeiner ein freier Modul über einem Kring  $K$  zeige man, daß unsere Isomorphismen  $\text{Ext}_{SV}^i(K, K) \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^i V$  aus [TG] 3.2.32 in ihrer Gesamtheit einen Ringisomorphismus

$$\text{Ext}_{SV}^*(K, K) \xrightarrow{\sim} \text{Alt } V$$

bilden zwischen der Algebra der alternierenden Formen mit ihrem Shuffle-Dachprodukt [LA2] ?? und dem Ring der Selbsterweiterungen mit seinem Yoneda-Produkt. Hinweis: Das cap-Produkt von rechts auf dem hinteren Faktor [TSK] 3.2.5 induziert stets eine  $SV$ -lineare Kettenabbildung des Koszulkomplexes aus [TG]

3.2.32 zu sich selber. Hinweis: Ich empfehle, das nur für das cap-Produkt von rechts mit Linearformen zu prüfen; dann zu zeigen, daß das den endlichdimensionalen Fall erledigt; und dann den unendlichdimensionalen Fall argumentativ zu folgern.

*Übung 2.6.31.* Seien  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $z \in \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{A})(\text{id}, \text{id})$  eine Transformation des Identitätsfunktors zu sich selbst. So gilt für alle  $M, N \in \mathcal{A}$  und jede Erweiterung  $f \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, N)$  in  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, N)$  die Identität  $z_N \circ f = f \circ z_M$ . Speziell gilt für die Kategorie  $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$  der Moduln über einem Ring und  $z \in Z(R)$  ein Element des Zentrums stets  $(z \cdot) \circ f = f \circ (z \cdot)$ .

*Übung 2.6.32.* Gegeben ein kommutatives Diagramm von kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccc} & & B' & \hookrightarrow & C' & \twoheadrightarrow & D' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C & & \end{array}$$

in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  erhalten wir in der Homotopiekategorie einen ausgezeichneten Homomorphismus von dem nach 2.6.4 der ersten Sequenz zugeordneten ausgezeichneten Dreieck in das einmal verdrehte der zweiten Sequenz zugeordnete ausgezeichnete Dreieck, indem wir vom offensichtlichen Homomorphismus von Dreiecken

$$\begin{array}{ccccccc} [-1] \text{Keg}' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' & \rightarrow & \text{Keg}' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [-1] \text{Keg} & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & \text{Keg} \end{array}$$

ausgehen und vom oberen und unteren dieser Dreiecke jeweils den in 2.6.4 gegebenen Isomorphismus zu dem unseren jeweiligen Sequenzen zugeordneten Dreieck verwenden. Gegeben ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & B' & \twoheadrightarrow & C' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & B & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & D \end{array}$$

in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  erhalten wir in der Homotopiekategorie ebenso einen ausgezeichneten Homomorphismus von dem nach 2.6.4 der ersten Sequenz zugeordneten ausgezeichneten Dreieck in das einmal andersrum verdrehte der zweiten Sequenz zugeordnete ausgezeichnete Dreieck. Bezeichnet  $B''$  das Bild von  $B' \rightarrow B$  und  $C''$  das Bild von  $C' \rightarrow C$ , so ist der induzierte Morphismus ein iso  $B'' \xrightarrow{\sim} C''$  und unser Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken faktorisiert über das ausgezeichnete Dreieck mit dem Abbildungskegel über diesem

Isomorphismus als dritter Ecke. In diesem Fall ist also der zusätzlich konstruierte Morphismus null in der Homotopiekategorie. Das mag zu einem besseren Verständnis der erweiterten Natürlichkeit der langen exakten Kohomologiesequenz [TS] 2.2.16 beitragen.

*Übung 2.6.33 (Derivieren durch Lokalisieren der Komplexkategorie).* Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Man prüfe, daß Kettenabbildungen  $f, g \in \text{Ket}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  genau dann homotop sind, wenn es eine Kettenabbildung  $h : S\Delta_1 \otimes_{\mathbb{Z}} X \rightarrow Y$  gibt mit  $f = h \circ \delta_0$  und  $g = h \circ \delta_1$ . Hier meint  $S\Delta_1$  den Komplex der Simplicialketten des eindimensionalen Standardsimplex. Andererseits sind im Diagramm

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \end{array} S\Delta_1 \otimes_{\mathbb{Z}} X \xrightarrow{p} X$$

beide Kompositionen die Identität und  $p$  ist eine Homotopieäquivalenz. Jeder Funktor, der Homotopieäquivalenzen zu Isomorphismen macht, muß also über  $\text{Ket}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Hot}_{\mathcal{A}}$  faktorisieren. Andererseits werden unter diesem Funktor auch alle Homotopieäquivalenzen Isomorphismen. Bezeichnet also  $H$  die Menge der Homotopieäquivalenzen, so liefert der offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$H^{-1} \text{Ket}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{A}}$$

Bezeichnet weiter  $Q$  die Menge aller Quasiisomorphismen in  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$  und  $\bar{Q}$  die Menge aller Quasiisomorphismen in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$ , so liefert demnach der offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$Q^{-1} \text{Ket}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \bar{Q}^{-1} \text{Hot}_{\mathcal{A}}$$

Damit erhalten wir eine alternative Konstruktion der derivierten Kategorie  $\text{Der}_{\mathcal{A}}$  als Lokalisierung der Kategorie  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$  der Komplexe nach Quasiisomorphismen.

*Übung 2.6.34.* Gegeben eine abelsche Kategorie von endlicher homologischer Dimension  $d \in \mathbb{N}$  und  $M \hookrightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^{d-1} \twoheadrightarrow N$  exakt mit injektiven  $I^{\nu}$  zeige man, daß auch  $N$  injektiv ist.

*Übung 2.6.35.* Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  und  $X \in \text{Hot}_{\mathcal{A}}$  zeige man, daß es  $A \in \mathcal{A}$  gibt und  $s \in \text{Hot}_{\mathcal{A}}(A[0], X)$  mit  $s : A \rightarrow \mathcal{H}^0 X$  surjektiv.

*Übung 2.6.36.* Gegeben ein Ring  $R$  nennen wir die homologische Dimension seiner Kategorie von Linksmoduln auch die **homologische Dimension von  $R$** . Gegeben ein Ring  $R$  endlicher homologischer Dimension  $d$  hat der Polynomring  $R[X]$  die homologische Dimension  $d + 1$ .

## 2.7 Beschränkte derivierte Kategorien

**Definition 2.7.1.** Gegeben eine additive Kategorie  $\mathcal{I}$  betrachten wir in der triangulierten Kategorie  $\text{Hot}(\mathcal{I})$  die Verdiersysteme

$$\begin{aligned} \text{Hot}_{\mathcal{I}}^+ &= \text{Hot}^+(\mathcal{I}) && \text{aller den Differentialen entgegen beschränkten Komplexe;} \\ \text{Hot}_{\mathcal{I}}^- &= \text{Hot}^-(\mathcal{I}) && \text{aller in Richtung der Differentiale beschränkten Komplexe;} \\ \text{Hot}_{\mathcal{I}}^b &= \text{Hot}^b(\mathcal{I}) && \text{aller beidseitig beschränkten Komplexe.} \end{aligned}$$

Wir nennen diese und analoge Kategorien auch **beschränkt gegen die Pfeile** beziehungsweise **beschränkt mit den Pfeilen**.

2.7.2. Im Fall einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  schreiben wir im folgenden  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{(\#)} = \text{Der}^{(\#)}(\mathcal{A})$  mit  $\# \in \{+, -, b\}$  für die triangulierten Quotienten dieser triangulierten Kategorien nach dem Verdiersystem aller exakten Komplexe in der jeweiligen Kategorie von Komplexen. Wir werden demnächst zeigen, daß die offensichtlichen Funktoren volltreue Einbettungen  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{(\#)} \hookrightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}$  sind. Für ihr essentielles Bild verwenden wir die Notation

$$\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\#} \subset \text{Der}_{\mathcal{A}}$$

**Lemma 2.7.3.** *Für jede abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  liefern die offensichtlichen Funktoren volltreue Einbettungen*

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Der}^{(+)}(\mathcal{A}) & & \\ & \nearrow \sim & & \searrow \sim & \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\sim} & \text{Der}^{(b)}(\mathcal{A}) & & \text{Der}(\mathcal{A}) \\ & \searrow \sim & & \nearrow \sim & \\ & & \text{Der}^{(-)}(\mathcal{A}) & & \end{array}$$

*Des weiteren ist ein Komplex im  $\text{Der}(\mathcal{A})$  isomorph zum Bild eines Objekts unter einer unserer Einbettungen genau dann, wenn seine Kohomologie nach oben beschränkt beziehungsweise nach unten beschränkt beziehungsweise beschränkt beziehungsweise nur im Grad Null konzentriert ist.*

*Beweis.* Wir verwenden die Abschneidefunktoren, wie sie in 2.7.4 eingeführt werden. Um zu zeigen, daß  $\text{Der}^{(-)}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$  volltreu ist, wenden wir unser allgemeines Resultat 1.4.21 zu volltreuen Funktoren zwischen Lokalisierungen an. Ist  $s : X \rightarrow Y$  ein Quasiisomorphismus mit  $Y \in \text{Hot}^-(\mathcal{A})$ , so ist für hinreichend großes  $n$  der Morphismus  $h : \tau^{\leq n} X \rightarrow X$  ein Quasiisomorphismus und leistet

das Gewünschte. Die anderen Fälle mit Ausnahme der Einbettung von  $\mathcal{A}$  behandelt man ähnlich. Im Fall der Einbettung von  $\mathcal{A}$  zeigt der Funktor  $\mathcal{H}^0$ , daß sie treu ist. Ist andererseits  $X$  ein Komplex, dessen Kohomologie nur im Grad Null lebt, so liefern die Quasiisomorphismen  $X \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq 0} X \xleftarrow{\sim} \tau^{\leq 0} \tau^{\geq 0} X$  einen Isomorphismus  $X \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} \mathcal{H}^0 X$  in der derivierten Kategorie, wo wir  $\mathcal{H}^0 X$  als im Grad Null konzentrierten Komplex auffassen. Also ist jeder Komplex mit trivialer Kohomologie außerhalb von Null in der derivierten Kategorie isomorph zu seiner Kohomologie. Damit gilt es nur noch zu zeigen, daß die Einbettung  $\mathcal{A} \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$  surjektiv ist auf Morphismen. Dazu stellen wir für  $A, B \in \mathcal{A}$  einen Morphismus als Bruch  $A \xleftarrow{\sim} X \rightarrow B$  in der Homotopiekategorie dar mit  $A \xleftarrow{\sim} X$  einem Quasiisomorphismus. Wenden wir nun die Abschneidefunktoren in der Homotopiekategorie auf unseren Bruch an, so erhalten wir einen Bruch  $A \xleftarrow{\sim} \tau^{\leq 0} \tau^{\geq 0} X \rightarrow B$ , der offensichtlich denselben Morphismus darstellt. Nun steht jedoch links ein echter Isomorphismus und wir sind fertig.  $\square$

**2.7.4 (Abschneidefunktoren).** Gegeben ein Komplex  $X = (X^n, d^n)$  in einer abelschen Kategorie erklären wir für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die Komplexe

$$\begin{array}{cccccccc} \tau^{\leq n} X & \dots \rightarrow & X^{n-1} & \rightarrow & \ker d^n & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots \\ \tau^{< n+1} X & \dots \rightarrow & X^{n-1} & \rightarrow & X^n & \rightarrow & \text{im } d^n & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots \\ \tau^{> n} X & \dots \rightarrow & 0 & \rightarrow & \text{im } d^n & \rightarrow & X^{n+1} & \rightarrow & X^{n+2} & \rightarrow & \dots \\ \tau^{\geq n+1} X & \dots \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \text{cok } d^n & \rightarrow & X^{n+2} & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Der Buchstabe  $\tau$  steht für englisch „truncated“ oder französisch „tronqué“. Wir haben ein offensichtliches kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Quasiisomorphismen in den Vertikalen

$$\begin{array}{ccccc} \tau^{< n+1} X & \hookrightarrow & X & \twoheadrightarrow & \tau^{\geq n+1} X \\ \uparrow & & \parallel & & \uparrow \\ \tau^{\leq n} X & \hookrightarrow & X & \twoheadrightarrow & \tau^{> n} X \end{array}$$

Sicher gilt  $\mathcal{H}^i(\tau^{\leq n} X) = \mathcal{H}^i(\tau^{< n+1} X) = 0$  für  $i > n$  und die offensichtlichen Morphismen  $\tau^{\leq n} X \rightarrow \tau^{< n+1} X \rightarrow X$  induzieren für  $i \leq n$  Isomorphismen auf den  $i$ -ten Kohomologiegruppen. Der offensichtliche Morphismus ist also stets ein Quasiisomorphismus  $\tau^{\leq n} X \xrightarrow{\sim} \tau^{< n+1} X$ , und verschwinden alle  $\mathcal{H}^i X$  für  $i > n$ , so sind die offensichtlichen Morphismen Quasiisomorphismen  $\tau^{\leq n} X \xrightarrow{\sim} \tau^{< n+1} X \xrightarrow{\sim} X$ . Analoges gilt für das andere Abschneiden. Offensichtlich machen alle diese Abschneidefunktoren homotope Abbildungen zu homotopen Abbildungen und Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen und induzieren folglich Abschneidefunktoren sowohl auf der Homotopiekategorie als auch auf der derivierten Kategorie. Wir verwenden für diese induzierten Funktoren dieselbe Nota-

tion und erhalten ein funktorielles Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \tau^{\leq n} \tau^{\geq n} X & \longrightarrow & \tau^{\geq n} X \\
 \uparrow \wr & & \nwarrow \\
 [-n] \mathcal{H}^n X & & X \\
 \downarrow \wr & & \nearrow \\
 \tau^{\geq n} \tau^{\leq n} X & \longleftarrow & \tau^{\leq n} X
 \end{array}$$

2.7.5. Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  setzen wir

$$\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} := \{X \in \text{Der}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{H}^i X = 0 \text{ für } i > n\}$$

$$\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} := \{X \in \text{Der}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{H}^i X = 0 \text{ für } i < n\}$$

Offensichtlich gilt  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} \subset \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n+1}$  und  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} \supset \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}$ .

**Proposition 2.7.6 (über Abschneidefunktoren).** Gegeben  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $n \in \mathbb{Z}$  haben wir:

1. Für alle  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$  und  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}$  gilt  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$ ;
2. Die Einbettung  $i^{\leq n} : \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}$  besitzt stets einen Rechtsadjungierten  $\tau^{\leq n} : \text{Der}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$ ;
3. Die Einbettung  $i^{\geq n} : \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}$  besitzt stets einen Linksadjungierten  $\tau^{\geq n} : \text{Der}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n}$ ;
4. Die Einheit beziehungsweise Koeinheit zu diesen Adjunktionen lassen sich für jedes  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}$  auf genau eine Weise ergänzen zu einem ausgezeichneten Dreieck

$$\tau^{\leq n} X \rightarrow X \rightarrow \tau^{\geq n+1} X \rightarrow [1] \tau^{\leq n} X$$

und dieses Dreieck ist funktoriell in  $X$ .

*Beweis.* Jeder Morphismus aus  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  läßt sich natürlich darstellen als ein Bruch  $X \leftarrow Z \rightarrow Y$  von Morphismen in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  mit einem Quasiisomorphismus  $Z \xrightarrow{\sim} X$ . Unter der Annahme  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}(\mathcal{A})$  können wir diesen Bruch erweitern durch den Quasiisomorphismus  $\tau^{\leq n} Z \xrightarrow{\sim} Z$ . Unter der Annahme  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}(\mathcal{A})$  dürfen wir weiter aufgrund des Quasiisomorphismus  $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\leq n+1} Y$  annehmen, daß  $Y$  durch einen Komplex dargestellt wird, der Null ist in Graden  $\leq n$ . Die erste Aussage folgt nun wegen  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(\tau^{\leq n} Z, Y) = 0$ , es gibt ja noch nicht einmal von Null verschiedene Kettenabbildungen zwischen diesen beiden Komplexen. Wir erhalten mit den Abschneidefunktoren aus 2.7.4 nun offensichtlich eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen  $\tau^{\leq n} X \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X/\tau^{\leq n} X$

nebst einem offensichtlichen Quasiisomorphismus  $X/\tau^{\leq n} X \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq n+1} X$  und so mit 2.6.4 ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\tau^{\leq n} X \rightarrow X \rightarrow \tau^{\geq n+1} X \rightarrow [1]\tau^{\leq n} X$$

in der derivierten Kategorie  $\text{Der}(\mathcal{A})$ . Die Eindeutigkeit des dritten Morphismus folgt mit 2.2.14 aus Teil 1. Um nun die erste Adjunktion zu zeigen, müssen wir für  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}$  und  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$  zeigen  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(Y, \tau^{\leq n} X) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(Y, X)$ . Das folgt jedoch sofort aus den bereits bewiesenen Teilen. Die andere Adjunktion zeigt man genauso.  $\square$

**2.7.7 (Erweiterungen vom Grad Eins).** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Wie im Fall abelscher Gruppen [TS] 6.5.6 konstruiert man auch im allgemeinen eine Bijektion zwischen  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, N)$  und der Menge aller Isomorphieklassen von kurzen exakten Sequenzen  $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$  in  $\mathcal{A}$ .

**Satz 2.7.8 (Derivierte Kategorien über injektive Auflösungen).** *Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  mit genug Injektiven und  $i\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$  die Unterkategorie ihrer injektiven Objekte schränkt der Quotientenfunktor ein zu einer Äquivalenz von triangulierten Kategorien*

$$Q : \text{Hot}^+(i\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^+(\mathcal{A})$$

*Beweis.* Nach 2.6.8 ist unser Funktor volltreu. Nach [TG] 9.3.9 für Freunde von Spektralsequenzargumenten oder alternativ nach 2.7.9 für Freunde indexärmerer Argumente ist jeder gegen die Pfeile beschränkte Komplex quasiisomorph zu einem gegen die Pfeile beschränkten Komplex von injektiven Objekten. Der Satz folgt.  $\square$

**Proposition 2.7.9 (Rechtsentfaltung durch Komplexe injektiver Objekte).** *Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven, so existiert für jeden Komplex  $A^* \in \text{Hot}^{\geq 0}(\mathcal{A})$  ein Quasiisomorphismus  $A^* \xrightarrow{\sim} I^*$  zu einem Komplex von Injektiven  $I^* \in \text{Hot}^{\geq 0}(i\mathcal{A})$ .*

*Beweis.* Wir konstruieren  $I^*$  induktiv mit der Zusatzeigenschaft, daß jeweils Monomorphismen zwischen den Kokernen der Randoperatoren induziert werden. Sind wir schon bei

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d} & A^p & \rightarrow & A^{p+1} & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & & & \\ \dots & \xrightarrow{d} & I^p & & & & \end{array}$$

angekommen in einer Weise, daß Isomorphismen  $\mathcal{H}^q A \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q I$  induziert werden für  $q < p$  und ein Monomorphismus zwischen den Kokernen der in obigem Diagramm explizit mit  $d$  notierten Ränder, so bilden wir den Pushout von

$$\begin{array}{ccc} \text{cok } d & \rightarrow & A^{p+1} \\ \downarrow & & \\ \text{cok } d & & \end{array}$$

und wählen eine Einbettung dieses Pushouts in ein injektives Objekt  $I^{p+1}$ . Mit 1.5.9 dualisiert folgt, daß wir so im Grad  $p$  einen Epimorphismus auf der Homologie erhalten. Da unser vertikaler Morphismus zwischen den Kokernen nach Induktionsannahme ein Monomorphismus ist, erhalten wir hier sogar einen Isomorphismus. Um unsere Induktion am Laufen zu halten müssen wir nur noch zeigen, daß nun wieder ein Monomorphismus auf den Kokernen der Ränder im Grad eins höher induziert wird. Das folgt jedoch aus

$$\text{cok}(A^p \rightarrow A^{p+1}) \xrightarrow{\sim} \text{cok}(I^p \rightarrow \text{Pushout}) \hookrightarrow \text{cok}(I^p \rightarrow I^{p+1}) \quad \square$$

## Übungen

**Übung 2.7.10 (Mehr zu Morphismen in der derivierten Kategorie).** Seien  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven,  $A \in \mathcal{A}$  ein Objekt und  $Y \in \text{Hot}^+(\mathcal{A})$  ein Komplex. Haben alle Objekte  $Y^i$  unseres Komplexes die Eigenschaft  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^q(A, Y^i) = 0 \forall q > 0$ , so ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, Y)$$

Wir können also in gewisser Weise auch „Morphismen in der derivierten Kategorie mit Auflösungen aus entfalteten Objekten berechnen“, nur daß wir im Fall von Komplexen statt von Auflösungen lieber von Entfaltungen reden. Hinweis: Indem wir einen Quasiisomorphismus  $Y \xrightarrow{\sim} I$  in einen Komplex  $I \in \text{Hot}^+(i\mathcal{A})$  wählen und den Abbildungskegel als neues  $Y$  betrachten, dürfen wir  $Y$  exakt annehmen und müssen unter dieser zusätzlichen Annahme  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, Y) = 0$  zeigen.

**Vorschau 2.7.11.** Demnächst werden wir diese Übung auch aus allgemeiner Theorie herleiten können: Nach 3.4.13 ist  $Y$  rechtsentfaltet für  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, \_)$  und damit haben wir  $(\text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, \_))(Y) \xrightarrow{\sim} (\text{RHot}_{\mathcal{A}}(A, \_))(Y) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, Y)$  mit dem zweiten Isomorphismus nach 3.2.20.

**Übung 2.7.12.** Seien  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}$  und  $n \in \mathbb{Z}$ . Man zeige: Genau dann gilt  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n}$ , wenn gilt  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$  für alle  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n-1}$ . Man formuliere und zeige auch die duale Aussage.

*Ergänzende Übung 2.7.13.* Man zeige: Gegeben eine additive Kategorie  $\mathcal{I}$  mit spaltenden Idempotenten liefert die Einbettung der mit Grad Null endenden Komplexe  $\text{Hot}^{\leq 0}(\mathcal{I}) \subset \text{Hot}^+(\mathcal{I})$  eine Äquivalenz mit der Kategorie aller mit den Pfeilen beschränkten Komplexe  $T$  mit  $\text{Hot}(I[0], T[n]) = 0$  für alle  $n > 0$  und alle  $I \in \mathcal{I}$ . Ebenso liefert die Einbettung der mit Grad Null beginnenden Komplexe  $\text{Hot}^{\geq 0}(\mathcal{I}) \subset \text{Hot}^-(\mathcal{I})$  eine Äquivalenz mit der Kategorie aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe  $T$  mit  $\text{Hot}(T[n], I[0]) = 0$  für alle  $n < 0$  und alle  $I \in \mathcal{I}$ .

*Übung 2.7.14 (Ausgezeichnete Dreiecke als kurze exakte Sequenzen).* Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  liefert der Funktor  $\mathcal{H}^0$  eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der ausgezeichneten Dreiecke  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]$  in  $\text{Der}(\mathcal{A})$ , bei denen die Objekte zum Bild von  $\mathcal{A}$  gehören, und der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in  $\mathcal{A}$ . Ein quasiinverser Funktor kann wie in 2.6.4 konstruiert werden.

*Übung 2.7.15.* Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  und ein ausgezeichnetes Dreieck  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]$  in  $\text{Der}_{\mathcal{A}}$  mit  $\tau^{\leq 0}Y \xrightarrow{\sim} Y$  erhalten wir mit den offensichtlichen Morphismen ein ausgezeichnetes Dreieck  $\tau^{\leq 1}X \rightarrow Y \rightarrow \tau^{\leq 0}Z \rightarrow [1]$ . Ebenso erhalten wir unter der Annahme  $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq 0}Y$  mit den offensichtlichen Morphismen ein ausgezeichnetes Dreieck  $\tau^{\geq 0}X \rightarrow Y \rightarrow \tau^{\geq -1}Z \rightarrow [1]$ . Hinweis: Fünferlemma.

*Übung 2.7.16.* Gegeben ein linksnoetherscher Ring  $A$  liefert die Einbettung einen volltreuen Funktor  $\text{Der}^-(A\text{-modf}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^-(A\text{-mod})$ .

*Übung 2.7.17.* Gegeben ein  $\mathbb{N}$ -graduierter Ring  $A$  mit halbeinfacher Nullkomponente  $A^0$  und allen  $A^n$  von endlicher Länge als  $A^0$ -Linksmoduln liefert die Einbettung Kategorie der graduierten Moduln endlicher Länge einen volltreuen Funktor  $\text{Der}^b(A\text{-modf}^{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^b(A\text{-modf}^{\mathbb{Z}})$ . Hinweis: Man verwende das Kriterium 1.4.21 für die volltreue Einbettung von Ore-Lokalisierungen und das „Abschneiden oberhalb eines geeigneten Grades“.

*Übung 2.7.18 (Vergleich von Morphismen in Hot und Der).* Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  und darin zwei beschränkte Komplexe  $X, Y$ , zwischen deren Objekten es keine höheren Erweiterungen gibt, in Formeln  $\text{Ext}^q(X^n, Y^m) = 0$  falls  $q > 0$  für alle  $n, m$ , induziert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$$

Hinweis: Man verwende 2.4.15 und unsere volltreue Einbettung von  $\mathcal{A}$  in seine derivierte Kategorie.

*Übung 2.7.19.* Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie derart, daß gilt  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A, B) = 0$  für beliebige  $A, B \in \mathcal{A}$  bei ungeradem  $i \geq 3$ . Ist  $X \in \text{Der}^b(\mathcal{A})$  ein Komplex mit  $\mathcal{H}^q X = 0$  für ungerades  $q$ , so können wir Isomorphismen

$$X \xrightarrow{\sim} \bigoplus_q [-q] \mathcal{H}^q X$$

finden, die auf  $\mathcal{H}^q$  die offensichtlichen Isomorphismen induzieren. Sie sind allerdings nicht eindeutig bestimmt.

## 2.8 Vergleich verschiedener Kohomologieringe\*

2.8.1. Gegeben  $\mathcal{I}$  eine additive Kategorie und  $I^*, J^* \in \text{Ket}_{\mathcal{I}}$  Komplexe in  $\mathcal{I}$  bilden wir analog wie in [TS] 1.4.12 den Komplex von abelschen Gruppen  $\text{Hom}_{\mathcal{I}}(I^*, J^*)$ . Speziell wird  $\text{End}_{\mathcal{I}}(I^*)$  unter der Verknüpfung von Morphismen ein dg-Ring.

**Satz 2.8.2 (Abstrakte Interpretation des cup-Produkts).** *Ist  $X$  ein lokal singular-azyklischer Raum, so ist unser Vergleichsisomorphismus aus [TG] 5.1.4 ein Ringisomorphismus*

$$H_{\text{sing}}^*(X) \xrightarrow{\sim} H_{\text{garb}}^*(X)$$

*zwischen dem singulären Kohomologiering und dem in 2.6.14 eingeführten garbentheoretischen Kohomologiering.*

2.8.3. Wir führen zunächst eine geeignete Terminologie ein. Unter einem **Quasiisomorphismus** von einem dg-Ring  $A$  in einen dg-Ring  $B$  verstehen wir einen Homomorphismus von dg-Ringen, der einen Isomorphismus auf der Kohomologie induziert. Unter einem **Morphismenbimodul** von einem dg-Ring  $A$  in einen dg-Ring  $B$  verstehen wir ein Paar  $(M, c)$  bestehend aus einem  $A$ - $B$ -dg-Bimodul  $M$  nebst einer Klasse  $c \in \mathcal{H}^0 M$ , die eine Basis von  $\mathcal{H}M$  als  $\mathcal{H}B$ -Rechtsmodul bildet. Wir sagen dann auch,  $c$  sei eine **Quasibasis** des  $B$ -dg-Moduls  $M$ . Ist zusätzlich  $c$  auch eine Basis von  $\mathcal{H}M$  als  $\mathcal{H}A$ -Linksmodul, so nennen wir unseren Morphismenbimodul  $(M, c)$  einen **Isobimodul**. Jeder Morphismenbimodul zwischen dg-Ringen liefert einen Homomorphismus zwischen ihren Kohomologieringen, der dadurch charakterisiert werden kann, daß  $a \mapsto b$  gleichbedeutend ist zu  $ac = cb$ . Ist unser Morphismenbimodul ein Isobimodul, so ist besagter Homomorphismus sogar ein Isomorphismus. Jeder Quasiisomorphismus liefert einen Isobimodul in offensichtlicher Weise. Was an dieser Stelle noch fehlt, ist eine wie auch immer geartete Verknüpfung von Morphismenbimoduln, und diese ist im allgemeinen auch nicht unproblematisch.

*Beweis von 2.8.2.* Wir wählen eine injektive Auflösung  $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{I}^*$  der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}_X$  und faktorisieren sie mithilfe der Existenz und Eindeutigkeit von Homotopielifts [TG] 3.2.7 über die Auflösung durch lokale singuläre Koketten  $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^*$  als  $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^* \rightarrow \mathcal{I}^*$ . Nach 2.8.3 reicht es zu zeigen, daß unsere Faktorisierung  $\mathcal{S}_X^* \rightarrow \mathcal{I}^*$  eine Quasibasis des Komplexes

$$\mathcal{S}_X^* \rightrightarrows \mathcal{I}^*$$

ist, und zwar sowohl für die Linksoperation von  $\text{End } \mathcal{I}^*$  als auch für die Rechtsoperation von  $\mathcal{S}^* X$ , die vom dg-Ring-Homomorphismus  $\mathcal{S}^* X \rightarrow \text{End } \mathcal{S}_X^*$ ,  $c \mapsto$

$c \cup$  mit dem cup-Produkt auf Ketten aus [TSK] 4.3.3 induziert wird. Der erste Teil dieser Behauptung folgt mit der Existenz und Eindeutigkeit von Homotopielifts [TG] 3.2.7 aus dem Quasiisomorphismus  $\mathcal{S}_X^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^*$ . Für den zweiten Teil betrachten wir das kommutative Diagramm von Komplexen

$$\begin{array}{ccc}
 S^* X & = & S^* X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{S}_X^* \rightleftarrows \mathcal{S}_X^* & & \mathbb{Z}_X \rightleftarrows \mathcal{S}_X^* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{S}_X^* \rightleftarrows \mathcal{I}^* & \rightarrow & \mathbb{Z}_X \rightleftarrows \mathcal{I}^*
 \end{array}$$

Hier ist die obere linke Vertikale durch  $c \mapsto c \cup$  gegeben und die anderen Pfeile sind hoffentlich selbsterklärend. Nach unserem Vergleichssatz [TG] 5.1.4 ist die Komposition in der rechten Vertikale ein Quasiisomorphismus. Nach der Existenz und Eindeutigkeit von Homotopielifts [TG] 3.2.7 ist auch die unterste Horizontale ein Quasiisomorphismus. Folglich ist auch die Verknüpfung in der linken Vertikale ein Quasiisomorphismus. Des Weiteren haben alle Komplexe der linken Vertikale natürliche Strukturen als dg-Rechtsmoduln über  $S^* X$  und die Morphismen sind mit diesen Strukturen verträglich. Das zeigt den zweiten Teil der Behauptung. Auf diese Weise vermittelt also unser dg-Bimodul in der Tat einen Isomorphismus zwischen den beiden fraglichen Kohomologieringen. Es ist dann nicht schwer zu sehen, daß dieser Isomorphismus übereinstimmt mit dem in [TG] 5.1.4 konstruierten Vergleichsisomorphismus.  $\square$

### 3 Faktorierte und derivierte Funktoren

Derivierte Funktoren wurden in einer Dissertation von Verdier eingeführt, die er bei Grothendieck schrieb. Verdier erklärt sie als eine Art von Kan-Erweiterungen. Ich ziehe den Zugang vor, den Deligne in SGA verfolgt. Beide Zugänge führen in typischen Situationen zu denselben derivierten Funktoren, sind jedoch grundsätzlich verschieden. Bei der Definition von Verdier gilt es zu beachten, daß man etwa im Fall eines linksexakten Funktors von abelschen Kategorien  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zu unterscheiden hat zwischen derivierten Funktoren  $R^+F : \text{Der}_{\mathcal{A}}^+ \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{B}}^+$  und  $R^*F : \text{Der}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{B}}$  und daß diese, selbst wenn sie beide existieren sollten, keineswegs auf  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^+$  übereinstimmen müssen. Bei Deligne dahingegen haben wir es nur mit einem einzigen partiell definierten Funktor  $R^*F : \text{Der}_{\mathcal{A}} \dashrightarrow \text{Der}_{\mathcal{B}}$  zu tun, den es immer gibt, der aber nur partiell definiert ist.

#### 3.1 Limites in Funktorkategorien

3.1.1. Man erinnere sich an Limites und Kolimites in Kategorien, wie sie in [TS] 7.1 eingeführt wurden.

3.1.2 (**Limites und Kolimites in Funktorkategorien**). Gegeben seien ein Köcher  $\mathcal{I}$  und Kategorien  $\mathcal{A}, \mathcal{D}$  und eine Darstellung  $\mathcal{I} \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{D}), i \mapsto F_i$ . Existiert für alle  $A \in \mathcal{A}$  der Kolimes  $\text{col } F_i(A)$  in  $\mathcal{D}$ , so erhalten wir offensichtlich einen Kolimes der  $F_i$  in  $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  durch die Vorschrift

$$(\text{col } F_i)(A) := \text{col}(F_i(A))$$

Dasselbe gilt, wenn wir  $\text{col}$  durch  $\text{lim}$  ersetzen, was direkt durch Übergang zu den opponierten Strukturen gefolgert werden kann.

3.1.3 (**Limites und Kolimites in Kategorien von Mengenfunktoren**). Nach 3.1.2 existiert für jede Kategorie  $\mathcal{A}$  und jedes Mengensystem  $\mathfrak{U}$  der Limes beziehungsweise der Kolimes in der Kategorie  $\mathfrak{U}\text{Ens}^{\mathcal{A}} = \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathfrak{U}\text{Ens})$  für jede Darstellung in  $\mathfrak{U}\text{Ens}^{\mathcal{A}}$  eines Köchers  $\mathcal{I}$ , wenn der Limes beziehungsweise der Kolimes für alle Darstellungen unseres Köchers in  $\mathfrak{U}\text{Ens}$  existieren. Nach [TS] 7.1.23 beziehungsweise [TS] 7.1.9 existieren sie dann auch für jedes größere Mengensystem  $\mathfrak{V} \supset \mathfrak{U}$  in  $\mathfrak{V}\text{Ens}^{\mathcal{A}}$  und bleiben dieselben. Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz ist, immer noch nach [TS] 7.1.23 beziehungsweise [TS] 7.1.9, daß  $\mathfrak{U}$  ein Universum ist und daß die Punktmenge unseres Köchers  $\mathcal{I}$  zu  $\mathfrak{U}$  gehört, daß also  $\mathcal{I}$  im Sinne von 1.1.6 ein  $\mathfrak{U}_{\epsilon}$ -Köcher ist.

3.1.4 (**Verträglichkeit von Limites mit Ko-Yoneda-Einbettungen**). Seien  $\mathfrak{U}$  ein Mengensystem und  $\mathcal{C}$  eine  $\mathfrak{U}$ -Kategorie und  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathfrak{U}}^{\wedge} := \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathfrak{U}\text{Ens})$  die Ko-Yoneda-Einbettung  $\mathcal{C} \mapsto (\hat{\mathcal{C}} : X \mapsto \mathcal{C}(X, \mathcal{C}))$ . Existiert der Limes eines Systems

$(C_i)_{i \in \mathcal{I}}$  in  $\mathcal{C}$ , so liefert er auch einen Limes des Bildsystems in  $\mathcal{C}^\wedge$ , in Formeln

$$(\lim C_i)^\wedge \xrightarrow{\sim} \lim \hat{C}_i$$

Beide Funktoren nehmen ja auf allen  $Z \in \mathcal{C}$  denselben Wert  $\lim \mathcal{C}(Z, C_i)$  an.

**3.1.5 (Verträglichkeit von Kolimites mit Yoneda-Einbettungen).** Seien  $\mathfrak{U}$  ein Mengensystem und  $\mathcal{C}$  eine  $\mathfrak{U}$ -Kategorie und  $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\mathfrak{U}}^\vee := \text{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\text{Ens})^{\text{opp}}$  die Yoneda-Einbettung  $C \mapsto (\check{C} : X \mapsto \mathcal{C}(C, X))$ . Existiert der Kolimes eines Systems  $(C_i)_{i \in \mathcal{I}}$  in  $\mathcal{C}$ , so liefert er auch einen Kolimes des Bildsystems in  $\mathcal{C}^\vee$ , in Formeln

$$\text{col } \check{C}_i \xrightarrow{\sim} (\text{col } C_i)^\vee$$

Beide Funktoren nehmen ja auf allen  $Z \in \mathcal{C}$  denselben Wert  $\text{col } \mathcal{C}(C_i, Z)$  an.

**3.1.6 (Unverträglichkeit von Kolimites mit Ko-Yoneda-Einbettungen).** Im Gegensatz zu den im vorigen Punkt behandelten Fällen muß, wenn der Kolimes  $\text{col } C_i$  existiert, der natürliche Morphismus  $\text{col } \hat{C}_i \rightarrow (\text{col } C_i)^\wedge$  in  $\mathcal{C}^\wedge$  dennoch kein Isomorphismus sein, als da heißt, die natürliche Abbildung  $\text{col } \mathcal{C}(Z, C_i) \rightarrow \mathcal{C}(Z, \text{col } C_i)$  muß keineswegs für alle Objekte  $Z$  eine Bijektion sein. Ein typisches Gegenbeispiel ist der Fall der Kategorie der Vektorräume, in der wir jeden Raum  $V$  als Kolimes des Systems aller endlichdimensionalen Teilräume  $C_i \subset V$  schreiben können: Der Kolimes der Homomorphismenräume geht dann isomorph auf den Raum der Homomorphismen endlichen Rangs und keineswegs isomorph auf den Raum aller Homomorphismen. Ein vielleicht noch typischeres Gegenbeispiel ist der Fall direkter Summen von Vektorräumen: Die Identität auf einer direkten Summe mit unendlich vielen von Null verschiedenen Summanden landet nicht in einer endlichen Teilsumme. Analoges gilt für Limites.

**3.1.7 (Verträglichkeit in der Unverträglichkeit).** Man beachte, daß wenn der Kolimes  $\text{col } \hat{C}_i$  in  $\mathcal{C}^\wedge$  existiert und zusätzlich im essentiellen Bild der Ko-Yoneda-Einbettung  $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$  liegt, daß dann auch der Kolimes  $\text{col } C_i$  in  $\mathcal{C}$  existiert und der natürliche Morphismus doch ein Isomorphismus  $\text{col } \hat{C}_i \xrightarrow{\sim} (\text{col } C_i)^\wedge$  in  $\mathcal{C}^\wedge$  ist. Das folgt aus den in [TS] 7.1.27 besprochenen Aussagen zur Verträglichkeit von Kolimites mit volltreuen Funktoren. Analoges gilt für Limites.

**Beispiel 3.1.8 (Unverträglichkeit verschiedener Limites bei Mengen).** Wir betrachten in der Kategorie  $\text{Ens}$  der Mengen das System

$$\dots \rightarrow M^3 \rightarrow M^2 \rightarrow M$$

für irgendeine feste Menge  $M$  mit den Abbildungen, die jeweils den letzten Eintrag eines Tupels weglassen. Sein Limes in  $\text{Ens}$  ist die Menge  $\text{Ens}(\mathbb{N}, M)$  aller Folgen in  $M$ . Der Limes des Systems  $\dots \rightarrow (M^3)^\vee \rightarrow (M^2)^\vee \rightarrow M^\vee$  von Mengenfunktoren in  $\text{Ens}^\vee = \text{Cat}(\text{Ens}, \text{Ens})^{\text{opp}}$  dahingegen ordnet jeder Menge

$Y$  den Kolimes des Systems  $\text{Ens}(M, Y) \rightarrow \text{Ens}(M^2, Y) \rightarrow \text{Ens}(M^3, Y) \rightarrow \dots$  zu alias die Menge aller Abbildungen  $\text{Ens}(\mathbb{N}, M) \rightarrow Y$ , die über eines der  $M^n$  faktorisieren. In  $\text{Ens}^\vee$  ist also der natürliche Morphismus

$$(\lim M^n)^\vee \rightarrow \lim((M^n)^\vee)$$

kein Isomorphismus, wenn  $M$  mindestens zwei Elemente hat. Mit 3.1.7 zeigt das, daß die Yoneda-Einbettung  $\text{Ens} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}^\vee$  nicht essentiell surjektiv ist.

**Beispiel 3.1.9 (Unverträglichkeit verschiedener Kolimites bei Mengen).** Wir betrachten in der Kategorie  $\text{Ens}$  der Mengen das System

$$\{0\} \rightarrow \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\} \rightarrow \dots$$

mit dem Kolimes  $\mathbb{N}$  und prüfen, daß der Kolimes in  $\text{Ens}^\wedge$  beschrieben werden kann als der Funktor, der jeder Menge  $X$  die Menge aller Abbildungen  $X \rightarrow \mathbb{N}$  mit endlichem Bild zuordnet. Der natürliche Morphismus

$$\text{col}(\{0, \dots, n\}^\wedge) \rightarrow (\text{col}\{0, \dots, n\})^\wedge$$

ist mithin kein Isomorphismus. Mit 3.1.7 zeigt das, daß die Ko-Yoneda-Einbettung  $\text{Ens} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}^\wedge$  nicht essentiell surjektiv ist.

**3.1.10 (Notation für Kolimites und Limites in Funktorkategorien).** Ich verwende für in der Kategorie  $\mathcal{C}^\wedge$  zu verstehende Kolimites einer Köcherdarstellung  $(C_i)_{i \in \mathcal{I}}$  in  $\mathcal{C}$  die Notation

$$\text{côl } C_i := \text{col } \hat{C}_i$$

und im filtrierenden Fall die Notation  $\text{côlf}$  und spreche im filtrierenden Fall von einem **Indkolimes**. Dual verwende ich die Notation  $\text{lîm}$  und im kofiltrierenden Fall die Notation  $\text{lîmf}$  für in der Kategorie  $\mathcal{C}^\vee$  zu verstehende Limites. Im kofiltrierenden Fall spreche ich auch von einem **Prolimes**.

**3.1.11 (Alternative Notationen).** In der Literatur findet man vielfach statt  $\text{côl}$  die Notation “ $\varinjlim$ ” mit Anführungsstrichlein für in der Kategorie  $\mathcal{C}^\wedge$  zu verstehende Kolimites und statt  $\text{lîm}$  die Notation “ $\varprojlim$ ” für in der Kategorie  $\mathcal{C}^\vee$  zu verstehende Limites.

**3.1.12 (Morphismen von Limites von Mengenfunktoren).** Sei  $(D_j)$  ein Diagramm von Objekten einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Ein Morphismus eines Objekts  $F \in \mathcal{C}^\vee$  in den Limes  $\text{lîm } D_j$  ist per definitionem eine verträgliche Familie von Morphismen aus  $\mathcal{C}^\vee(F, \check{D}_j)$  alias ein Element von  $\text{lim}_j \mathcal{C}^\vee(F, \check{D}_j)$ . Das Yoneda-Lemma [LA2] 7.10.2 liefert eine natürliche Bijektion zwischen dieser Menge und  $\text{lim}_j F(D_j)$ . Ist speziell  $F = \text{lîm } C_i$  auch der Limes eines Systems  $(C_i)$ , so erhalten wir eine natürliche Bijektion

$$\mathcal{C}^\vee(\text{lîm } C_i, \text{lîm } D_j) \xrightarrow{\sim} \text{lim}_j \text{col}_i \mathcal{C}(C_i, D_j)$$

Im übrigen dürfen Sie in Übung 3.1.22 zeigen, daß jedes Objekt von  $\mathcal{C}^\vee$  zu einem Objekt der Gestalt  $\lim C_i$  isomorph ist.

3.1.13. Unter einem **Pro-Objekt** einer Kategorie  $\mathcal{C}$  versteht man ein kofiltrierendes System von Objekten von  $\mathcal{C}$  im Sinne von [TS] 7.1.12. Gegeben Pro-Objekte  $(C_i)$  und  $(D_j)$  erklärt man einen **Morphismus von Pro-Objekten** als ein Element der Menge

$$\limf_j \operatorname{colf}_i \mathcal{C}(C_i, D_j)$$

Um die Komposition von Morphismen von Pro-Objekten zu erklären, bemerken wir, daß ein Morphismus repräsentiert werden kann durch eine mit  $j$  indizierte Familie von Morphismen  $C_{i(j)} \rightarrow D_j$ , die in der Weise verträglich sind, daß für jeden Systemmorphismus  $D_k \rightarrow D_j$  und den zu  $k$  gehörigen Morphismus  $C_{i(k)} \rightarrow D_k$  einen Index  $i = i(j, k)$  mit Morphismen  $i \rightarrow i(j)$  und  $i \rightarrow i(k)$  gibt, für den  $C_i \rightarrow C_{i(j)} \rightarrow D_j$  und  $C_i \rightarrow C_{i(k)} \rightarrow D_k \rightarrow D_j$  übereinstimmen. Weiter repräsentiert eine zweite verträgliche Familie von Morphismen  $C_{\tilde{i}(j)} \rightarrow D_j$  genau dann denselben Morphismus von Pro-Objekten, wenn wir für jedes  $j$  einen Index  $\hat{i}(j)$  und Morphismen  $\hat{i}(j) \rightarrow i(j)$  und  $\hat{i}(j) \rightarrow \tilde{i}(j)$  so finden, daß die Kompositionen  $C_{\hat{i}(j)} \rightarrow C_{i(j)} \rightarrow D_j$  und  $C_{\hat{i}(j)} \rightarrow C_{\tilde{i}(j)} \rightarrow D_j$  übereinstimmen. Mit dieser Beschreibung von Morphismen scheint mir nun offensichtlich, wie Morphismen von Pro-Objekten zu komponieren sind. Gegeben ein Mengensystem  $\mathfrak{U}$  verstehen wir unter einer  **$\mathfrak{U}$ -objektkleinen Kategorie** eine Kategorie, deren Objektmenge ein Element von  $\mathfrak{U}$  ist. Wählen wir ein Universum  $\mathfrak{U}$  und ist  $\mathcal{C}$  eine  $\mathfrak{U}$ -Kategorie, so bilden die durch kofiltrierende  $\mathfrak{U}$ -objektkleine Kategorien indizierten Pro-Objekte eine Kategorie

$$\operatorname{pro}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{C})$$

und nach dem vorhergehenden liefert die Vorschrift  $(C_i) \mapsto \limf_i C_i$  einen volltreuen Funktor

$$\operatorname{pro}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\mathfrak{U}}^\vee$$

3.1.14 (**Bedeutung der Pro- und Ind-Objekte**). Die Pro-Objekte einer Kategorie  $\mathcal{C}$  bilden salopp gesprochen einen noch vergleichsweise gut zugänglichen Teil der Kategorie  $\mathcal{C}^\vee$  aller Mengenfunktor. In ganz  $\mathcal{C}^\vee$  haben zwar die Objekte und Morphismenmengen im wesentlichen dieselbe Beschreibung, aber ich kenne in dieser Allgemeinheit keine vergleichbar übersichtliche Beschreibung für die Verknüpfung von Morphismen. Analoges gilt dual für Ind-Objekte, wie wir sie gleich einführen werden.

3.1.15 (**Ind-Objekte und ihre Morphismen**). Ein **Ind-Objekt** einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein filtrierendes System  $(C_i)$  in  $\mathcal{C}$ . Die Morphismen in ein weiteres Ind-Objekt  $(D_j)$  erklären wir als Elemente der Menge

$$\limf_i \operatorname{colf}_j \mathcal{C}(C_i, D_j)$$

Gegeben ein Universum  $\mathfrak{U}$  und eine  $\mathfrak{U}$ -Kategorie  $\mathcal{C}$  bilden dann die durch  $\mathfrak{U}$ -objektkleine filtrierende Kategorien indizierte Indobjekte eine Kategorie  $\text{ind}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{C})$  und die Konstruktion  $(C_i) \mapsto \text{côlf}_i C_i$  liefert einen volltreuen Funktor

$$\text{ind}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\mathfrak{U}}^{\wedge}$$

Jedes Element von  $\text{colf}_j \mathcal{C}(C_i, D_j)$  wird repräsentiert durch einen Morphismus  $\varphi_i : C_i \rightarrow D_b$  für ein  $b$ , das vom jeweiligen Element des Kolimes abhängen wird. Dessen Bild im Kolimes notieren wir  $\bar{\varphi}_i$ . Ein Morphismus von Ind-Objekten ist dann eine verträgliche Familie derartiger  $\bar{\varphi}_i$ .

**Definition 3.1.16.** Ein filtrierendes System  $(C_i)$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **essentiell konstant**, wenn  $\text{côlf } C_i$  isomorph ist zu einem Objekt im Bild der volltreuen Einbettung  $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\wedge}$  alias zu einem Funktor der Gestalt  $\hat{D}$  für ein Objekt  $D \in \mathcal{C}$ . Dual heißt ein kofiltrierendes System  $(C_i)$  **essentiell konstant**, wenn  $\text{limf } C_i$  isomorph ist zu einem Objekt im Bild der volltreuen Einbettung  $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\vee}$ .

3.1.17. Im Fall eines essentiell konstanten filtrierenden Systems  $(C_i)$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist nach 3.1.7 der natürliche Morphismus ein Isomorphismus

$$\text{côlf } C_i \xrightarrow{\sim} \text{colf } C_i$$

Es gilt aber noch mehr. Schreiben wir die Bedingung „essentiell konstant“ für  $\text{côlf}$  aus, so entspricht zunächst einmal ein Morphismus  $\psi \in \mathcal{C}^{\wedge}(\text{côlf } C_i, \hat{D})$  einem verträglichen System von Morphismen  $\psi_i \in \mathcal{C}(C_i, D)$  und ein Morphismus  $\varphi \in \mathcal{C}^{\wedge}(\hat{D}, \text{côlf } C_i)$  hat die Gestalt  $\varphi = \bar{\varphi}_j$  für ein  $\varphi_j \in \mathcal{C}(D, C_j)$  und einen Index  $j$ . Die Bedingung  $\psi \circ \varphi = \text{id}$  bedeutet dann schlicht  $\psi_j \circ \varphi_j = \text{id}_D$  für diesen einen Index  $j$  und [TS] 7.1.36 zeigt nocheinmal, daß für das verträgliche System von Morphismen  $\psi_i \in \mathcal{C}(C_i, D)$  unser  $D$  der Kolimes des Systems der  $C_i$  gewesen sein muß. Die Bedingung  $\varphi \circ \psi = \text{id}$  bedeutet aber zusätzlich die Forderung, daß es für jedes  $a$  Systemmorphisme  $s_{kj} : j \rightarrow k$  und  $s_{ka} : a \rightarrow k$  gibt derart, daß die Verknüpfung

$$C_a \xrightarrow{\psi_a} D \xrightarrow{\varphi_j} C_j \xrightarrow{s_{kj}} C_k$$

zusammenfällt mit dem von  $s_{ka}$  induzierten Morphismus  $C_a \rightarrow C_k$ .

*Beispiel 3.1.18.* Das filtrierende System von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen, indiziert durch  $\mathbb{Z}$  und mit irgendwelchen Vektorräumen an jeder Stelle und Nullmorphisme für alle Morphisme ist essentiell konstant und isomorph zum durch das Nullobjekt dargestellten Funktor.

*Beispiel 3.1.19.* Gegeben ein Vektorraum  $W$  ist der Funktor, der jedem weiteren Vektorraum  $Z$  die Menge aller linearen Abbildungen endlichen Ranges von  $Z$  nach  $W$  zuordnet, ein Ind-Vektorraum, er kann nämlich als der Kolimes der endlichdimensionalen Teilräume von  $W$  in der Kategorie der kontravarianten Mengenfunktor beschrieben werden.

*Beispiel 3.1.20.* Gegeben ein Vektorraum  $V$  ist der Funktor, der jedem weiteren Vektorraum  $Z$  die Menge aller linearen Abbildungen endlichen Ranges von  $V$  nach  $Z$  zuordnet, ein Pro-Vektorraum, er kann nämlich als der Limes der endlich-dimensionalen Quotienten von  $V$  in der Opponierten zur Kategorie der Mengenfunktoren beschrieben werden.

## Übungen

*Übung 3.1.21 (Hinreichendes Kriterium für essentiell konstante Systeme).* Sei  $X : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  ein filtrierendes System in einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Es gebe einen Index  $i \in \mathcal{I}$  derart, daß jeder von  $i$  ausgehende Systemmorphismus  $s : i \rightarrow a$  in der Weise durch einen weiteren Systemmorphismus  $t : a \rightarrow j$  verlängert werden kann, daß die Verknüpfung einen Isomorphismus  $X(ts) : X_i \xrightarrow{\sim} X_j$  induziert. So ist der offensichtliche Morphismus

$$X_i \xrightarrow{\sim} \text{colf}_j X_j$$

und nach 3.1.7 ist a fortiori der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus  $\hat{X}_i \xrightarrow{\sim} \text{côlf}_j X_j$ . Daß es auch andere essentiell konstante Systeme gibt, zeigt eine leichte Variation von Beispiel 3.1.18.

*Übung 3.1.22 (Mengenfunktoren als Kolimites).* Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\mathcal{C}^\wedge := \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \text{Ens})$  und  $\mathcal{C} \mapsto \hat{\mathcal{C}}$  die volltreue Ko-Yoneda-Einbettung  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ . Gegeben  $X \in \mathcal{C}^\wedge$  betrachten wir die volle Unterkategorie  $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{C}_X^\wedge$  aller Morphismen  $\hat{\mathcal{C}} \rightarrow X$  mit  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$  und den Funktor  $V : \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}^\wedge$ , der den Morphismus nach  $X$  vergißt. So ist der natürliche Morphismus ein Isomorphismus  $\text{côl}_{\mathcal{C}_X} V \xrightarrow{\sim} X$  oder anders notiert

$$\text{côl}_{\hat{\mathcal{C}} \rightarrow X} \hat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} X$$

Genauer liefert jeder Morphismus  $\varphi : \text{côl}_{\hat{\mathcal{C}} \rightarrow X} \hat{\mathcal{C}} \rightarrow Y$  mit  $Y \in \mathcal{C}^\wedge$  für beliebige  $A, \mathcal{C} \in \mathcal{C}$  und  $\psi : \hat{\mathcal{C}} \rightarrow X$  eine Abbildung  $\varphi(\psi, A) : \hat{\mathcal{C}}(A) \rightarrow Y(A)$ . Jedes  $u \in X(A)$  entspricht nun einem  $\hat{u} : \hat{A} \rightarrow X$  und liefert so  $\varphi(\hat{u}, A) : \hat{A}(A) \rightarrow Y(A)$ . Die Abbildung  $X(A) \rightarrow Y(A)$  wird nun gegeben durch  $u \mapsto \varphi(\hat{u}, A)(\text{id}_A)$ . Den Rest mag der Leser selber machen.

*Übung 3.1.23 (Proendliche Mengen als topologische Räume).* Man betrachte die Kategorie  $\text{Ens}_f$  der endlichen Mengen und zeige, daß unter der Interpretation endlicher Mengen als diskrete topologische Räume das Bilden des Limes in der Kategorie der topologischen Räume einen volltreuen Funktor

$$\text{pro-Ens}_f \xrightarrow{\sim} \text{Top}$$

von der Kategorie der Pro-Objekte zu endlichen Mengen in die Kategorie der topologischen Räume liefert. Allgemeiner zeige man, daß wir in derselben Weise einen volltreuen Funktor

$$\text{pro-Ens} \xrightarrow{\simeq} \text{Unif}$$

von der Kategorie der Pro-Objekte von Mengen in die Kategorie der uniformen Räume mit gleichmäßig stetigen Abbildungen als Morphismen erhalten.

*Übung 3.1.24.* Man betrachte die Kategorie Grpf der endlichen Gruppen und zeige, daß nach dem Auffassen endlicher Gruppen als diskrete topologische Gruppen das Bilden des Limes in der Kategorie der topologischen Gruppen einen volltreuen Funktor

$$\text{pro-Grpf} \xrightarrow{\simeq} \text{GrpTop}$$

von der Kategorie der Pro-Objekte in endlichen Gruppen in die Kategorie der topologischen Gruppen liefert. Die topologischen Gruppen im essentiellen Bild dieses Funktors heißen **proendliche Gruppen**. Sie können dadurch charakterisiert werden, daß sie kompakt und Hausdorff sind und daß das neutrale Element eine Umgebungsbasis aus offenen Normalteilern besitzt.

*Übung 3.1.25 (Erweiterung einer Kategorie um alle endlichen Produkte).* Seien  $\mathfrak{U}$  ein Mengensystem und  $\mathcal{C}$  eine  $\mathfrak{U}$ -Kategorie. So erhält die Ko-Yoneda-Einbettung  $\mathcal{C} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}_{\mathfrak{U}}^{\wedge}$  Produkte, wann immer diese existieren, und auch für jedes größere Mengensystem  $\mathfrak{V} \supset \mathfrak{U}$  erhält die offensichtliche Einbettung  $\mathcal{C}_{\mathfrak{U}}^{\wedge} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}_{\mathfrak{V}}^{\wedge}$  Produkte, wann immer diese existieren. Gibt es in  $\mathfrak{U}$  alle endlichen Produkte, so auch in  $\mathcal{C}_{\mathfrak{U}}^{\wedge}$ .

## 3.2 Faktorierte Funktoren auf Ore-Lokalisierungen

3.2.1. Die Elemente einer ausgezeichneten Menge  $S$  von Morphismen einer Kategorie nennen wir im folgenden  **$S$ -Morphismen**.

3.2.2 (**Ore-Lokalisierung durch Ind-Objekte**). Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechtsosystem von  $\mathcal{C}$ . Nach 1.4.13 haben wir eine natürliche Bijektion

$$\text{colf}_{Y \xrightarrow{S} B} \mathcal{C}(X, B) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}_S(X, Y)$$

zwischen dem Morphismenraum  $\mathcal{C}_S(X, Y)$  in der Lokalisierung und dem filtrierenden Kolimes über das System aller  $S$ -Morphismen  $Y \rightarrow B$  aus  $Y$  der Morphismenräume  $\mathcal{C}(X, B)$ . In der Terminologie von 3.1.12 ist diese Menge weiter in natürlicher Bijektion zu  $\mathcal{C}^{\wedge}(X, Y^+)$  für

$$Y^+ := \text{côlf}_{Y \xrightarrow{S} B} B$$

mit dem filtrierenden Kolimes in der Funktorkategorie über das System  $S^Y$  aller  $S$ -Morphismen  $Y \rightarrow B$  aus  $Y$ . Damit aber induziert jeder  $S$ -Morphismus  $t :$

$X \rightarrow A$ , da wir die analoge Aussage in  $\mathcal{C}_S$  ja bereits kennen, eine Bijektion  $\mathcal{C}^\wedge(A, Y^+) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge(X, Y^+)$ . Die Vorschrift  $Y \mapsto Y^+$  induziert mithin, wieder nach 3.1.12, einen volltreuen Funktor

$$\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \text{ind}(\mathcal{C})$$

**3.2.3 (Ore-Lokalisierung durch Pro-Objekte).** Analog konstruiert man im Fall eines Linksoresystems  $S$  einen volltreuen Funktor  $\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \text{pro}(\mathcal{C})$ ,  $X \mapsto X^-$ .

**Definition 3.2.4.** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von  $\mathcal{C}$ . Der **rechtsfaktorierte** oder ausführlicher der **volle rechtsfaktorierte Funktor**  $\text{R}F$  von  $F$  ist die Komposition

$$\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \text{ind}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ind}(\mathcal{D})$$

der volltreuen Einbettung aus 3.2.2 mit dem von  $F$  auf Ind-Objekten induzierten Funktor.

**3.2.5 (Rechtsfaktorierter auf Objekten).** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von  $\mathcal{C}$ . Auf Objekten wird unser Rechtsfaktorierter gegeben durch die Vorschrift

$$(\text{R}F)(QY) := \text{côlf}_{Y \xrightarrow{S} B} FB$$

Der **Indkolimes** ist hier gemeint über die filtrierende Kategorie aller  $S$ -Morphismen  $Y \rightarrow B$  in  $\mathcal{C}$ . Für  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  die Lokalisierung und  $V : \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \text{ind}(\mathcal{D})$  der offensichtliche volltreue Funktor erhält man aus der Konstruktion zusätzlich eine ausgezeichnete Transformation

$$\rho : V \circ F \Rightarrow \text{R}F \circ Q$$

**Definition 3.2.6.** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Ein Objekt  $I \in \mathcal{C}$  heißt  **$F$ - $S$ -rechtsentfaltet**, wenn sich jeder  $S$ -Morphismus  $I \rightarrow B$  so durch einen weiteren Morphismus  $B \rightarrow J$  verlängern läßt, daß die Komposition ein  $S$ -Morphismus ist und unter  $F$  einen Isomorphismus  $FI \xrightarrow{\sim} FJ$  induziert.

**3.2.7 (Rückwärtskompatibilität der Terminologie).** Sei  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Nach 1.4.27 ist ein Objekt  $S$ -rechtsentfaltet im Sinne von 1.3.7 genau dann, wenn es Id- $S$ -rechtsentfaltet ist für den Identitätsfunktor auf  $\mathcal{C}$ , und dann ist es auch  $F$ - $S$ -rechtsentfaltet für jeden Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  in eine weitere Kategorie  $\mathcal{D}$ . Unsere  $S$ -rechtsentfalteten Objekte sind weiter genau die  $Q$ -rechtsentfalteten Objekte im Sinne von 1.3.1 für den Quotientenfunktor  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ . Unsere  $F$ - $S$ -rechtsentfalteten Objekte hier stehen zu den  $F$ -rechtsentfalteten Objekten aus 1.3.1 in keiner direkten Beziehung, sie verallgemeinern vielmehr die  $Q$ -rechtsentfalteten Objekte.

3.2.8. Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Ein Objekt  $I$  ist  $F$ - $S$ -rechtsentfaltet, wenn in der filtrierenden Kategorie der von  $I$  ausgehenden  $S$ -Morphismen diejenigen  $S$ -Morphismen  $I \rightarrow J$ , die unter  $F$  zu Isomorphismen werden, eine konfinale Unterkategorie bilden. Das ist nur eine Umformulierung der Definition.

3.2.9. Ein Objekt  $I \in \mathcal{C}$  heißt  $F$ - $S$ -**déployé à droite**, wenn unsere Transformation aus 3.2.5 einen Isomorphismus  $\rho_I : V(FI) \xrightarrow{\sim} RF(QI)$  induziert. Diese Bedingung ist mühsamer in der Handhabung und für unsere Zwecke reichen rechtsentfaltete Objekte aus. Nach 3.1.21 ist jedes rechtsentfaltete Objekt auch **déployé à droite**.

**Definition 3.2.10.** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Ein Objekt  $Y \in \mathcal{C}$  heiße  $F$ - $S$ -**rechtsentfaltbar**, wenn es ein  $F$ - $S$ -rechtsentfaltetes Objekt  $I \in \mathcal{C}$  gibt mitsamt einem Morphismus  $Y \rightarrow I$ , der in  $\mathcal{C}_S$  ein Isomorphismus wird. So einen Morphismus nennen wir dann eine  $F$ - $S$ -**Rechtsentfaltung** von  $Y$ . Die vollen Unterkategorien der  $F$ - $S$ -rechtsentfalteten beziehungsweise  $F$ - $S$ -rechtsentfaltbaren Objekte notieren wir  $\mathcal{C}_{[F]} \subset \mathcal{C}_F \subset \mathcal{C}$  und die vollen Unterkategorien ihrer Bilder in der Lokalisierung entsprechend  $\mathcal{C}_{S,[F]} \subset \mathcal{C}_{S,F} \subset \mathcal{C}_S$ .

3.2.11. Die Frage, inwieweit  $\mathcal{C}_{[F]} \rightarrow \mathcal{C}_{S,[F]}$  und  $\mathcal{C}_F \rightarrow \mathcal{C}_{S,F}$  wieder Lokalisierungsfunktoren sind, lassen wir unberührt.

3.2.12. Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit Rechtsoresystem  $S$ . Wir hatten in 3.2.7 gesehen, daß die Id- $S$ -rechtsentfalteten Objekte genau unsere  $S$ -rechtsentfalteten Objekte sind. Analog vereinbaren wir hier, daß wir die Id- $S$ -rechtsentfaltbaren Objekte kurz  $S$ -**rechtsentfaltbar** nennen.

**Satz 3.2.13 (Rechtsfaktorierter).** *Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . So gibt es bis auf eindeutigen Isomorphismus genau ein Paar  $(R, \tau)$  bestehend aus einem Funktor*

$$R : \mathcal{C}_{S,F} \rightarrow \mathcal{D}$$

*und einer Transformation  $\tau = \tau_F : F \Rightarrow RQ$  von Funktoren  $\mathcal{C}_F \rightarrow \mathcal{D}$  derart, daß für jedes  $F$ - $S$ -rechtsentfaltete Objekt  $I \in \mathcal{C}_{[F]}$  unsere Transformation einen Isomorphismus  $\tau_I = \tau_{F,I} : FI \xrightarrow{\sim} RQI$  liefert.*

3.2.14. Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Das Paar  $(R, \tau)$  aus unserem Satz nennen wir den **zahmen Rechtsfaktorierten von  $F$** . Es wird sich beim Beweis des Satzes erweisen, daß der zahme Rechtsfaktorierter im wesentlichen eine Einschränkung des vollen Rechtsfaktorierten ist. Im weiteren verstehen wir unter dem **Rechtsfaktorierten von  $F$**  meist unseren zahmen Rechtsfaktorierten und verwenden auch dafür die Notation  $RF$ .

3.2.15. Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtssoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Ist  $Y \rightarrow I$  eine  $F$ - $S$ -Rechtsentfaltung, so erhalten wir mit  $\tau$  in den Horizontalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} FY & \rightarrow & RF(QY) \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ FI & \xrightarrow{\sim} & RF(QI) \end{array}$$

einen und daraus einen ausgezeichneten Isomorphismus  $RF(QY) \xrightarrow{\sim} FI$ . Das zeigt, wie wir unsere rechtsfaktorierten Funktoren berechnen können.

3.2.16 (**Charakterisierung von eingeschränkten Rechtsfaktorierten**). Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtssoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Ist in der Situation des Satzes 3.2.13 über den Rechtsfaktorierten allgemeiner eine volle Unterkategorie  $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}_F$  gegeben, in der jedes Objekt eine  $F$ - $S$ -Rechtsentfaltung besitzt, so gibt es auch bis auf eindeutigen Isomorphismus genau ein Paar  $(R, \tau)$  mit  $R : Q(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{D}$  und  $\tau : F \Rightarrow RQ$  derart, daß  $\tau_I$  für alle  $F$ - $S$ -rechtsentfalteten Objekte  $I$  von  $\mathcal{U}$  ein Isomorphismus ist. Das folgt aus unserem Beweis des Satzes gleich mit.

*Beweis.* Per definitionem macht der volle rechtsfaktorierte Funktor  $F$ - $S$ -rechtsentfaltbare Objekte zu essentiell konstanten induktiven Systemen. Bezeichnen wir mit  $\text{ind}_{\text{ek}}(\mathcal{D})$  die Kategorie der essentiell konstanten Systeme, so schränkt  $(R, \tau)$  demnach ein zu einem Paar derselben Art in der unteren Horizontale des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{C}_S & \xrightarrow{RF} & \text{ind}(\mathcal{D}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{C}_F & \longrightarrow & \mathcal{C}_{S,F} & \xrightarrow{RF} & \text{ind}_{\text{ek}}(\mathcal{D}) \xleftarrow[\approx]{V} \mathcal{D} \end{array}$$

Wir erhalten also einen Rechtsfaktorierten  $(R, \tau)$ , indem wir für die Äquivalenz von Kategorien  $V$  unten rechts ein Quasiinverses wählen und es dem auf  $\mathcal{C}_{S,F}$  eingeschränkten vollen Rechtsfaktorierten  $(R, \tau)$  nachschalten. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, nun  $(R', \tau')$  sei ein weiteres mögliches Paar. Indem wir die Äquivalenz  $V : \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \text{ind}_{\text{ek}}(\mathcal{D})$  nachschalten, müssen wir nur zeigen, daß es genau eine Transformation  $\kappa : VR' \Rightarrow RF$  gibt mit  $\rho = \kappa Q \circ V\tau' : VF \Rightarrow RFQ$  und daß diese Transformation  $\kappa$  eine Isotransformation ist. Das alles folgt aber unmittelbar aus unseren Annahmen und der Tatsache, daß die Einbettung eine Äquivalenz  $\mathcal{C}_{S,[F]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{S,F}$  ist.  $\square$

*Beispiel 3.2.17 (Blick hinter die Kulissen).* Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtssoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Aus unserem Satz 3.2.13 zum

Rechtsfaktorierten folgt, daß jeder  $S$ -Morphismus  $s : I \rightarrow J$  zwischen  $F$ - $S$ -rechtsentfalteten Objekten unter  $F$  ein Isomorphismus wird. Ich will nun zeigen, wie unsere Argumente in diesem speziellen Fall funktionieren, indem ich mit den entsprechenden Vereinfachungen nocheinmal eine unabhängige Argumentation ausschreibe. Weil wir  $I$  als  $F$ - $S$ -rechtsentfaltet annehmen, gibt es  $w : J \rightarrow I_1$  mit  $ws \in S$  und  $F(ws)$  iso. Es folgt  $F(w)F(s)$  iso. Wegen  $S$  rechtsore und  $ws \in S$  und ohne daß wir  $s \in S$  verwenden gibt es weiter  $t : J \rightarrow J_1$  und  $v : I_1 \rightarrow J_1$  mit  $t \in S$  und  $v(ws) = ts$ . Wegen rechtsore gibt es dann auch  $u \in S$  mit  $u(vw) = ut$ . Aufgrund unserer Annahme, daß  $J$  ein  $F$ - $S$ -rechtsentfaltetes Objekt ist, gibt es einen Morphismus  $x$  mit  $xut \in S$  und  $F(xut)$  iso, also  $F(xuvw) = F(xuv)F(w)$  iso. Da nun  $F(w)$  sowohl durch Nachschalten wie durch Vorschalten geeigneter Morphismen zu einem Isomorphismus gemacht werden kann, ist  $F(w)$  selber iso. Aus  $F(w)F(s)$  iso und  $F(w)$  iso folgt dann schließlich  $F(s)$  iso wie gewünscht.

**Beispiel 3.2.18 (Überflüssiges Faktorisieren).** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von  $\mathcal{C}$ . Sind in  $\mathcal{C}$  alle Objekte  $F$ - $S$ -rechtsentfaltet, so werden nach unserem Satz 3.2.13 zum Rechtsfaktorisieren oder auch nach 3.2.17 alle Morphismen aus  $S$  unter  $F$  zu Isomorphismen und unser Funktor  $F$  faktorisiert in eindeutiger Weise über  $\mathcal{C}_S$  als  $F = \tilde{F} \circ Q$ . Für den rechtsfaktorierten Funktor  $(RF, \tau)$  ist dann  $\tau$  eine Isotransformation  $\tau : \tilde{F} \circ Q = F \xrightarrow{\cong} RF \circ Q$  und induziert nach der Volldichtigkeit von Lokalisierungsfunktoren 1.2.20 eine Isotransformation  $\tilde{F} \xrightarrow{\cong} RF$ .

**3.2.19 (Diskussion der Literatur).** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Deligne nennt ein Objekt  $Y \in \mathcal{C}$  **dérivable**, wann immer das Indobjekt  $(RF)(Y)$  zum essentiellen Bild der volltreuen Einbettung  $V : \mathcal{D} \hookrightarrow \text{ind}(\mathcal{D})$  gehört. Ich will vermeiden, in dieser Allgemeinheit zu arbeiten.

**3.2.20 (Rechtsfaktorierte von Morphismenfunktoren).** Sei  $(\mathcal{C}, S)$  eine Kategorie mit einem ausgezeichneten Rechtsoresystem. Gegeben ein Objekt  $X \in \mathcal{C}$  ordnet der Rechtsfaktorierte des Yonedafunktors  $\check{X} := \mathcal{C}(X, \_ ) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  einem Objekt  $QY$  die Ind-Menge

$$(\mathbb{R}\check{X})(QY) = \underset{Y \xrightarrow{S} B}{\text{côlf}} \mathcal{C}(X, B)$$

zu. Ist der Yonedafunktor  $\check{X} := \mathcal{C}(X, \_ ) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  auf  $Y \in \mathcal{C}$  rechtsentfaltbar für  $S$ , ist also  $Y$  ein  $\check{X}$ - $S$ -rechtsentfaltbares Objekt, so ist diese Ind-Menge essentiell konstant und wir erhalten zusammen mit 3.1.17 und 3.2.2 natürliche Bijektionen

$$(\mathbb{R}\check{X})(QY) = \underset{Y \xrightarrow{S} B}{\text{côlf}} \mathcal{C}(X, B) \xrightarrow{\cong} \underset{Y \xrightarrow{S} B}{\text{colf}} \mathcal{C}(X, B) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_S(QX, QY)$$

Der Rechtsfaktorierte des Yonedafunktors ist mithin, wo immer er definiert ist, der Yonedafunktor in der lokalisierten Kategorie. Ist  $S$  ein Linksoresystem, so erhalten wir opponiert für den Rechtsfaktorierten des Yonedafunktors  $\hat{Y} := \mathcal{C}(\_, Y) : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ens}$ , sofern er auf einem Objekt  $X \in \mathcal{C}$  definiert ist, eine natürliche Bijektion  $(R\hat{Y})(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(X, Y)$ . Ist  $S$  sogar ein Oresystem, so ordnet der volle Rechtsfaktorierte des Morphismenfunktors

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}} := \mathcal{C}(\_, \_) : \mathcal{C}^{\text{opp}} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$$

einem Paar  $(QX, QY)$  die Ind-Menge  $\text{côlf}_{A \xrightarrow{S} X, Y \xrightarrow{S} B} \mathcal{C}(A, B)$  zu. Existiert der Rechtsfaktorierte bei  $(QX, QY)$  oder ist diese Ind-Menge auch nur essentiell konstant, so erhalten wir zusammen mit 3.1.17 und 3.2.2 natürliche Bijektionen

$$(R\text{Mor}_{\mathcal{C}})(QX, QY) = \text{côlf}_{A \xrightarrow{S} X, Y \xrightarrow{S} B} \mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{\sim} \text{colf}_{A \xrightarrow{S} X, Y \xrightarrow{S} B} \mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QX, QY)$$

Im Fall eines Oresystem beschreibt der Rechtsfaktorierte des Morphismenfunktors mithin, wo immer er definiert ist, die Morphismen in der lokalisierten Kategorie. Wie in 3.10 ausgeführt wird, verhalten sich die sogenannten „universellen Approximationen“ in diesem Kontext noch besser als unsere faktorierten Funktoren.

**3.2.21 (Faktorisieren einer Verknüpfung).** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von  $\mathcal{C}$ . Gegeben ein weiterer Funktor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  ist offensichtlich jedes  $F$ - $S$ -rechtsentfaltete Objekt auch  $GF$ - $S$ -rechtsentfaltet. Es gibt mithin nach 3.2.16 genau eine Transformation von Funktoren  $\alpha : R(GF)|_{\mathcal{C}_{S,F}} \Rightarrow G \circ RF$  mit  $(\alpha Q) \circ \tau_{GF} = (G\tau_F)$  und diese ist eine Isotransformation

$$R(GF)|_{\mathcal{C}_{S,F}} \xrightarrow{\sim} G \circ RF$$

Feinere Aussagen in dieser Richtung besprechen wir im Zusammenhang mit Grothendieck's Spektralsequenz in 3.4.22.

**Proposition 3.2.22 (Rechtsfaktorierte des Identitätsfunktors).** *Gegeben eine Kategorie mit Rechtsoresystem  $(\mathcal{C}, S)$  ist der Rechtsfaktorierte  $R\text{Id} : \mathcal{C}_{S,\text{Id}} \rightarrow \mathcal{C}$  des Identitätsfunktors ein maximaler partieller Rechtsadjungierter  $R$  des Lokalisierungsfunktors  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  mit  $\tau$  der Einheit der Adjunktion.*

*Beweis.* Nach 3.2.7 besteht  $\mathcal{C}_{[\text{Id}]}$  genau aus allen  $S$ -rechtsentfalteten Objekten von  $\mathcal{C}$  im Sinne von 1.3.7 und nach 1.3.7 sind das genau alle Objekte  $I \in \mathcal{C}$  derart, daß der partielle Rechtsadjungierte  $R$  von  $Q$  bei  $QI$  definiert ist und die Adjunktion einen Isomorphismus  $I \xrightarrow{\sim} RQI$  liefert. Auf allen Objekten von  $\mathcal{C}_{S,[\text{Id}]}$  und damit auch auf allen Objekten von  $\mathcal{C}_{S,\text{Id}}$  ist also der partielle Rechtsadjungierte definiert. Ist umgekehrt der partielle Rechtsadjungierte  $R$  zu  $Q$  bei  $QY$  definiert, so ist

$RQY$  nach 1.3.9 rechtsentfaltet und  $\text{id}_{QY}$  entspricht unter der Adjunktion einem Morphismus  $Y \rightarrow RQY$ , der unter  $Q$  zu einem Isomorphismus wird. Mithin ist  $Y$  ein  $S$ -Id-rechtsentfaltbares Objekt im Sinne von 3.2.10. So sehen wir, daß auch umgekehrt alle Objekte, auf denen der Rechtsderivierte zu  $Q$  definiert ist, zu  $\mathcal{C}_{S,\text{Id}}$  gehören müssen. Also ist unser partieller Rechtsadjungierter ein Funktor  $R : \mathcal{C}_{S,\text{Id}} \rightarrow \mathcal{C}$  und die Einheit der Adjunktion ist eine Transformation  $\varepsilon : \text{Id} \Rightarrow RQ$  mit  $\varepsilon_I : I \xrightarrow{\sim} RQI$  für alle rechtsentfalteten Objekte  $I$ . Damit aber hat das Paar  $(R, \varepsilon)$  die charakterisierende Eigenschaft, die den Rechtsfaktorierten der Identität  $(R\text{Id}, \tau)$  festlegt bis auf eindeutigen Isomorphismus.  $\square$

*Ergänzung 3.2.23.* In den Notationen des vorhergehenden Beweises ist nach 1.3.9 weiter  $Q\tau_Y$  ein Isomorphismus. Nach 1.4.19 folgt daraus, wenn  $S$  ein gesättigtes Oresystem ist, sogar  $\tau_Y \in S$ .

**3.2.24 ( $S$ -Rechtsentfaltet impliziert  $G$ - $S$ -Rechtsentfaltet).** Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  mit einem Rechtsoresystem  $S$  sind die  $S$ -rechtsentfalteten Objekte nach 3.2.21 notwendig  $G$ - $S$ -rechtsentfaltet für jeden Funktor  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und 3.2.21 liefert stets eine Isotransformation

$$\alpha : RG|_{\mathcal{C}_{S,\text{Id}}} = R(G \circ \text{Id})|_{\mathcal{C}_{S,\text{Id}}} \xrightarrow{\sim} G \circ R\text{Id} \text{ mit } \alpha Q \circ \tau_G = G\tau_{\text{Id}}.$$

Nun wissen wir aus 3.2.22, daß der Rechtsfaktorierte  $R\text{Id}$  des Identitätsfunktors gerade der maximale partielle Rechtsadjungierte  $R$  des Lokalisierungsfunktors ist. Salopp gesprochen haben wir also  $RG = G \circ R$  wo immer der partielle Rechtsadjungierte  $R$  des Lokalisierungsfunktors definiert ist.

*Vorschau 3.2.25 (Faktorisieren mit injektiven Auflösungen).* Gegeben  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $S$  das Rechtsoresystem der Quasiisomorphismen in  $\mathcal{C} := \text{Hot}_{\mathcal{A}}$  hatten wir bereits in 2.6.5 vereinbart, die  $S$ -rechtsentfalteten Komplexe quisrechtsentfaltet zu nennen. Ebenso vereinbaren wir hier, die  $S$ -rechtsentfaltbaren Komplexe **quisrechtsentfaltbar** zu nennen. Zum Beispiel ist jeder gegen die Pfeile beschränkte Komplex  $I$  von injektiven Objekten von  $\mathcal{A}$  nach 2.6.6 quisrechtsentfaltet. Wenn  $\mathcal{A}$  genug Injektive besitzt, ist demnach für jedes  $A \in \mathcal{A}$  der Komplex  $A[0]$  quisrechtsentfaltbar. Betrachten wir nun eine weitere abelsche Kategorie  $\mathcal{B}$  und einen additiven Funktor  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und die Verknüpfung  $F := Q \circ \text{Hot}(T)$  von Funktoren

$$F : \mathcal{C} = \text{Hot}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Hot}_{\mathcal{B}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{B}} = \mathcal{D}$$

und hat  $\mathcal{A}$  weiter genug Injektive, so finden wir natürliche Isomorphismen

$$(R^i T)(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i((RF)(A[0]))$$

Sie zeigen die Beziehung unserer höheren derivierten Funktoren aus [TG] 3.2.8 mit den hier erklärten faktorierten Funktoren. Im übrigen gibt es, wenn  $\mathcal{A}$  genug

Injektive besitzt, nach [TG] 9.3.9 oder alternativ 2.7.9 sogar von jedem Komplex in  $\text{Hot}^+(\mathcal{A})$  einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex in  $\text{Hot}^+(i\mathcal{A})$  aus injektiven Objekten. Jeder Komplex in  $\text{Hot}^+(\mathcal{A})$  ist mithin quisrechtsentfaltbar für jeden Funktor  $F : \text{Hot}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}$  in eine beliebige weitere Kategorie. Ein Vorteil der Begrifflichkeit der  $F$ - $S$ -rechtsentfaltbaren Objekte oder spezieller der  $F$ -quisrechtsentfaltbaren Komplexe liegt darin, daß wir damit, auch ohne die Existenz von genug injektiven Objekten vorauszusetzen, derivierte Funktoren erklären und untersuchen können. Das verwenden wir in der opponierten Situation im weiteren zum Beispiel, um auf der derivierten Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum ein Tensorprodukt zu erklären.

3.2.26. Seien opponiert  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Linksoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Der **volle linksfaktorierte Funktor von  $F$**  ist der Funktor  $LF : \mathcal{C}_S \rightarrow \text{pro}(\mathcal{D})$  von der Lokalisierung von  $\mathcal{C}$  in die Kategorie der pro-Objekte von  $\mathcal{D}$  gegeben durch

$$(LF)(X) := \lim_{A \xrightarrow{S} X} FA$$

Der Limes ist dabei zu verstehen über die kofiltrierende Kategorie aller  $S$ -Morphismen  $A \rightarrow X$  in  $\mathcal{C}$ . Wir haben  $(LF)^{\text{opp}} = R(F^{\text{opp}}) : \mathcal{C}_S^{\text{opp}} \rightarrow \text{ind}(\mathcal{D}^{\text{opp}}) = (\text{pro}(\mathcal{D}))^{\text{opp}}$ . Alle für rechtsfaktorierte Funktoren bewiesenen Aussagen übertragen sich unmittelbar auf linksfaktorierte Funktoren. Insbesondere erklären wir die vollen Unterkategorien  $\mathcal{C}_{[F]} \subset \mathcal{C}_F \subset \mathcal{C}$  der  $F$ - $S$ -**linksentfalteten** beziehungsweise  $F$ - $S$ -**linksentfaltbaren Objekte** und die vollen Unterkategorien

$$\mathcal{C}_{S,[F]} \subset \mathcal{C}_{S,F} \subset \mathcal{C}_S$$

in der Lokalisierung mit deren Bildern als Objekten und verzichten darauf, eine Notation einzuführen, die in diesem Kontext den Unterschied zwischen rechts und links zum Ausdruck bringt. Weiter erklären wir den **Linksfaktorierten** als das bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte Paar  $(LF, \sigma)$  bestehend aus einem Funktor  $LF : \mathcal{C}_{S,F} \rightarrow \mathcal{D}$  und einer Transformation

$$\sigma : LF \circ Q \Rightarrow F$$

in  $\text{Cat}(\mathcal{C}_F, \mathcal{D})$ , die für  $F$ - $S$ -linksentfaltetes  $P$  alias  $P \in \mathcal{C}_{[F]}$  einen Isomorphismus  $\sigma_P : (LF)(P) \xrightarrow{\sim} FP$  liefert.

3.2.27 (**Rechtsfaktorierte und Linksfaktorierte**). Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Oresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Für die Objekte  $X$ , die sowohl linksentfaltbar als auch rechtsentfaltbar sind, liefern unsere Definitionen natürliche Morphismen  $(LF)QX \rightarrow FX \rightarrow (RF)QX$  in  $\mathcal{D}$ . Für Objekte  $X$ , die sowohl  $F$ - $S$ -linksentfaltbar als auch  $F$ - $S$ -rechtsentfaltbar sind, sind diese Morphismen sogar Isomorphismen. Sind alle Objekte von  $\mathcal{C}$  sowohl  $F$ - $S$ -rechtsentfaltbar

als auch  $F$ - $S$ -linksentfaltet, so erhalten wir auf diese Weise Isotransformationen  $LF \circ Q \xrightarrow{\cong} F \xrightarrow{\cong} RF \circ Q$ . Insbesondere macht dann  $F$  Morphismen aus  $S$  zu Isomorphismen und faktorisiert folglich als  $F = \tilde{F} \circ Q$ . Da jeder Lokalisierungsfunktor nach 1.2.20 volllicht ist, kommen unsere Isotransformationen also her von wohlbestimmten Isotransformationen

$$LF \xrightarrow{\cong} \tilde{F} \xrightarrow{\cong} RF$$

Die rechte dieser Isotransformation wurde bereits in 3.2.18 diskutiert.

**3.2.28 (Adjunktion von faktorierten Funktoren).** Seien adjungierte Funktoren  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  gegeben und seien  $S$  ein Linksoresystem in  $\mathcal{C}$  und  $T$  ein Rechtsoresystem in  $\mathcal{D}$ . So erhalten wir natürliche Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}_S)^\wedge(X, R(QG)Y) & & (\mathcal{D}_T)^\vee(L(QF)X, Y) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ \text{colf}_{Y \xrightarrow{T} I} \mathcal{C}_S(X, QGI) & & \text{colf}_{P \xrightarrow{S} X} \mathcal{D}_T(QFP, Y) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ \text{colf}_{Y \xrightarrow{T} I, P \xrightarrow{S} X} \mathcal{C}(P, GI) & \xrightarrow{\sim} & \text{colf}_{P \xrightarrow{S} X, Y \xrightarrow{T} I} \mathcal{D}(FP, I) \end{array}$$

Hier bezeichnet  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  und  $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_T$  die jeweilige Lokalisierung. Sind speziell das ind-Objekt  $R(QG)Y$  und das pro-Objekt  $L(QF)X$  essentiell konstant, so erhalten wir eine natürliche Bijektion

$$\mathcal{C}_S(X, R(QG)Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_T(L(QF)X, Y)$$

Sind etwa alle Objekte von  $\mathcal{C}$  bereits  $QF$ - $S$ -linksentfaltbar, so ist  $R(QG)$  der partielle Rechtsadjungierte zu  $L(QF)$  auf allen  $QG$ - $T$ -rechtsentfaltbaren Objekten von  $\mathcal{D}$ .

*Vorschau 3.2.29.* Die obigen Aussagen zur Adjunktion von vollen faktorierten Funktoren sind für die „Kan-Erweiterungen“, die auch oft betrachtet werden und die wir in 3.10 behandeln, in dieser Allgemeinheit nicht mehr richtig.

**3.2.30.** Ich erinnere daran, daß wir in [TF] 4.8.5 einen partiell definierten Funktor als einen auf einer vollen Unterkategorie definierten Funktor erklärt hatten. Gegeben Kategorien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  und partiell definierte Funktoren  $L : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$  und  $R : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{A}$  verstehe ich unter einer **partiellen Adjunktion**  $(L, R)$  eine Isotransformation

$$\alpha_{A,B} : \mathcal{B}(LA, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RB)$$

von Funktoren  $\mathcal{A}_L \times \mathcal{B}_R \rightarrow \text{Ens}$  vom Produkt der Definitionsbereiche unserer jeweiligen Funktoren. In dieser Terminologie induziert also mit den Notationen der

vorherigen Bemerkung 3.2.28 jede Adjunktion  $(F, G)$  von Funktoren zwischen Kategorien mit ausgezeichneten Links- beziehungsweise Rechts-Oresystemen eine partielle Adjunktion der faktorierten Funktoren  $(L(QF), R(QG))$ .

### 3.2.1 Übungen

*Übung 3.2.31.* Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Induziert eine  $F$ - $S$ -Rechtsentfaltung  $Y \rightarrow I$  von  $Y \in \mathcal{C}$  einen Isomorphismus  $FY \xrightarrow{\sim} FI$ , so ist  $Y$  bereits  $F$ - $S$ -rechtsentfaltet.

*Übung 3.2.32.* Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Gegeben sei eine Menge  $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$  von Objekten derart, daß (1) jedes Objekt  $Y \in \mathcal{C}$  einen  $S$ -Morphismus zu einem Objekt  $I \in \mathcal{I}$  besitzt und daß (2) jeder  $S$ -Morphismus zwischen Objekten aus  $\mathcal{I}$  unter  $F$  ein Isomorphismus wird. So besteht  $\mathcal{I}$  aus  $F$ - $S$ -rechtsentfalteten Objekten.

*Übung 3.2.33.* Seien  $(\mathcal{C}, S)$  und  $(\mathcal{D}, T)$  Kategorien mit Morphismenmengen. Ist  $I \in \mathcal{C}$  rechtsentfaltet für  $S$  und  $J \in \mathcal{D}$  rechtsentfaltet für  $T$ , so ist  $(I, J) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$  rechtsentfaltet für  $S \times T$ .

*Übung 3.2.34.* Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$ . Besitzt  $Y \in \mathcal{C}$  eine  $F$ - $S$ -Rechtsentfaltung, so auch jedes weitere Objekt  $Z \in \mathcal{C}$  mit  $QY \cong QZ$  in  $\mathcal{C}_S$ . Hinweis: Ich erinnere die Definition: Eine  $F$ - $S$ -Rechtsentfaltung 3.2.10 ist ein Morphismus zu einem entfaltetem Objekt, der in der Lokalisierung ein Isomorphismus wird.

*Übung 3.2.35.* Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$ . Gegeben ein  $F$ - $S$ -rechtsentfaltbares Objekt  $X \in \mathcal{C}$  bilden die entsprechenden Entfaltungen  $X \rightarrow I$  ein Ind-Objekt. Hinweis: Jeder Morphismus der lokalisierten Kategorie kann als Rechtsbruch geschrieben werden. Zwei Morphismen  $f, g$  in  $\mathcal{C}$  werden nach 1.4.28 gleich in der Lokalisierung genau dann, wenn es  $s \in S$  gibt mit  $sf = sg$ . Diese Übung wird gebraucht bei der Diskussion der Lokalisierung von Kofaserfunktoren durch lokale Linksanpassung [TSF] 2.5.12.

## 3.3 Faktorisieren über triangulierte Quotienten

3.3.1. Gegeben eine triangulierte Kategorie  $\mathcal{T}$  und ein trianguliertes System  $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$  ist nach 2.5.3 das System  $S = S_{\mathcal{V}}$  aller Morphismen mit Kegel in  $\mathcal{V}$  ein Oresystem und wir haben per definitionem  $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}/\mathcal{V}$ . Statt  $S$ -rechtsentfaltet beziehungsweise  $S$ -rechtsentfaltbar sagen wir in diesem Kontext auch  $\mathcal{V}$ -**rechtsentfaltet** beziehungsweise  $\mathcal{V}$ -**rechtsentfaltbar**. Ebenso sagen wir für einen Funktor  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$  statt  $F$ - $S$ -rechtsentfaltet beziehungsweise  $F$ - $S$ -rechtsentfaltbar in diesem Kontext  $F$ - $\mathcal{V}$ -**rechtsentfaltet** beziehungsweise  $F$ - $\mathcal{V}$ -**rechtsentfaltbar**.

3.3.2. Die  $\mathcal{V}$ -rechtsentfalteten Objekte von  $\mathcal{T}$  sind per definitionem genau unsere  $\mathcal{V}$ -rechtsentfalteten Objekte aus 2.5.6, also genau die Objekte unseres Verdiersystems  $\mathcal{V}^\perp$  aller Objekte  $I \in \mathcal{T}$  mit  $\mathcal{T}(V, I) = 0$  für alle  $V \in \mathcal{V}$ .

**Satz 3.3.3 (Rechtsfaktorierter eines triangulierten Funktors).** *Gegeben ein triangulierter Funktor  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$  und ein trianguliertes System  $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$  gilt:*

1. Die  $F$ - $\mathcal{V}$ -rechtsentfalteten Objekte von  $\mathcal{T}$  bilden eine volle triangulierte Unterkategorie  $\mathcal{T}_{[F]} \subset \mathcal{T}$ ;
2. Die  $F$ - $\mathcal{V}$ -rechtsentfaltbaren Objekte von  $\mathcal{T}$  und ihre Bilder bilden jeweils volle triangulierte Unterkategorien  $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}$  und  $(\mathcal{T}/\mathcal{V})_F \subset \mathcal{T}/\mathcal{V}$ ;
3. Der rechtsfaktorierter Funktor  $\mathbb{R}F$  von  $F$  besitzt genau eine  $\mathbb{Z}$ -Struktur, für die  $\tau : F \Rightarrow (\mathbb{R}F)Q$  eine verträgliche Transformation von  $\mathbb{Z}$ -Funktoeren ist, und mit dieser  $\mathbb{Z}$ -Struktur ist er ein triangulierter Funktor

$$\mathbb{R}F : (\mathcal{T}/\mathcal{V})_F \rightarrow \mathcal{D}$$

*Beweis.* Einen Morphismus mit Abbildungskegel in  $\mathcal{V}$  nennen wir im folgenden kurz einen  $\mathcal{V}$ -Morphismus. Zunächst zeigen wir, daß die  $F$ - $\mathcal{V}$ -rechtsentfalteten oder kurz entfaltenen Objekte eine volle triangulierte Unterkategorie  $\mathcal{T}_{[F]} \subset \mathcal{T}$  bilden. Dazu argumentieren wir anhand des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow \\
 \mathcal{V} \downarrow & & \mathcal{V} \downarrow 1 & & \mathcal{V} \downarrow 2 & & \\
 X & \xrightarrow{1} & Y & \xrightarrow{2} & Z & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow \\
 \parallel & & \mathcal{V} \downarrow 3 & & \mathcal{V} \downarrow 4 & & \\
 X & \xrightarrow{3} & Y' & \xrightarrow{4} & Z' & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow \\
 \mathcal{V} \downarrow 6 & & \parallel & & \mathcal{V} \downarrow 5 & & \\
 X'' & \xrightarrow{6} & Y' & \xrightarrow{5} & Z'' & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow
 \end{array}$$

Wir gehen aus von einem ausgezeichneten Dreieck in der obersten Horizontale, in dem wir  $B$  und  $C$  als entfaltet annehmen, und von einem beliebigen  $\mathcal{V}$ -Morphismus  $A \rightarrow X$ . Da nach 2.5.3 die  $\mathcal{V}$ -Morphismen ein Oresystem bilden, können wir in einem ersten Schritt (1) den Kowinkel oben links so kommutativ ergänzen, daß wie angedeutet auch  $B \rightarrow Y$  ein  $\mathcal{V}$ -Morphismus ist. Dann vervollständigen wir in Schritt (2) die zweite Horizontale zu einem ausgezeichneten Dreieck und ergänzen die beiden linken Vertikalen zu einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken durch einen Morphismus  $C \rightarrow Z$ , dessen Kegel nach

2.5.5 wie angedeutet in  $\mathcal{V}$  liegen muß. In Schritt (3) wählen wir  $Y \rightarrow Y'$  mit Kegel in  $\mathcal{V}$  so, daß die Komposition  $FB \rightarrow FY \rightarrow FY'$  ein Isomorphismus ist. In Schritt (4) ergänzen wir wieder zu einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken. In Schritt (5) wählen wir  $Z' \rightarrow Z''$  mit Kegel in  $\mathcal{V}$  so, daß die Komposition  $FC \rightarrow FZ \rightarrow FZ' \rightarrow FZ''$  ein Isomorphismus ist. In Schritt (6) ergänzen wir ein letztes Mal zu einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken. Lassen wir nun  $F$  auf das ganze Diagramm los, so werden beide Kompositionen der mittleren und rechten Vertikalen Isomorphismen, also auch die Komposition in der linken Vertikale. Das zeigt Teil 1. Nun zeigen wir, daß auch die  $F$ - $\mathcal{V}$ -rechtsentfaltbaren oder kurz entfaltbaren Objekte eine volle triangulierte Unterkategorie  $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}$  bilden. Wir gehen aus von einem ausgezeichneten Dreieck, in dem wir  $B$  und  $C$  als entfaltbar annehmen, und argumentieren anhand des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow \\
\parallel & & \mathcal{V} \downarrow 1 & & \mathcal{V} \downarrow 2 & & \\
A & \xrightarrow{1} & X & \xrightarrow{2} & Y & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow \\
\mathcal{V} \downarrow 4 & & \parallel & & \mathcal{V} \downarrow 3 & & \\
Z & \xrightarrow{4} & X & \xrightarrow{3} & Y' & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow
\end{array}$$

Hier wählen wir im Schritt (1) eine Entfaltung von  $B$ , bilden im Schritt (2) das ausgezeichnete Dreieck, wählen in Schritt (3) mithilfe von 3.2.34 eine Entfaltung von  $Y$  und bilden in Schritt (4) wieder das Dreieck. Nach dem bereits Bewiesenen besteht dann das unterste Dreieck aus entfalteteten Objekten und wir sehen, daß  $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}$  eine volle triangulierte Unterkategorie ist. Für  $\mathcal{V}_{[F]} := \mathcal{T}_{[F]} \cap \mathcal{V}$  ist nun der offensichtliche triangulierte Funktor  $\mathcal{T}_{[F]}/\mathcal{V}_{[F]} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{V}$  volltreu nach dem allgemeinen Resultat 1.4.21 über Orelokalisierung und volltreue Einbettungen. Unser Funktor liefert folglich eine Äquivalenz

$$E : \mathcal{T}_{[F]}/\mathcal{V}_{[F]} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{T}/\mathcal{V})_F$$

mit der vollen Unterkategorie aller derjenigen Objekte von  $\mathcal{T}/\mathcal{V}$ , die in  $\mathcal{T}$  entfaltbar sind, und insbesondere ist diese volle Unterkategorie von  $\mathcal{T}/\mathcal{V}$  auch trianguliert und Teil 2 ist bewiesen. Nun zeigen wir  $F(X) = 0$  für alle  $X \in \mathcal{V}_{[F]}$ . Per definitionem ist für  $X \in \mathcal{V}$  ja der Nullmorphismus  $X \rightarrow 0$  ein  $\mathcal{V}$ -Morphismus, und ist  $X$  zusätzlich entfaltet, so muß er sich verlängern lassen durch einen Morphismus  $0 \rightarrow Y$  derart, daß die Komposition einen Isomorphismus  $FX \xrightarrow{\sim} FY$  liefert. Das ist aber offensichtlich nur möglich, wenn bereits gilt  $FX = 0$ . So folgt in der Tat  $F(X) = 0$  für alle  $X \in \mathcal{V}_{[F]}$ . Die Einschränkung von  $F$  auf  $\mathcal{T}_{[F]} \subset \mathcal{T}$  faktorisiert mithin über einen triangulierten Funktor  $\bar{F} : \mathcal{T}_{[F]}/\mathcal{V}_{[F]} \rightarrow \mathcal{D}$ . Jede Wahl eines Quasiinversen  $U$  der Äquivalenz  $E$  liefert so einen triangulierten

Funktor

$$R := \bar{F}U : (\mathcal{T}/\mathcal{V})_F \rightarrow \mathcal{D}$$

nebst einer verträglichen Transformation  $\tau : F \Rightarrow RQ$  von Funktoren  $\mathcal{T}_F \rightarrow \mathcal{D}$ , die zusammen die charakterisierende Eigenschaft eines Rechtsfaktorierten aus 3.2.13 haben. Die Eindeutigkeit des Paares  $(R, \tau)$  bis auf eindeutigen Isomorphismus zeigt auch, daß die  $\mathbb{Z}$ -Struktur auf  $R$  durch die Bedingungen im Satz bereits eindeutig festgelegt wird.  $\square$

**3.3.4 (Überflüssiges Faktorisieren).** Seien  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$  ein triangulierter Funktor und  $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$  ein trianguliertes System. Ist jedes Objekt von  $\mathcal{T}$  rechtsentfaltet für  $(F, \mathcal{V})$ , so faktorisiert  $F$  über  $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$  und unser  $\tau$  ist eine Isotransformation  $\tau : \tilde{F}Q = F \xrightarrow{\cong} RFQ$  und induziert eine Isotransformation  $\tilde{F} \xrightarrow{\cong} RF$ . Diese Erkenntnis ist ein Spezialfall von 3.2.18.

**3.3.5 (Rechtsfaktorierte und Linksfaktorierte).** Seien  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$  ein triangulierter Funktor und  $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$  ein trianguliertes System. Ist jedes Objekt von  $\mathcal{T}$  sowohl  $F$ - $\mathcal{V}$ -rechtsentfaltet wie  $F$ - $\mathcal{V}$ -linksentfaltet, so induzieren die natürlichen Transformationen aus der Definition Isotransformationen  $LF \circ Q \xrightarrow{\cong} F \xrightarrow{\cong} RF \circ Q$ . Damit annulliert  $F$  alle Objekte aus  $\mathcal{V}$  und faktorisiert über  $\mathcal{T}/\mathcal{V}$  als  $F = \tilde{F}Q$  und unsere Isotransformationen kommen her von eindeutig bestimmten Isotransformationen

$$LF \xrightarrow{\cong} \tilde{F} \xrightarrow{\cong} RF$$

Das alles spezialisiert 3.2.27 und folgt auch unmittelbar aus unserem Satz 3.3.3 zum Rechtsfaktorierten eines triangulierten Funktors.

## 3.4 Derivierte Funktoren

3.4.1. Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Den rechtsfaktorierten Funktor zur Verknüpfung

$$Q \circ \text{Hot}(F) : \text{Hot}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Hot}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{B})$$

in Bezug auf das gesättigte Oresystem  $S$  der Quasiisomorphismen alias das Verdiersystem der exakten Komplexe von  $\text{Hot}(\mathcal{A})$  nennen wir den **rechtsderivierten Funktor zu  $F$**  und notieren ihn vereinfachend  $RF := R(Q \circ \text{Hot}(F))$ . Unser rechtsderivierter Funktor zu  $F$  ist also ein triangulierter Funktor

$$RF : \text{Der}(\mathcal{A})_F \rightarrow \text{Der}(\mathcal{B})$$

mit der vereinfachten Notation  $\text{Der}(\mathcal{A})_F := \text{Der}(\mathcal{A})_{Q \circ \text{Hot}(F)}$  für die nach 3.3.3 volle triangulierte Unterkategorie der  $(Q \circ \text{Hot}(F))$ - $S$ -rechtsentfaltbaren Objekte, die wir in diesem Kontext abkürzend  **$F$ -quisrechtsentfaltbar** nennen. Wir sagen

in diesem Kontext auch einfacher  **$F$ -quisrechtsentfaltet** statt „ $(Q \circ \text{Hot}(F))$ - $S$ -rechtsentfaltet“ und notieren die Kategorie aller  $F$ -quisrechtsentfalteten Komplexe  $\text{Hot}(\mathcal{A})_{[F]}$  beziehungsweise  $\text{Der}(\mathcal{A})_{[F]}$  je nachdem, ob wir sie als Objekte der Homotopiekategorie oder der derivierten Kategorie betrachten. Ganz genau ist dann unser Rechtsderivierter nach 3.2.13 das bis auf eindeutige Isotransformation eindeutig bestimmte Paar  $(\text{R}F, \tau)$  aus besagtem triangulierten Funktor und einer Transformation  $\tau : Q \circ (\text{Hot } F) \Rightarrow \text{R}F \circ Q$ , die für alle  $F$ -quisrechtsentfalteten Komplexe  $Y$  einen Isomorphismus  $\tau_Y : FY \xrightarrow{\sim} (\text{R}F)Y$  in  $\text{Der}(\mathcal{B})$  liefert.

3.4.2. Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Die volle Unterkategorie aller Objekte  $A \in \mathcal{A}$  derart, daß  $A[0]$  ein  $F$ -quisrechtsentfaltbarer Komplex ist, notieren wir  $\mathcal{A}_F$  und nennen diese Objekte die  **$F$ -quisrechtsentfaltbaren Objekte von  $\mathcal{A}$** . Die **höheren derivierten Funktoren von  $F$**  erklären wir dann als die Funktoren

$$\text{R}^q F : \mathcal{A}_F \rightarrow \mathcal{B}$$

gegeben durch  $(\text{R}^q F) : A \mapsto \mathcal{H}^q(\text{R}F(A[0]))$ . Schließlich nennen wir  $A \in \mathcal{A}$  ein  **$F$ -rechtsazyklisches Objekt**, wenn  $A[0]$  ein  $F$ -quisrechtsentfalteter Komplex ist.

**Proposition 3.4.3 (Rechtsderivieren erhält Positivität).** *Gegeben  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und  $X \in \text{Der}(\mathcal{A})_F$  ein  $F$ -quisrechtsentfaltbarer Komplex gilt*

$$X \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad \text{R}F(X) \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{B})$$

3.4.4. Insbesondere induziert die Adjunktion  $(\tau^{\geq n}, i^{\geq n})$ , wenn  $\tau^{\geq n} X$  auch  $F$ -quisrechtsentfaltbar ist, einen Morphismus  $\tau^{\geq n} \text{R}F(X) \rightarrow \text{R}F(\tau^{\geq n} X)$ . Des weiteren verschwinden unsere  $\text{R}^q F$  für  $q < 0$  auch in der Allgemeinheit unserer Definition 3.4.2.

*Beweis.* Nach Annahme gibt es einen Quasiisomorphismus  $X \xrightarrow{\sim} Y$  zu einem  $F$ -quisrechtsentfalteten Komplex  $Y \in \text{Hot}(\mathcal{A})$ . Dann ist für  $Y$  der natürliche Morphismus ein Quasiisomorphismus  $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq n} Y$  und muß sich so durch einen Morphismus  $\tau^{\geq n} Y \rightarrow Z$  fortsetzen lassen, daß die Komposition ein Quasiisomorphismus ist und einen Quasiisomorphismus  $FY \xrightarrow{\sim} FZ$  induziert. Es folgt  $\mathcal{H}^i \text{R}F(X) = \mathcal{H}^i FY = 0$  für  $i < n$ .  $\square$

3.4.5 (**Rückwärtskompatibilitäten**). Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Nach 2.6.6 sind gegen die Pfeile beschränkte Komplexe von injektiven Objekten in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  stets quisrechtsentfaltet. Folglich verallgemeinern die hier definierten höheren derivierten Funktoren unsere durch injektive Auflösungen definierten höheren derivierten Funktoren aus [TG] 3.2.8. Man sieht so auch leicht ein, daß die obige

Definition eines  $F$ -rechtszyklischen Objekts im Fall eines linksexakten Funktors  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie mit der unter diesen Voraussetzungen in [TG] 3.6.4 gegebenen Definition äquivalent ist.

3.4.6. Analoge Sprechweisen vereinbaren wir für linksderivierte Funktoren und setzen zur Vermeidung von Vorzeichen  $L_i F X := \mathcal{H}^{-i}(L F(X[0]))$ .

3.4.7 (**Derivierte Morphismen als Morphismen der derivierten Kategorie**). Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  konstruieren wir in diesem Abschnitt für alle Objekte  $X, Y \in \text{Hot}_{\mathcal{A}}$ , für die der Rechtsfaktorierte in Bezug auf Quasiisomorphismen  $\text{RHom}_{\mathcal{A}}$  des Funktors

$$(Q \circ \text{Hom}_{\mathcal{A}}) : \text{Hot}_{\mathcal{A}}^{\text{opp}} \times \text{Hot}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$$

bei  $(X, Y)$  definiert ist, einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathcal{H}^0 \text{RHom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$$

Nach unseren Erkenntnissen 3.2.21 über das Faktorisieren einer Verknüpfung ist ja für so ein Paar  $(X, Y)$  und jeden Funktor  $G : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \mathcal{D}$  der Rechtsfaktorierte von  $G \circ (Q \circ \text{Hom}_{\mathcal{A}})$  bei  $(X, Y)$  definiert und wir haben einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\text{R}(G \circ (Q \circ \text{Hom}_{\mathcal{A}}))(X, Y) \xrightarrow{\sim} G(\text{RHom}_{\mathcal{A}}(X, Y))$$

Für  $G = \mathcal{H}^0$  finden wir speziell  $\mathcal{H}^0 \circ (Q \circ \text{Hom}_{\mathcal{A}}) = \text{Mor}_{\text{Hot}}$  und damit ist auch der Rechtsfaktorierte von  $\text{Mor}_{\text{Hot}}$  bei  $(X, Y)$  definiert. Für den Rechtsfaktorieren von  $\text{Mor}_{\text{Hot}}$  hatten wir jedoch bereits in 3.2.20 eine ausgezeichnete Bijektion  $(\text{R Mor}_{\text{Hot}})(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  konstruiert.

3.4.8 (**Derivierte Morphismen in einer Variablen**). Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  und  $X \in \text{Hot}_{\mathcal{A}}$  erhalten wir für alle Objekte  $Y \in \text{Hot}_{\mathcal{A}}$ , für die der Rechtsderivierte  $\text{RHom}_{\mathcal{A}}(X, \_)$  des Funktors  $(Q \circ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \_)) : \text{Hot}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$  definiert ist, einen natürlichen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathcal{H}^0(\text{RHom}_{\mathcal{A}}(X, \_)(Y)) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$$

In der Tat haben wir in diesem Fall  $\check{X} = \mathcal{H}^0 \circ (Q \circ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \_))$  und nach unseren Erkenntnissen 3.2.21 ist dann auf  $Y$  auch der Rechtsfaktorierte von  $\check{X}$  definiert und dessen Wert bei  $Y$  stimmt nach 3.2.20 mit der Morphismenmenge in der lokalisierten Kategorie  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  überein. Analoges gilt für den anderen Eintrag.

**Beispiel 3.4.9 (Derivieren exakter Funktoren).** Gegeben ein exakter Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zwischen abelschen Kategorien ist jeder Komplex sowohl quisrechtsentfaltet als auch quislinksentfaltet für  $F$  und wie in 3.3.5 besprochen erhalten wir in diesem Fall Isotransformationen

$$LF \xrightarrow{\sim} (Q \circ \text{Hot}(F))^\sim \xrightarrow{\sim} RF$$

zwischen dem linksderivierten Funktor, dem von  $Q \circ \text{Hot}(F)$  mittels der universellen Eigenschaft der Lokalisierung auf den derivierten Kategorien induzierten Funktor und dem rechtsderivierten Funktor. Wir notieren  $(Q \circ \text{Hot}(F))^\sim$  in diesem Fall schlicht

$$F : \text{Der}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{B})$$

Für diesen Funktor gilt  $F(\text{Der}^{\geq n}(\mathcal{A})) \subset \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{B})$ ,  $F(\text{Der}^{\leq n}(\mathcal{A})) \subset \text{Der}^{\leq n}(\mathcal{B})$  und die Adjunktionen geben Isomorphismen  $\tau^{\geq n} F \xrightarrow{\sim} F \tau^{\geq n}$ ,  $F \tau^{\leq n} \xrightarrow{\sim} \tau^{\leq n} F$ , die zusammen Isomorphismen  $F \mathcal{H}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n F$  liefern.

*Scholium 3.4.10.* Das Derivieren exakter Funktoren ist ein Extremfall der hier vorgestellten Theorie, in dem der derivierte Funktor global existiert, ohne daß man irgendwelche Annahmen über die Existenz von Entfaltungen machen muß. Ein anderer Extremfall ist das Derivieren durch gegen die Differentiale beschränkte injektive Auflösungen, das für jeden beliebigen additiven Funktor gelingt, aber eben nur als partiell definierter Funktor. Ein wichtiger weniger extremer Fall ist das derivierte Tensorieren von Garben, auf das wir noch zurückkommen werden.

**Korollar 3.4.11 (Rechtsderivieren und Abschneiden).** Gegeben  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und  $X \in \text{Der}(\mathcal{A})_F$  ein  $F$ -quisrechtsentfaltbarer Komplex mit  $\tau^{\leq n} X$  auch  $F$ -quisrechtsentfaltbar induziert  $\tau^{\leq n} X \rightarrow X$  einen Isomorphismus

$$\tau^{\leq n} RF(\tau^{\leq n} X) \xrightarrow{\sim} \tau^{\leq n} RF(X)$$

*Beweis.* Wir betrachten das ausgezeichnete Dreieck  $\tau^{\leq n} X \rightarrow X \rightarrow \tau^{> n} X \rightarrow [1]$ . Seine lange exakte Kohomologiesequenz zeigt, daß wir nur  $\mathcal{H}^i RF \tau^{> n} X = 0$  für  $i \leq n$  zu zeigen brauchen. Das folgt jedoch daraus, daß nach 3.4.3 Rechtsderivieren Positivität erhält.  $\square$

**Proposition 3.4.12 (Nullter Rechtsderivierter eines linksexakten Funktors).** Gegeben ein linksexakter Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zwischen abelschen Kategorien liefert die kanonische Transformation  $F \Rightarrow (RF)Q$  für jedes  $F$ -quisrechtsentfaltbare Objekt  $A \in \mathcal{A}_F$  einen Isomorphismus

$$FA \xrightarrow{\sim} R^0 F(A)$$

*Beweis.* Ist  $A[0] \xrightarrow{\sim} Y$  eine  $F$ -Quisrechtsentfaltung, so ist  $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq 0}Y$  ein Quasiisomorphismus und  $\tau^{\geq 0}Y$  besitzt nach 3.2.34 seinerseits eine  $F$ -Quisrechtsentfaltung  $\tau^{\geq 0}Y \rightarrow Z$ . Nun betrachten wir die Sequenz

$$FA \rightarrow \mathcal{H}^0FY \rightarrow \mathcal{H}^0F\tau^{\geq 0}Y \rightarrow \mathcal{H}^0FZ$$

Die linksexakte Sequenz  $A \hookrightarrow Y^0/(\text{im } d) \rightarrow Y^1$  zeigt nach Anwenden von  $F$ , daß die Komposition der beiden linken Morphismen dieser Sequenz ein Isomorphismus ist. Die Komposition der beiden rechten Morphismen ist ein Isomorphismus nach Konstruktion. Damit müssen dann alle drei Morphismen Isomorphismen sein. Der erste Isomorphismus ist aber gerade der Isomorphismus, den wir in der Proposition behauptet hatten.  $\square$

**Proposition 3.4.13 (Entfaltung durch Komplexe aus azyklischen Objekten).** Gegeben ein additiver Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zwischen abelschen Kategorien ist ein  $F$ -quisrechtsentfaltbarer Komplex  $X \in \text{Hot}_{\mathcal{A}}^+$  aus  $F$ -rechtsazyklischen Objekten bereits  $F$ -quisrechtsentfaltet.

3.4.14. Besitzt  $\mathcal{A}$  genug Injektive, so ist nach 3.2.25 jeder Komplex  $X \in \text{Hot}_{\mathcal{A}}^+$  für jeden additiven Funktor  $F$  quisrechtsentfaltbar.

*Beweis.* Jeder Komplex aus  $F$ -rechtsazyklischen Objekten von  $\mathcal{A}$  mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen ist  $F$ -quisrechtsentfaltet, da die  $F$ -quisrechtsentfalteten Komplexe nach 3.3.3 eine volle triangulierte Unterkategorie bilden. Für  $n \geq 0$  ist also der ab der  $(n + 1)$ -ten Stelle durch Null fortgesetzte Komplex  $X^{\leq n}$  quisrechtsentfaltet für  $F$ . Das ausgezeichnete Dreieck  $X \rightarrow X^{\leq n} \rightarrow Z \rightarrow [1]$  besteht mithin aus  $F$ -quisrechtsentfaltbaren Komplexen und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} QF(X) & \rightarrow & QF(X^{\leq n}) & \rightarrow & QF(Z) & \rightarrow & [1] \\ \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \\ RF(X) & \rightarrow & RF(X^{\leq n}) & \rightarrow & RF(Z) & \rightarrow & [1] \end{array}$$

Nach 3.4.3 folgt aus  $Z \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{A})$  bereits  $RF(Z) \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{B})$ . Im linken Quadrat werden also nach Anwenden von  $\mathcal{H}^q$  für  $q < n$  die beiden Horizontalen Isomorphismen. Für die mittlere Vertikale gilt das eh wie bereits eingezeichnet und für die linke Vertikale folgt es. Wenden wir diese Erkenntnis auf alle  $n$  an, so folgt  $\mathcal{H}^q(QF(X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q(RF(X))$  für alle  $q$  und damit  $QF(X) \xrightarrow{\sim} RF(X)$  wie behauptet.  $\square$

3.4.15 (**Lange exakte Sequenz der höheren Derivierten**). Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Nach 3.4.3 verschwinden auf jedem  $F$ -quisrechtsentfaltbaren Objekt von  $\mathcal{A}$  alle negativen Rechtsderivierten.

Nach 2.6.4 gehört jede kurze exakte Sequenz  $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$  zu einem wohlbestimmten ausgezeichneten Dreieck und führt folglich, wenn alle drei Objekte  $F$ -quisrechtsentfaltbar sind, auch in dieser Allgemeinheit zu einer langen exakten Sequenz

$$R^0 F(A') \hookrightarrow R^0 F(A) \rightarrow R^0 F(A'') \rightarrow R^1 F(A') \rightarrow R^1 F(A) \rightarrow R^1 F(A'') \rightarrow \dots$$

Es reicht im übrigen auch schon zu fordern, daß zwei Objekte unserer kurzen exakten Sequenz  $F$ -quisrechtsentfaltbar sind, denn dann ist das dritte nach 3.3.3 notwendig auch  $F$ -quisrechtsentfaltbar. Ist  $F$  linksexakt, so zeigt 3.4.12, daß wir in unserer langen exakten Sequenz sogar  $R^0 F$  durch  $F$  ersetzen dürfen.

**3.4.16 (Adjunktion derivierter Funktoren auf derivierten Kategorien).** Gegeben  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  abelsche Kategorien und  $(F, G)$  ein Paar von adjungierten additiven Funktoren

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B}$$

sind  $LF$  und  $RG$  partiell adjungiert im Sinne von 3.2.30, wir haben also eine explizite Isotransformation

$$\eta_{A,B} : \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, RGB) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{B}}(LFA, B)$$

von Funktoren  $\text{Der}(\mathcal{A})_F \times \text{Der}(\mathcal{B})_G \rightarrow \text{Ens}$ . In der Tat, gegeben Komplexe  $A \in \text{Hot } \mathcal{A}$  und  $B \in \text{Hot } \mathcal{B}$  liefert unsere Adjunktion  $(F, G)$  natürliche Isomorphismen  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, GB) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{B}}(FA, B)$  alias eine Adjunktion  $(\text{Hot } F, \text{Hot } G)$  und unsere Isotransformation ergibt sich damit aus der allgemeinen Diskussion zur Adjunktion faktorierter Funktoren in 3.2.28.

**Beispiel 3.4.17 (Spezialfall der Garbenkohomologie).** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  betrachten wir den linksexakten Funktor  $\Gamma : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}$  der globalen Schnitte. Unsere Theorie liefert dazu einen rechtsderivierten Funktor  $R\Gamma : \text{Der}(\text{Ab}_{/X})_{\Gamma} \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$  auf der vollen Unterkategorie der  $\Gamma$ -entfaltbaren Objekte. Da  $\text{Ab}_{/X}$  genug Injektive hat, sind alle gegen die Richtung der Differentiale beschränkten Komplexe schon einmal quisrechtsentfaltbar, in Formeln  $\text{Der}^+(\text{Ab}_{/X}) \subset \text{Der}(\text{Ab}_{/X})_{\Gamma}$ . In [TSF] 2.3.2 zeigen wir, daß sogar alle Garbenkomplexe quisrechtsentfaltbar sind, so daß sogar gilt  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})_{\Gamma} = \text{Der}(\text{Ab}_{/X})$ . Gegeben ein Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/X})_{\Gamma}$  von abelschen Garben setzt man

$$\mathbb{H}^q(X; \mathcal{F}) := \mathcal{H}^q(R\Gamma)(\mathcal{F})$$

und nennt diese Gruppe die  $q$ -te **Hyperkohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$** . Besteht der Komplex  $\mathcal{F} = \mathcal{G}[0]$  aus einer Garbe  $\mathcal{G}$  im Grad Null und Nullen in allen anderen Graden, so erhalten wir unsere Garbenkohomologie zurück. In

Formeln gilt also  $\mathbb{H}^q(X; \mathcal{G}[0]) = H^q(X; \mathcal{G})$ . Analog verfahren wir auch im Fall des Funktors der Schnitte mit Träger in einer abgeschlossenen Teilmenge  $A \triangleleft X$  und setzen

$$\mathbb{H}_A^q(X; \mathcal{F}) := \mathcal{H}^q(\mathrm{R}\Gamma_A)(\mathcal{F})$$

und nennen diese Gruppe die  **$q$ -te Hyperkohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$  und Träger in  $A$** . Analog verfahren wir im Fall des Funktors der kompakten Schnitte und setzen

$$\mathbb{H}_!^q(X; \mathcal{F}) := \mathcal{H}^q(\mathrm{R}\Gamma_!)(\mathcal{F})$$

und nennen diese Gruppe die  **$q$ -te kompakte Hyperkohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$** . In dieser Allgemeinheit ist sie zwar definiert, aber vernünftige Eigenschaften haben diese Gruppen nur unter weitergehenden Annahmen an  $X$  und  $\mathcal{F}$ . Ist  $\mathcal{F}$  im vorhergehenden ein Komplex von abelschen Garben auf einem Raum, in den  $X$  als Teilraum eingebettet ist, so ist hier wie in [TG] 3.5.4 implizit  $\mathcal{F}|_X$  zu verstehen.

**Beispiel 3.4.18 (Derivierter Rückzug und Vorschub abelscher Garben).** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist der Rückzug  $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \rightarrow \mathrm{Ab}_{/X}$  ein exakter Funktor und nach 3.4.9 ist folglich sein Rechtsderivierter wie auch sein Linksderivierter schlicht der offensichtliche auf der Lokalisierung induzierte Funktor

$$f^* : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y}) \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$$

Nach 3.4.16 ist damit der Rechtsderivierte  $\mathrm{R}f_*$  des Vorschubs  $f_* : \mathrm{Ab}_{/X} \rightarrow \mathrm{Ab}_{/Y}$  ein partieller Rechtsadjungierter zu unserem derivierten Rückzug  $f^*$ . Wir wissen bereits aus 2.6.6, daß  $\mathrm{R}f_*$  auf  $\mathrm{Der}^+(\mathrm{Ab}_{/X})$  definiert ist. In [TSF] 2.3.2 zeigen wir, daß er sogar auf ganz  $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$  definiert ist. Um die Notation zu vereinfachen, verwenden wir oft die alternative Notation  $(f^{(*)}, f_{(*)})$  für unser adjungiertes Paar von Funktoren zwischen den nicht-derivierten Kategorien von abelschen Garben, das wir bis hierher  $(f^*, f_*)$  notiert hatten, und setzen neu

$$f_* := \mathrm{R}f_{(*)} : \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X}) \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Y})$$

und notieren dann  $(f^*, f_*)$  unser adjungiertes Paar von Funktoren zwischen den derivierten Kategorien.

**3.4.19 (Iterierter derivierter Vorschub).** Gegeben verknüpfbare stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  induziert die offensichtliche Isotransformation  $f^*g^* \xrightarrow{\cong} (gf)^*$  in unserer neuen Notation durch Übergang zu den Adjungierten eine Isotransformation  $g_*f_* \xrightarrow{\cong} (gf)_*$  von Funktoren  $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X}) \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/Z})$ .

**Vorschau 3.4.20 (Derivierte Garbenfaserung).** Wir können einen Faserfunktor  $\mathrm{Der}_{//\mathrm{Top}} \rightarrow \mathrm{Top}$  konstruieren, indem vom hoffentlich offensichtlichen Faserfunktor  $\mathrm{Hot}_{//\mathrm{Top}} \rightarrow \mathrm{Top}$  ausgehen und die Ausgangskategorie an allen Quasiisomorphismen über Identitäten in der Basis lokalisieren. Die offensichtlichen Funktoren

sind dann Isomorphismen von Kategorien  $\text{Der}(\text{Ab}/X)^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{//X}$  in die Fasern und unsere  $f^*$  entsprechen unter diesen Isomorphismen den Rückholfunktoren des Faserfunktors  $\text{Der}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$ . Wir besprechen das genauer in [TSF] 2.4.

**3.4.21 (Grothendieck's Spektralsequenz im Fall derivierter Kategorien).** Seien abelsche Kategorien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  gegeben sowie additive Funktoren  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ . Haben  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  genug Injektive, so sind auf den gegen die Pfeile beschränkten derivierten Kategorien jeweils die rechtsderivierten Funktoren definiert. Die zugehörigen Daten fassen wir zusammen im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hot}^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{F} & \text{Hot}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{G} & \text{Hot}^+(\mathcal{C}) \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \text{Der}^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{RF} & \text{Der}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{RG} & \text{Der}^+(\mathcal{C}) \end{array}$$

Es liefert eine Transformation  $\eta : Q \circ G \circ F \Rightarrow RG \circ RF \circ Q$  mit der Notation  $Q$  für alle Lokalisierungsfunktoren in den Vertikalen. Macht unser Funktor  $F$  injektive Objekte zu  $G$ -rechtszyklischen Objekten, so ist nach unseren Erkenntnissen 3.4.13 zum Derivieren mit Auflösungen durch azyklische Objekte  $\eta_I$  für jeden Komplex  $I \in \text{Hot}^+(i\mathcal{A})$  ein Isomorphismus. Also hat das Paar  $(RG \circ RF, \eta)$  die charakterisierende Eigenschaft für einen eingeschränkten Rechtsderivierten von  $QGF$  nach 3.2.16 und wir erhalten für die entsprechenden Funktoren  $\text{Der}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}^+(\mathcal{C})$  eine wohlbestimmte Isotransformation

$$R(G \circ F) \xrightarrow{\sim} RG \circ RF$$

**3.4.22 (Verknüpfung faktorierter Funktoren).** Die oben gegebene Argumentation funktioniert auch in der Allgemeinheit von Ore-Lokalisierungen. Seien genauer  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  sowie  $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  Funktoren. Seien  $S$  ein Rechtsoresystem von  $\mathcal{C}$  und  $T$  ein Rechtsoresystem von  $\mathcal{D}$ . Die durch die faktorierten Funktoren von  $QF$  und  $H$  gegebenen Daten fassen wir zusammen in den Diagrammen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{QF} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \mathcal{C}_{S,QF} & \xrightarrow{R(QF)} & \mathcal{D}_T \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_H & \xrightarrow{H} & \mathcal{E} \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \mathcal{D}_{T,H} & \xrightarrow{RH} & \mathcal{E} \end{array}$$

Gegeben eine volle Unterkategorie  $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}_{QF}$  mit  $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{D}_H$ , die mit jedem Objekt auch eine  $QF$ -Entfaltung des besagten Objekts enthält, können wir das entsprechend eingeschränkte erste Diagramm mit dem zweiten zusammenfügen

zu einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{U} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D}_H & \xrightarrow{H} & \mathcal{E} \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \parallel \\
 Q(\mathcal{U}) & \xrightarrow{R(QF)} & \mathcal{D}_{T,H} & \xrightarrow{RH} & \mathcal{E}
 \end{array}$$

und erhalten so insbesondere eine Transformation

$$\eta : HF \Rightarrow RH \circ R(QF) \circ Q$$

Gibt es nun für jedes Objekt  $A \in \mathcal{U}$  einen  $S$ -Morphismus  $A \rightarrow X$  in ein Objekt  $X \in \mathcal{U}$ , der sowohl eine  $HF$ - $S$ -Rechtsentfaltung als auch eine  $F$ - $S$ -Rechtsentfaltung ist und für den  $F(X)$  seinerseits  $H$ - $T$ -rechtsentfaltet ist, so hat das Paar  $(RH \circ R(QF), \eta)$  die in 3.2.16 beschriebene charakterisierende Eigenschaft für den auf  $Q(\mathcal{U})$  eingeschränkten faktorierten Funktor  $(R(HF), \tau)$  und wir erhalten so in  $\text{Cat}(Q(\mathcal{U}), \mathcal{E})$  eine ausgezeichnete Isotransformation

$$R(HF) \xrightarrow{\cong} RH \circ R(QF)$$

Um Grothendieck's Spektralsequenz in der zuvor gegebenen Form abzuleiten gilt es, für  $F$  den Funktor  $\text{Hot}(F)$  und für  $H$  den Funktor  $Q \circ \text{Hot}(G)$  zu nehmen.

## Übungen

*Übung 3.4.23.* Man prüfe, daß die lange exakte Sequenz der höheren derivierten Funktoren aus [TG] 3.6.1 übereinstimmt mit der langen exakten Sequenz aus 3.4.15.

## 3.5 Derivierte Funktoren und Kohomologie

**3.5.1 (Derivierte Funktoren und Spektralsequenzen).** Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{B}$  mit genug Injektiven und ein additiver Funktor  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  und ein gegen die Differentiale beschränkter Komplex  $B \in \text{Der}^+(\mathcal{B})$  konstruieren wir wie in [TG] 9.3.12 eine konvergierende  $E_2$ -Spektralsequenz

$$(R^q F)(\mathcal{H}^p B) \Rightarrow \mathcal{H}^n(RF)(B)$$

Genauer liefern unsere Konstruktionen ein Konvergenzdatum, dessen Filtrierung auf  $\mathcal{H}^n(RF)(B)$  beschrieben werden als die Filtrierung durch die Bilder der Kohomologien  $\mathcal{H}^n(RF)(\tau^{\leq p} B)$  der abgeschnittenen Komplexe. Wenn wir die Rollen von  $p$  und  $q$  vertauschen, erhalten wir in derselben Weise für einen beliebigen

gegen die Differentiale beschränkten Komplex  $B \in \text{Ket}^+(\mathcal{B})$  eine konvergierende  $E_1$ -Spektralsequenz

$$(\mathbb{R}^p F)(B^q) \Rightarrow \mathcal{H}^n(\mathbb{R}F)(B)$$

Genauer liefern unsere Konstruktionen ein Konvergenzdatum, dessen Filtrierung auf  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}F)(B)$  beschrieben werden als die Filtrierung durch die Bilder der Kohomologie der Teilkomplexe  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}F)(B^{\geq q})$ , bei denen wir alle  $B^i$  mit  $i < q$  durch Nullen ersetzen. Das alles folgt aus den in [TG] 9.1.21 ausgeschrieben Konstruktionen.

*Beispiel 3.5.2.* Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und  $\mathcal{F} \in \text{Ket}^+(\text{Ab}/_X)$  kann die Hyperkohomologie  $\mathbb{H}^n(X; \mathcal{F})$  mit ihrer Filtrierung durch die Bilder der  $\mathbb{H}^n(X; \mathcal{F}^{\geq q})$  nach 3.5.1 beschrieben werden durch eine Spektralsequenz mit  $E_1$ -Term  $\mathbb{H}^p(X; \mathcal{F}^q)$ .

*Vorschau 3.5.3.* Seien  $X$  eine kompakte komplex-analytische Kähler-Varietät und  $\mathcal{F} = \text{hol}\Omega_X^*$  der holomorphen garbige de-Rham-Komplex

$$\mathcal{O}_X = \text{hol}\Omega_X^0 \rightarrow \text{hol}\Omega_X^1 \rightarrow \text{hol}\Omega_X^2 \rightarrow \dots$$

So ist die Spektralsequenz aus 3.5.2 bereits bei  $E_1$  ausgeartet und liefert mithilfe des offensichtlichen Isomorphismus  $\mathbb{H}^n(X; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^n(X; \text{hol}\Omega_X^*)$  eine Filtrierung von  $\mathbb{H}^n(X; \mathbb{C})$  durch komplexe Untervektorräume  $F^{\geq q} \subset \mathbb{H}^n(X; \mathbb{C})$  und Isomorphismen der Subquotienten mit  $\mathbb{H}^p(X; \text{hol}\Omega_X^q)$  für  $p + q = n$ . Man erkennt das, indem man vom offensichtlichen Isomorphismus  $\text{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{T}X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}X$  des holomorphen Tangentialbündels mit dem glatten Tangentialbündel  $\mathbb{T}X$  der reellen Mannigfaltigkeit  $X$  ausgeht, der für  $X \subseteq \mathbb{C}^n$  nicht weiter erklärt werden muß und funktoriell ist für offene Einbettungen. Nun erhalten wir für komplexe Vektorräume  $V$  in hoffentlich offensichtlicher Weise natürliche komplexlineare Abbildungen

$$V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\text{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V, \mathbb{C}) \xleftarrow{\sim} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\text{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^*$$

Die  $\mathbb{C}$ -Operation wird dabei im Zweifelsfall stets durch das Nachschalten einer Multiplikation erklärt und ist auf den restringierten Räumen ein für allemal vergessen. Erklären wir für einen reellen Vektorraum  $W$  die schieflinere Involution  $\bar{\cdot} \otimes \text{id}$  auf  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$  mit  $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der komplexen Konjugation und vereinbaren die Notation  $\bar{w} := (\bar{\cdot} \otimes \text{id})(w)$  für  $w \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$ , so führt unsere Einbettung von  $V^*$  zu einer Zerlegung als interne direkte Summe

$$V^* \oplus \overline{V^*} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\text{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^*$$

mit  $\overline{V^*} := (\bar{\cdot} \otimes \text{id})(V^*)$ . Der zweite Summand entspricht dabei in der Mitte unserer Morphismenkette von oben dem Raum aller schieflinere Abbildungen  $V \rightarrow \mathbb{C}$ .

Dieser funktorielle Isomorphismus liefert zusammen mit unserem Isomorphismus  $\text{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{T}X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}X$  einen Isomorphismus komplexer Vektorbündel

$$\mathbb{T}^*X \oplus \overline{\mathbb{T}^*X} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}^*X$$

Wenn wir für glatte komplexwertige Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ihr Differential  $df$  in der offensichtlichen Weise als Schnitt von  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}^*X$  erklären, so haben wir unter unserem Isomorphismus  $(dz, 0) \mapsto dz$  und  $(0, \overline{dz}) \mapsto d\bar{z}$ . Unsere Zerlegung des komplexifizierten reellen Kotangentenbündels induziert nun mit [LA2] 7.4.24 Zerlegungen seiner äußeren Potenzen. So können wir den komplexifizierten garbigen de-Rham-Komplex  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_X^k$  der  $X$  zugrundeliegenden glatten reellen Mannigfaltigkeit realisieren als den Totalkomplex eines garbigen Doppelkomplexes weicher Garben von komplexen Vektorräumen

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_X^k \xrightarrow{\sim} \text{tot}(\Omega_X^{p,q}, \partial, \bar{\partial})$$

Die Spaltenkomplexe dieses Doppelkomplexes sind nun Auflösungen der Garben  $\text{hol } \Omega_X^p$  holomorpher Formen und der horizontale Kernkomplex ist genau der holomorphe de-Rham-Komplex. Nimmt man globale Schnitte, so findet man mit den sogenannten „harmonischen Formen“ repräsentierende Untervektorräume für die Kohomologie der Spaltenkomplexe, auf denen das horizontale Differential bereits im ursprünglichen Doppelkomplex verschwindet, weshalb in unserer Spektralsequenz alle höheren Differentiale verschwinden. Also ist unsere Spektralsequenz bereits bei  $E_1$  ausgeartet. Wir erhalten so wie bereits erwähnt die **Hodge-Filtrierung** auf der Kohomologie  $H^n(X; \mathbb{C})$ . Unsere Argumente zeigen, daß sie unabhängig ist von der Wahl einer Kähler-Metrik, obwohl die harmonischen Formen durchaus von dieser Wahl abhängen.

### 3.6 Derivieren homologisch endlicher Funktoren

**Definition 3.6.1.** Ein additiver Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zwischen abelschen Kategorien heißt **homologisch rechtsendlich**, wenn alle  $A \in \mathcal{A}$  unter  $F$  **quisrechtsentfaltbar** sind und es eine Schranke  $N$  gibt mit  $R^q F(A) = 0$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  und alle  $q > N$ . Das Infimum über alle möglichen derartigen Schranken  $N$  heißt dann die **homologische Rechtsdimension** unseres Funktors.

3.6.2. Analog definieren wir über den linksderivierten Funktor **homologisch linksendlich** und **homologische Linksdimension**. Meist spricht man kürzer von **homologisch endlichen** Funktoren und ihrer **homologischen Dimension** der Leser muß aus dem Kontext erschließen, ob das nun von links oder von rechts gemeint sein soll.

*Beispiele 3.6.3.* Der Nullfunktork hat die homologische Rechtsdimension  $-\infty$ . Ein linksexakter Funktor ist homologisch rechtsendlich von der homologischen Dimension Null genau dann, wenn er exakt aber nicht der Nullfunktork ist. Gegeben ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  ist der Funktor der globalen Schnitte  $\Gamma : \text{Ab}_{/I} \rightarrow \text{Ab}$  nach [TG] 4.2.3 homologisch rechtsendlich von der homologischen Dimension  $-\infty$  für  $I = \emptyset$ , von der homologischen Dimension Null für  $I$  einpunktig und von der homologischen Dimension Eins für  $I$  mehrpunktig.

**Satz 3.6.4 (Unbeschränktes Derivieren homologisch endlicher Funktoren).** Gegeben ein additiver Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  einer endlichen homologischen Rechtsdimension  $\leq d$  zwischen abelschen Kategorien derart, daß sich jedes Objekt in ein  $F$ -rechtsazyklisches Objekt einbetten läßt, gilt:

1. Es gibt von jedem Komplex einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex von  $F$ -rechtsazyklischen Objekten;
2. Für einen Komplex aus  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$  finden wir sogar einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex von  $F$ -rechtsazyklischen Objekten aus  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}^{\leq n+d}$ ;
3. Jeder Komplex von  $F$ -rechtsazyklischen Objekten ist  $F$ -quisrechtsentfaltet;
4. Der derivierte Funktor  $\text{RF}$  ist auf jedem Komplex definiert und wir erhalten so einen triangulierten Funktor  $\text{RF} : \text{Der}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{B})$ ;
5. Der derivierte Funktor  $\text{RF}$  bildet die Unterkategorie  $\text{Der}^{\leq n}(\mathcal{A})$  in die Unterkategorie  $\text{Der}^{\leq n+d}(\mathcal{B})$  ab.

3.6.5. Ich erinnere daran, daß wir bei der Definition eines additiven Funktors  $F$  endlicher homologischer Rechtsdimension zwischen abelschen Kategorien 3.6.1 stets mit gefordert hatten, daß jedes Objekt der Ausgangskategorie eine  $F$ -Quisrechtsentfaltung besitzen soll. Da ist insbesondere eine implizite Voraussetzung für den vorhergehenden Satz. Das ist zum Beispiel erfüllt, wenn  $\mathcal{A}$  genug Injektive hat, und zusammen mit der Bedingung  $\text{R}^q F(A) = 0$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  und  $q > d$  reicht das dann schon aus, um  $\text{RF}$  auf nach beiden Seiten unbeschränkten Komplexen aus  $\mathcal{A}$  erklären zu können.

3.6.6. Daß Rechtsderivieren Positivität erhält, daß also  $\text{RF}$  die Unterkategorie  $\text{Der}^{\geq n}(\mathcal{A})$  in die Unterkategorie  $\text{Der}^{\geq n}(\mathcal{B})$  abbildet, wissen wir bereits in größerer Allgemeinheit aus 3.4.3.

3.6.7. Der Satz gilt analog und mit demselben Beweis für Familien  $F = (F_i)_{i \in I}$  linksexakter Funktoren, die sogar in verschiedenen abelschen Kategorien landen dürfen, also  $F_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_i$ . Wir müssen dazu nur vereinbaren, daß „ $F$ -rechtsazyklisch“ zu verstehen ist als „ $F_i$ -rechtsazyklisch für alle  $i$ “ und müssen die

homologische Endlichkeitsbedingung dahingehend verstehen, daß es eine Schranke  $N$  gibt, die die homologische Rechtsdimension aller unserer Funktoren  $F_i$  beschränkt. Formal mag man das auch folgern, indem man die Aussage des Satzes auf den Funktor  $F = (F_i) : \mathcal{A} \rightarrow \prod \mathcal{B}_i$  anwendet.

3.6.8. Besitzt eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  endliche homologische Dimension  $\leq d$  und genug Injektive, so besitzt jeder Komplex in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  eine Quisrechtsentfaltung und jeder Komplex in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$  eine Quisrechtsentfaltung in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}^{\leq n+d}$  und jeder Komplex von Injektiven ist quisrechtsentfaltet. Das zeigt man, indem man die Argumente des folgenden Beweises wiederholt oder 3.6.7 auf die Familie aller  $\mathcal{A}(A, \_)$  anwendet. Alternativ mag man in der offensichtlichen Weise eine Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive der Gestalt  $(I^{p,q})_{0 \leq q \leq d}$  bilden und zum Totalkomplex übergehen und die Argumente der folgenden Abschnitte entsprechend anpassen.

*Beweis.* Nach [TG] 9.3.5 finden wir stets eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung  $(I^{p,q})$  von  $(X^p)$  durch  $F$ -rechtsazyklische Objekte. Ist  $d$  mindestens die homologische Rechtsdimension von  $F$ , so ist  $\ker \delta^d : I^{p,d} \rightarrow I^{p,d+1}$  schon selbst  $F$ -rechtsazyklisch. Indem wir  $I^{p,d}$  jeweils durch diesen Kern ersetzen, finden wir einen Doppelkomplex  $J^{p,d}$  aus  $F$ -rechtsazyklischen Objekten in der oberen Halbebene mit Nullzeilen für  $q > d$ , dessen Spalten bei  $q \neq 0$  exakt sind, sowie einen Isomorphismus von  $X$  zu seinem horizontalen Kernkomplex bei  $q = 0$ . Nach [TG] 4.6.15 induziert dann die Einbettung des horizontalen Kernkomplexes einen Quasiisomorphismus  $X \xrightarrow{\sim} \text{tot } J^{p,q}$ . Das zeigt die Teile 1&2. Um Teil 3 zu zeigen, sei  $Z$  ein Komplex von  $F$ -rechtsazyklischen Objekten und  $Z \xrightarrow{\sim} X$  ein Quasiisomorphismus. Nach Teil 1 können wir ihn verlängern durch einen Quasiisomorphismus  $X \xrightarrow{\sim} Y$  in einen weiteren Komplex von  $F$ -rechtsazyklischen Objekten. Es gilt zu zeigen, daß die Komposition einen Quasiisomorphismus  $FZ \xrightarrow{\sim} FY$  induziert. Es gilt durch Übergang zum Abbildungskegel in der Homotopiekategorie  $K := \text{Keg}(Z \rightarrow Y)$  gleichbedeutend zu zeigen, daß für jeden exakten Komplex  $K$  aus  $F$ -rechtsazyklischen Objekten auch  $FK$  exakt ist. Nun ist  $\ker d^n \hookrightarrow K^n \rightarrow K^{n+1} \rightarrow \dots$  für jedes  $n$  ein Quasiisomorphismus des nach Annahme  $F$ -quisrechtsentfaltbaren Objekts  $\ker d^n$  zu einem Komplex in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}^+$  aus  $F$ -rechtsazyklischen Objekten, der nach 3.2.34 dann auch  $F$ -quisrechtsentfaltbar sein muß. Mit dem Derivieren durch azyklische Auflösungen 3.4.13 folgt für  $q > 0$  sofort  $\mathcal{H}^{n+q} FK = R^q F(\ker(d^n))$ . Diese Objekte verschwinden jedoch für  $q$  oberhalb der homologischen Dimension von  $F$ , und da das für alle  $n$  gilt, muß  $FK$  ein exakter Komplex sein. Teil 4 folgt sofort aus 1 und 3. Teil 5 folgt sofort aus 2 und 3.  $\square$

*Beispiel 3.6.9.* Der Komplex von freien  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -Moduln

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

ist exakt und damit isomorph zum Nullkomplex in  $\text{Der}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\text{-Mod})$ . Er ist aber im Gegensatz zum Nullkomplex nicht entfaltet für den Funktor  $\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , obwohl er aus projektiven Moduln besteht. Das widerspricht unserem Satz nicht, denn der Funktor  $\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist auf der Kategorie aller  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -Moduln nicht von endlicher homologischer Dimension.

## Übungen

*Übung 3.6.10.* Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und endlicher homologischer Dimension  $\text{hdim } \mathcal{A} < d$ . Man zeige  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$  für  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq d}$  und  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq 0}$ . Man folgere mit 2.6.35, daß es für  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}$  genau dann ein  $n \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$  für alle  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n}$ , wenn gilt  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{-}$ .

## 3.7 Exaktheit von Totalkomplexen abelscher Gruppen

**Definition 3.7.1.** Gegeben ein Doppelkomplex  $A = (A^{p,q})$  von abelschen Gruppen mit Differentialen  $\partial : A^{p,q} \rightarrow A^{p+1,q}$  und  $\delta : A^{p,q} \rightarrow A^{p,q+1}$  derart, daß an jeder Stelle gilt  $\delta\partial = \partial\delta$ , bilden wir vier Komplexe, deren homogene Komponenten gegeben werden durch

$$\begin{aligned} (\text{tot}^{\oplus} A)^n &= \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q} && \text{für das Summentotal,} \\ (\text{tot}^{\pi} A)^n &= \prod_{p+q=n} A^{p,q} && \text{für das Produkttotal sowie} \\ (\text{tot}^{\oplus\pi} A)^n &= \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p < 0}} A^{p,q} \oplus \prod_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0}} A^{p,q} && \text{für das Summenprodukttotal,} \\ (\text{tot}^{\pi\oplus} A)^n &= \prod_{\substack{p+q=n \\ p < 0}} A^{p,q} \oplus \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0}} A^{p,q} && \text{für das Produktsummentotal.} \end{aligned}$$

Das Symbol  $\text{tot}^{\pi\oplus}$  soll zum Beispiel andeuten, daß auf den Diagonalen  $p+q=n$  „in Richtung fallender erster Indizes das Produkt zu nehmen ist, in Richtung wachsender erster Indizes alias fallender zweiter Indizes jedoch die direkte Summe“. Weil es dabei darauf ankommt, welcher Index nun als der erste zu sehen ist, schreibe ich auch ausführlicher  $\text{tot}_{p,q}^{\pi\oplus}$  um klarzumachen, daß in Richtung fallender  $p$  das Produkt zu nehmen ist und in Richtung fallender  $q$  die direkte Summe. Eigentlich denke ich mir  $p$  nach rechts und  $q$  nach oben aufgetragen und die Punkte mit  $p+q=n$  bilden für festes  $n$  eine Gerade von links oben nach rechts unten, auf der ich nach rechts gehend die direkte Summe nehme und nach links gehend das Produkt. Die Differentiale werden alle gegeben durch  $da = \partial a + (-1)^p \delta a$  für  $a \in A^{p,q}$  und die offensichtlichen Erweiterungen dieser Regel.

3.7.2. In der Literatur wird meist nur das Summentotal betrachtet und heißt der **Totalkomplex**. Wir denken uns im folgenden den ersten Index  $p$  nach rechts und den zweiten Index  $q$  nach oben aufgetragen, wenn wir von „Zeilen“ und „Spalten“

reden, mit Differentialen nach oben und rechts. Alternativ reden wir auch von den  **$p$ -Komplexen** oder  **$p$ -Zeilen** unseres Doppelkomplexes und meinen damit die Komplexe in Richtung wachsender  $p$  bei festem  $q$ . In der präziseren Terminologie aus [TG] 4.6.7 hießen die Zeilen die  $\{1\}$ -Multiteilkomplexe.

**Lemma 3.7.3 (Exaktheitskriterien für Totalkomplexe).** *Gegeben ein Doppelkomplex  $A^{p,q}$  von abelschen Gruppen mit exakten  $p$ -Zeilen ist sein Produktsummentotal  $\text{tot}_{p,q}^{\pi \oplus}$  exakt. Sind zusätzlich auch noch die Kerne oder gleichbedeutend die Bilder oder auch gleichbedeutend die Kokerne der Morphismen zwischen den Zeilenkomplexen alle exakt, so sind alle vier Totalkomplexe exakt.*

3.7.4. In der präziseren Terminologie aus [TG] 4.6.7 fordern wir also für die erste Aussage die Exaktheit aller  $\{1\}$ -Teilkomplexe und für die zweite Aussage zusätzlich die Exaktheit aller  $\{1\}$ -Teilkomplexe von  $\ker \partial_2$ . Unpräziser und in Worten gesagt gilt es für den Index, für den exakte Komplexe entstehen wenn wir nur ihn variieren, die Summe beim Wachsen dieses Index und das Produkt beim Fallen dieses Index zu nehmen.

3.7.5. Dies Lemma verallgemeinert unser Lemma [TG] 4.6.10, bei dem wir uns auf Doppelkomplexe im ersten Quadranten beschränkt hatten. Eine etwas schwächere hinreichende Bedingung für die Exaktheit des Summenprodukttotals ergänzen wir als Lemma 3.7.7.

3.7.6. Dieses Lemma gilt im allgemeinen nicht mehr für Doppelkomplexe von Objekten aus beliebigen abelschen Kategorien anstelle von abelschen Gruppen. Ich würde gerne genauer, inwieweit seine Aussagen aus allgemeinen Sätzen über Spektralsequenzen folgen.

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß jeder Nullzykel ein Rand ist. So ein Nullzykel ist eine Folge von Elementen  $\dots, a_{-1}, a_0, a_1 \dots$  mit  $a_i \in A^{i,-i}$  und  $\partial a_i + (-1)^{i+1} \delta a_{i+1} = 0$  für alle  $i$  mit  $a_i = 0$  für  $i \gg 0$ . Gesucht ist eine Folge  $\dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots$  von Elementen  $b_i \in A^{i,-i-1}$  mit  $b_i = 0$  für  $i \gg 0$  und mit  $a_i = \partial b_{i-1} + (-1)^i \delta b_i$  für alle  $i$ . Zunächst einmal säubern wir dies Problem von Vorzeichen und ändern unsere Folge ab zu

$$\dots, a_0, a_1, -a_2, -a_3, a_4, a_5, -a_6, -a_7, \dots$$

So lautet die Bedingung an unsere neue Folge  $\dots, c_0, c_1, c_2, \dots$  einfacher  $\partial c_i = \delta c_{i+1}$  und gesucht ist eine Folge  $\dots, d_0, d_1, d_2, \dots$  mit

$$c_i = \partial d_{i-1} + \delta d_i$$

für alle  $i$ , aus der wir dann die ursprünglich gesuchte Folge der  $b_i$  durch geeignete Vorzeichenänderungen erhalten als  $\dots, d_0, -d_1, -d_2, d_3, d_4, -d_5, -d_6, \dots$ . Der

Einfachheit halber nehmen wir für die weitere Argumentation an, es gälte bereits  $c_i = 0$  für  $i > 0$ . Dann folgt  $\partial c_0 = 0$  und nach Annahme finden wir  $d_0 \in A^{-1,0}$  mit  $\partial d_0 = c_0$ . Es folgt

$$\partial c_{-1} = \delta c_0 = \delta \partial d_0 = \partial \delta d_0,$$

also  $\partial(\delta d_0 - c_{-1}) = 0$ . Also gibt es  $d_{-1} \in A^{-2,1}$  mit  $\partial d_{-1} = \delta d_0 - c_{-1}$  alias  $c_{-1} = \delta d_0 - \partial d_{-1}$ . Indem wir so „die Treppe heraufgehen“ finden wir eine Folge  $(\dots, d_{-1}, d_0, 0, 0, \dots)$  wie gewünscht und der Fall des Produktsummentotals ist erledigt. Jetzt diskutieren wir den Fall des Summentotals. Sind die Kerne der Morphismen zwischen den Zeilenkomplexen exakt, so können wir das bereits Bewiesene anwenden auf die Teilkomplexe  $T^{*,\leq q}$  unseres Doppelkomplexes, die entstehen durch Ersetzen einer Zeile durch den Kernkomplex zum Morphismus in die darüberliegende Zeile und Ersetzen der höheren Zeilen durch Null. Das Summentotal ist dann exakt als der filtrierende Kolimes der Summentotale dieser Teilkomplexe, die in dem von uns bereits behandelten Rahmen liegen. Jetzt behandeln wir den Fall des Produkttotal. Sind die Bilder der Morphismen zwischen den Zeilenkomplexen exakt, so können wir die bereits gewonnene Erkenntnis anwenden auf die Quotienten  $Q^{*,\geq q}$  unseres Doppelkomplexes, die entstehen durch Ersetzen einer Zeile durch den Bildkomplex des Morphismus in die nächsthöhere Zeile und Ersetzen aller Zeilen darunter durch Null. Das Produkttotal ist dann exakt nach [TS] 7.1.48 als der Limes über das surjektive inverse System der Produkttotaler dieser Quotientenkomplexe. Wenden wir diese letzte Erkenntnis wiederum auf das Produkttotal unserer Teilkomplexe  $T^{*,\leq q}$  an und gehen zum Kolimes über, so ergibt sich auch die Behauptung für das Summenprodukttotal.  $\square$

**Lemma\* 3.7.7.** *Sei ein Doppelkomplex von abelschen Gruppen gegeben. Sind seine Zeilen und zusätzlich auch noch die Zeilen aus der Kohomologie der Spaltenkomplexe alle exakt, so ist auch das Summenprodukttotal exakt.*

3.7.8. Der Punkt bei diesem Lemma ist, daß die hier gegebene Bedingung für die Exaktheit des Summenprodukttotal etwas schwächer ist als die in 3.7.3 angegebene Bedingung. Mir ist aber keine konkrete Situation bewußt, in der dies Lemma gebraucht würde.

*Beweis.* Wir beginnen wie beim Beweis von 3.7.3. Wie oben erklärt, können wir auch hier wieder ausgehen von einer Familie  $\dots, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots$  mit  $c_i \in A^{i,-i}$  und  $c_i = 0$  für  $i \ll 0$  sowie  $\partial c_i = \delta c_{i+1}$  für alle  $i$ . Der Einfachheit halber nehmen wir für die weitere Argumentation an, es gälte bereits  $c_i = 0$  für  $i < 0$ . Wir beginnen unsere Argumentation mit der Erkenntnis  $\delta c_0 = 0$ . Wegen  $\partial c_0 = \delta c_1$  geht der  $\delta$ -Zykel  $c_0$  unter  $\partial$  auf die Null der  $\delta$ -Kohomologie, also gibt es einen  $\delta$ -Zykel  $z_{-1} \in A^{-1,0}$  und  $e_0 \in A^{0,-1}$  mit  $\partial z_{-1} + \delta e_0 = c_0$ . Dann haben wir

$\delta(c_1 - \partial e_0) = 0$  und  $\partial(c_1 - \partial e_0) = \delta c_2$ , also ist  $c_1 - \partial e_0$  ein  $\delta$ -Zykel, dessen  $\delta$ -Kohomologieklassse unter  $\partial$  nach Null geht, also ist er bis auf einen  $\delta$ -Rand das  $\partial$ -Bild eines  $\delta$ -Zykels. Mithin gilt

$$c_1 - \partial e_0 = \partial z_0 + \delta e_1$$

für einen  $\delta$ -Zykel  $z_0 \in A^{0,-1}$  und  $e_1 \in A^{1,-2}$ . Wir haben also

$$\begin{aligned} \delta(z_{-1} + 0) &= 0 \\ \partial(z_{-1} + 0) + \delta(z_0 + e_0) &= c_0 \\ \partial(z_0 + e_0) &= c_1 - \delta e_1 \end{aligned}$$

Nun folgt  $\delta(c_2 - \partial e_1) = \partial(c_1 - \delta e_1) = \partial^2(z_0 + e_0) = 0$ , womit  $c_2 - \partial e_1$  ein  $\delta$ -Zykel ist, der wegen  $\partial(c_2 - \partial e_1) = \delta c_3$  bis auf  $\delta$ -Rand von einem  $\delta$ -Zykel  $z_1 \in A^{1,-2}$  herkommt, also  $c_2 - \partial e_1 = \partial z_1 + \delta e_2$ . Wir haben also

$$\begin{aligned} \partial(z_0 + e_0) + \delta(z_1 + e_1) &= c_1 \\ \partial(z_1 + e_1) &= c_2 - \delta e_2 \end{aligned}$$

Indem wir so „die Treppe heruntergehen“ finden wir auch hier wieder eine Folge  $(\dots, 0, z_{-1}, z_0 + e_0, z_1 + e_1, \dots)$  wie gewünscht.  $\square$

## 3.8 Derivieren von Tensor und Hom

3.8.1. Ein **Tripelkomplex**  $A$  ist eine  $\mathbb{Z}^3$ -graduierte abelsche Gruppe  $A^{p,q,r}$  mit paarweise kommutierenden Differentialen  $\partial_p, \partial_q, \partial_r$ , die jeweils „ihren Grad“ um Eins erhöhen.

3.8.2. Das **Summentotal eines Tripelkomplexes**  $A$  ist der Komplex  $\text{tot}^\oplus(A)$  mit homogenen Komponenten

$$\text{tot}^\oplus(A)^n := \bigoplus_{p+q+r=n} A^{p,q,r}$$

und Differential  $d(a) := \partial_p a + (-1)^p \partial_q a + (-1)^{p+q} \partial_r a$  für  $a \in A^{p,q,r}$ . Analog erklären wir das **Produkttotal**. Beide Konstruktionen hängen von der Reihenfolge der Indizes ab in ähnlicher Weise, wie wir es bei Doppelkomplexen in [TG] 4.6.4 diskutiert hatten.

3.8.3 (**Iterative Berechnung von Totalkomplexen**). Summentotal und Produkttotal eines Tripelkomplexes  $A$  können iterativ berechnet werden, genauer sind in hoffentlich selbsterklärender Notation die offensichtlichen Morphismen Isomorphismen

$$\begin{aligned} \text{tot}^\oplus(\text{tot}_{q,r}^\oplus(A)) &\xleftarrow{\sim} \text{tot}^\oplus(A) \xrightarrow{\sim} \text{tot}^\oplus(\text{tot}_{p,q}^\oplus(A)) \\ \text{tot}^\pi(\text{tot}_{q,r}^\pi(A)) &\xrightarrow{\sim} \text{tot}^\pi(A) \xleftarrow{\sim} \text{tot}^\pi(\text{tot}_{p,q}^\pi(A)) \end{aligned}$$

**Proposition 3.8.4.** *Gegeben  $I = (I^{p,q})_{q \geq 0}$  ein Doppelkomplex in der oberen Halbebene mit maximal spaltenden Zeilen aus Injektiven einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  ist sein Produkttotal, wenn es existiert, quisrechtsentfaltet.*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, daß für jeden exakten Komplex  $N \in \text{Ket}_{\mathcal{A}}$  gilt  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(N, \text{tot}^{\pi}(I)) = 0$ . Wir zeigen gleichbedeutend, daß alle Homologiegruppen aller Hom-Komplexe  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(N, \text{tot}^{\pi}(I))$  verschwinden, daß diese Komplexe also exakt sind. Dazu beschreiben wir so einen Hom-Komplex als das Produkttotal des Tripelkomplexes der abelschen Gruppen  $\mathcal{A}(N^r, I^{p,q})$  mit drittem Differential  $\partial_r f := (-f \circ d_N)$  und den offensichtlichen ersten Differentialen und erhalten so

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(N, \text{tot}^{\pi}(I)) \cong \text{tot}^{\pi}(\mathcal{A}(N^r, I^{p,q})) \cong \text{tot}^{\pi}(\text{tot}_{p,r}^{\pi}(\mathcal{A}(N^r, I^{p,q})))$$

Nun hat der Tripelkomplex  $\mathcal{A}(N^r, I^{p,q})$  exakte  $r$ -Zeilen, da  $N$  ein exakter Komplex ist und die  $I^{p,q}$  injektiv. Weiter sind die  $r$ -Kernkomplexe der  $p$ -Differentialie zwischen den  $r$ -Zeilen exakt, da  $I^{p,q}$  maximal spaltende  $p$ -Zeilen hat. Nach 3.7.3 ist also das partielle Produkttotal  $\text{tot}_{p,r}^{\pi}(\mathcal{A}(N^r, I^{p,q}))$  exakt für alle  $q$ . Dann ist aber wieder nach 3.7.3 auch  $\text{tot}^{\pi}(\text{tot}_{p,r}^{\pi}(\mathcal{A}(N^r, I^{p,q})))$  exakt als Produktsumentotal eines Doppelkomplexes mit exakten Zeilen, mit dem das Produkttotal wegen unserer Einschränkung  $q \geq 0$  übereinstimmt.  $\square$

3.8.5. Gegeben  $P = (P^{p,q})_{q \geq 0}$  ein Doppelkomplex in der unteren Halbebene mit maximal spaltenden Zeilen aus Projektiven einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  ist sein Summentotal, wenn es denn existiert, quislinksentfaltet. Das folgt unmittelbar, indem wir 3.8.4 auf die opponierte Kategorie anwenden.

**Proposition 3.8.6.** *Gegeben ein Ring  $k$  besitzt jeder Komplex von  $k$ -Moduln eine Quisrechtsentfaltung.*

3.8.7. Dasselbe gilt mit demselben Beweis für jede abelsche Kategorie mit genug Injektiven und einem konservativen exakten Funktor in die Kategorie der abelschen Gruppen, der mit abzählbaren Produkten vertauscht.

*Beweis.* Sei  $A = (A^p)_{p \in \mathbb{Z}}$  uner Komplex. Nach [TG] 9.3.10 besitzt  $A$  eine Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive  $(I^{p,q})_{q \geq 0}$ . Insbesondere ist  $A$  der horizontale Kernkomplex unseres Doppelkomplexes, dessen Spalten durch die Ergänzung dieses Kernkomplexes exakt werden. Zusätzlich sind bei dem so ergänzten Doppelkomplex auch die Kerne der Morphismen zwischen den Spaltenkomplexen exakt. Nach 3.7.3 ist dann auch das Produkttotal des ergänzten Doppelkomplexes exakt. Daraus folgt sofort, daß die Einbettung des horizontalen Kernkomplexes ein Quasiisomorphismus  $A \xrightarrow{\sim} \text{tot}^{\pi}(I^{p,q})$  ist. Dieser Totalkomplex ist damit nach 3.8.4 die gesuchte Quisrechtsentfaltung.  $\square$

**Proposition 3.8.8.** *Für jeden Komplex von Moduln über einem Ring ist das Summentotal einer Cartan-Eilenberg-Untenauflösung durch Projektive eine Quislinksentfaltung. Insbesondere besitzt jeder Komplex von Moduln eine Quislinksentfaltung.*

3.8.9. Dasselbe gilt mit demselben Beweis für jede abelsche Kategorie mit genug Projektiven und einem konservativen exakten Funktor in die Kategorie der abelschen Gruppen, der mit abzählbaren Koprodukten vertauscht.

*Beweis.* Sei  $A = (A^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  unser Komplex. Nach [TG] 9.3.7 besitzt er eine Cartan-Eilenberg-Untenauflösung durch Projektive  $(P^{p,q})_{q \leq 0}$ . Insbesondere ist  $A$  der horizontale Kokernkomplex unseres Doppelkomplexes und die Spalten unseres Doppelkomplexes werden durch die Ergänzung dieses Kokernkomplexes exakt. Zusätzlich sind bei dem so ergänzten Doppelkomplex auch die Kerne der Morphismen zwischen den Spaltenkomplexen exakt. Nach 3.7.3 ist dann auch das Summentotal des ergänzten Doppelkomplexes exakt. Daraus folgt, daß die Surjektion auf den horizontalen Kokernkomplexes ein Quasiisomorphismus  $\text{tot}^\oplus(P^{p,q}) \xrightarrow{\sim} A$  ist. Dieser Totalkomplex ist nach 3.8.5 die gesuchte Quislinksentfaltung.  $\square$

**Proposition 3.8.10.** *Gegeben eine abelsche Kategorie endlicher homologischer Dimension mit genug Injektiven besitzt jeder Komplex eine Quisrechtsentfaltung.*

*Beweis.* Jeder Komplex besitzt nach [TG] 9.3.8 eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch Injektive mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Zeilen. Die Spalten dieses Doppelkomplexes werden exakt, wenn wir unseren Ausgangskomplex als unterste Zeile ergänzen. Nach [TG] 4.6.11 ist der Totalkomplex dann exakt, also geht unser ursprünglicher Komplex quasiisomorph zum Totalkomplex solch einer Cartan-Eilenberg-Obenauflösung. Andererseits ist der Totalkomplex solch einer Cartan-Eilenberg-Obenauflösung quisrechtsentfaltet nach 3.8.4.  $\square$

**Definition 3.8.11.** Ein Komplex von Moduln heißt **quisflach**, wenn das Darantensorieren eines exakten Komplexes von Rechtsmoduln über demselben Ring stets einen exakten Komplex liefert.

3.8.12. Gleichbedeutend ist durch Übergang zum Abbildungskegel die Bedingung, daß das Darantensorieren unseres Komplexes Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen macht.

3.8.13. Die **Torsionsdimension** eines Rings  $k$  erklären wir als das Supremum aller  $q \in \mathbb{N}$  derart, daß es einen  $k$ -Rechtsmodul  $M$  und einen  $k$ -Linksmodul  $N$  gibt mit  $\text{Tor}_q^k(M, N) \neq 0$ . Wir sagen, ein Ring  $k$  habe **endliche Torsionsdimension**, wenn seine Torsionsdimension nicht  $\infty$  ist. Der Nullring hat Torsionsdimension  $-\infty$  und hat in unseren Konventionen insbesondere endliche Torsionsdimension.

**Proposition 3.8.14 (Beispiele quisflacher Komplexe).** 1. Gegeben eine Cartan-Eilenberg-Linksauflösung eines Komplexes durch flache Moduln ist ihr Summentotal quisflach;

2. Jeder in Richtung der Differentiale beschränkte Komplex von flachen Moduln ist quisflach;

3. Über einem Ring endlicher Torsionsdimension ist jeder Komplex flacher Moduln quisflach.

3.8.15. Insbesondere ist jeder quislinksentfaltete Komplex von Moduln quisflach, da er ja nach der vorherigen Proposition 3.8.8 homotopieäquivalent ist zum Summentotal einer Cartan-Eilenberg-Linksauflösung durch projektive Moduln und da projektive Moduln flach sind. Weiter ist jeder Komplex von torsionsfreien abelschen Gruppen quisflach, da ja abelsche Gruppen flach sind genau dann, wenn sie torsionsfrei sind, und da folglich  $\mathbb{Z}$  die Torsionsdimension Eins hat.

*Beispiel* 3.8.16. Der Komplex  $X$  von freien  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -Moduln

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

aus 3.6.9 ist nicht quisflach in  $\text{Hot}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\text{-Mod})$ . Das wird aus Proposition 3.8.17 folgen, denn  $0 \rightarrow X$  ist ein Quasiisomorphismus, bleibt aber kein Quasiisomorphismus unter  $\otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[0])$ .

*Beweis.* 1. Sei  $k$  unser Ring und sei  $F = \text{tot}^\oplus(F^{p,q})$  das Summentotal einer Cartan-Eilenberg-Linksauflösung durch flache Moduln eines vorgegebenen Komplexes und sei  $N$  ein exakter Komplex von Rechtsmoduln. Es gilt zu zeigen, daß  $\text{tot}^\oplus(N^r \otimes_k F^{p,q})$  exakt ist. Da alle  $F^{p,q}$  flach sind, sind hier alle  $r$ -Komplexe exakt. Da die  $p$ -Komplexe von  $F^{p,q}$  maximal spalten, sind auch die Bilder der  $p$ -Morphismen zwischen  $r$ -Komplexen exakt und damit nach 3.7.3 das Summentotal  $\text{tot}_{p,r}^\oplus(N^r \otimes_k F^{p,q})$  für alle  $q$ . Das partielle Summentotal  $\text{tot}_{p,r}^\oplus(N^r \otimes_k F^{p,q})$  ist also ein Doppelkomplex mit exakten Zeilen, dessen Spalten alias  $q$ -Zeilen verschwinden für  $q > 0$ . Damit ist sein Produktsummentotal exakt nach 3.7.3 und fällt zusammen mit dem Summentotal. Dieses ist also auch exakt und ist ja gerade der Tensorkomplex.

2. Gegeben ein in Richtung der Differentiale beschränkter Komplex  $F$  von flachen Moduln und ein exakter Komplex  $N$  von Rechtsmoduln hat der Doppelkomplex  $N^p \otimes_k F^q$  exakte  $p$ -Zeilen und sein Produktsummentotal ist exakt nach 3.7.3 und fällt wegen der Beschränkungen der Indizes mit dem Summentotal zusammen, ist also der Tensorkomplex.

3. Gegeben ein Komplex  $F$  von flachen Moduln finden wir nach 3.8.8 einen Quasiisomorphismus  $P \xrightarrow{\sim} F$  mit  $P$  einem quislinksentfalteten und damit nach 3.8.15

quisflachen Komplex, von dem wir außerdem annehmen können, daß er aus projektiven und insbesondere flachen Moduln besteht. Dann ist  $\text{Keg}(P \rightarrow F)$  ein Komplex von flachen Moduln und ist nach 3.6.4 für jeden  $k$ -Rechtsmodul  $M$  entfaltet in Bezug auf den Funktor  $M \otimes_k$ . Da der Kegel aber auch exakt ist, muß  $M \otimes_k \text{Keg}(P \rightarrow F)$  exakt sein für alle  $M$ . Für jeden Komplex  $X$  von Rechtsmoduln hat also  $X^q \otimes_k \text{Keg}(P \rightarrow F)^p$  exakte  $p$ -Zeilenkomplexe und auch die Kerne der Morphismen zwischen den Zeilenkomplexen sind exakt. Damit ist nach 3.7.3 das Summentotal alias der Tensorkomplex exakt und unser ursprünglicher Quasiisomorphismus induziert einen Quasiisomorphismus  $X \otimes_k P \xrightarrow{\sim} X \otimes_k F$ . Insbesondere ist mit  $P$  auch  $F$  quisflach.  $\square$

**Proposition 3.8.17 (Deriviertes Tensorprodukt).** *Gegeben ein Ring  $k$  gilt:*

1. *Der Funktor  $(Q \circ \otimes_k) : \text{Hot}(\text{Mod-}k) \times \text{Hot}(k\text{-Mod}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$  besitzt einen Linksfaktorierten, das **derivierete Tensorprodukt***

$$\otimes_k^L : \text{Der}(\text{Mod-}k) \times \text{Der}(k\text{-Mod}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$$

2. *Alle Paare von Komplexen  $(X, Y)$  mit mindestens einem quisflachen Eintrag sind linksentfaltet für  $(Q \circ \otimes_k)$  und das Oresystem  $S \times S$  aller Paare von Quasiisomorphismen, sind also **quislinksentfaltet für  $(Q \circ \otimes_k)$** ;*
3. *Gegeben  $X \in \text{Hot}(\text{Mod-}k)$  ist jeder quisflache Komplex  $Y \in \text{Hot}(k\text{-Mod})$  quislinksentfaltet für den Funktor  $Q \circ (X \otimes_k) : \text{Hot}(k\text{-Mod}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$ . Analoges gilt für den anderen Tensorfaktor;*
4. *Der Funktor  $Q \circ (X \otimes_k)$  aus Teil 3 besitzt ebenfalls einen Linksfaktorierten  $L(X \otimes_k) : \text{Der}(k\text{-Mod}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$  und der natürliche Morphismus vom größeren Limes zum kleineren Limes ist ein Isomorphismus*

$$X \otimes_k^L Y \xrightarrow{\sim} (L(X \otimes_k))(Y)$$

*Analoges gilt für den anderen Tensorfaktor.*

**3.8.18 (Terminologie für derivierte Funktoren in mehreren Variablen).** Gegeben abelsche Kategorien  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r, \mathcal{B}$  und ein **multiadditiver Funktor**

$$T : \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{B}$$

alias ein Funktor auf der Produktkategorie, der additiv ist in jeder Variablen, konstruieren wir in der offensichtlichen Weise einen Funktor

$$\text{Hot}(T) : \text{Hot}(\mathcal{A}_1) \times \dots \times \text{Hot}(\mathcal{A}_r) \rightarrow \text{Hot}(\mathcal{B})$$

Auf der linken Seite bilden alle Tupel von Quasiisomorphismen ein Oresystem  $S$ . Den  $S$ -Rechtsfaktorierten von  $(Q \circ \text{Hot}(T))$  nennen wir in dieser Situation wieder den **Rechtsderivierten von  $T$**  und notieren ihn

$$\text{RT} : (\text{Der}(\mathcal{A}_1) \times \dots \times \text{Der}(\mathcal{A}_r))_T \rightarrow \text{Der}(\mathcal{B})$$

Der untere Index  $T$  kürzt hier  $(Q \circ \text{Hot}(T))$  ab und steht für die volle Unterkategorie aller  $(Q \circ \text{Hot}(T))$ - $S$ -rechtsentfaltbaren Tupel von Objekten, die wir in diesem Kontext auch kürzer  **$T$ -quisrechtsentfaltet** nennen. In derselben Weise erklären wir den **Linksderivierten von  $T$** .

*Beweis.* 1. Jeder Komplex von Moduln besitzt nach 3.8.8 eine Quislinksentfaltung und das zeigt bereits die erste Aussage.

2. Ist  $(P, M) \rightarrow (X, Y)$  ein Paar von Quasiisomorphismen mit  $P, M$  quislinksentfaltet und  $X$  quisflach gilt es zu zeigen, daß sie einen Quasiisomorphismus  $P \otimes_k M \xrightarrow{\sim} X \otimes_k Y$  induzieren. Wir zeigen sogar, daß beide Kettenabbildungen der Sequenz  $P \otimes_k M \rightarrow X \otimes_k M \rightarrow X \otimes_k Y$  Quasiisomorphismen sind. In der Tat ist der Kegel über der ersten Kettenabbildung  $\text{Keg}(P \rightarrow X) \otimes_k M$  exakt, da wir bereits aus 3.8.15 wissen, daß  $M$  als quislinksentfalteter Komplex quisflach ist. Andererseits ist der Kegel über der zweiten Kettenabbildung  $X \otimes_k \text{Keg}(M \rightarrow Y)$  auch exakt, da  $X$  nach Annahme quisflach ist.

3. Ich zeige die Aussage in unserem Kontext bequemer für Rechtsmoduln. Gegeben ein Quasiisomorphismus  $P \xrightarrow{\sim} X$  mit  $P$  quislinksentfaltet und  $X$  quisflach gilt es für alle  $Y$  zu zeigen, daß er einen Quasiisomorphismus

$$P \otimes_k Y \xrightarrow{\sim} X \otimes_k Y$$

induziert. Wählen wir wie oben einen Quasiisomorphismus  $M \xrightarrow{\sim} Y$  mit  $M$  quislinksentfaltet, so wissen wir aus dem Beweis des vorherigen Teils bereits, daß die Komposition  $P \otimes_k M \rightarrow P \otimes_k Y \rightarrow X \otimes_k Y$  ein Quasiisomorphismus ist. Andererseits ist  $P$  quisflach und folglich  $P \otimes_k \text{Keg}(M \rightarrow Y)$  exakt alias  $\text{Keg}(P \otimes_k M \rightarrow P \otimes_k Y)$  exakt alias der erste Morphismus ein Quasiisomorphismus  $P \otimes_k M \xrightarrow{\sim} P \otimes_k Y$ . Dann muß aber wie gewünscht auch der zweite Morphismus unserer Komposition ein Quasiisomorphismus  $P \otimes_k Y \xrightarrow{\sim} X \otimes_k Y$  sein.

4. Die vierte Aussage folgt unmittelbar, sobald wir zeigen, daß jedes Paar  $(X, Y) \in \text{Hot}(\text{Mod-}k) \times \text{Hot}(k\text{-Mod})$  mit  $Y$  quislinksentfaltet bereits quislinksentfaltet ist für  $(Q \circ \otimes_k)$ . Das folgt aber aus Teil 2, da jeder quislinksentfaltete Komplex nach 3.8.15 bereits quisflach ist.  $\square$

*Vorschau 3.8.19.* Wir erinnern den Schmelzfunktor  $\mathcal{H} : \text{Hot}(\text{Ab}) \rightarrow \text{sgAb}$  aus [TSK] 2.5.13. In [TSF] 9.9.14 versehen wir  $\text{Der}(\text{Ab})$  mit der Struktur einer Schmelz-

kategorie und zeigen in [TSF] 2.8.19, daß der Schmelzfunktor der Homologie eindeutig über einen Schmelzfunktor  $\mathcal{H} : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \text{sgAb}$  faktorisiert.

**Proposition 3.8.20.** *Gegeben ein Ring  $k$  gilt:*

1. *Der Funktor  $Q \circ \text{Hom}_k : \text{Hot}(k\text{-Mod})^{\text{opp}} \times \text{Hot}(k\text{-Mod}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$  besitzt einen Rechtsfaktorierten, den **derivierten Homomorphismenkomplex***

$$\text{RHom}_k : \text{Der}(k\text{-Mod})^{\text{opp}} \times \text{Der}(k\text{-Mod}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$$

2. *Gegeben ein Komplex von  $k$ -Moduln  $X \in \text{Hot}(k\text{-Mod})$  besitzt der Funktor  $Q \circ \text{Hom}_k(X, \_ ) : \text{Hot}(k\text{-Mod}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$  ebenfalls einen Rechtsfaktorierten  $\text{R}(\text{Hom}_k(X, \_ )) : \text{Der}(k\text{-Mod}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$  und der natürliche Morphismus vom kleineren Kolimes zum größeren Kolimes ist ein Isomorphismus*

$$\text{R}(\text{Hom}_k(X, \_ ))(Y) \xrightarrow{\sim} \text{RHom}_k(X, Y)$$

3. *Gegeben ein Komplex von  $k$ -Moduln  $Y \in \text{Hot}(k\text{-Mod})$  besitzt der Funktor  $Q \circ \text{Hom}_k(\_ , Y) : \text{Hot}(k\text{-Mod})^{\text{opp}} \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$  ebenfalls einen Rechtsfaktorierten  $\text{R}(\text{Hom}_k(\_ , Y)) : \text{Der}(k\text{-Mod})^{\text{opp}} \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$  und der natürliche Morphismus vom kleineren Kolimes zum größeren Kolimes ist ein Isomorphismus*

$$\text{R}(\text{Hom}_k(\_ , Y))(X) \xrightarrow{\sim} \text{RHom}_k(X, Y)$$

3.8.21. Ich erinnere daran, daß für jeden Ring alle in der Richtung gegen die Differentiale beschränkten Komplexe aus injektiven Moduln quisrechtsentfaltet sind und alle in Richtung der Differentiale beschränkten Komplexe aus projektiven Moduln quislinksentfaltet. Ich erinnere daran, daß für einen Ring endlicher homologischer Dimension nach 3.6.8 alle Komplexe aus injektiven Moduln quisrechtsentfaltet sind und alle Komplexe aus projektiven Moduln quislinksentfaltet. Ich erinnere auch noch an die in 3.4.7 und 3.4.8 für jede abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  hergeleiteten Isomorphismen  $\mathcal{H}^0 \text{RHom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ .

*Beweis.* Jeder Komplex von Moduln besitzt nach 3.8.8 eine Quislinksentfaltung und nach 3.8.6 eine Quisrechtsentfaltung und das zeigt bereits die erste Aussage. Für Teil 2 gilt es zu zeigen, daß  $(X, Y)$  bereits quisquisrechtsentfaltet ist für  $(Q \circ \text{Hom}_k)$ , wenn  $Y$  quisrechtsentfaltet ist. Mit denselben Argumenten wie beim Tensorprodukt reicht es zu zeigen, daß  $\text{Hom}_k(E, Y)$  exakt ist für  $Y$  quisrechtsentfaltet und  $E$  exakt. Das haben wir aber bereits beim Beweis von 3.8.4 in größerer Allgemeinheit gesehen für  $Y$  das Produkttotal einer Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive und nach 3.8.6 ist jeder quisrechtsentfaltete Komplex von  $k$ -Moduln homotopieäquivalent zu so einem Produkttotal. Für Teil 3 gilt es zu zeigen, daß  $(X, Y)$  bereits quisquisrechtsentfaltet ist für  $(Q \circ \text{Hom}_k)$ , wenn  $X$

quislinksentfaltet ist. Mit denselben Argumenten wie beim Tensorprodukt reicht es zu zeigen, daß  $\text{Hom}_k(X, E)$  exakt ist für  $X$  quislinksentfaltet und  $E$  exakt. Das geht genau wie in Teil 2, aber diesmal schreiben wir es genauer aus. Nach 3.8.8 und seinem Beweis dürfen wir annehmen, daß  $X = \text{tot}^\oplus(P^{p,q})$  das Summentotal der Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Projektive  $(P^{p,q})_{q \leq 0}$  eines beliebig vorgegebenen Komplexes ist. Mithin ist  $\text{Hom}_k(X, E)$  das Produkttotal des Tripelkomplexes  $\text{tot}^\pi \text{Hom}_k(P^{p,q}, E^r)$ . Da die  $P^{p,q}$  projektive Moduln sind, hat unser Tripelkomplex exakte  $r$ -Komplexe. Da die  $p$ -Komplexe  $P^{p,q}$  sogar maximal spaltende Komplexe projektiver Moduln sind, sind auch die Kerne der  $p$ -Differenziale zwischen den  $r$ -Komplexen exakt. Nach 3.7.3 ist also das partielle Produkttotal  $\text{tot}_{p,r}^\pi(\text{Hom}_k(P^{p,q}, E^r))$  exakt für alle  $q$ . Dann ist aber wieder nach 3.7.3 auch  $\text{tot}^\pi(\text{tot}_{p,r}^\pi(\text{Hom}_k(P^{p,q}, E^r)))$  exakt als Produktsumentotal eines Doppelkomplexes mit exakten Zeilen, mit dem das Produkttotal wegen unserer Einschränkung  $q \leq 0$  übereinstimmt.  $\square$

3.8.22. Für jeden Ring  $k$  und  $X \in \text{Der}(k\text{-Mod})$  ist  $L(\otimes_k X) : \text{Der}(k\text{-Mod}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$  linksadjungiert zu  $\text{RHom}_{\mathbb{Z}}(X, \_)$ . Das folgt aus unseren allgemeinen Erkenntnissen 3.2.28 zu Adjunktionen faktorierter Funktoren. Für jeden Kring  $k$  und  $X \in \text{Der}(k\text{-Mod})$  ist analog  $L(\otimes_k X) : \text{Der}(k\text{-Mod}) \rightarrow \text{Der}(k\text{-Mod})$  linksadjungiert zu  $\text{RHom}_k(X, \_)$ .

## Übungen

*Übung 3.8.23 (Abstrakte Künnethformel).* Gegeben Komplexe von abelschen Gruppen  $C, D \in \text{Der}(\text{Ab})$  konstruiere man natürliche unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}^p C \otimes \mathcal{H}^q D \hookrightarrow \mathcal{H}^n(C \otimes^L D) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \mathcal{H}^p C * \mathcal{H}^q D$$

Hinweis: Man wiederhole die Definitionen und erinnere den Beweis den Künnethformel [TS] 5.7.8.

*Übung 3.8.24 (Abstraktes universelles Koeffiziententheorem).* Gegeben  $X \in \text{Der}(\text{Ab})$  und eine abelsche Gruppe  $G$  konstruiere man natürliche und unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\text{Ext}(\mathcal{H}^1(X), G) \hookrightarrow \mathcal{H}^0(X \rightrightarrows G[0]) \twoheadrightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}^0(X), G)$$

Hinweis: Man wähle eine injektive zwei-Schritt-Auflösung von  $G$ , betrachte diese kurze exakte Sequenz als ausgezeichnetes Dreieck, wende  $X \rightrightarrows$  an, und bilde die lange exakte Homologiesequenz. Nach 2.6.27 wissen wir zusätzlich, daß jedes Objekt  $X \in \text{Der}(\text{Ab})$  unkanonisch isomorph ist zu seiner totalen Kohomologie.

### 3.9 Derivierte Produkte und Koprodukte

3.9.1 (**Produkte und Koprodukte in Homotopiekategorien**). Ich erinnere an Übung [TG] 3.2.36. Seien  $\mathcal{A}$  eine Kategorie mit additiver Struktur und  $(C_i)_{i \in I}$  eine Familie von Komplexen  $(C_i^q, d)$  aus  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$ . Existiert für jedes  $q$  das Produkt  $\prod_{i \in I} C_i^q$  in  $\mathcal{A}$ , so ist der aus diesen Produkten gebildete Komplex nicht nur in  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$ , sondern auch in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  das Produkt der  $C_i$ . Analoges gilt für Koprodukte, entweder mit einem analogen Beweis oder formal durch Übergang zur opponierten Kategorie. Für Limites und Kolimites sind mir die analogen Aussagen nicht klar. Das Problem liegt darin, daß zwar das Bilden von Produkten abelscher Gruppen exakt ist, das Bilden von Limites abelscher Gruppen jedoch im allgemeinen nicht mehr.

**Proposition 3.9.2 (Produkte und Koprodukte in derivierten Kategorien).** *Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie.*

1. *Ist  $(C_i)_{i \in I}$  eine Familie quisrechtsentfalteter Komplexe aus  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$  und existiert jeweils das Produkt der  $C_i^q$  in  $\mathcal{A}$ , so liefert der Komplex der gliedweisen Produkte ein Produkt der  $C_i$  in  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$ ,  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  und  $\text{Der}_{\mathcal{A}}$ ;*
2. *Besitzt jedes Objekt von  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  eine Quisrechtsentfaltung und ist  $(D_i)_{i \in I}$  eine Familie von Komplexen aus  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$  und existiert jeweils das Koprodukt der  $D_i^q$  in  $\mathcal{A}$ , so liefert der Komplex der gliedweisen Koprodukte ein Koprodukt der  $D_i$  in  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$ ,  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  und  $\text{Der}_{\mathcal{A}}$ .*

3.9.3. Die Frage allgemeinerer Limites und Kolimites in derivierten Kategorien behandeln wir hier nicht weiter. Die im gleich folgenden Beweis gegebene Argumentation direkt zu verallgemeinern scheitert daran, daß 3.9.1 nicht in der nötigen Allgemeinheit gezeigt wurde.

*Beweis.* 1. Wir wissen bereits aus 3.9.1, daß der Komplex der gliedweisen Produkte ein Produkt in der Homotopiekategorie  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  ist. Nach 2.5.7 ist weiter jeder Limes in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  von quisrechtsentfalteten Komplexen wieder quisrechtsentfaltet. Damit folgt die Behauptung aus unseren allgemeinen Erkenntnissen 1.3.16 über Limites rechtsentfalteter Objekte in Lokalisierungen.

2. Wir wissen bereits aus 3.9.1, daß der Komplex der gliedweisen Koprodukte ein Koprodukt in der Homotopiekategorie  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  ist. Unter unseren Annahmen besitzt weiter der Lokalisierungsfunktor  $\text{Hot}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}$  einen Rechtsadjungierten und vertauscht folglich mit Kolimites und insbesondere mit Koprodukten.  $\square$

3.9.4. Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und besitzt jedes Objekt von  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  eine Quisrechtsentfaltung und hat  $\mathcal{A}$  alle  $I$ -Produkte und alle  $I$ -Koprodukte, so gilt dasselbe für  $\text{Der}_{\mathcal{A}}$ . Das alles folgt leicht aus unserer Proposition 3.9.2.

**3.9.5 (Spezielle Produkte in derivierten Kategorien).** Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und sind  $\mathcal{F}_n \in \text{Hot}^{\geq n}(\mathcal{A})$  gegeben für  $n \geq 0$ , so ist das gliedweise Produkt der  $\mathcal{F}_n$  auch das Produkt in der derivierten Kategorie. In der Tat finden wir Quasiisomorphismen  $\mathcal{F}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_n$  mit  $\mathcal{I}_n \in \text{Hot}^{\geq n}(\text{i}\mathcal{A})$  und diese sind Quisrechtsentfaltungen und diese Quasiisomorphismen induzieren einen Quasiisomorphismus vom gliedweisen Produkt der  $\mathcal{F}_n$  in das gliedweise Produkt der  $\mathcal{I}_n$ , das seinerseits nach 3.9.2 ein Produkt in  $\text{Der}(\mathcal{A})$  ist. Die Besonderheit dieser Situation liegt darin, daß in diesem speziellen Fall „bei der Konstruktion der gliedweisen Produkte nur endliche Produkte in  $\mathcal{A}$  zu betrachten sind“. So kann man in dieser speziellen Situation Fragen der Exaktheit unendlicher Produkte aus dem Weg gehen.

**3.9.6 (Produkte und Koprodukte derivierter Moduln).** Gegeben sei ein Ring  $A$  und ein Universum  $\mathcal{U}$ . Existieren für eine Menge  $I$  alle  $I$ -Koprodukte in der Kategorie der  $A$ -Moduln  $\mathcal{U}\text{Mod}_A$ , so existieren auch alle  $I$ -Koprodukte in den Kategorien  $\mathcal{U}\text{Ket}(\text{Mod}_A)$ ,  $\mathcal{U}\text{Hot}(\text{Mod}_A)$ ,  $\mathcal{U}\text{Der}(\text{Mod}_A)$  und stimmen überein mit den offensichtlichen gliedweisen Koprodukten. Dasselbe gilt für Produkte und folgt mit dem zweiten Teil unserer Proposition 3.9.2 aus der Existenz von Quisrechtsentfaltungen 3.8.6 und Quislinksentfaltungen 3.8.8 beliebiger Homotopiekomplexe in unserer abelschen Kategorie.

### 3.10 Universelle derivierte Funktoren\*

**Definition 3.10.1.** Seien  $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  Funktoren. Unter einer **Rechtsapproximation an  $F$  durch  $Q$**  verstehen wir ein Paar  $(G, \sigma)$  bestehend aus einem Funktor  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  nebst einer Transformation  $\sigma : F \Rightarrow GQ$ , im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ & \searrow Q & \downarrow \sigma & \nearrow G \\ & & \mathcal{B} & \end{array}$$

Unter einer **initialen Rechtsapproximation** verstehen wir eine Rechtsapproximation  $(\bar{F}, \tau)$  derart, daß für alle Funktoren  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  die Abbildung  $\alpha \mapsto (\alpha Q) \circ \tau$  eine Bijektion

$$\mathcal{C}^{\mathcal{B}}(\bar{F}, G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(F, GQ)$$

zwischen den entsprechenden Räumen von Transformationen induziert. Eine initiale Rechtsapproximation heißt auch eine **Rechts-Kan-Erweiterung** nach dem Mathematiker Daniel Kan.

*Beispiel 3.10.2.* Ist  $Q$  volllicht, so ist jedes  $(\bar{F}, \tau)$  mit  $\tau$  einer Isotransformation  $\tau : F \xrightarrow{\sim} \bar{F}Q$  eine initiale Rechtsapproximation.

3.10.3 (**Eindeutigkeit initialer Rechtsapproximationen**). Verstehen wir die Gesamtheit aller Rechtsapproximationen an  $F$  durch  $Q$  in geeigneter Weise als eine Kategorie, so ist eine initiale Rechtsapproximation ein initiales Objekt dieser Kategorie. So weit will ich jedoch nicht gehen, da es mir auch so schon klar scheint, daß eine initiale Rechtsapproximation eindeutig ist bis auf eindeutigen Isomorphismus, falls sie denn existiert.

*Beispiel 3.10.4 (Initiale Rechtsapproximation durch Rechtsadjungierte).* Gegeben Funktoren  $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  mag man die Definition einer Rechtsapproximation an  $F$  durch  $Q$  umformulieren als die Aussage, daß ein partieller Linksadjungierter des durch Vorschalten von  $Q$  erklärten Funktors

$$(\circ Q) : \mathcal{C}^{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$$

bei  $F$  existiert und dort den Wert  $\bar{F}$  annimmt. Besitzt nun  $Q$  selber einen Rechtsadjungierten  $R$ , so bilden nach [TF] 4.3.13 auch die auf den Funktorkategorien induzierten Funktoren ein adjungiertes Paar  $((\circ R), (\circ Q))$  und überhaupt jeder Funktor  $F$  besitzt eine initiale Rechtsapproximation durch  $Q$ , nämlich den Funktor  $FR$ .

3.10.5. Die entsprechenden Konzepte nach Übergang zu den opponierten Kategorien heißen **Linksapproximation** und **finale Linksapproximation** alias **Links-Kan-Erweiterung**.

3.10.6 (**Rechtsapproximation bei Lokalisierungen**). Seien  $\mathcal{A}$  eine Kategorie,  $S$  eine Menge von Morphismen von  $\mathcal{A}$  und  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor. Eine initiale Rechtsapproximation  $(\bar{F}, \tau)$  an den Funktor  $F$  durch den Lokalisierungsfunktor  $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_S$  heißt auch ein **universeller Rechtsderivierter** oder kurz **Rechtsderivierter von  $F$** . Ich notiere ihn  $\bar{F} = \mathbb{R}F$  oder auch  $\bar{F} = {}_{\mathbb{R}}F$ , wenn besonders betont werden soll, daß der universelle Rechtsderivierte gemeint ist. Analog erklärt man den **universellen Linksderivierten**  $\mathbb{L}F = {}_{\mathbb{L}}F$ .

*Beispiel 3.10.7.* Faktorisiert  $F$  bereits selbst durch die Lokalisierung, gibt es also ein Paar  $(\bar{F}, \tau)$  mit  $\tau$  einer Isotransformation, so ist nach 3.10.2 sowohl dies Paar ein universeller Rechtsderivierter als auch das Paar  $(\bar{F}, \tau^{-1})$  ein universeller Linksderivierter.

3.10.8. Seien  $\mathcal{A}$  eine Kategorie,  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{A}$  und  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor. Landet der volle Rechtsderivierte von  $F$  nach 3.2.18 in der vollen Unterkategorie der essentiell konstanten Indobjekte, so liefert er unter Nachschalten eines Quasiinversen der Äquivalenz von  $\mathcal{C}$  und der Kategorie seiner essentiell konstanten Indobjekte auch einen universellen Rechtsderivierten von  $F$ . Analoges gilt für Linksderivierte.

**Lemma 3.10.9 (Universeller Rechtsderivierter eines Yoneda-Funktors).** *Seien  $\mathcal{A}$  eine Kategorie,  $S$  eine Menge von Morphismen in  $\mathcal{A}$  und  $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_S$  der*

*Lokalisierungsfunktor.* Sei  $\mathfrak{U}$  ein Mengensystem derart, daß  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}_S$  beide  $\mathfrak{U}$ -Kategorien sind. Für  $X \in \mathcal{A}$  ist dann der Yoneda-Funktor  $\check{X}_S := \mathcal{A}_S(X, \_)$  mit der offensichtlichen Transformation  $\tau : \mathcal{A}(X, \_) \Rightarrow \mathcal{A}_S(X, \_)$  der universelle Rechtsderivierte des Yoneda-Funktors  $\check{X} := \mathcal{A}(X, \_) : \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ , im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\check{X}} & \mathfrak{U}\text{Ens} \\ & \searrow Q & \uparrow \check{X}_S \\ & \mathcal{A}_S & \end{array}$$

$\tau \downarrow$

*Beweis.* Gegeben ein Funktor  $G : \mathcal{A}_S \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$  und eine Transformation  $\alpha : \check{X} \Rightarrow GQ$  konstruieren eine Transformation  $\alpha_S : \check{X}_S \Rightarrow G$  wie folgt: Morphismen in  $\mathcal{A}_S$  sind ja nach 1.2 Äquivalenzklassen von Wegen in der Wegekategorie des Köchers. So ein Weg ist eine Folge

$$X = Z_0 \leftrightarrow Z_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow Z_n = Y$$

mit jedem Doppelpfeil entweder einem Morphismus  $Z_{i-1} \rightarrow Z_i$  oder einem Morphismus  $Z_i \rightarrow Z_{i-1}$  aus  $S$ . Unserer Transformation  $\alpha$  führt dann zu kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}(X, Z_0) & \longleftrightarrow & \mathcal{A}(X, Z_1) & \longleftrightarrow & \dots & \longleftrightarrow & \mathcal{A}(X, Z_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ G(Z_0) & \longleftrightarrow & G(Z_1) & \longleftrightarrow & \dots & \longleftrightarrow & G(Z_n) \end{array}$$

Da  $GQ$  Morphismen aus  $S$  zu Isomorphismen macht, sind in der unteren Horizontale alle Morphismen von rechts nach links Bijektionen. Jeder Weg liefert so eine Abbildung  $G(X) \rightarrow G(Y)$ . Man prüft leicht, daß äquivalente Wege dieselbe Abbildung liefern, so daß unser  $\alpha$  uns wohlbestimmte Abbildungen

$$\mathcal{A}_S(X, Y) \rightarrow \text{Ens}(G(X), G(Y))$$

liefert, die bei festem  $X$  sogar eine Transformation der entsprechenden Funktoren  $\mathcal{A}_S \rightarrow \text{Ens}$  bilden. Betrachten wir schließlich in  $G(X)$  das Element  $\alpha(\text{id}_X)$ , so liefert das Anwenden auf dies Element für unser festes  $X$  natürliche Abbildungen  $\text{Ens}(G(X), G(Y)) \rightarrow G(Y)$  und wir erhalten insgesamt eine Transformation  $\alpha_S : \check{X}_S \Rightarrow G$ . Man prüft leicht, daß die Abbildung  $\alpha \mapsto \alpha_S$  invers ist zur Abbildung

$$\text{Cat}(\mathcal{A}_S, \mathfrak{U}\text{Ens})(\check{X}_S, G) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathfrak{U}\text{Ens})(\check{X}, GQ)$$

gegeben durch die Abbildungsvorschrift  $\beta \mapsto (\beta Q) \circ \tau$ . □

3.10.10. Sei  $\mathfrak{U}$  ein Mengensystem. Für jede  $\mathfrak{U}$ -Kategorie  $\mathcal{A}$  betrachten wir den **Morphismenfunktor** gegeben durch  $\text{Mor}_{\mathcal{A}} : (X, Y) \mapsto \mathcal{A}(X, Y)$ . Das ist also ein Funktor

$$\text{Mor}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\text{opp}} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$$

**Lemma 3.10.11 (Universeller Rechtsderivierter des Morphismenfunktors).** Seien  $\mathcal{A}$  eine Kategorie und  $S$  eine Menge von Morphismen in  $\mathcal{A}$ . Sei  $\mathfrak{U}$  ein Mengensystem derart, daß  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}_S$  beide  $\mathfrak{U}$ -Kategorien sind. So besitzt der Morphismenfunktor  $\text{Mor}_{\mathcal{A}} : (X, Y) \mapsto \mathcal{A}(X, Y)$  als universellen Rechtsderivierten den Morphismenfunktor  $\text{Mor}_{\mathcal{A}_S} : (X, Y) \mapsto \mathcal{A}_S(X, Y)$  mit der offensichtlichen Transformation, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{\text{opp}} \times \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{Mor}_{\mathcal{A}}} & \mathfrak{U}\text{Ens} \\ & \searrow Q & \downarrow \tau \\ & & \mathcal{A}_S^{\text{opp}} \times \mathcal{A}_S \\ & & \nearrow \text{Mor}_{\mathcal{A}_S} \end{array}$$

*Beweis.* Gegeben ein Funktor  $G : \mathcal{A}_S^{\text{opp}} \times \mathcal{A}_S \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$  und eine Transformation  $\alpha : \text{Mor}_{\mathcal{A}} \Rightarrow GQ$  konstruieren wir wie beim Beweis von 3.10.9 eine Transformation  $\alpha_S : \text{Mor}_{\mathcal{A}_S} \Rightarrow G$  und zeigen, daß sie invers ist zur zur Abbildung

$$\text{Cat}(\mathcal{A}_S^{\text{opp}} \times \mathcal{A}_S, \mathfrak{U}\text{Ens})(\text{Mor}_{\mathcal{A}_S}, G) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{A}^{\text{opp}} \times \mathcal{A}, \mathfrak{U}\text{Ens})(\text{Mor}_{\mathcal{A}}, GQ)$$

gegeben durch die Abbildungsvorschrift  $\beta \mapsto (\beta Q) \circ \tau$ . □

*Beispiel 3.10.12.* Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Wir wenden die vorhergehenden Überlegungen an auf den Morphismenfunktor der Homotopiekategorie

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\text{Hot}} : \text{Hot}_{\mathcal{A}}^{\text{opp}} \times \text{Hot}_{\mathcal{A}} & \rightarrow & \text{Ab} \\ (A, D) & \mapsto & \text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, D) \end{array}$$

und die Lokalisierung nach Quasiisomorphismen in unseren Homotopiekategorien. Der universelle Rechtsderivierte unseres Morphismenfunktors ist mithin nach 3.10.11, genauer einer offensichtlichen Variante für Kategorien mit additiver Struktur, der Morphismenfunktor der derivierten Kategorie  $\text{Der}_{\mathcal{A}}$ , in Formeln

$$\text{uR Mor}_{\text{Hot}} = \text{Mor}_{\text{Der}} : \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\text{opp}} \times \text{Der}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Ab}$$

3.10.13 (**Komposition von universellen Rechtsderivierten**). Seien  $(\mathcal{A}, S)$  und  $(\mathcal{B}, T)$  Kategorien mit Mengen von Morphismen und bezeichne  $Q : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_T$  die Lokalisierung. Seien  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktoren. Wir nehmen an, daß  $GF$  einen universellen Rechtsderivierten  $R(GF) : \mathcal{A}_S \rightarrow \mathcal{D}$  besitzt, daß  $QF$  einen universellen Rechtsderivierten  $R(QF) : \mathcal{A}_S \rightarrow \mathcal{B}_T$  besitzt, und daß  $G$  einen

universellen Rechtsderivierten  $RG : \mathcal{B}_T \rightarrow \mathcal{D}$  besitzt. Die universelle Eigenschaft zeigt dann, daß es für diese Rechtsderivierten genau eine Transformation

$$R(G \circ F) \Rightarrow RG \circ R(QF)$$

gibt derart, daß unter dem Vorschalten der Lokalisierung  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_S$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \circ F & \Longrightarrow & R(G \circ F) \circ P \\ \parallel & & \Downarrow \\ G \circ F & \Longrightarrow & RG \circ R(QF) \circ P \end{array}$$

entsteht mit einer unteren Horizontale, deren Definition der Leser aus dem folgenden Diagramm ablesen mag.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{P} & \mathcal{A}_S \\ \downarrow F & \nearrow Q & \downarrow R(QF) \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{B}_T \\ \downarrow G & \nearrow & \downarrow RG \\ \mathcal{D} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{D} \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ R(G \circ F) \end{array}$$

Der gekrümmte Pfeil in diesem Diagramm ist formal betrachtet irrelevant.

**3.10.14 (Konstruktion von universellen Rechtsderivierten).** Seien  $\mathcal{A}$  eine Kategorie,  $S$  eine Menge von Morphismen von  $\mathcal{A}$  und  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor. Manchmal erhält man einen universellen Rechtsderivierten wie folgt: Man sucht ein Paar  $(E, \tau)$  bestehend aus einem Funktor  $E : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  nebst einer Transformation  $\tau : \text{Id} \Rightarrow E$  mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle  $X \in \mathcal{A}$  ist  $Q\tau_X$  ein Isomorphismus  $Q\tau_X : QX \xrightarrow{\sim} QEX$ ;
2. Jeder Morphismus  $s : X \rightarrow Y$  in  $S$  liefert unter  $FE$  einen Isomorphismus  $FEs : FEX \xrightarrow{\sim} FEY$ .

So ein Paar  $(E, \tau)$  heißt eine **an  $F$  angepaßte Ersetzung**. Es gibt dafür nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung genau einen Funktor  $\bar{F} : \mathcal{A}_S \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $\bar{F}Q = FE$ . Ich behaupte, daß dieser Funktor  $\bar{F}$  zusammen mit der durch  $\tau$  induzierten Transformation  $F \Rightarrow FE = \bar{F}Q$  eine initiale Rechtsapproximation an  $F$  durch  $Q$  ist. Wir verwenden im folgenden die exponentielle Schreibweise  $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$  für Funktorkategorien. Nun erhalten wir für jeden Funktor  $G : \mathcal{A}_S \rightarrow \mathcal{C}$  Abbildungen

$$\mathcal{C}^{\mathcal{A}_S}(\bar{F}, G) \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(\bar{F}Q, GQ) = \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(FE, GQ) \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(F, GQ)$$

Die Erste ist eine Bijektion nach unserer Erkenntnis 1.2.20, daß jeder Lokalisierungsfunktor volllicht ist. Wir müssen also nur noch zeigen, daß auch die Letzte eine Bijektion ist. Das aber folgt daraus, daß jede Transformation  $\eta : F \Rightarrow GQ$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{F\tau_X} & FE X \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_{EX} \\ GQX & \xrightarrow[\sim]{GQ\tau_X} & GQEX \end{array}$$

liefert, in dem die untere Horizontale nach unseren Annahmen, wie im Diagramm bereits angedeutet, ein Isomorphismus ist.

**Beispiel 3.10.15 (Universeller Linksderivierter des Kokern-Funktors).** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Bezeichne  $\mathcal{A}^\rightarrow$  die Kategorie aller Darstellungen des Köchers  $\rightarrow$  mit zwei Ecken und einem sie verbindenden Pfeil in  $\mathcal{A}$ . Wir bestimmen die finale Linksapproximation des Funktors  $\text{cok} : \mathcal{A}^\rightarrow \rightarrow \mathcal{A}$  oder genauer des induzierten Funktors  $\text{cok} : \text{Ket}(\mathcal{A}^\rightarrow) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$ . Hier ist implizit zu verstehen, daß wir an Quasiisomorphismen lokalisieren wollen, der Derivierte wird also die Gestalt

$$L \text{cok} : \text{Der}(\mathcal{A}^\rightarrow) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$$

haben. Nun finden wir von jedem Objekt  $\alpha : X \rightarrow Y$  aus  $\text{Ket}(\mathcal{A}^\rightarrow)$  einen Quasiisomorphismus zu einem Objekt  $\alpha' : X' \rightarrow Y'$  mit  $\alpha'$  injektiv. Betrachten wir in der Tat den Simplex  $\Delta_1$  mit zwei Ecken und die Einbettungen  $k_0, k_1 : \Delta_0 \rightarrow \Delta_1$  der beiden Ecken alias die Kantenabbildungen aus [TS] 1.2.7, indiziert durch die jeweils nicht erwischte Ecke, so erhalten wir auf den zugehörigen Simplicialketten Homotopieäquivalenzen

$$S\Delta_0 \xrightarrow{k_0} S\Delta_1 \xleftarrow{k_1} S\Delta_0$$

Ausgeschrieben sind diese Homotopieäquivalenzen die Morphismen

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z}^2 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

von senkrecht zu lesenden Komplexen, bei denen alle nicht ausgeschriebenen Gruppen verschwinden und die obere Horizontale in Grad Null sitzt und wir mit oberen Indizes indizieren, so daß die untere Horizontale im Grad  $(-1)$  sitzt. Andererseits betrachten wir den von der konstanten Abbildung auf den Simplicialketten

induzierten Morphismus  $S\Delta_1 \xrightarrow{a_0} S\Delta_0$ . Nun bilden wir durch sukzessive Pushouts in  $\text{Ket}(\mathcal{A})$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\
 \downarrow k_1 & & \downarrow \iota \\
 X \xrightarrow{k_0} S\Delta_1 \otimes_{\mathbb{Z}} X & \xrightarrow{c} & \text{Zyl}(\alpha) \\
 \downarrow a_0 & & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{\alpha} & Y
 \end{array}$$

Sicher gilt  $p\iota = \text{id}_Y$ . Der erste Pushout heißt der **Zylinder** von  $\alpha$ , da er in der analogen topologischen Situation tatsächlich durch Aufkleben des Zylinders  $\Delta_1 \times X$  auf die Bodenplatte  $Y$  mittels der Abbildung  $\alpha$  entsteht. In der topologischen Situation ist auch anschaulich klar, daß  $p$  und  $\iota$  zueinander homotopieinvers sind. In der algebraischen Situation prüfen wir das explizit. Wir schreiben dazu den Zylinder aus als  $\text{Zyl}(\alpha) = Y \oplus X \oplus [1]X$  mit Differential

$$d = \begin{pmatrix} d_Y & 0 & \alpha \\ 0 & d_X & -\text{id} \\ 0 & 0 & -d_X \end{pmatrix}$$

Dann ist  $\iota$  schlicht die Einbettung von  $Y$  als erster Summand, also die Spaltenmatrix  $\iota = (\text{id}, 0, 0)^\top$ . Dahingegen ist  $p$  die Zeilenmatrix  $p = (\text{id}_Y, \alpha, 0)$ . Es gilt nun, die Differenz

$$\iota p - \text{id} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -\text{id}_X & 0 \\ 0 & 0 & -\text{id}_{[1]X} \end{pmatrix}$$

in der Form  $d\delta + \delta d$  zu schreiben. Um das zu leisten, betrachten wir zunächst die Komposition  $S\Delta_1 \xrightarrow{a_0} S\Delta_0 \xrightarrow{k_1} S\Delta_1$  alias

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z}^2 \\
 \uparrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & & \uparrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}
 \end{array}$$

Hier notieren wir wieder senkrecht gedachte und nur zum Teil ausgeschriebene Komplexe. In diesem Fall sollten wir ja eine Homotopie zur Identität erhalten durch den Prismenoperator  $\delta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  gegeben durch die Zeilenmatrix  $(0, 1)$ . In der Tat prüft man mühelos die Identitäten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } (0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) = (0) - (1).$$

Das Tensorieren dieser Homotopie mit der Identität auf  $X$  liefert eine Lösung unseres Problems im Fall  $\alpha = \text{id}_X$  der Form

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{id}_X & 0 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen nun leicht, daß dieselbe Formel auch für allgemeines  $\alpha$  die gesuchte Homotopie liefert. Also ist  $p : \text{Zyl}(\alpha) \rightarrow Y$  in der Tat eine Homotopieäquivalenz. So erhalten wir ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \text{Zyl}(\alpha) \\ \parallel & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

in  $\text{Ket}(\mathcal{A})$  mit Homotopieäquivalenzen in den Vertikalen. Das ist in  $\text{Ket}(\mathcal{A}^{\rightarrow})$  ein Morphismus der oberen Horizontale zur unteren Horizontale und ist sogar ein Quasiisomorphismus, wenn auch keine Homotopieäquivalenz. Jedoch ist diese Konstruktion funktoriell und liefert uns einen an  $\text{cok}$  angepaßten Ersetzungsfunktor im Sinne von 3.10.6, denn in der Tat induziert jeder Quasiisomorphismus in  $\text{Ket}(\mathcal{A}^{\rightarrow})$  zwischen durch injektive Kettenabbildungen beschriebenen Objekten einen Quasiisomorphismus zwischen ihren Kokernkomplexen nach der langen exakten Homologiesequenz und dem Fünferlemma. So folgt

$$\text{Lcok}(X \xrightarrow{\alpha} Y) = \text{cok}(X \rightarrow \text{Zyl}(\alpha)) = \left( Y \oplus [1]X, \begin{pmatrix} d_Y & \alpha \\ 0 & -d_X \end{pmatrix} \right)$$

Salopp gesprochen ist also der Linksderivierte des Kokernfunktors der Abbildungskegelfunktor.

## 4 Derivierte Kategorien und dg-Ringoide\*

### 4.1 Ringoide und ihre Moduln

**Definition 4.1.1.** Ein **Ringoid** ist ein Paar  $(R, I)$  bestehend aus einer assoziativen  $\mathbb{Z}$ -Algebra  $R$  und einer ausgezeichneten Menge  $I \subset R$  von Idempotenten derart, daß für  $i, j \in I$  gilt  $i \neq j \Rightarrow ij = 0$  und daß gilt  $R = \sum_{i,j \in I} iRj$ .

4.1.2 (**Ringoide und Ab-Kategorien**). Gegeben ein Ringoid  $(R, I)$  erklären wir seine **Ringoidkategorie**  $[R, I]$ , eine Kategorie mit additiver Struktur alias Ab-Kategorie, indem wir  $I$  als Menge der Objekte nehmen und  $iRj$  als die abelsche Gruppe der Morphismen von  $j$  nach  $i$ . Wir erhalten so eine Ab-Kategorie mit höchstens einem Nullobjekt. Gegeben eine Ab-Kategorie  $\mathcal{T}$  erhalten wir andererseits ein Ringoid  $(R(\mathcal{T}), I(\mathcal{T}))$ , indem wir

$$R(\mathcal{T}) := \bigoplus_{X, Y \in \mathcal{T}} \mathcal{T}(X, Y)$$

setzen sowie  $I(\mathcal{T}) := \{i_X \mid X \in \mathcal{T}\}$  für  $i_X$  das Tupel mit  $\text{id}_X$  an der Stelle mit Index  $(X, X)$  und Null an allen anderen Stellen. Der offensichtliche Ab-Funktor  $\mathcal{T} \rightarrow [R(\mathcal{T}), I(\mathcal{T})]$  induziert stets einen Isomorphismus  $\mathcal{T}_{/0} \xrightarrow{\sim} [R(\mathcal{T}), I(\mathcal{T})]$  für  $\mathcal{T}_{/0}$  die Ab-Kategorie ist, die aus  $\mathcal{T}$  entsteht, wenn wir alle Nullobjekte, soweit es solche überhaupt gibt, zu einem einzigen Objekt identifizieren. Umgekehrt erhalten wir stets einen offensichtlichen Isomorphismus  $(R[R, I], I[R, I]) \xrightarrow{\sim} (R, I)$  von Ringoiden.

**Definition 4.1.3.** Ein **Ringoidmodul** über einem Ringoid  $(R, I)$  ist ein  $R$ -Assoziativmodul  $M$  derart, daß gilt  $M = \sum_{i \in I} iM$ . Analog erklären wir **Ringoidrechtsmoduln**. Diese bilden abelsche Kategorien  $\text{RMod}_R$  und  $\text{RMod}_{-R}$ .

4.1.4. In der Terminologie dieses Textes sind alle Ringe unitär und auf allen Moduln operiert die Eins als Identität. Ein „nichtunitärer Ring“ heißt bei uns eine „assoziative  $\mathbb{Z}$ -Algebra“ oder ein „Assoziativobjekt der Schmelzkategorie  $\text{Ab}$ “ und die „nichtunitären Moduln“ über einem Assoziativobjekt heißen „Assoziativmoduln“.

4.1.5 (**Ringoidkategorie als Teil der Ringoidmodulkategorie**). Gegeben ein Ringoid  $(R, I)$  erhalten wir einen volltreuen Ab-Funktor

$$[R, I] \hookrightarrow \text{RMod}_{-R}$$

von der Ringoidkategorie in die Kategorie der Rechtsmoduln unseres Ringoids durch  $i \mapsto iR$  auf Objekten und  $jRi \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{-R}(iR, jR)$  durch Multiplikation von links auf Morphismen. Diese volltreue Einbettung ist der Grund, aus dem

wir im folgenden Rechtsmoduln bevorzugen. Im Fall  $|I| = 1$  spezialisiert das zur wohlbekanntem Bijektion  $R \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{-R}(R, R)$  durch Linksmultiplikation mit Umkehrabbildung  $\varphi \mapsto \varphi(1)$ .

**4.1.6 (Ringoidmodul als Funktoren auf der Ringoidkategorie).** Gegeben ein Ringoid  $(R, I)$  erhalten wir zu jedem Ringoidmodul  $M$  einen Ab-Funktor  $[M] : [R, I] \rightarrow \text{Ab}$  durch  $i \mapsto iM$ . Gegeben eine Ab-Kategorie  $\mathcal{T}$  und ein Ab-Funktor  $F : \mathcal{T} \rightarrow \text{Ab}$  erhalten wir einen Ringoidmodul

$$M(F) := \bigoplus_{X \in \mathcal{T}} F(X)$$

über dem Ringoid  $R(\mathcal{T})$ . Diese beiden Konstruktionen sind zueinander quasiinverse Isomorphismen von Kategorien zwischen  $\text{RMod}_R$  und  $\text{Cat}^{\text{Ab}}([M, I], \text{Ab})$ , in Worten der Kategorie der mit den jeweiligen additiven Strukturen verträglichen Funktoren  $[M, I] \rightarrow \text{Ab}$ .

**4.1.7 (Ubiquität der freien endlich erzeugten Ringoidmoduln).** Gegeben  $\mathcal{C} \supset \mathcal{T}$  eine Ab-Kategorie mit einer vollen Unterkategorie betrachten wir das Ringoid  $R := R(\mathcal{T})$  nach 4.1.2 und erhalten einen Ab-Funktor

$$\mathcal{C} \rightarrow \text{RMod}_{-R}$$

durch die Vorschrift  $X \mapsto \bigoplus_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{C}(T, X)$ . Jedes Objekt  $T \in \mathcal{T}$  wird dabei auf  $i_T R$  abgebildet mit  $i_T \in R$  dem zu  $T$  gehörigen Idempotenten. Nach 4.1.5 ist unser Funktor volltreu auf  $\mathcal{T}$ , wir haben also in Formeln  $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \text{RMod}_{-R}$ . Ist  $\mathcal{C}$  additiv, so folgern wir eine Äquivalenz

$$\langle \mathcal{T} \rangle_{\oplus} \xrightarrow{\cong} \text{RFrei}_{-R}$$

für  $\text{RFrei}_{-R} := \langle iR \mid i \in I \rangle_{\oplus} \subset \text{RMod}_{-R}$  die volle Unterkategorie aller endlichen direkten Summen von Objekten  $iR$  mit  $i \in I$ . Wir nennen sie **freie Ringoidmoduln** oder ausführlicher **freie endlich erzeugte Ringoidmoduln**.

**Definition 4.1.8.** Gegeben Ringoide  $(A, I)$  und  $(B, J)$  ist ein **Ringoidbimodul** eine abelsche Gruppe  $X$  mit einer Struktur als  $A$ -Ringoidmodul und einer Struktur als  $B$ -Ringoidrechtsmodul derart, daß gilt  $(ax)b = a(xb) \forall a \in A, b \in B, x \in X$ .

**4.1.9 (Funktoren zu Ringoidbimoduln).** Gegeben ein  $A$ - $B$ -Ringoidbimodul  $X$  konstruieren wir ein adjungiertes Paar von Funktoren

$$(X \otimes_B, X \rightrightarrows_A)$$

zwischen  $\text{RMod}_B$  und  $\text{RMod}_A$ . Dazu gehen wir von der Tensor-Hom-Adjunktion in der Gestalt [KAG] 2.6.5 aus, also vom Fall  $A = \mathbb{Z}$ . Wir hatten sie erhalten als die Komposition

$$\text{Ab}(X \otimes_B M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Bal}_B(X \times M, N) \xleftarrow{\sim} \text{Hom}_B(M, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, N))$$

von Ab-Isomorphismen, wobei die Wirkung von  $b \in B$  auf  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, N)$  durch Vorschalten von  $(\cdot b) : X \rightarrow X$  zu verstehen ist. Sie schränkt ein zu einer Bijektion

$$\text{Hom}_A(X \otimes_B M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_B(M, \text{Hom}_A(X, N))$$

Daß in unserer Situation  $X \otimes_B M$  ein  $A$ -Ringoidmodul ist, erkennt man unschwer sogar für einen beliebigen  $B$ -Assoziativmodul  $M$ , vergleiche [KAG] 2.6.7. Dagegen muß  $\text{Hom}_A(X, N)$  im allgemeinen kein  $B$ -Ringoidmodul sein. Alles paßt aber mit

$$(X \Rightarrow_A N) := \sum_{j \in J} j \text{Hom}_A(X, N)$$

**4.1.10 (Skalarerweiterung bei Ringoidmoduln).** Seien  $(A, I)$  und  $(B, J)$  Ringoide und  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Homomorphismus von  $\mathbb{Z}$ -Algebren, der eine Surjektion  $\varphi : I \sqcup \{0\} \rightarrow J \sqcup \{0\}$  induziert. So wird  $B$  ein  $B$ - $A$ -Ringoidbimodul für Operation durch Linksmultiplikation von  $B$  und die Rechtsoperation von  $A$  gegeben durch Multiplikation von rechts mit dem Bild unter  $\varphi$  und wir erhalten einen Funktor, die **Skalarerweiterung**

$$B \otimes_A : \text{RMod}_A \rightarrow \text{RMod}_B$$

Weiter erhalten wir in dieser Situation einen Isomorphismus  $B \otimes_A Ai \xrightarrow{\sim} B\varphi(i)$  durch die Abbildung  $b \otimes a \mapsto b\varphi(a)$ . Das folgt aus allgemeinen Resultaten zum Tensorieren über nichtunitären Ringen bei vielen Idempotenten, vergleiche [KAG] 2.6.9. Insbesondere induziert unsere Skalarerweiterung einen Funktor

$$B \otimes_A : \text{RFrei}_A \rightarrow \text{RFrei}_B$$

## 4.2 Differentielle graduierte Ringoide und Moduln

4.2.1. Die Schmelzkategorie der differentiellen graduierten abelschen Gruppen mit den entsprechenden multilinearen Abbildungen als Verschmelzungen notieren wir  $\text{dgAb}$ . Eine  $\text{dgAb}$ -Kategorie nennen wir kurz eine  $\text{dg}$ -Kategorie. Das interne Hom der Schmelzkategorie  $\text{dgAb}$  alias den Homomorphismenkomplex notieren wir im folgenden  $\Rightarrow_{\text{dgAb}}$  oder kurz  $\Rightarrow$ .

**Definition 4.2.2.** Ein **differentielles graduiertes Ringoid** oder **dg-Ringoid** ist ein Paar  $(A, I)$  bestehend aus einem Assoziativobjekt  $A \in \text{dgAb}$  zusammen mit einer ausgezeichneten Menge von Idempotenten  $I \subset \mathcal{Z}^0 R$  derart, daß für  $i, j \in I$  gilt  $i \neq j \Rightarrow ij = 0$  und daß gilt  $A = \sum_{i, j \in I} iAj$ .

4.2.3 (**dg-Ringoide und dg-Kategorien**). Gegeben ein  $\text{dg}$ -Ringoid  $(R, I)$  erhalten wir eine  $\text{dg}$ -Kategorie  $[R, I]^{\text{dg}}$  mit höchstens einem Nullobjekt, seine **dg-Ringoidkategorie**, indem wir  $I$  als Menge der Objekte nehmen und  $iRj$  als die

differentielle abelsche Gruppe der Morphismen von  $j$  nach  $i$ . Gegeben eine dg-Kategorie  $\mathcal{T}$  erhalten wir ein dg-Ringoid  $(R(\mathcal{T}), I(\mathcal{T}))$ , indem wir

$$R(\mathcal{T}) := \bigoplus_{X, Y \in \mathcal{T}} \mathcal{T}(X, Y)$$

setzen und  $I(\mathcal{T}) := \{i_X \mid X \in \mathcal{T}\}$  für  $i_X$  das Tupel mit  $\text{id}_X$  an der Stelle mit Index  $(X, X)$  und Null an allen anderen Stellen. Diese beiden Konstruktionen sind salopp gesprochen invers zueinander, aber wir führen das nicht in voller Präzision aus.

4.2.4. Einen **dg-Ringoidmodul** über einem dg-Ringoid  $(R, I)$  erklären wir als einen  $R$ -dgAb-Assoziativmodul  $M$  mit  $M = \sum_{i \in I} iM$ . Analog erklären wir einen **dg-Ringoidrechtsmodul**. Diese bilden, wie im folgenden ausgeführt werden soll, dg-Kategorien  $\text{RMod}_R^{\text{dg}}$  beziehungsweise  $\text{RMod}_{-R}^{\text{dg}}$ . Wir beginnen unsere Diskussion mit Rechtsmoduln. Gegeben dg-Rechtsmoduln  $M, N$  nehmen wir als Morphismenobjekte die Unterkomplexe

$$\text{RMod}_{-R}^{\text{dg}}(M, N) \subset (M \rightrightarrows N)$$

aus allen  $f \in (M \rightrightarrows N)^n$  mit  $f \circ (\cdot r) = (\cdot r) \circ f$  für alle homogenen  $r \in R$ . Um zu prüfen, daß wir so wirklich einen Unterkomplex erhalten, beschreiben wir ihn alternativ als den Egalisator der beiden Morphismen  $(M \rightrightarrows N) \rightarrow ((M \otimes R) \rightrightarrows N)$  gegeben durch das Vorschalten der Operation  $M \otimes R \rightarrow M$  und das Darantensorieren der Identität auf  $R$  gefolgt vom Nachschalten der Operation  $N \otimes R \rightarrow N$ . Im Fall von Linksmoduln nehmen wir als Morphismenobjekte die Unterkomplexe

$$\text{RMod}_R^{\text{dg}}(M, N) \subset (M \rightrightarrows N)$$

aus allen  $f \in (M \rightrightarrows N)^n$  mit  $f \circ (r \cdot) = (-1)^{|f||r|} (r \cdot) \circ f$  für alle homogenen  $r \in R$  mit der üblichen Konvention  $|f| = n$ . Um zu prüfen, daß wir so wirklich einen Unterkomplex erhalten, beschreiben wir ihn analog als den Egalisator der beiden Morphismen  $(M \rightrightarrows N) \rightarrow ((R \otimes M) \rightrightarrows N)$  gegeben durch das Vorschalten der Operation  $R \otimes M \rightarrow M$  und das Darantensorieren der Identität auf  $R$  gefolgt vom Nachschalten der Operation  $R \otimes N \rightarrow N$  und erinnern die Vorzeichenregel [TSK] 2.1.25 für das Tensorieren von internem Hom.

4.2.5 (**dg-Ringoidkategorie als Teil der dg-Ringoidmodulkategorie**). Gegeben ein dg-Ringoid  $(R, I)$  erhalten wir einen volltreuen dgAb-Funktor

$$[R, I]^{\text{dg}} \hookrightarrow \text{RMod}_{-R}^{\text{dg}}$$

von der einer dg-Ringoidkategorie 4.2.3 in die Kategorie seiner dg-Rechtsmoduln durch  $i \mapsto iR$  auf Objekten und  $jRi \xrightarrow{\sim} \text{RMod}_{-R}^{\text{dg}}(iR, jR)$  durch Multiplikation von links auf Morphismen.

**4.2.6 (dg-Ringoidmodul als dg-Funktoren auf der dg-Ringoidkategorie).** Gegeben ein dg-Ringoid  $(R, I)$  erhalten wir zu jedem dg-Ringoidmodul  $M$  einen dgAb-Funktor  $[M] : [R, I]^{\text{dg}} \rightarrow \text{dgAb}$  durch  $i \mapsto iM$ . Gegeben eine dgAb-Kategorie  $\mathcal{T}$  und ein dgAb-Funktor  $F : \mathcal{T} \rightarrow \text{dgAb}$  erhalten wir einen dg-Ringoidmodul

$$M(F) := \bigoplus_{X \in \mathcal{T}} F(X)$$

Diese beiden Konstruktionen sind zueinander quasiinverse Äquivalenzen von dg-Kategorien zwischen  $\text{RMod}_R^{\text{dg}}$  und  $\text{Cat}^{\text{dgAb}}([M, I]^{\text{dg}}, \text{dgAb})$ .

**4.2.7 (Homotopiekategorie der dg-Moduln).** Die Umstrukturierung der dg-Kategorie der dg-Ringoidmoduln über einem dg-Ringoid  $(A, I)$  mit dem Schmelzfunktor  $\mathcal{H}^0 : \text{dgAb} \rightarrow \text{Ab}$  bezeichnen wir mit  $\text{RHot}_A := \mathcal{H}^0(\text{RMod}_A^{\text{dg}})$  und setzen also

$$\text{RHot}_A(M, N) := \mathcal{H}^0(\text{RMod}_A^{\text{dg}}(M, N))$$

für dg-Ringoidmoduln  $M, N$  über  $A$ . Ebenso erklären wir über einem dg-Ringoid  $A$  auch die Homotopiekategorie der dg-Ringoidrechtsmoduln  $\text{RHot}_{-A}$ . Darauf ebenso wie bei Linksmoduln ist das Verschieben von Komplexen mit dem Negativmachen der Differentiale  $M \mapsto [1]M$  aus [TS] 5.7.11 eine  $\mathbb{Z}$ -Operation. Die Homotopiekategorie  $\text{RHot}_{-A}$  aller dg-Rechtsringoidmoduln über einem dg-Ringoid  $A$  wird eine triangulierte Kategorie, wenn wir sie mit der von  $\text{RMod}_{-A}$  induzierten  $\mathbb{Z}$ -Operation versehen und diejenigen Dreiecke auszeichnen, die isomorph sind zu Dreiecken der Gestalt

$$M \xrightarrow{f} N \rightarrow \text{Keg}(f) \rightarrow [1]M$$

mit  $\text{Keg}(f)$  dem Abbildungskegel, den wir mit seiner offensichtlichen Struktur als dg-Rechtsringoidmodul versehen. Um die Axiome einer triangulierten Kategorie zu prüfen, müssen wir „nur“ den Beweis von Satz 2.3.1 durchgehen und prüfen, daß alle Kettenabbildungen und Homotopien daraus unter unseren zusätzlichen Voraussetzungen mit der Rechtsoperation von  $A$  verträglich sind. Für Linksmoduln gilt Entsprechendes. Hier erklären wir die  $\mathbb{Z}$ -Operation, indem wir von unserer  $\mathbb{Z}$ -Operation  $M \mapsto [1]M$  auf Komplexen aus [TS] 5.7.11 ausgehen und die  $A$ -Operation erklären durch die Vorschrift

$$a([1]m) := (-1)^{|a|}[1](am)$$

für homogene  $a \in A$ . Das Vorzeichen ist nötig, damit unser  $[1]M$  aus [TS] 5.7.11 mit seinem negativ gemachten Differential wieder ein dg-Modul ist. Weiter müssen wir auf dem Abbildungskegel die nicht ganz so offensichtliche  $A$ -Operation betrachten, bei der ein homogenes  $a \in A$  in den Notationen von [TS] 6.2.5 durch die Diagonalmatrix  $\text{diag}((-1)^{|a|}a, a)$  operiert.

*Ergänzung* 4.2.8. Ich habe davon Abstand genommen, die zuvor erklärten Konstruktionen in einen noch größeren Rahmen zu stellen, weil ich erstens nicht so genau weiß, wie das zu machen wäre, und zweitens fürchte, daß ein noch größerer Rahmen das in dieser Darstellung entwickelte Bild erdrücken könnte.

4.2.9. Fassen wir ein Ringoid  $(A, I)$  als dg-Ringoid auf, indem wir es mit der trivialen Graduierung  $A = A^0$  und dem Differential  $d = 0$  versehen, so erhalten wir  $\text{RHot}_A = \text{Hot}(\text{RMod}_A)$ .

**Beispiel 4.2.10 (Kategorie von Komplexen als dg-Kategorie).** Gegeben eine Ab-Kategorie  $\mathcal{P}$  bilden die Komplexe  $\text{Ket}_{\mathcal{P}}$  eine dg-Kategorie in offensichtlicher Weise. Wir notieren diese dg-Kategorie  $\text{Ket}_{\mathcal{P}}^{\text{dg}}$ . Die ursprüngliche Ab-Kategorie der Komplexe erhalten wir daraus zurück durch Umstrukturieren [TSK] 2.4.21 mit dem Schmelzfunktor  $\mathcal{Z}^0 : \text{dgAb} \rightarrow \text{Ab}$  der Nullzykel, in Formeln  $\text{Ket}_{\mathcal{P}} = \mathcal{Z}^0(\text{Ket}_{\mathcal{P}}^{\text{dg}})$ . Die Homotopiekategorie mit ihrer additiven Struktur erhalten wir ähnlich durch Umstrukturieren [TSK] 2.4.21 mit dem Schmelzfunktor  $\mathcal{H}^0 : \text{dgAb} \rightarrow \text{Ab}$  der nullten Homologie, in Formeln  $\text{Hot}_{\mathcal{P}} = \mathcal{H}^0(\text{Ket}_{\mathcal{P}}^{\text{dg}})$ .

4.2.11. Gegeben eine Ab-Kategorie  $\mathcal{P}$  und eine volle Unterkategorie  $\mathcal{T} \subset \text{Ket}_{\mathcal{P}}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}^{\text{dg}} \subset \text{Ket}_{\mathcal{P}}^{\text{dg}}$  die volle dg-Unterkategorie mit denselben Objekten und betrachten das zugehörige dg-Ringoid  $R := \text{R}(\mathcal{T}^{\text{dg}})$  nach 4.2.3 und erhalten einen dg-Funktor  $\text{Ket}_{\mathcal{P}}^{\text{dg}} \rightarrow \text{Rmod}_{-R}^{\text{dg}}$  durch die Vorschrift

$$X \mapsto \bigoplus_{T \in \mathcal{T}} \text{Ket}_{\mathcal{P}}^{\text{dg}}(T, X)$$

Jedes Objekt  $X \in \mathcal{T}$  wird dabei auf  $i_X R$  abgebildet mit  $i_X \in R$  dem zu  $X$  gehörigen Idempotenten. Nach 4.2.5 ist unser dg-Funktor volltreu auf  $\mathcal{T}^{\text{dg}}$ , wir haben also in Formeln

$$\mathcal{T}^{\text{dg}} \xrightarrow{\sim} \text{RMod}_{-R}^{\text{dg}}$$

Umstrukturieren unseres dg-Funktors  $\text{Ket}_{\mathcal{P}}^{\text{dg}} \rightarrow \text{Rmod}_{-R}^{\text{dg}}$  mit  $\mathcal{H}^0$  liefert einen Ab-Funktor

$$\text{Hot}_{\mathcal{P}} \rightarrow \text{RHot}_{-R}$$

Ist  $\mathcal{P}$  additiv, so ist er sogar trianguliert, denn nach einer Variante von [TS] 6.2.12 wissen wir, daß das „Bilden des Hom-Komplexes“ für alle  $Z \in \text{Ket}_{\mathcal{P}}$  ein triangulierter Funktor  $\text{Ket}_{\mathcal{P}}^{\text{dg}}(Z, \ ) : \text{Hot}_{\mathcal{P}} \rightarrow \text{Hot}$  ist. Daraus folgt unsere Behauptung dann ohne große Mühe. Weiter ist unser Funktor auch volltreu auf der vollen Unterkategorie  $\mathcal{T}^{\text{hot}} := \mathcal{H}^0(\mathcal{T}^{\text{dg}}) \subset \text{Hot}_{\mathcal{P}}$  der Homotopiekategorie mit Objekten  $\mathcal{T}$ , in Formeln  $\mathcal{T}^{\text{hot}} \xrightarrow{\sim} \text{RHot}_{-R}$  mit  $X \mapsto i_X R$ .

4.2.12. Gegeben ein dg-Ringoid  $(R, I)$  betrachten wir in der zugehörigen Homotopiekategorie  $\text{RHot}_R$  die von allen  $Ri$  mit  $i \in I$  erzeugte triangulierte Unterkategorie und notieren sie

$$\text{RFrot}_R := \langle Ri \mid i \in I \rangle_{\Delta} \subset \text{RHot}_R$$

Ihre Objekte nennen wir **homotopiefreie endlich erzeugte dg-Ringoidmoduln**. In derselben Weise erklären wir die triangulierte Kategorie der **homotopiefreien dg-Ringoidrechtsmoduln**

$$\mathrm{RFrot}_{-R} := \langle iR \mid i \in I \rangle_{\Delta} \subset \mathrm{RHot}_{-R}$$

4.2.13. Fassen wir ein Ringoid  $(A, I)$  als dg-Ringoid auf, indem wir es mit der trivialen Graduierung  $A = A^0$  und dem Differential  $d = 0$  versehen, so erhalten wir  $\mathrm{RFrot}_A = \mathrm{Hot}^b(\mathrm{RFrei}_A)$ .

4.2.14 (**Ubiquität der homotopiefreien dg-Ringoidmoduln**). Gegeben eine additive Kategorie  $\mathcal{P}$  und eine volle Unterkategorie  $\mathcal{T} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}$  und die volle dg-Unterkategorie  $\mathcal{T}^{\mathrm{dg}} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{dg}}$  mit denselben Objekten und das zugehörige dg-Ringoid  $R := \mathrm{R}(\mathcal{T}^{\mathrm{dg}})$  nach 4.2.3 induziert unser Funktor  $\mathrm{Hot}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathrm{RHot}_{-R}$  aus 4.2.11, der ja wie oben erwähnt volltreu ist auf der Unterkategorie  $\mathcal{T}^{\mathrm{hot}}$  mit Objektmenge  $\mathcal{T}$ , mittels dévissage 2.4.12 eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\langle \mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\mathrm{Hot}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{RFrot}_{-R}$$

Die linke Seite meint hier die von den Objekten von  $\mathcal{T}$  in  $\mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}$  erzeugte triangulierte Unterkategorie. Ein Objekt  $T \in \mathcal{T}$  wird dabei auf den dg- $R$ -Rechtsmodul  $i_T R$  abgebildet.

4.2.15 (**Beschreibung triangulierter Erzeugnisse in Homotopiekategorien**). Sei  $\mathcal{P}$  eine additive Kategorie. Gegeben Komplexe  $X_{\alpha} = (X_{\alpha}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  in  $\mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}$  indiziert durch  $1 \leq \alpha \leq a$  finden wir, daß die iterierten Abbildungskegel gegeben durch  $K_{\alpha+1} = 0$  und  $K_{\alpha} := \mathrm{K}(f_{\alpha} : [-1]X_{\alpha} \rightarrow K_{\alpha+1})$  für beliebige Kettenabbildungen  $f_{\alpha}$  beschrieben werden können als die Komplexe mit homogenen Anteilen

$$K_{\alpha}^n = X_{\alpha}^n \oplus X_{\alpha+1}^n \oplus \dots \oplus X_a^n$$

und mit Differentialen  $d^n : K_{\alpha}^n \rightarrow K_{\alpha}^{n+1}$  in Bezug auf die Darstellung unserer direkten Summen als Spaltenvektoren gegeben durch untere Dreiecksmatrizen wie etwa

$$d^n = \begin{pmatrix} \partial^n & 0 & 0 \\ * & \partial^n & 0 \\ * & * & \partial^n \end{pmatrix}$$

im Fall von drei Summanden mit den Differentialen der  $X_{\beta}$  für  $\alpha \leq \beta \leq a$  auf der Diagonalen und beliebige  $X_{\beta}^n \rightarrow X_{\gamma}^{n+1}$  für  $\alpha \leq \beta < \gamma \leq a$  unterhalb der Diagonalen mit der einzigen Maßgabe, daß stets gilt  $d^{n+1} \circ d^n = 0$ . Gegeben zwei derartige iterierte Abbildungskegel  $K, L$  und eine Kettenabbildung  $f : [-1]K \rightarrow L$  ist auch  $\mathrm{Keg}([-1]K \rightarrow L)$  wieder von derselben Gestalt. Damit haben wir eine Beschreibung aller Objekte in der von einer Menge von Komplexen erzeugten triangulierten Unterkategorie von  $\mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}$  gewonnen. Die Verschiebungen  $[-1]$  sind

hierbei unerheblich und dienen nur dem Zweck, die Diagonale von Vorzeichen zu befreien.

**4.2.16 (Beschreibung homotopiefreier dg-Ringoidmoduln).** Sei  $(R, I)$  ein dg-Ringoid. Alle homotopiefreien dg-Ringoidrechtsmoduln sind isomorph zu  $R$ -Rechtsmoduln  $M = [\nu_1]i_1R \oplus [\nu_2]i_2R \oplus \dots \oplus [\nu_a]i_aR$  für beliebig vorgegebene  $\nu_\alpha \in \mathbb{Z}$  und  $i_\alpha \in I$  und  $1 \leq \alpha \leq a$  mit homogenen Anteilen

$$M^n = i_1R^{n+\nu_1} \oplus i_2R^{n+\nu_2} \oplus \dots \oplus i_aR^{n+\nu_a}$$

und mit einem Differential  $d : M^n \rightarrow M^{n+1}$  in Gestalt des Davormultiplizierens einer unteren Dreiecksmatrix wie etwa

$$d = \begin{pmatrix} (-1)^{\nu_1} \partial & 0 & 0 \\ * & (-1)^{\nu_2} \partial & 0 \\ * & * & (-1)^{\nu_3} \partial \end{pmatrix}$$

im Fall von drei Summanden, mit Einträgen  $(-1)^{\nu_\alpha} \partial_R$  an der  $\alpha$ -Stelle auf der Diagonalen und Einträgen aus  $(i_\beta R i_\gamma)^{\nu_\beta - \nu_\gamma + 1}$  homogen vom Grad  $\nu_\beta - \nu_\gamma + 1$  für  $\beta < \gamma$  als Matrixeintrag  $d_{\gamma\beta}$  an den entsprechenden Stellen unterhalb der Diagonalen. Wieder ist die einzige zusätzliche Einschränkung an die Einträge unserer Matrix  $d^2 = 0$ . Das sieht man genauso wie bei der in 4.2.15 ausgeführten Variante.

**4.2.17 (Von dg-Ringoidmoduln zu Komplexen).** Gegeben eine additive Kategorie  $\mathcal{P}$  und eine volle Unterkategorie  $\mathcal{T} \subset \text{Ket}_{\mathcal{P}}$  und das zugehörige dg-Ringoid  $R := R(\mathcal{T}^{\text{dg}})$  können wir nun auch ein Quasiinverses der Äquivalenz von triangulierten Kategorien  $\langle \mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}} \xrightarrow{\cong} \text{RFrot}_{-R}$  nach unserer dg-Ubiquität 4.2.14 explizit angeben. Gehören etwa die ausgezeichneten Idempotenten  $i_1, i_2, i_3$  zu den Komplexen  $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}$ , so würde unserem Beispielobjekt aus 4.2.16 der Komplex  $K$  mit homogenen Anteilen  $K^n = T_1^{n+\nu_1} \oplus T_2^{n+\nu_2} \oplus T_3^{n+\nu_3}$  zugeordnet und mit dem durch die Matrix

$$d = \begin{pmatrix} (-1)^{\nu_1} \partial_1 & 0 & 0 \\ * & (-1)^{\nu_2} \partial_2 & 0 \\ * & * & (-1)^{\nu_3} \partial_3 \end{pmatrix}$$

beschriebenen Differential, wobei nun  $\partial_i$  das Differential von  $T_i$  meint und wir erinnern, daß jedes Element  $* \in (i_\beta R i_\gamma)^{\nu_\beta - \nu_\gamma + 1}$  für eine ganze Familie von  $\mathcal{P}$ -Morphismen  $T_\gamma^{n+\nu_\gamma} \rightarrow T_\beta^{n+\nu_\beta+1}$  steht.

**4.2.18 (Homotopiefreie dg-Ringoidmoduln spezieller dg-Ringoiden).** Sei nun speziell  $(H, I)$  ein dg-Ringoid, das konzentriert ist im Grad Null, so daß insbesondere auch sein Differential verschwindet. Ist dann in 4.2.16 sagen wir  $\nu_\gamma$  kleinstmöglich unter allen  $\nu_\alpha$ , so muß die  $\gamma$ -Zeile der das Differential beschreibenden Matrix verschwinden und wir erhalten wieder eine obere Dreiecksmatrix, wenn

wir erst die  $\gamma$ -Zeile nach ganz oben schieben und dann die  $\gamma$ -Spalte nach ganz vorn. So sehen wir, daß wir jeden homotopiefreien  $H$ -dg-Ringoidrechtsmodul auch darstellen können nach dem in 4.2.16 beschriebenen Schema mit der zusätzlichen Eigenschaft  $\nu_1 \leq \dots \leq \nu_a$  und daß dabei das Differential durch eine Block-untere Dreiecksmatrix gegeben wird mit der durch die Gleichheiten zwischen unseren  $\nu_\alpha$  gegebenen Blockstruktur und von Null verschiedenen Einträgen nur auf der ersten unteren Block-Nebendiagonalen, wie etwa die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

im Fall  $\nu_1 < \nu_2 = \nu_3 < \nu_4$ , wobei die Sternchen nur dann alle von Null verschieden sein können, wenn  $<$  jedes mal ein Wachsen um Eins bedeutet. Das alles illustriert nocheinmal unsere Identität  $\text{RFrot}_{-H} = \text{Hot}^b(\text{RFrei}_{-H})$  aus 4.2.12, die Nebendiagonalblöcke links entsprechen den Differentialen des Komplexes rechts. Ist etwas allgemeiner  $(Z, I)$  ein dg-Ringoid, das konzentriert ist in nichtpositiven Graden, so können wir immer noch zu  $\nu_1 \leq \dots \leq \nu_a$  umsordieren, aber die Differentiale sind nun Block-untere Dreiecksmatrizen mit Diagonalmatrizen mit von Null verschiedenen Einträgen  $\pm\partial$  auf der Blockdiagonalen und Einträgen von immer negativeren Graden in den tieferen Block-Nebendiagonalen, also etwa

$$\begin{pmatrix} \partial & 0 & 0 & 0 \\ *^0 & -\partial & 0 & 0 \\ *^0 & 0 & -\partial & 0 \\ *^{-1} & *^0 & *^0 & \partial \end{pmatrix}$$

im Fall  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) = (2, 3, 3, 4)$  mit oberen Indizes an den Sternchen, um die Grade der entsprechenden Elemente von  $Z$  anzudeuten.

### 4.3 Kippen, Realisierung, Gewichtskomplex

**Definition 4.3.1.** Gegeben dg-Ringoid  $(A, I)$  und  $(B, J)$  erklären wir einen **dg-Ringoidbimodul** als eine dg-Gruppe  $X$  mit einer Struktur als  $A$ -dg-Ringoidmodul und einer Struktur als  $B$ -dg-Ringoidrechtsmodul derart, daß gilt  $(ax)b = a(xb) \forall a \in A, b \in B, x \in X$ .

4.3.2. Gegeben ein  $A$ - $B$ -dg-Ringoidbimodul  $X$  erhalten wir einen dg-Funktor

$$\otimes_A X : \text{RMod}_{-A}^{\text{dg}} \rightarrow \text{RMod}_{-B}^{\text{dg}}$$

in recht offensichtlicher Weise durch Ergänzung des in 4.1.9 diskutierten Funktors um Graduierung und Differential. Auf die Diskussion des Rechtsadjungierten

verzichten wir vorerst, das mag einmal ein Student ausarbeiten. Unser Funktor induziert auf den Homotopiekategorien einen triangulierten Funktor

$$\otimes_A X : \mathrm{RHot}_{-A} \rightarrow \mathrm{RHot}_{-B}$$

**4.3.3 (Skalarerweiterung bei dg-Ringoidmoduln).** Seien  $(A, I)$  und  $(B, J)$  dg-Ringoide und  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Homomorphismus von dgAb-Magmas, der eine Surjektion  $\varphi : I \sqcup \{0\} \twoheadrightarrow J \sqcup \{0\}$  induziert. So wird  $B$  ein  $A$ - $B$ -dg-Ringoidbimodul für die offensichtliche Rechtsoperation von  $B$  und die Linksoperation von  $A$  gegeben durch Multiplikation mit dem Bild unter  $\varphi$  und wir erhalten mit 4.3.2 einen triangulierten Funktor, die **Skalarerweiterung**

$$\otimes_A B : \mathrm{RHot}_{-A} \rightarrow \mathrm{RHot}_{-B}$$

Weiter erhalten wir in dieser Situation einen Isomorphismus  $iA \otimes_A B \xrightarrow{\sim} \varphi(i)B$  durch die Abbildung  $a \otimes b \mapsto \varphi(a)b$ . Das folgt aus der bereits in 4.1.10 besprochenen analogen Aussage in der „nicht-dg-Situation“, die wir dort für Linksmoduln ausformuliert hatten. Insbesondere induziert unsere Skalarerweiterung einen triangulierten Funktor

$$\otimes_A B : \mathrm{RFrot}_{-A} \rightarrow \mathrm{RFrot}_{-B}$$

In der in 4.2.16 besprochenen Beschreibung der homotopiefreien Rechtsmoduln bedeutet die Skalarerweiterung das Anwenden von  $\varphi$  auf alle Matrixeinträge unterhalb der Diagonalen und das Ersetzen der Differentiale von  $A$  durch die Differentiale von  $B$ . Ist zusätzlich  $\varphi$  ein Quasiisomorphismus, so ist unsere Erweiterung der Skalare volltreu auf der vollen Unterkategorie aller  $iA$  mit  $i \in I$  und mit dévissage auch auf ihrem triangulierten Erzeugnis und induziert mithin eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\otimes_A B : \mathrm{RFrot}_{-A} \xrightarrow{\sim} \mathrm{RFrot}_{-B}$$

**4.3.4 (Realisierung, Gewichtskomplex und Kippen im Abstrakten).** Gegeben ein dg-Ringoid  $(R, I)$  haben wir stets Morphismen dgAb-Magmas

$$\mathcal{H}^0 R \leftarrow (\mathcal{Z}^0 R \oplus R^{<0}) \rightarrow R$$

Zeichnen wir in der Mitte dieselbe Menge  $I$  von Idempotenten aus wie in  $R$  und in  $\mathcal{H}^0 R$  deren Bilder, so sind alle drei dgAb-Magmas Ringoide und unsere Skalarerweiterungen aus 4.3.3 liefern triangulierte Funktoren

$$\mathrm{Hot}^b(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R}) = \mathrm{RFrot}_{-\mathcal{H}^0 R} \leftarrow \mathrm{RFrot}_{-\mathcal{Z}^0 R \oplus R^{<0}} \rightarrow \mathrm{RFrot}_{-R}$$

Jetzt unterscheiden wir drei Fälle.

(1) Gilt  $n < 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$ , so ist der erste unserer Morphismen ein Quasiisomorphismus und die Skalarerweiterung liefert nach 4.3.3 eine Äquivalenz  $\mathrm{RFrot}_{-\mathcal{H}^0 R} \xleftarrow{\cong} \mathrm{RFrot}_{-\mathcal{Z}^0 R \oplus R^{<0}}$ . Durch Invertieren dieser Äquivalenz erhalten wir einen triangulierten Funktor, den **abstrakten Realisierungsfunktor**

$$\mathrm{Hot}^b(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R}) \rightarrow \mathrm{RFrot}_{-R}$$

(2) Gilt  $n > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$ , so ist der zweite unserer Morphismen ein Quasiisomorphismus und die Skalarerweiterung liefert nach 4.3.3 eine Äquivalenz  $\mathrm{RFrot}_{-\mathcal{Z}^0 R \oplus R^{<0}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{RFrot}_{-R}$ . Durch Invertieren dieser Äquivalenz erhalten wir einen triangulierten Funktor, den **abstrakten Gewichtskomplexfunktor**

$$\mathrm{RFrot}_{-R} \rightarrow \mathrm{Hot}^b(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R})$$

(3) Gilt  $n \neq 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$ , so werden die beiden zuvor besprochenen Funktoren zueinander quasiinverse Äquivalenzen von triangulierten Kategorien und wir erhalten die **abstrakte Kippäquivalenz**

$$\mathrm{RFrot}_{-R} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hot}^b(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R})$$

**4.3.5 (Realisierung, Gewichtskomplex und Kippen für Komplexe).** Seien  $\mathcal{P}$  eine additive Kategorie und  $\mathcal{T} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{P}}$  eine Menge von Komplexen und  $R := \mathrm{R}(\mathcal{T}^{\mathrm{dg}})$  das zugehörige dg-Ringoid. In diesem Fall liefert unsere Ubiquität 4.1.7 eine Äquivalenz  $\langle !\mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\mathrm{Hot}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R}$  für  $\langle !\mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\mathrm{Hot}} \subset \mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}$  die von  $\mathcal{T}$  in  $\mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}$  erzeugte additive Unterkategorie und zusammen mit der dg-Ubiquität 4.2.14 als rechter Vertikale erhalten wir ein Diagramm triangulierter Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hot}^b(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R}) & \leftarrow \mathrm{RFrot}_{-\mathcal{Z}^0 R \oplus R^{<0}} & \rightarrow \mathrm{RFrot}_{-R} \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ \mathrm{Hot}^b(\langle !\mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\mathrm{Hot}}) & & \langle !\mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\mathrm{Hot}} \end{array}$$

Auch hier unterscheiden wir drei Fälle.

(1) Gilt  $n < 0 \Rightarrow \mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}(X, [n]Y) = 0$  für beliebige  $X, Y \in \mathcal{T}$ , so erhalten wir  $n < 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$  und damit einen triangulierten **Realisierungsfunktor**

$$\mathrm{Hot}^b(\langle !\mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\mathrm{Hot}}) \rightarrow \langle !\mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\mathrm{Hot}}$$

(2) Gilt  $n > 0 \Rightarrow \mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}(X, [n]Y) = 0$  für beliebige  $X, Y \in \mathcal{T}$ , so erhalten wir  $n > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$  und damit einen triangulierten **Gewichtskomplexfunktor**

$$\langle !\mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\mathrm{Hot}} \rightarrow \mathrm{Hot}^b(\langle !\mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\mathrm{Hot}})$$

(3) Gilt  $n \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Hot}_{\mathcal{P}}(X, [n]Y) = 0$  für beliebige  $X, Y \in \mathcal{T}$ , so erhalten wir  $n \neq 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$  und unsere beiden triangulierten Funktoren werden zu quasiinversen Äquivalenzen, den **Kippäquivalenzen**

$$\langle !\mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\mathrm{Hot}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hot}^b(\langle !\mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\mathrm{Hot}}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hot}^b(\mathrm{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R})$$

**Definition 4.3.6.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Eine Menge von Komplexen  $\mathcal{T} \subset \text{Ket}_{\mathcal{A}}$  heiße **quisidentfaltet**, wenn für alle  $T, T' \in \mathcal{T}$  und alle  $n \in \mathbb{Z}$  die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(T, [n]T') \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(T, [n]T')$$

zwischen Morphismen in der Homotopiekategorie und Morphismen in der derivierten Kategorie liefert.

*Beispiele 4.3.7.* Das von einer quisidentfalteten Menge von Komplexen erzeugte Verdiersystem ist offensichtlich auch selbst wieder quisidentfaltet. Die Mengen aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe injektiver Objekte und aller mit den Pfeilen beschränkten Komplexe projektiver Objekte sind quisidentfaltet. Allgemeiner sind die Mengen aller quisrechtsentfalteten Komplexe nach 3.4.5 und aller analog definierten quislinksentfalteten Komplexe beide quisidentfaltet.

**4.3.8 (Triangulierte Erzeugnisse quisidentfalteter Komplexmengen).** Seien  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $\mathcal{T} \subset \text{Ket}_{\mathcal{A}}$  eine quisidentfaltete Menge von Komplexen. So induziert nach dévissage der Lokalisierungsfunktor eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\langle !\mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}} \xrightarrow{\sim} \langle !\mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\text{Der}}$$

zwischen ihren jeweiligen triangulierten Erzeugnissen in der Homotopiekategorie  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  und in der derivierten Kategorie  $\text{Der}_{\mathcal{A}}$ .

**4.3.9 (Realisierung als verallgemeinerter Totalkomplex).** Seien  $\mathcal{P}$  eine additive Kategorie und  $\mathcal{T} \subset \text{Ket}_{\mathcal{P}}$  eine Menge von Komplexen mit  $n < 0 \Rightarrow \text{Hot}_{\mathcal{P}}(X, [n]Y) = 0$  für beliebige  $X, Y \in \mathcal{T}$ . Wir wollen den Realisierungsfunktor  $\text{Hot}^b(\langle !\mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) \rightarrow \langle !\mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}}$  expliziter beschreiben. Sei also  $R := \text{R}(\mathcal{T}^{\text{dg}})$  das zuhehrige dg-Ringoid, für das folglich gilt  $n < 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n R = 0$ . Wir hatten unseren Realisierungsfunktor definiert als die Komposition

$$\begin{array}{ccc} \text{Hot}^b(\text{RFrei}_{-\mathcal{H}^0 R}) & \xleftarrow{\sim} & \text{Hot}^b(\text{RFrei}_{-\mathcal{Z}^0 R \oplus R^{<0}}) & \rightarrow & \text{RFrot}_{-R} \\ \uparrow \wr & & & & \downarrow \wr \\ \text{Hot}^b(\langle !\mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) & & & & \langle !\mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}} \end{array}$$

Mithilfe unserer expliziten Formeln 4.2.17 wollen wir die Komposition unserer Funktoren nun expliziter beschreiben. Das Ausgangsobjekt  $T \in \text{Hot}^b(\langle !\mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}})$  ist ein beschränkter Komplex  $h_p : T^p \rightarrow T^{p+1}$  aus Objekten der Homotopiekategorie  $T^p \in \langle !\mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}} \subset \text{Hot}_{\mathcal{P}}$ . Diese sind ihrerseits Komplexe  $\partial : T^{p,q} \rightarrow T^{p,q+1}$  aus Objekten von  $\mathcal{P}$ . Wir denken uns das ganze Datum notiert in der Form eines Doppelkomplexes mit dem Komplex  $T^p$  in der Vertikalen bei  $p$ . Im Gegensatz zu

einem richtigen Doppelkomplex haben wir aber in den Horizontalen keine richtigen Morphismen  $T^{p,q} \rightarrow T^{p+1,q}$ , sondern nur Homotopieklassen von Kettenabbildungen  $T^{p,*} \rightarrow T^{p+1,*}$  derart, daß die Verknüpfung  $h^{p+1} \circ h^p$  stets nullhomotop ist. Unsere Theorie sagt nun, daß wir Repräsentanten  $u_1^p$  unserer Homotopieklassen  $h^p$  bestehend aus Morphismen  $u_1^{p,q} : T^{p,q} \rightarrow T^{p+1,q}$ , ja aus Kettenabbildungen  $u_1^{p,*} : T^{p,*} \rightarrow T^{p+1,*}$  sowie weitere Morphismen  $u_r^{p,q} : T^{p,q} \rightarrow T^{p+r,q-r+1}$  für  $r \geq 2$  so finden können, daß der „verallgemeinerte Totalkomplex“ mit homogenen Anteilen

$$K^n := \bigoplus_{p+q=n} T^{p,q}$$

und Randoperatoren  $K^n \rightarrow K^{n+1}$  gegeben durch  $(-1)^p \partial + \sum_{r \geq 1} u_r^{p,q}$  in der Tat ein Komplex ist. Unsere Theorie sagt außerdem, daß der so entstehende Komplex in der Homotopiekategorie  $K \in \langle \mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}}$  von den getroffenen Wahlen unabhängig ist bis auf eindeutigen Isomorphismus und das Bild unseres Ausgangsobjekts beschreibt. Ich will nun nicht bis ins Letzte ausschreiben, wie unter unserer neuen Interpretation des Realisierungsfunktors allgemeine Morphismen abgebildet werden, aber in manchen Fällen ist das auch direkt klar, nämlich etwa dann, wenn wir beide Objekte durch echte Doppelkomplexe repräsentieren können und den fraglichen Morphismus durch einen Morphismus von Doppelkomplexen, dann nämlich ist sein Bild schlicht der induzierte Morphismus auf dem Totalkomplex. In Formeln ist also zumindest die Komposition

$$\text{Ket}^b(\langle \mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\text{Ket}}) \rightarrow \text{Hot}^b(\langle \mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) \rightarrow \langle \mathcal{T} \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}}$$

der Totalkomplexfunktor, wo  $\langle \mathcal{T} \rangle_{\oplus}^{\text{Ket}} \subset \text{Ket}_{\mathcal{P}}$  die von  $\mathcal{T}$  in  $\text{Ket}_{\mathcal{P}}$  erzeugte additive Unterkategorie bezeichnet.

**Beispiel 4.3.10 (Realisierungsfunktor für perverse Garben).** Hier will ich erklären, wie man den Realisierungsfunktor aus [BBD82] als Anwendung unseres abstrakten Realisierungsfunktors verstehen kann. Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und sei auf  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^+$  alias  $\text{Hot}_{i\mathcal{A}}^+$  eine Abschneidestruktur gegeben. Das Herz der Abschneidestruktur notiere ich  $\mathcal{C} \subset \text{Hot}_{i\mathcal{A}}^+$  und unser Realisierungsfunktor 4.3.5 spezialisiert zu einem triangulierten Funktor

$$\text{Hot}^b(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Hot}_{i\mathcal{A}}^+$$

Gegeben ein beschränkter exakter Komplex  $(T^*, \partial)$  in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  haben wir nun kurze exakte Sequenzen  $\mathcal{Z}^p(T) \hookrightarrow T^p \twoheadrightarrow \mathcal{Z}^{p+1}(T)$  und die Ränder  $T^p \rightarrow T^{p+1}$  sind die Verknüpfungen

$$T^p \twoheadrightarrow \mathcal{Z}^{p+1}(T) \hookrightarrow T^{p+1}$$

Kurze exakte Sequenzen von perversen Garben sind jedoch dasselbe wie ausgezeichnete Dreiecke ohne den Morphismus vom Grad Eins und sind folglich für

in  $\text{Hot}_{i\mathcal{A}}^+$  vorgegebenes Anfangs- und Endobjekt isomorph mit der Identität vorne und hinten zu einer kurzen exakten Sequenz in  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}^+$  bestehend aus Objekten von  $\mathcal{C} \subset \text{Hot}_{i\mathcal{A}}^+$ . So finden wir von jedem exakten Komplex in  $\text{Hot}^b(\mathcal{C})$  einen Isomorphismus zu einem weiteren Objekt von  $\text{Hot}^b(\mathcal{C})$ , das durch einen Komplex in  $\text{Ket}^b(\text{Ket}_{i\mathcal{A}}^+)$  alias einen echten Doppelkomplex repräsentiert wird, der darüber hinaus exakte Zeilen hat, also ein exakter Komplex von Komplexen ist. Dann ist aber auch sein Totalkomplex exakt und wir finden mit 4.3.9, daß unser Funktor über einen triangulierten Funktor

$$\text{Der}^b(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Hot}_{i\mathcal{A}}^+$$

faktorisiert. Dieser Funktor ist offensichtlich auf  $\mathcal{C}$  eingeschränkt die Einbettung  $\mathcal{C} \hookrightarrow \text{Hot}_{i\mathcal{A}}^+$ . Das ist im Grunde dieselbe Konstruktion wie in [BBD82], ich habe sie nur in einem anderen Dialekt ausformuliert.

*Beispiel 4.3.11.* Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genug Projektiven und sei  $\mathcal{S} \subset \text{Der}_{\mathcal{A}}^-$  eine Menge von Objekten mit

$$n \neq 0 \Rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y[n]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{S}$$

Wir sagen dann auch,  $\mathcal{S}$  sei eine Menge von **paarweise nicht erweiternden** Objekten. Sei  $H := R(\mathcal{S})$  das Ringoid der vollen Unterkategorie  $\mathcal{S} \subset \text{Der}_{\mathcal{A}}$  im Sinne von 4.1.2. So liefert die Kippäquivalenz 4.3.5 zusammen mit der Wahl einer projektiven Auflösung  $\tilde{X} \in \text{Hot}_{p\mathcal{A}}^-$  für jeder  $X \in \mathcal{S}$  eine Kette von Äquivalenzen von triangulierten Kategorien

$$\langle \mathcal{S} \rangle_{\Delta}^{\text{Der}} \xrightarrow{\cong} \langle \tilde{X} \mid X \in \mathcal{S} \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}} \xrightarrow{\cong} \text{Hot}^b(\text{RFrei}_{-H})$$

*Beispiel 4.3.12.* Wir betrachten einen  $K$ -Vektorraum  $V$  und dessen symmetrische Algebra  $S := SV$  mit ihrer offensichtlichen  $\mathbb{Z}$ -Graduierung sowie die abelsche Kategorie  $\mathcal{A} := \text{Mod}_S^{\mathbb{Z}}$  der  $\mathbb{Z}$ -graduierten  $S$ -Moduln und deren derivierte Kategorie  $\text{Der}(\text{Mod}_S^{\mathbb{Z}})$ . Darin bilden die Ein-Objekt-Komplexe  $K(i)[i]$ , die sowohl in der homologischen Graduierung als auch in der internen Graduierung im Grad  $i$  konzentriert sind, eine Menge von paarweise nichterweiternden Objekten. Man erkennt das zum Beispiel am Beweis der Formel 2.6.30 für die Erweiterungen, die auch zeigt, wie man Erweiterungen in  $\text{Mod}_S^{\mathbb{Z}}$  bestimmen kann. Wir erhalten so Isomorphismen  $\text{Alt}^{j-i}(V) \xrightarrow{\cong} \text{Der}(\text{Mod}_S^{\mathbb{Z}})(K(i)[i], K(j)[j]) = 1_j H 1_i$  für unser Erweiterungsringoid  $H$  aus 4.3.11 mit der neuen Notation  $1_j = i_X$  für den Idempotenten in  $H$  zum Objekt  $K(j)[j] = X$ . In diesem Fall erhält man zusätzlich einen Isomorphismus

$$\text{RMod}_{-H} \xrightarrow{\cong} \text{Mod}_{\text{Alt}(V)}^{\mathbb{Z}}$$

dadurch, daß man jedem Ringoidmodul  $M$  den graduierten Modul mit  $M 1_i$  als homogenen Anteil im Grad  $i$  zuordnet, und folgert insbesondere eine Äquivalenz

von  $\text{RFrei}_{-H}$  mit der Kategorie der graduiert freien endlich erzeugten graduierten  $\text{Alt}(V)$ -Moduln.

**Beispiel 4.3.13 (Die Mutter aller Koszul-Dualitäten).** Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$ . Der Koszulkomplex aus [TG] 3.2.32 ist ein bigraduierter  $K$ -Vektorraum mit homogenen Anteilen  $S^i V \otimes \wedge^j V$  und einem Differential  $d$  vom Bigrad  $(1, -1)$ , das die  $(i, j)$ -Komponente in die  $(i + 1, j - 1)$ -Komponente schiebt. Darüberhinaus kommutiert unser Differential mit der Linksoperation von  $SV$  und der Rechtsoperation von  $\text{Alt}(V)$  durch das cap-Produkt von rechts, wie wir bereits in 2.6.30 diskutiert hatten. Bisher hatten wir  $j$  als den „homologischen Grad“ betrachtet und diese Struktur als eine Linksauflösung des im internen Grad Null graduierten  $SV$ -Moduls  $K$  durch den Komplex der graduiert freien  $SV$ -Moduln  $S^i V \otimes \wedge^j V$  aufgefaßt, wo eigentlich der homologische Index  $j$  nach unten gehörte, da das Differential ihn erniedrigt. Wir können aber auch  $i$  als den „homologischen Grad“ betrachten und erhalten dann eine Rechtsauflösung des graduierten  $\text{Alt}(V)$ -Rechtsmoduls  $K$  konzentriert im internen Grad Null durch den Komplex der graduiert freien  $\text{Alt}(V)$ -Rechtsmoduln  $S^i V \otimes \wedge^j V$ . Unter der Annahme  $\dim V < \infty$  sind diese Rechtsmoduln injektiv und unsere Auflösung liefert einen Isomorphismus

$$SV \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{-\text{Alt}(V)}^*(K, K)$$

und für die Kategorie  $\mathcal{B} := \text{Mod}_{-\text{Alt} V}^{\mathbb{Z}}$  der  $\mathbb{Z}$ -graduierten  $(\text{Alt} V)$ -Rechtsmoduln folgern wir wieder, daß die Ein-Objekt-Komplexe  $K(i)[i] \in \text{Der}_{\mathcal{B}}$ , die sowohl in der homologischen Graduierung wie in der internen Graduierung im Grad  $i$  konzentriert sind, eine Menge von paarweise nichterweiternden Objekten bilden. In diesem Fall erhält man analog wie zuvor einen Isomorphismus

$$\text{RMod}_{-H} \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{-SV}^{\mathbb{Z}}$$

und folgert insbesondere eine Äquivalenz von  $\text{RFrei}_{-H}$  mit der Kategorie der graduiert freien endlich erzeugten graduierten  $SV$ -Rechtsmoduln und so eine triangulierte Äquivalenz  $\text{Hot}^b(\text{RFrei}_{-H}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^b(\text{Modf}_{-SV}^{\mathbb{Z}})$ . Andererseits ist das triangulierte Erzeugnis unserer Menge von paarweise nichterweiternden Objekten gerade  $\text{Der}^b(\text{Modf}_{-\text{Alt} V}^{\mathbb{Z}})$ . Zusammenfassend spezialisiert 4.3.11 in unserem Fall also zu einer Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\text{Der}^b(\text{Modf}_{-\text{Alt} V}^{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^b(\text{Modf}_{-SV}^{\mathbb{Z}})$$

## 5 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich vielen, insbesondere Olaf Schnürer, Bernhard Link und Xinrui You. Der Inhalt geht im wesentlichen zurück auf Grothendieck, Deligne und Verdier [Gro72]. Sehr nützlich waren mir die Darstellungen von Godement [God64] und Kashiwara-Schapira [KS90] und Skripten von Milicic und Hörmann zu derivierten Kategorien. Die Argumente zu unbeschränkten Auflösungen kommen aus [Spa88, Bek00]. Bei der Diskussion der Funktorialität von Spektralsequenzen war mir Cartan-Eilenberg [CE56] sehr hilfreich. Diesen Aspekt, der eigentlich erst erklärt, warum man meist mit dem  $E_2$ -Term beginnt, habe ich in der jüngeren Literatur vermißt.

## 6 Die Vorlesung Garbenkohomologie II im SS 18

Es handelte sich um eine zweistündige Vorlesung, also  $2 \times 45$  Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 20.4 Motivation durch Diskussion der sechs Funktoren. Pro-Objekte und Ind-Objekte. Orelokalisierung durch Pro-Objekte. Der universelle derivierte Funktor. Noch nicht: Zahmes Derivieren.
- 27.4 Zahmes Derivieren. Derivieren auf triangulierten Kategorien. Nicht: Adjunktion derivierter Funktoren.
- 4.5 Faserung der derivierten Kategorien von Garben auf topologischen Räumen. Adjunktion derivierter Funktoren, deriviertes Bild als Adjungierter. Gysin-Sequenz noch einmal. Derivieren homologisch endlicher Funktoren, Beweis nicht fertig.
- 11.5 Derivieren homologisch endlicher Funktoren fertig. Derivieren von Tensor und Hom.
- 18.5 Die Schmelzkategorien  $\text{Der}(\text{Ab})$  und  $\text{Der}(\text{Ab}/_X)$ . Der Schmelzfunktor
$$\text{Der}(\text{Ab} //_{\text{Top}})^{\text{opp}} \rightarrow \text{Top}^{\text{opp}}$$
Kommutativität des garbentheoretischen Kohomologierings. Noch nicht: Lokalisierung einer Kofaserung durch Linksanpassung. Noch nicht: Übergang zu Trennkategorien.
- 1.6 Gefasertes Basiswechsel. Künneth-Formeln. Noch zu tun: Lokalisierung durch Linksanpassung.
- 8.6 Eigentliches Vorschub. Zugehöriger Basiswechsel. Lokal eigentliche Abbildung falsch definiert, so geht es nur für separierte lokal eigentliche Abbildungen. Noch zu tun: Lokalisierung durch Linksanpassung. Deriviertes eigentliches Vorschub.
- 15.6 Lokalisierung durch Linksanpassung. Noch nicht deriviertes eigentliches Vorschub. Versprochen: Chern'sche Klassen.
- 21.6 Chern'sche Klassen. Whitney's Summenformel.
- 29.6 Deriviertes eigentliches Vorschub durch Linksanpassung mit Komplexen schwach kompaktweichen Garben, ziemlich schnell. Deriviertes Rückzug-Tensorprodukt durch Linksanpassung mit Komplexen flacher Garben, ziemlich schnell. Austauschsituation, Austauschdatum, kokartesisches Austauschdatum. Noch nicht: Lokalisierung von Austauschdatum, Multiaustausch.

- 6.7 Lokalisierung von Austauschdatum, Multiaustausch. Projektionsformel als Basiswechsel im Multiaustausch. Cup-Produkt der lokalen Kohomologie. Der Fall zweier Kurven in der Ebene.
- 13.7 Eigentliches Zurückholen. Erste Beispiele, insbesondere dualisierende Garbe einer Mannigfaltigkeit.
- 20.7 Die zwei Homologien und Kohomologien und ihre Funktorialitäten. Schnitte und Schnittprodukt.

## Literatur

- [AL] **Skriptum Algebra und Zahlentheorie**. Wolfgang Soergel.
- [BBD82] Alexander A. Beilinson, Joseph N. Bernstein, and Pierre Deligne. Faisceaux pervers. *Astérisque*, 100:1–172, 1982.
- [Bek00] Tibor Beke. Sheafifiable homotopy model categories. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 129(3):447–475, 2000. URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100004722>, doi:10.1017/S0305004100004722.
- [Bor94] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1-3*. Encyclopaedia of Mathematics. Cambridge University Press, 1994.
- [CE56] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [Gab62] Peter Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90:323–448, 1962.
- [God64] Roger Godement. *Théorie des faisceaux*, volume 1252 of *Actualités scientifiques et industrielles*. Hermann Paris, 1964.
- [Gro72] Alexander Grothendieck. *SGA 4*, volume 269, 270, 305 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1972.
- [KAG] **Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie**. Wolfgang Soergel.
- [KM03] O. Khomenko and V. Mazorchuk. On Archipov’s and Enright’s functors. Preprint, 2003.
- [KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on Manifolds*, volume 292 of *Grundlehren*. Springer, 1990.
- [LA2] **Skriptum Lineare Algebra 2**. Wolfgang Soergel.
- [NAS] **Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie**. Wolfgang Soergel.
- [Spa88] N. Spaltenstein. Resolutions of unbounded complexes. *Compositio Math.*, 65(2):121–154, 1988.
- [TD] **Skriptum Derivierte Kategorien und Funktoren**. Wolfgang Soergel.
- [TF] **Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie**. Wolfgang Soergel.

- [TG] Skriptum Garbenkohomologie. Wolfgang Soergel.
- [TS] Skriptum Singuläre Homologie. Wolfgang Soergel.
- [TSF] Skriptum Grothendieck's sechs Funktoren. Wolfgang Soergel.
- [TSK] Skriptum Kategorielle Produktstrukturen. Wolfgang Soergel.

## **Indexvorwort**

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das  $\cup$  dem Buchstaben u oder das  $\subset$  dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa  $\zeta$  unter z und  $\omega$  unter o.

## Index

- $\mathbb{Z}$ -verträglich
  - Transformation, 45
- $\rightarrow_{\text{Der}}$  Morphismus in Der, 52
- $\xrightarrow{\sim}_{\text{Der}}$  Isomorphismus in Der, 52
- $\langle \rangle = \langle \rangle_{\Delta}$  trianguliertes Erzeugnis, 47
- $\langle \rangle = \langle \rangle_{\Delta \ominus}$  Verdier-Erzeugnis, 47
- $\mathcal{K}$  Pfadkategorie von  $\mathcal{K}$ , 4
- $S^{-1}$  Lokalisierung
  - $S^{-1}\mathcal{C}$  einer Kategorie, 5
- $f^*$  Rückzug
  - $f^{(*)}$  underivierter, 93
  - derivierter, 93
- $\mathcal{N}^{\perp}$  linksentfaltete Objekte, 51
- $\mathcal{N}^{\perp}$  rechtsentfaltete Objekte, 51
- ${}^{\perp}\mathcal{N}$  linksentfaltete Objekte, 51
- $f_*$  Vorschub
  - $f_{(*)}$  underivierter, 93
  - derivierter, 93
- $\mathcal{C}_S$  Lokalisierung einer Kategorie, 5
- Abbildungskegel
  - in triangulierter Kategorie, 33
- Abschneidefunktoren, 62
- Adjunktion
  - partielle, 83
- Anfangspunkt, 4
- antiausgezeichnet, 31
  - Dreieck, 36
- Approximation
  - eines Quotientenfunktors, 28
  - partielle, 29
- ausgezeichnet
  - Dreieck, 30, 34
- Automorphismus
  - interner
    - von Schmelzkategorie, 42
- Brüche, 16
- côl Kolimes in Funktorkategorie, 71
- côl filtrierender Kolimes in Funktorkategorie, 71
- cup-Produkt
  - garbentheoretisches, 55
- déployé, 77
- dérivable, 79
- Der, 52
- $\text{Der}^{(\sharp)}$  für  $\sharp \in \{+, -, b\}$ , 61
- $\text{Der}_A = \text{Der}(A\text{-Mod})$ , 52
- derivierte Kategorie, 52
- derivierter Funktor  $R^q F$ , 88
- derivierter Funktor  $RF$ , 87
- dévissage, 47
- dg-Ringoid, 122
- dg-Ringoidbimodul, 128
- dg-Ringoidkategorie, 122
- dg-Ringoidmodul, 123
- dg-Ringoidrechtsmodul, 123
- differentiell
  - graduiertes Ringoid, 122
- Dimension
  - homologische
    - einer Kategorie, 57
    - eines Rings, 60
- distingué
  - triangle, 34
- distinguished
  - triangle, 34
- distinguished triangle, 30
- Dreieck, 30, 33
  - ausgezeichnetes, 30, 34
- Ecken, 4
- endlich
  - Torsionsdimension, 105
- Endpunkt, 4

- Ensf Kategorie der endlichen Mengen, 74
- épaisse
  - souscatégorie, 46
- erblich
  - abelsche Kategorie, 57
- Ersetzung, 116
- erzeugt
  - Verdiersystem, 47
- essentiell konstant, 73
- $\text{Ext}_A^q(A, B)$  Erweiterungen
  - ohne genug Injektive, 54
- Faktorierte Funktor, 77
- Fast-Moduln, 27
- frei
  - Ringoidmodul, 121
- garbentheoretischer Kohomologiering, 55
- gesättigt
  - multiplikatives System, 20
- Gruppe
  - proendliche, 75
- $\mathbb{H}^q$  Hyperkohomologie, 92
- $\mathbb{H}_A^q$  Hyperkohomologie mit Träger, 93
- $\mathbb{H}_I^q$  kompakte Hyperkohomologie, 93
- halbeinfach
  - abelsche Kategorie, 57
- hdim homologische Dimension, 57
- hocol Homotopiekolimes, 14
- Hodge-Filtrierung, 97
- Homologiesequenz
  - eines ausgezeichneten Dreiecks, 32
- homologische Dimension, 57
  - eines Rings, 60
  - endliche, 57
- homotopiefrei
  - dg-Ringoidmodul, 126
  - dg-Ringoidrechtsmodul, 126
- Homotopiekolimes, 14
- Hot
  - Hot<sup>+</sup>, 53
  - Hot<sup>+</sup>, Hot<sup>-</sup>, Hot<sup>b</sup>, 61
- Hyperkohomologie, 92
- $i\mathcal{A}$  Injektive von  $\mathcal{A}$ , 64
- $\text{ind}(\mathcal{C})$  Ind-Objekte, 72
- Ind-Objekt, 72
- Indkolimes, 71
- intern
  - triangulierte Struktur auf Schmelzkategorie, 42
- Isobimodul von dg-Ringen, 67
- Kan-Erweiterung, 112, 113
- Kategorie
  - $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}\text{-}\vec{\mathfrak{M}}_{\epsilon}$ -Kategorie, 5
  - triangulierte, 33
- $\text{Ket}_{\mathcal{P}}^{\text{dg}}$  dg-Kategorie der Komplexe, 125
- Köcher, 4
  - $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}\text{-}\vec{\mathfrak{M}}_{\epsilon}$ -Köcher, 5
- Kohomologiering
  - garbentheoretischer, 55
- Kürzen, 16
- $LF$  voller Linksfaktorierte, 82
- $LF = \llcorner LF$  universeller Linksderivierter, 113
- $\lim$  Limes in Funktorkategorie, 71
- $\varinjlim$  Kolimes in Funktorkategorie, 71
- “ $\varinjlim$ ”, 71
- “ $\varprojlim$ ”, 71
- $\varprojlim$  kofiltrierender Limes in Funktorkategorie, 71
- Links-Ore-System, 16
- Linksapproximation, 113
  - finale, 113
- Linksderivierter
  - universeller, 113
- linksentfaltet
  - $\mathcal{N}$ -linksentfaltet, 51
  - für Funktor, 10

- für Morphismenmenge, 11
- Linksentfaltung
  - für Funktor, 11
- Linksfaktoriertes
  - voller, 82
  - zahmer, 82
- Lokalisierung
  - einer Kategorie, 5
- Lokalisierungsfunktor, 6
- Morita-Äquivalenz
  - verallgemeinerte, 29
- Morphismenbimodul, 67
- Morphismenfunktor, 115
- Morphismus von Dreiecken, 33
- multiplikativ
  - in Kategorie, 15
- multiplikatives System
  - in Kategorie, 15
- Nullkategorie, 57
- Nullsystem, 46
- Oktaederaxiom, 34
- opponiert
  - triangulierte Kategorie, 40
- Ore-Bedingung, 16
- Ore-System, 16
- Orelokalisierung, 21
- paarweise nicht erweiternd, 133
- partiell
  - Adjunktion, 83
- Pfad
  - in Köcher, 4
- Pfadkategorie, 4
- Pfeile, 4
  - beschränkt gegen, 61
  - beschränkt mit, 61
- pro( $\mathcal{C}$ ) Pro-Objekte, 72
- Pro-Objekt, 72
- Produkt
  - in derivierter Kategorie, 111
- Produktsummentotal, 100
- Produkttotal, 100
  - eines Tripelkomplexes, 103
- proendliche Gruppe, 75
- Prolimes, 71
- Quasibasis, 67
- Quasiisomorphismus
  - von dg-Ringen, 67
- quisentfaltet, 131
- quisflach
  - Komplex von Moduln, 105
- quislinksentfaltet, 53, 107
- quisrechtsentfaltbar, 81
  - $F$ -quisrechtsentfaltbar, 87
  - in abelscher Kategorie, 88
- quisrechtsentfaltet, 53
  - Objekt, 88
- Quotient
  - von abelscher Kategorie, 23
- Quotientenfunktor
  - exakter, 23
  - triangulierter, 48
- Quotientenkategorie, 24
- $R^F$  Rechtsfaktoriertes, 76
- $R^F$  Rechtsderiviertes von  $F$ , 87
- $R^F = {}_uR^F$  universeller Rechtsderiviertes, 113
- Rechts-Ore-System, 15
- Rechtsapproximation, 112
- rechtszyklisch
  - Objekt, 88
- Rechtsbrüche, 16
- Rechtsderiviert
  - in mehreren Variablen, 108
- Rechtsderiviertes
  - universeller, 113
- Rechtsdimension
  - homologische, 97

rechtsendlich  
     homologisch, 97  
 rechtsentfaltbar, 77  
      $S$ -rechtsentfaltbar, 77  
 rechtsentfaltet, 76  
      $\mathcal{N}$ -rechtsentfaltet, 51  
     für Funktor, 10  
     für Morphismenmenge, 11  
 Rechtsentfaltung  
      $S$ -Rechtsentfaltung, 11  
     für Funktor, 11  
 Rechtsfaktorierter, 76  
 $RF$ , 77  
 $R\text{Frei-}_R$  freie endlich erzeugte Ringoid-  
     moduln, 121  
 $R\text{Hot}$ , 124  
 Ringoid, 120  
     differentielles graduiertes, 122  
 Ringoidbimodul, 121  
 Ringoidkategorie, 120  
 Ringoidmodul, 120  
 Ringoidrechtsmodul, 120  
 $R\text{Mod}$  Ringoidmodul, 120  
 $R\text{Mod}^{\text{dg}}$  dg-Ringoidmoduln, 123  
  
 Selbsterweiterungen, 54  
 Serre'sche Unterkategorie, 23  
 Signumsautomorphismus, 42  
 Signumseinheit, 42  
 Spektralsequenz  
     ausgeartete unbeschränkte, 101  
 Summenprodukttotal, 100  
 Summentotal, 100  
     eines Tripelkomplexes, 103  
 System  
     trianguliertes, 46  
  
 $\tau^{\leq n}, \tau^{< n}, \tau^{\geq n}, \tau^{> n}$  Abschneidefunkto-  
     ren, 62  
 Torsionsdimension, 105  
 Totalkomplex, 100  
  
 $\text{Trans}^{\mathbb{Z}}$  verträgliche Transformationen,  
     46  
 Transformation  
     verträgliche  
         von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren, 45  
 triangle  
     distingué, 30, 34  
     distinguished, 30, 34  
 trianguliert  
     Funktor, 46  
     Kategorie, 33  
     Kategorie, opponierte, 40  
     System, 46  
 triangulierter Quotient, 48  
 Tripelkomplex, 103  
  
 $\mathcal{U}$ -objektkleine Kategorie, 72  
  
 Verdiersystem, 46  
 verträglich  
     Transformation von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren,  
         45  
 verträgliche Adjunktion, 46  
 volllicht  
     Funktor, 9  
  
 Yoneda-Produkt, 54  
  
 $\mathbb{Z}$ -Funktor, 45  
 $\mathbb{Z}$ -Kategorie, 33  
 $\mathbb{Z}$ -Struktur, 45  
 Zwei-aus-Drei-Eigenschaft, 20  
 Zylinder, 118