

SINGULÄRE HOMOLOGIE

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Singuläre Homologie	4
1.1	Simpliziale Homologie	4
1.2	Definition der singulären Homologie	13
1.3	Funktorialität der Homologie	21
1.4	Homotopie-Invarianz	26
1.5	Erste Homologie und Fundamentalgruppe	34
1.6	Homologie offener Teilmengen der Ebene	40
2	Relative singuläre Homologie	49
2.1	Definition der relativen Homologie	49
2.2	Lange exakte Homologiesequenz	52
2.3	Ausschneidung und Anwendungen	59
2.4	Beweis des Ausschneidungssatzes	63
3	Homologie verklebter Räume	72
3.1	Singuläre Homologie von Simplicialkomplexen	72
3.2	Fixpunktsätze und simpliziale Approximation	79
3.3	Einbettungen von Sphären in Sphären	85
3.4	Homologie von endlichen Zellkomplexen	91
3.5	Zelluläre Homologie	96
4	Homologie von Mannigfaltigkeiten	100
4.1	Homologie und Orientierung	100
4.2	Orientierung von Mannigfaltigkeiten	102
4.3	Hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten	107
4.4	Endlichkeitsaussagen für Mannigfaltigkeiten*	121
5	Koeffizientenwechsel und Künneth-Formel	123
5.1	Homologie mit Koeffizienten	123
5.2	Tensorprodukt abelscher Gruppen	127
5.3	Torsionsprodukt von abelschen Gruppen	131
5.4	Erste Anwendungen in der Homologietheorie	135
5.5	Universelles Koeffiziententheorem	136
5.6	Singuläre Ketten in Produkträumen	138
5.7	Tensorprodukt und Homologie	145
5.8	Eilenberg-Zilber und Alexander-Whitney*	151

6 Kohomologie	156
6.1 Singuläre Kohomologie	156
6.2 Kriterium für Homotopieäquivalenzen	163
6.3 Relative Kohomologie	166
6.4 Homologie als Kohomologiemodul	168
6.5 Erweiterungen von abelschen Gruppen	176
6.6 Injektive abelsche Gruppen	178
6.7 Koeffizientenwechsel	183
7 Poincaré-Dualität	186
7.1 Limites und Kolimites	186
7.2 Kompakte Kohomologie	198
7.3 Lokalendliche Homologie*	202
7.4 Poincaré-Dualität	214
7.5 Schnittzahlen im Simplizialen*	222
8 Danksagung	229
9 Die Vorlesung Algebraische Topologie im SS 17	230
Literaturverzeichnis	233
Indexvorwort	235
Index	236

1 Singuläre Homologie

1.1 Simpliciale Homologie

1.1.1. Für jede Menge Λ betrachten wir die abelsche Gruppe

$$\mathbb{Z}\Lambda$$

aller der Abbildungen $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$, die nur auf endlich vielen Elementen von Λ Werte ungleich Null annehmen. Die Elemente von $\mathbb{Z}\Lambda$ fassen wir auf als endliche formale Linearkombinationen von Elementen von Λ und schreiben sie $f = \sum a_\lambda \lambda$ mit $a_\lambda = f(\lambda) \in \mathbb{Z}$ und $\lambda \in \Lambda$. Die Gruppe $\mathbb{Z}\Lambda$ heißt die **freie abelsche Gruppe über Λ** . In der in 1.1.1 eingeführten Notation hieß sie $\text{Ab}^\wedge \Lambda$.

1.1.2. Wir haben eine offensichtliche Abbildung $\varepsilon : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}\Lambda$, die eben jedem Element die charakteristische Funktion der entsprechenden einelementigen Teilmenge zuordnet und die wir in diesem Kontext in Worten und Formeln behandeln, als ob sie die Einbettung einer Teilmenge sei. Gegeben eine weitere abelsche Gruppe G läßt sich jede Abbildung $\varphi : \Lambda \rightarrow G$ auf genau eine Weise zu einem Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}\Lambda \rightarrow G$ fortsetzen, den wir die **lineare Fortsetzung von φ** nennen und in diesem Kontext auch meist mit demselben Buchstaben φ bezeichnen. In Formeln ausgedrückt induziert für jede abelsche Gruppe G das Vorschalten von ε eine Bijektion

$$(\circ\varepsilon) : \text{Ab}(\mathbb{Z}\Lambda, G) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(\Lambda, G)$$

1.1.3. Ich erinnere an die Definition eines Simplicialkomplexes $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ aus [TF] 2.7.5 als einer Menge E von „Ecken“ mitsamt einem System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ von nichtleeren endlichen Teilmengen, genannt „kombinatorische Simplizes“ oder auch kurz „Simplizes“, das unter dem Bilden von nichtleeren Teilmengen stabil ist und alle einelementigen Teilmengen von E enthält. Eine geometrische Anschauung für dieses eher kombinatorische Datum mag seine geometrische Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ nach [TF] 2.7.8 geben.

1.1.4 (**Ketten und Randoperator zu vorgegebener Eckenanordnung**). Gegeben ein Simplicialkomplex $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ bezeichne $\mathcal{K}_q := \{s \in \mathcal{K} \mid |s| = q + 1\}$ die Menge seiner q -Simplizes. Gegeben eine Anordnung \leq auf der Menge E seiner Ecken erklären wir für alle $q \geq 1$ einen Homomorphismus $\partial^{\leq} : \mathbb{Z}\mathcal{K}_q \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}$ zwischen den freien abelschen Gruppen über den entsprechenden Mengen von Simplizes als die lineare Fortsetzung der Abbildung

$$\partial^{\leq} : \{s_0, \dots, s_q\} \mapsto \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \{s_0, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_q\}$$

mit einem Hut alias einer „Tarnkappe“ über der wegzulassenden Ecke und der Konvention, daß $s \in \mathcal{K}_q$ geschrieben werden muß als $s = \{s_0, \dots, s_q\}$ mit $s_0 < \dots < s_q$. Diesen Homomorphismus nennen wir den **Randoperator zur vorgegebenen Eckenanordnung**. Es ist leicht zu sehen, daß in der Sequenz

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_2 \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_1 \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_0 \rightarrow 0$$

die Verknüpfung je zweier aufeinanderfolgender Homomorphismen Null ist. Im folgenden machen wir diese Konstruktion unabhängig von der Wahl einer Anordnung der Eckenmenge.

Definition 1.1.5. Sei $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplicialkomplex. Gegeben $q \geq 0$ bilden wir die Menge

$$\mathcal{K}_q^< := \{\sigma : \{0, \dots, q\} \rightarrow E \mid \sigma \text{ ist injektiv, } (\text{im } \sigma) \in \mathcal{K}\}$$

aller **angeordneten kombinatorischen q -Simplizes**. Dann bilden wir über dieser Menge die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^<$ und schließlich deren Quotienten

$$S_q\mathcal{K} := \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^< / \langle \sigma \circ \pi - (\text{sgn } \pi)\sigma \mid \sigma \in \mathcal{K}_q^<, \pi \in \mathcal{S}_{q+1} \rangle$$

In diesem Quotienten werden also je zwei angeordnete q -Simplizes, die sich nur in ihrer Anordnung und in dieser um eine Permutation π unterscheiden, bis auf das Signum der fraglichen Permutation $\pi \in \mathcal{S}_{q+1}$ miteinander identifiziert. Wir nennen unseren Quotienten $S_q\mathcal{K}$ die **Gruppe der q -Simplizialketten von \mathcal{K}** . Die Klasse eines angeordneten q -Simplex $\sigma \in \mathcal{K}_q^<$ notiere ich $[\sigma] \in S_q\mathcal{K}$.

1.1.6 (Veranschaulichung von Null-Simplizialketten). Eine Null-Simplizialkette ist eine \mathbb{Z} -wertige Funktion auf der Menge der Ecken, die höchstens endlich vielen Ecken einen Wert ungleich Null zuordnet.

1.1.7 (Veranschaulichung von Eins-Simplizialketten). Einen kombinatorischen Eins-Simplex mit Anordnung zeichne ich als eine Kante mit einem Pfeil von der kleineren Ecke zur größeren Ecke. Eine Eins-Simplizialkette ist eine \mathbb{Z} -wertige Funktion auf der Menge von derart bepfeilten Kanten, die auf der umgekehrt bepfeilten Kante jeweils den negativen Wert annimmt und auf fast allen bepfeilten Kanten den Wert Null.

1.1.8 (Veranschaulichung von Zwei-Simplizialketten). Die durch einen angeordneten kombinatorischen Zwei-Simplex gegebene Zwei-Simplizialkette zeichne ich als Dreiecksfläche mit einem Kreis Pfeil, der andeutet, in welcher Richtung man auf dem Rand herumgehen muß, wenn man von der kleinsten Ecke über die mittlere Ecke zur größten Ecke gehen will. Da alle zyklischen Permutationen in \mathcal{S}_3 gerade sind, ist es bei dieser Darstellung egal, welche Ecke man als

kleinste Ecke nimmt. Dieselbe Dreiecksfläche mit einem Kreisfeil in der Gegenrichtung stellt dann das Negative unserer Zwei-Simplizialkette dar. Eine beliebige Zwei-Simplizialkette eines Simplizialkomplexes ist eine \mathbb{Z} -wertige Funktion auf der Menge aller derart kreisbepfeilten Dreiecksflächen, die auf der umgekehrt bepfeilten Dreiecksfläche jeweils den negativen Wert annimmt und auf fast allen kreisbepfeilten Dreiecksflächen den Wert Null.

1.1.9 (Simplizialketten und Simplizes). Sei $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Ist \leq eine Anordnung der Eckenmenge E , so erhalten wir für jedes $q \geq 0$ einen Gruppenisomorphismus

$$b^{\leq} = b_q^{\leq} : \mathbb{Z}\mathcal{K}_q \xrightarrow{\sim} S_q\mathcal{K}$$

als die lineare Fortsetzung der Abbildung $s \mapsto \sigma_s$, die gegeben wird durch die Vorschrift $\sigma_s(i) := s_i$ für $s = \{s_0, \dots, s_q\}$ mit $s_0 < \dots < s_q$. Im folgenden konstruieren wir Randoperatoren $\partial = \partial_q : S_q\mathcal{K} \rightarrow S_{q-1}\mathcal{K}$ derart, daß für jede Anordnung \leq der Eckenmenge E das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial^{\leq}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}_2 & \xrightarrow{\partial^{\leq}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}_1 & \xrightarrow{\partial^{\leq}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}_0 & \xrightarrow{\partial^{\leq}} & 0 \\ & & b^{\leq} \downarrow \wr & & b^{\leq} \downarrow \wr & & b^{\leq} \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \dots & \xrightarrow{\partial} & S_2\mathcal{K} & \xrightarrow{\partial} & S_1\mathcal{K} & \xrightarrow{\partial} & S_0\mathcal{K} & \xrightarrow{\partial} & 0 \end{array}$$

kommutiert. Sowohl die Homomorphismen der oberen Horizontale ∂^{\leq} aus 1.1.4 als auch die vertikalen Isomorphismen hängen dabei von einer Anordnung \leq von E ab. Die Sequenz der unteren Horizontale ist jedoch unabhängig von der Wahl einer Anordnung der Eckenmenge, wie im folgenden diskutiert wird.

Definition 1.1.10. Sei $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Einen angeordneten q -Simplex σ notieren wir (v_0, \dots, v_q) mit $v_i = \sigma(i)$. Die Gruppensomomorphismen $\partial^< : \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^< \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}^<$ für $q \geq 1$, die auf angeordneten Simplizes durch die Formel

$$(v_0, \dots, v_q) \mapsto \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q)$$

gegeben werden mit einem Hut alias einer „Tarnkappe“ über der wegzulassenden Komponente, induzieren Gruppensomomorphismen

$$\partial = \partial_q : S_q\mathcal{K} \rightarrow S_{q-1}\mathcal{K}$$

auf den Simplizialketten, die **Randoperatoren**. In der Tat, da die symmetrische Gruppe durch Transpositionen benachbarter Elemente erzeugt wird, müssen wir für die Wohldefiniertheit dieser Randoperatoren nur prüfen, daß die beiden Ränder $\partial^<(v_0, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_q)$ und $-\partial^<(v_0, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_q)$ für alle i dieselbe

Simplizialkette repräsentieren, und das ist leicht einzusehen. Per definitionem kommutieren mit diesem ∂ alle Quadrate in 1.1.9 für jede Anordnung \leq der Eckenmenge. Damit folgt aus $(\partial^{\leq})^2 = 0$ sofort $\partial^2 = 0$. Die so entstehende Sequenz von abelschen Gruppen

$$\dots \xrightarrow{\partial} S_2\mathcal{K} \xrightarrow{\partial} S_1\mathcal{K} \xrightarrow{\partial} S_0\mathcal{K}$$

nennen wir den **Komplex der Simplizialketten**. Um mit Beschränkungen der Indizes keinen Ärger zu kriegen, setzen wir unsere Sequenz ins Negative fort durch Null und vereinbaren $S_q\mathcal{K} = 0$ für $q < 0$.

1.1.11 (**Anschauung für den Komplex der Simplizialketten**). Anschaulich mag man sich eine 0-Simplizialkette vorstellen als eine endliche formale Linearkombination von Ecken mit ganzzahligen Koeffizienten; eine 1-Simplizialkette als eine endliche formale Linearkombination von befeilten Kanten, wobei eine umgekehrt befeilte Kante mit dem Negativen der ursprünglichen befeilten Kante zu identifizieren ist; den Rand einer befeilten Kante als Endpunkt minus Anfangspunkt; eine 2-Simplizialkette als eine endliche formale Linearkombination von kreisbefeilten Dreiecksflächen, wobei die umgekehrt kreisbefeilte Dreiecksfläche mit dem Negativen der ursprünglichen kreisbefeilten Dreiecksfläche zu identifizieren ist; und den Rand einer kreisbefeilten Dreiecksfläche als die Summe ihrer drei Kanten, jeweils versehen mit der Richtung, für die sie einen Rundweg in der durch den Kreis Pfeil gegebenen Laufrichtung bilden. Die Herkunft der Bezeichnung ∂ für die Randoperatoren wird in [AN2] 9.6.11 diskutiert.

Definition 1.1.12. Sei \mathcal{K} ein Simplizialkomplex. Wir setzen:

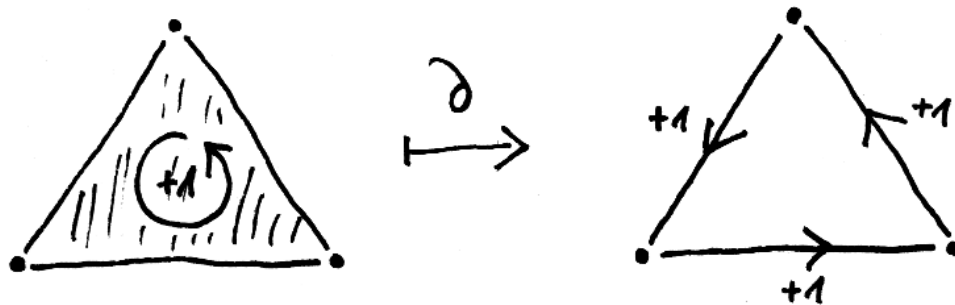
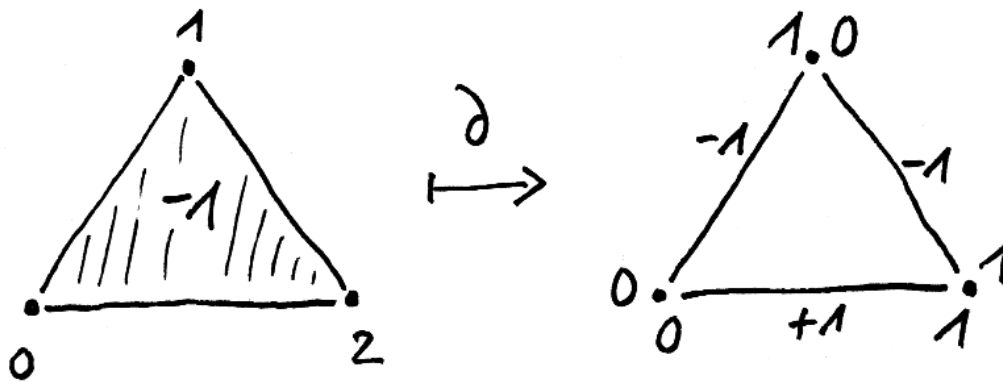
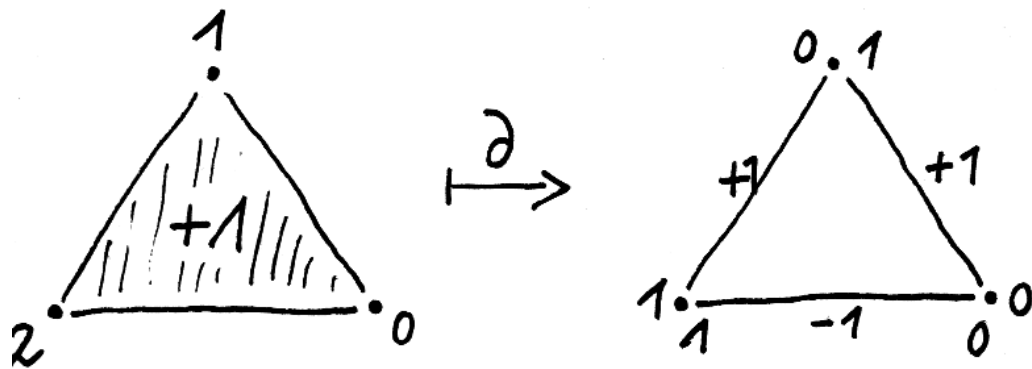
$Z_q\mathcal{K} := \ker(\partial_q : S_q\mathcal{K} \rightarrow S_{q-1}\mathcal{K})$ die Gruppe der q -**Simplizialzykel**;

$B_q\mathcal{K} := \text{im } \partial_{q+1}$ die Gruppe der q -**Simplizialränder** (englisch boundaries);

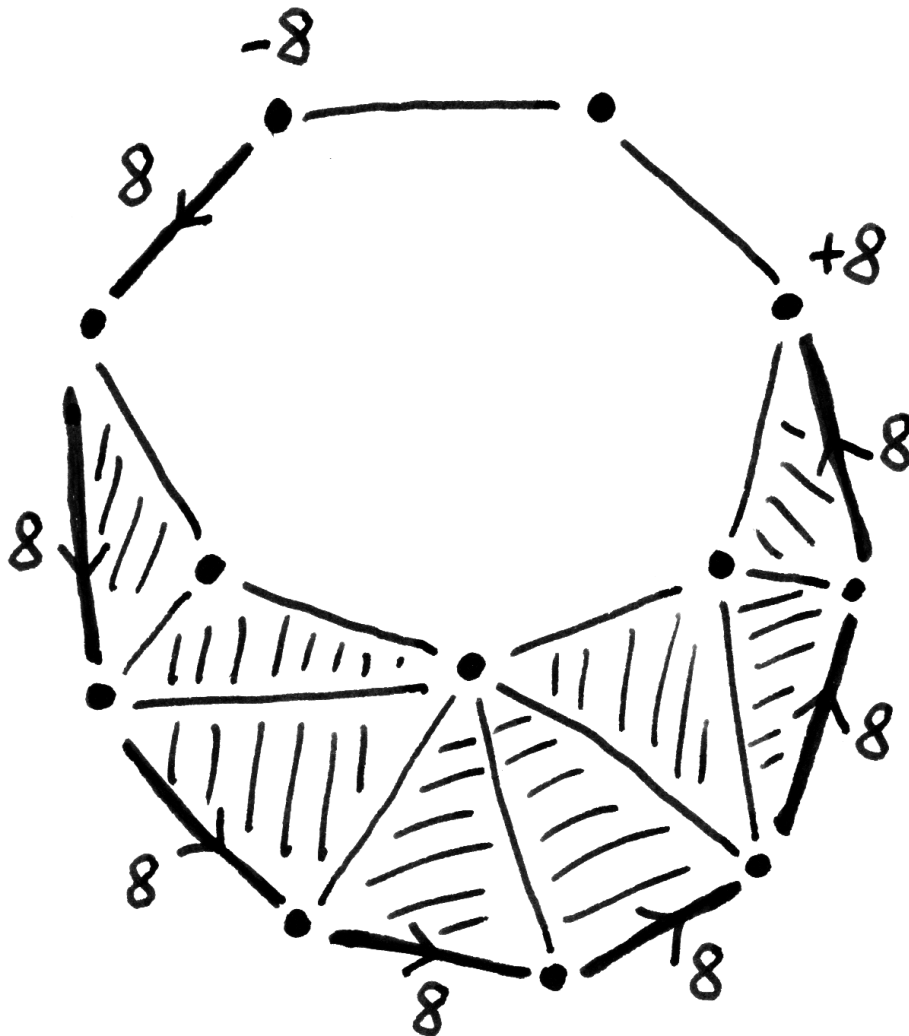
$H_q\mathcal{K} := Z_q\mathcal{K}/B_q\mathcal{K}$ die q -**te simpliziale Homologiegruppe** von \mathcal{K} .

In der letzten Zeile ist die Quotientengruppe aus [LA2] 4.2.10 gemeint.

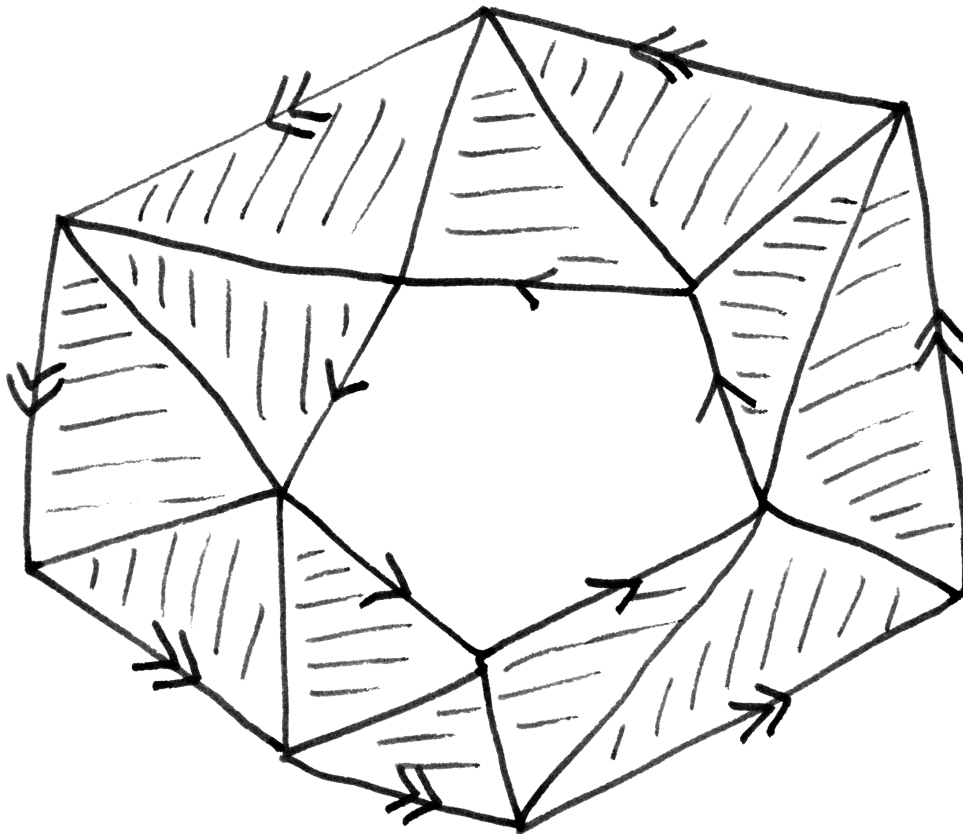
1.1.13 (**Anschauung für Homologiegruppen**). Anschaulich beschreiben die verschiedenen Homologiegruppen eines Simplizialkomplexes \mathcal{K} verschiedene Arten von Löchern seiner geometrischen Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$. Zum Beispiel liefert 1.2.13 in Verbindung mit 3.1.7 einen Isomorphismus zwischen $H_0\mathcal{K}$ und der freien abelschen Gruppe über der Menge der Zusammenhangskomponenten von $\Delta(\mathcal{K})$, die ja durch eine gewisse Art von Löchern voneinander getrennt werden; der „Hurewicz-Isomorphismus“ 1.5.2 in Verbindung mit 3.1.7 liefert einen Isomorphismus zwischen $H_1\mathcal{K}$ und dem maximalen abelschen Quotienten der Fundamentalgruppe



Anschauung für den Rand einer 2-Simplizialkette. In der linken Spalte habe ich versucht, zwei Elemente der freien abelschen Gruppe über der Menge der angeordneten Simplizes graphisch darzustellen, die dieselbe Simplizialkette repräsentieren, sowie ganz unten besagte Simplizialkette selber. In der rechten Spalte werden die jeweiligen Ränder angedeutet. Die Zahlen an den Ecken stehen für die durch die jeweilige Anordnung gegebene Nummerierung.



Ein Simplicialkomplex mit 12 Ecken, 20 Kanten und 8 Zweisimplizes. Darin eingezeichnet eine 1-Simplizialkette, bestehend aus der formalen Summe der sieben mit einem Pfeil versehenen fetten Kanten, zu verstehen mit der durch diesen Pfeil gegebenen Orientierung und jeweils mit dem Koeffizienten 8. Ebenfalls eingezeichnet der Rand dieser Simplicialkette, bestehend aus der formalen Summe der zwei besonders fetten Punkte mit den darangeschriebenen Koeffizienten ± 8 . Dieses Beispiel mag auch die Bezeichnung als „Kette“ erklären. Wenn wir unsere 1-Simplizialkette entsprechend durch die beiden Kanten zwischen diesen beiden Punkten mit geeigneter Orientierung und geeigneten Koeffizienten ergänzen, so erhalten wir einen 1-Simplizialzykel.



Zwei homologe 1-Simplizialzykel in einem zweidimensionalen Simplizialkomplex mit 12 Zwei-Simplizes, 24 Eins-Simplizes und 12 Null-Simplizes. Betrachtet man die Summe aller mit der Orientierung „im Uhrzeigersinn“ versehenen Zwei-Simplizes, so ist der Rand dieser 2-Simplizialkette die Differenz der durch Doppelpfeile beziehungsweise einfache Pfeile angedeuteten 1-Zykel.

von $\Delta(\mathcal{K})$, der eine andere Art von Löchern beschreibt; und die „Alexanderdualität“ [TG] 5.1.22 in Verbindung mit 3.1.7 liefert für jede Einbettung der Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ eines endlichen Simplicialkomplexes \mathcal{K} in \mathbb{R}^3 einen Isomorphismus zwischen $H_2\mathcal{K}$ und der freien abelschen Gruppe über der Menge der beschränkten Zusammenhangskomponenten des Komplements von $\Delta(\mathcal{K})$ alias der freien abelschen Gruppe über der Menge der „Kavitäten“ unserer Realisierung, die eine wieder andere Art von Löchern beschreibt. Die höheren Homologiegruppen beschreiben ähnliche Phänomene in höheren Dimensionen, für die ich keine so konkrete räumliche Anschauung mehr anbieten kann.

Beispiel 1.1.14. Ist $E \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge und (E, \mathcal{M}_E) der maximale Simplicialkomplex zur Eckenmenge E , so ist der Komplex der Simplicialketten kanonisch isomorph in nichtnegativen Graden zum Komplex aus dem gleich anschließenden Lemma 1.1.15, und zwar für jede Anordnung von E . Folglich liefert die Abbildung nach $\mathbb{Z}\mathcal{M}_{E,0} = \mathbb{Z}\mathcal{P}_1E \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{P}_0E$ aus Lemma 1.1.15 einen Isomorphismus $H_0\mathcal{M}_E \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ und Lemma 1.1.15 zeigt weiter, daß alle anderen Homologiegruppen verschwinden. Die geometrische Realisierung $\Delta(\mathcal{M}_E)$ von \mathcal{M}_E ist für endliches E ein voller Simplex mit $|E|$ Ecken, und unsere Erkenntnis bedeutet anschaulich, daß solch ein voller Simplex „keine Löcher hat“.

Lemma 1.1.15 (Azyklizität von Simplicizes). *Für jede nichtleere angeordnete Menge $E \neq \emptyset$ ist der Komplex*

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{P}_0E \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{P}_1E \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{P}_2E \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{P}_3E \leftarrow \dots$$

exakt, wo \mathcal{P}_nE das System aller n -elementigen Teilmengen von E bezeichnet und der Randoperator $\partial = \partial^< : \mathbb{Z}\mathcal{P}_{n+1}E \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{P}_nE$ durch die Formel aus 1.1.4 gegeben wird, so daß wir in Formeln für $v_0 < \dots < v_n$ haben

$$\partial : \{v_0, \dots, v_n\} \mapsto \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$$

1.1.16. Wir verstehen hier Exaktheit im Sinne von [LA2] 4.6.5. Ausgeschrieben behaupten wir also, daß an jeder Stelle der Kern des auslaufenden Pfeils mit dem Bild des einlaufenden Pfeils zusammenfällt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir E endlich annehmen. Ist dann $v \in E$ das kleinste Element und definieren wir Gruppenhomomorphismen $\delta : \mathbb{Z}\mathcal{P}_nE \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{P}_{n+1}E$ durch die Vorschrift $\delta\{v_1, \dots, v_n\} = \{v, v_1, \dots, v_n\}$ falls $v \neq v_1$ beziehungsweise $\delta\{v_1, \dots, v_n\} = 0$ sonst, so prüft man leicht an jeder Stelle $\partial\delta + \delta\partial = \text{id}$. Also ist in unserem Komplex jeder Zykel ein Rand. \square

1.1.17 (**Varianten zur Azyklizität von Simplexes**). Fast derselbe Beweis liefert auch die Exaktheit von zwei weiteren Komplexen, nämlich für jede nichtleere angeordnete Menge E dem Komplex der freien abelschen Gruppen über der Menge aller monotonen statt streng monotonen Abbildungen $\{1, \dots, n\} \rightarrow E$ alias Symbolen (v_1, \dots, v_n) mit $v_1 \leq \dots \leq v_n$, und für jede nichtleere Menge E dem Komplex der freien abelschen Gruppen über der Menge aller Abbildungen $\{1, \dots, n\} \rightarrow E$, jedesmal mit \mathbb{Z} im Grad Null und dem durch dieselbe Formel gegebenen Randoperator. Im ersten Fall zieht man sich wieder auf den endlichen Fall zurück und nimmt als δ das Davorschreiben der kleinsten Ecke. Im zweiten Fall nimmt man als δ das Davorschreiben einer beliebigen fest gewählten Ecke.

Vorschau 1.1.18. In der in 1.4.8 eingeführten Terminologie zeigt unser Beweis sogar, daß alle drei in 1.1.15 und 1.1.17 betrachteten Komplexe nullhomotop sind.

Ergänzung 1.1.19 (**Problematik von Definitionsvarianten**). Sei E eine Menge. Ich will noch auf zwei weitere Komplexe eingehen, die man E zuordnen kann und die a priori besonders natürlich wirken mögen, die aber weniger gute Eigenschaften haben. Man mag einerseits von der Untergruppe derjenigen Elemente der freien Gruppe $\mathbb{Z}E^q$ ausgehen wollen, die „schiefsymmetrisch“ sind unter der offensichtlichen Operation der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_q . Dann wird jedoch der Randoperator durch kompliziertere Formeln gegeben und der Wechsel zu anderen Koeffizienten wird schwieriger. Andererseits mag man vom „maximalen schiefsymmetrischen Quotienten“ der freien Gruppe $\mathbb{Z}E^q$ ausgehen wollen. Das aber geht nur mit Koeffizienten in \mathbb{Q} gut, für Koeffizienten in \mathbb{Z} erhält man eine Surjektion dieses Quotienten auf $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})E^q$.

Beispiel 1.1.20. Ist (E, \mathcal{K}) ein Simplicialkomplex mit $3 \leq |E| < \infty$ und \mathcal{K} der Menge aller nichtleeren echten Teilmengen von E , so liefert die letzte Abbildung aus obigem Komplex wieder einen Isomorphismus $H_0 \mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ und die erste einen Isomorphismus $H_n \mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ für $n = |E| - 2$ und alle anderen Homologiegruppen verschwinden. Seine Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ ist der „anschauliche Rand“ eines vollen Simplex mit $n + 2$ Ecken.

Vorschau 1.1.21 (**Persistente Homologie**). Ein Verfahren der Informatik zur Untersuchung von „Datenwolken“ alias großen Teilmengen eines \mathbb{R}^N besteht darin, daraus zunächst in geeigneter Weise eine aufsteigende Folge von Simplicialkomplexen

$$\mathcal{K}^1 \subset \mathcal{K}^2 \subset \dots \subset \mathcal{K}^n$$

zu bilden und dann für gegebenes q die Sequenz der Homologiegruppen

$$H_q(\mathcal{K}^1; k) \rightarrow H_q(\mathcal{K}^2; k) \rightarrow \dots \rightarrow H_q(\mathcal{K}^n; k)$$

mit Koeffizienten in einem Körper k . Diese Sequenz können wir als graduierten $k[t]$ -Modul auffassen und nach [KAG] 6.7.1 in eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln zerlegen, bei denen jede homogene Komponente höchstens die

Dimension Eins hat. Die Multimenge der Isomorphieklassen der Summanden ist nach Krull-Schmid unabhängig von der Zerlegung, und die „Summanden hoher Dimension“ liefern dann relevante Informationen über unsere Datenwolke. Sie entsprechen Homologieklassen, die erst unter einer vergleichsweise langen Komposition von Morphismen unserer Sequenz sterben, daher die Bezeichnung als „persistente Homologie“.

Übungen

Übung 1.1.22 (Zerlegung der Homologie). Seien $(\mathcal{K}^w)_{w \in W}$ Simplicialkomplexe und $\mathcal{K} := \bigsqcup \mathcal{K}^w$ ihre disjunkte Vereinigung. Man konstruiere einen Isomorphismus $\bigoplus_{w \in W} H_q \mathcal{K}^w \xrightarrow{\sim} H_q \mathcal{K}$.

Übung 1.1.23. Man berechne die simpliciale Homologie der „Vereinigung der Kanten eines Tetraeders“, also $|E| = 4$ und \mathcal{K} alle Teilmengen mit höchstens zwei Elementen.

Übung 1.1.24. Man zeige: Besitzt ein Simplicialkomplex eine Ecke mit der Eigenschaft, daß jeder Simplex bei Dazunehmen dieser Ecke ein Simplex bleibt, so verschwinden seine höheren simplicialen Homologiegruppen und seine nullte Homologiegruppe ist isomorph zu \mathbb{Z} . Hinweis: 1.1.15.

Übung 1.1.25. Man berechne die simpliciale Homologie des „Randes eines Quadrats“.

Übung 1.1.26 (Nullte Homologie). Man zeige, daß gegeben ein Simplicialkomplex \mathcal{K} das Bild der offensichtlichen Abbildung $\mathcal{K}_0 \rightarrow H_0 \mathcal{K}$ eine \mathbb{Z} -Basis ist und daß zwei Ecken aus \mathcal{K}_0 dasselbe Basiselement liefern genau dann, wenn sie durch einen „Kantenweg“ verbunden werden können.

Übung 1.1.27. Man fügt bei einem Simplicialkomplex eine Kante zwischen zwei bereits existierenden Ecken hinzu. Wie können sich die Homologiegruppen unseres Simplicialkomplexes dabei ändern?

Übung 1.1.28. Man rechne nach, daß die zweite simpliciale Homologie eines „hohlen Tetraeders“ isomorph ist zu \mathbb{Z} . Ich stelle mir hier vor, dass man den Kern der Matrix des Randoperators ∂_2 mithilfe der Methoden aus dem Elementarteilersatz bestimmt, wie er in der Algebra oder linearen Algebra [LA2] 4.4.13 vorgekommen sein sollte.

1.2 Definition der singulären Homologie

1.2.1. Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, daß die simplicialen Homologiegruppen eines Simplicialkomplexes \mathcal{K} bis auf Isomorphismus nur vom topologischen Raum $\Delta(\mathcal{K})$ abhängen und nicht von der gewählten Triangulierung. Dazu erklären

wir ganz allgemein für einen beliebigen topologischen Raum seine „singulären Homologiegruppen“ und konstruieren ganz am Schluß dieses Abschnitts in 3.1.7 Isomorphismen zwischen den simplizialen Homologiegruppen eines Simplizialkomplexes und den singulären Homologiegruppen seiner Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$.

Definition 1.2.2. Sei $q \geq 0$. Der topologische Raum

$$\Delta_q := \left\{ (x_0, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum x_i = 1 \right\}$$

heißt der q -te **Standardsimplex**. Es ist also Δ_0 ein Punkt, Δ_1 ein Geradensegment, Δ_2 eine Dreiecksfläche, Δ_3 ein massiver Tetraeder und so weiter.

Definition 1.2.3. Eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ des q -ten Standardsimplex Δ_q in einen topologischen Raum X heißt ein **singulärer q -Simplex von X** .

1.2.4 (**Diskussion der Terminologie**). Das Adjektiv singulär ist hier in dem Sinne zu verstehen, daß wir außer der Stetigkeit keine Forderungen an σ stellen. Wir erlauben also auch nicht-injektive, ja sogar konstante Abbildungen σ als singuläre Simplizes, so daß das Adjektiv singulär zumindest einen Teil unserer singulären Simplizes recht gut beschreibt. Der Buchstabe S bei $S_q X$ steht jedoch für „Simplex“, nicht etwa für „singulär“.

Definition 1.2.5. Wir bezeichnen mit

$$S_q X := \mathbb{Z} \text{Top}(\Delta_q, X) = \text{Ab}^\wedge \text{Top}(\Delta_q, X)$$

die freie abelsche Gruppe über der Menge aller singulären q -Simplizes von X und nennen ihre Elemente **singuläre q -Ketten**. Um mit Beschränkungen der Indizes keinen Ärger zu kriegen, vereinbaren wir zusätzlich $S_q X = 0$ für $q < 0$.

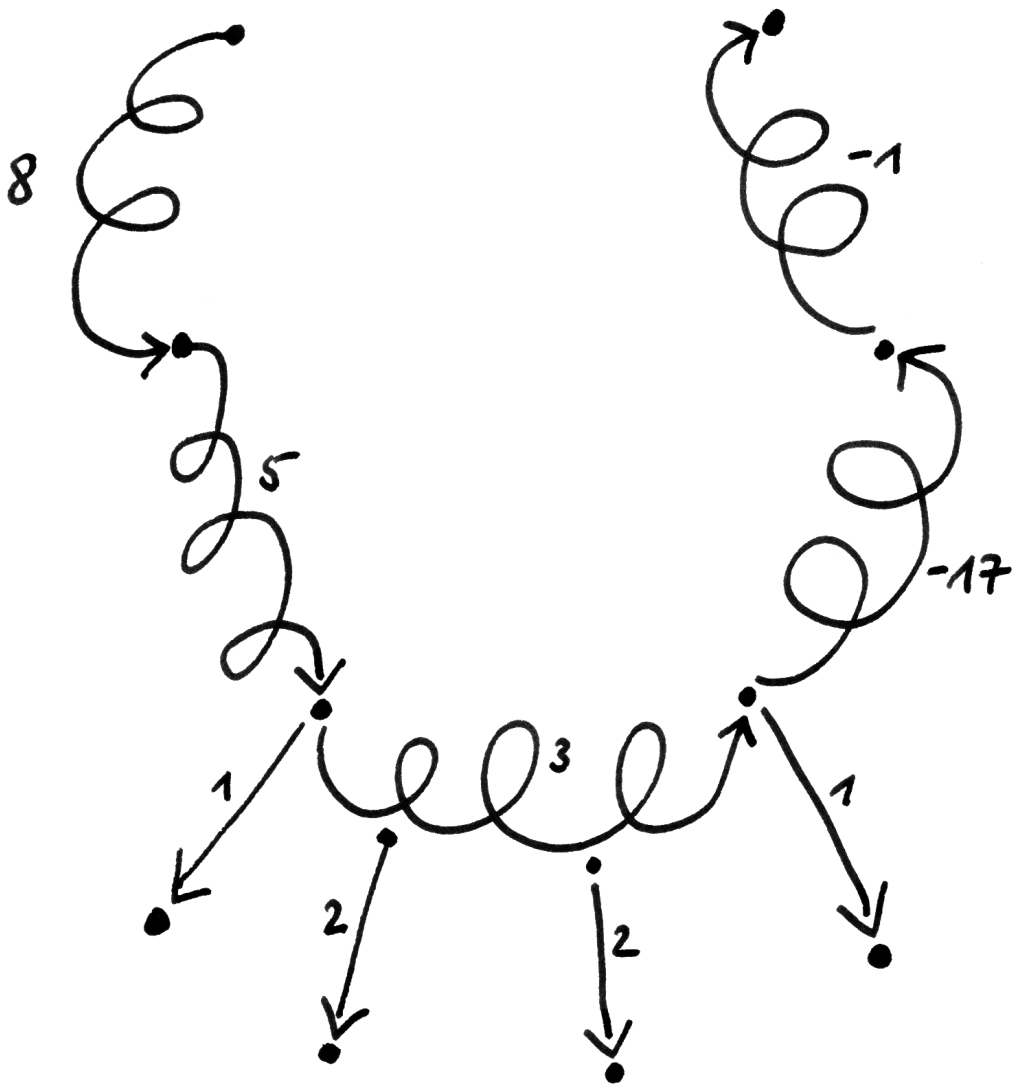
1.2.6. Die Gruppen der singulären Ketten sind im allgemeinen riesig. Zum Beispiel liefert die offensichtliche Bijektion $\text{Top}(\Delta_0, X) \xrightarrow{\sim} X$ Gruppenisomorphismen $S_0 X \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}X$.

Definition 1.2.7. Für $q \geq 1$ und $0 \leq i \leq q$ erklären wir die i -te **Kantenabbildung**

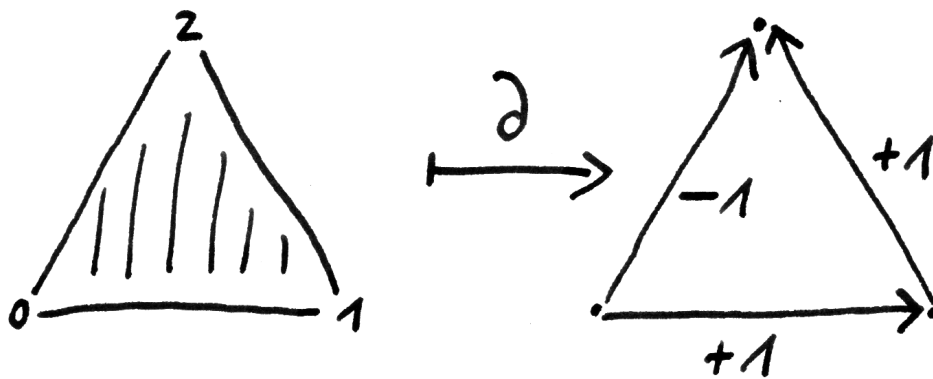
$$k_i = k_i^q : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$$

dadurch, daß sie nach der i -ten Stelle die Koordinate Null einfügen soll. Dann erklären wir für alle q einen Gruppenhomomorphismus $\partial = \partial_q : S_q X \rightarrow S_{q-1} X$, den sogenannten **Randoperator**: Für $q \leq 0$ setzen wir schlicht $\partial_q = 0$ und für $q \geq 1$ erklären wir ∂_q durch die Vorschrift, daß für jeden singulären q -Simplex σ gelten soll

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ k_i$$



Eine singuläre 1-Kette in der Papierebene. Das Bild von $(0, 1) \in \Delta_1$ ist jeweils durch eine Pfeilspitze kenntlich gemacht. Die Parametrisierung dieser ganzen Würmer kann ich nicht darstellen. Es werden im allgemeinen auch welche darunter sein, deren Bild beliebige Kompakta der Papierebene sind, vergleiche ???. Der Rand ist die formale Summe „Endpunkte minus Anfangspunkte“.



Versuch der Darstellung eines singulären 2-Simplex mit seinem Rand. Die Zahlen an den Ecken der Dreiecksfläche links zeigen, wohin die Vektoren der Standardbasis e_0, e_1, e_2 des \mathbb{R}^3 , deren konvexe Hülle ja der Standardsimplex Δ_2 ist, abgebildet werden. Es ist in diesem Zusammenhang bequem und üblich, die Nummerierung der Standardbasis um Eins zu verschieben und den ersten Vektor der Standardbasis als e_0 zu bezeichnen.

Natürlich sind die Elemente von $S_q X$ eigentlich formale \mathbb{Z} -Linearkombinationen von q -Simplizes und gemeint ist die lineare Fortsetzung des durch diese Formel auf den Simplizes erklärten Randoperators.

Lemma 1.2.8. *Es gilt $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.*

Beweis. Wir müssen nur für jeden q -Simplex σ mit $q \geq 2$ prüfen, daß gilt $\partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) = 0$. Nun prüft man sofort, daß gilt $k_i^q \circ k_j^{q-1} = k_j^q \circ k_{i-1}^{q-1}$ falls $i > j$. Es folgt

$$\begin{aligned} \partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) &= \partial_{q-1} \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ k_i \\ &= \sum_{0 \leq i \leq q, 0 \leq j \leq q-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ k_i \circ k_j \end{aligned}$$

und wir sehen, daß sich in dieser Doppelsumme die Terme mit $i > j$ und die Terme mit $i \leq j$ gegenseitig aufheben. \square

Definition 1.2.9. Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren:

$Z_q X := \ker(\partial_q : S_q X \rightarrow S_{q-1} X)$, die Gruppe der **singulären q -Zykel**;

$B_q X := \text{im } \partial_{q+1}$ die Gruppe der **singulären q -Ränder** (englisch boundaries);

$H_q X := Z_q X / B_q X$ die **q -te singuläre Homologiegruppe** von X .

Die Nebenklasse in $H_q X$ eines Zyklus $c \in Z_q X$ heißt seine **Homologieklass**e und wird mit $[c] \in H_q X$ bezeichnet.

1.2.10. Die Zykel und Ränder sind natürlich Untergruppen in der Gruppe aller Ketten, nach 1.2.8 gilt genauer $B_q X \subset Z_q X \subset S_q X$. Deshalb ist es auch überhaupt nur möglich, die Quotientengruppe $H_q X = Z_q X / B_q X$ zu bilden.

1.2.11. Später werden wir noch andere Homologietheorien kennenlernen. Die hier vorgestellte Theorie heißt genauer die **singuläre Homologie mit ganzzahligen Koeffizienten**. Wollen wir besonders betonen, daß wir die singuläre Homologie eines topologischen Raums meinen, schreiben wir statt $H_q X$ genauer $H_q^{\text{sing}} X$. Statt Koeffizienten in \mathbb{Z} können wir als Koeffizienten in unseren formalen Linearkombinationen von Simplizes auch Elemente einer beliebigen abelschen Gruppe G zulassen und erhalten dann auf dieselbe Weise weitere abelsche Gruppen, die die **singulären Homologiegruppen von X mit Koeffizienten in G** heißen und $H_q(X; G)$ notiert werden. So erhalten wir sogar in offensichtlicher Weise Funktoren $\text{Top} \times \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ und insbesondere wird für jeden k -Vektorraum G auch $H_q(X; G)$ ein k -Vektorraum in natürlicher Weise.

1.2.12. Auf den ersten Blick sehen unsere Homologiegruppen recht unhandlich aus: Es sind Quotienten einer riesigen abelschen Gruppe durch eine fast ebenso riesige Untergruppe. Wir werden aber sehen, daß unsere H_q so schöne Eigenschaften haben, daß man sie dennoch für viele interessante Räume sehr explizit berechnen und verstehen kann.

Beispiel 1.2.13 (Homologie eines Punktes). Für den einpunktigen Raum $X = \text{top}$ gilt $H_q(\text{top}) = 0$ für $q \neq 0$. Des weiteren ist der einzige Nullsimplex $\sigma : \Delta_0 \rightarrow \text{top}$ ein Zykel und die Vorschrift $1 \mapsto [\sigma]$ liefert einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} H_0(\text{top})$$

In der Tat gibt es für jedes $q \geq 0$ genau einen q -Simplex in top , also gilt $S_q(\text{top}) \cong \mathbb{Z}$ für alle $q \geq 0$ und die Randabbildung ∂_q verschwindet für q ungerade und $q \leq 0$, ist aber ein Isomorphismus für $q \geq 2$ gerade. Wir bezeichnen die Homologieklassse des einzigen Nullsimplex mit $\delta := [\sigma] \in H_0(\text{top})$ und nennen sie den **kanonischen Erzeuger** der nullten Homologie des einpunktigen Raums.

Beispiel 1.2.14 (Homologie und Wegzusammenhangskomponenten). Ist $X = \bigsqcup X_w$ die Zerlegung eines topologischen Raums X in seine Wegzusammenhangskomponenten, so sind die hoffentlich offensichtlichen Isomorphismen $\bigoplus S_q X_w \xrightarrow{\sim} S_q X$ verträglich mit den Randoperatoren und induzieren folglich Isomorphismen

$$\bigoplus H_q X_w \xrightarrow{\sim} H_q X$$

Lemma 1.2.15 (Nullte Homologie). Für jeden topologischen Raum X faktorisiert die Abbildung $X \rightarrow H_0 X$, die jedem Punkt $x \in X$ die Homologieklassse δ_x des konstanten Nullsimplex σ_x mit besagtem Punkt als Wert zuordnet, über die Menge $\pi_0(X)$ der Wegzusammenhangskomponenten von X und induziert einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} H_0 X$$

zwischen der freien abelschen Gruppe über der Menge $\pi_0(X)$ der Wegzusammenhangskomponenten von X und der nullten Homologie von X .

1.2.16. Für eine Wegzusammenhangskomponente w von X bezeichne $\delta_w \in H_0 X$ die Klasse eines und jedes Nullsimplex aus unserer Komponente. Die δ_w bilden dann also eine Basis von $H_0 X$.

Beweis. In der Tat reicht es nach dem vorhergehenden Beispiel 1.2.14, das für X wegzusammenhängend zu prüfen. Wir haben jedoch eine natürliche Abbildung, die sogenannte **Augmentation**

$$\begin{aligned} \varepsilon : S_0 X &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum a_x x &\mapsto \sum a_x \end{aligned}$$

Es reicht sicher, für wegzusammenhängendes X die Formel $\ker \varepsilon = \text{im } \partial_1$ zu zeigen. Nun wird aber $\text{im } \partial_1$ erzeugt von allen formalen Summen $x - y$ mit $x, y \in X$, denn je zwei Punkte lassen sich durch einen Weg verbinden. Daraus folgt dann sofort $\ker \varepsilon = \text{im } \partial_1$. \square

Lemma 1.2.17 (Homologie konvexer Mengen). Gegeben $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge gilt $H_q K = 0$ für $q > 0$.

Beweis. Ist K leer, so ist eh nichts zu zeigen. Sonst zeichnen wir einen beliebigen Punkt $s \in K$ aus und definieren für $q \geq 0$ den **Prismen-Operator**

$$P = P^s = P_q^s : S_q K \rightarrow S_{q+1} K$$

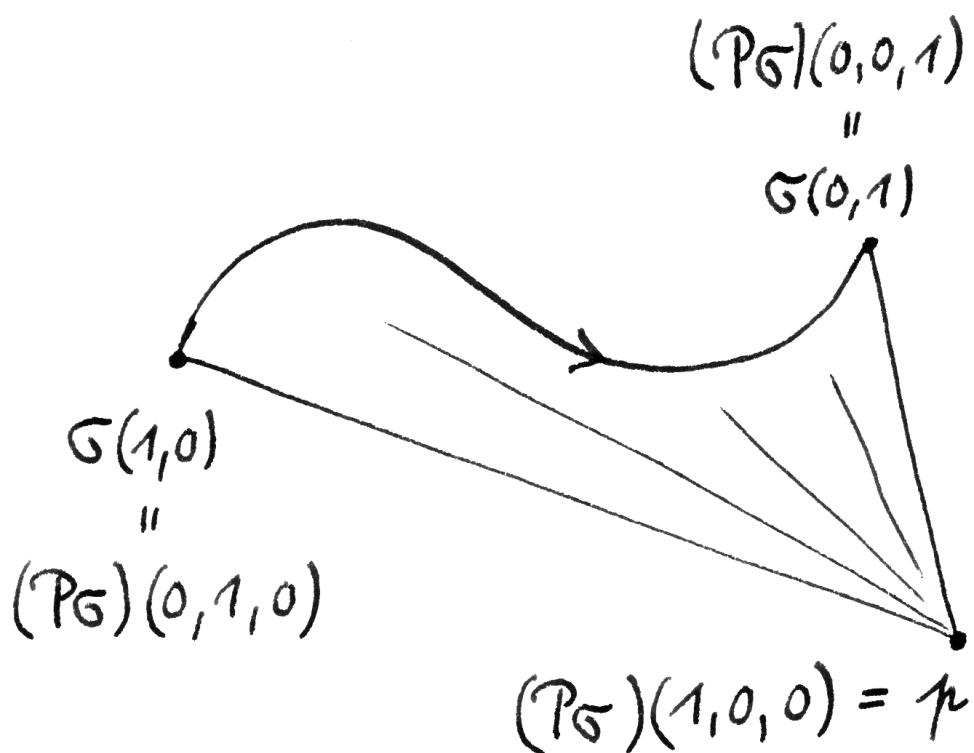
der „jeden q -Simplex durch Verbinden mit dem ausgezeichneten Punkt s zu einem $(q+1)$ -Simplex erweitert“, ganz ähnlich wie beim Beweis von 1.1.15. Formal definieren wir P auf Simplizes $\sigma : \Delta_q \rightarrow K$ dadurch, daß $P\sigma$ der Simplex $P\sigma : \Delta_{q+1} \rightarrow K$ sein soll mit $(P\sigma)(1 - \tau, \tau x_0, \dots, \tau x_q) = (1 - \tau)s + \tau\sigma(x_0, \dots, x_q)$ für alle $\tau \in [0, 1]$. Hier ist $P\sigma$ stetig, da $[0, 1] \times \Delta_q \rightarrow \Delta_{q+1}$, $(\tau, x_0, \dots, x_q) \mapsto (1 - \tau, \tau x_0, \dots, \tau x_q)$ als stetige Surjektion eines Kompaktums auf einen Hausdorffraum nach [TM] 1.7.17 final ist. Nun setzen wir P linear auf Ketten fort und prüfen die Relation $\partial P + P\partial = \text{id} : S_q K \rightarrow S_q K$ für $q > 0$. In der Tat gilt ja

$$\begin{aligned} \partial(P\sigma) &= \sum_{0 \leq j \leq q+1} (-1)^j (P\sigma) \circ k_j^{q+1} \\ P(\partial\sigma) &= \sum_{0 \leq j \leq q} (-1)^j P(\sigma \circ k_j^q) \end{aligned}$$

und prüft leicht die Formeln $(P\sigma) \circ k_0^{q+1} = \sigma$ sowie $(P\sigma) \circ k_j^{q+1} = P(\sigma \circ k_{j-1}^q)$ für $1 \leq j \leq q+1$. Also haben wir in der Tat $\partial P + P\partial = \text{id}$ auf q -Ketten mit $q > 0$, damit gilt im Fall $q > 0$ für jeden Zykel $z \in Z_q K$ schon $\partial Pz = z$ und z ist ein Rand. \square

Ergänzung 1.2.18 (Glatte Variante des Prismenoperators). Wir können auch allgemeiner für eine beliebige stetige Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ die Variante $P^{s,f}$ des Prismenoperators betrachten, die durch die Vorschrift $(P^{s,f}\sigma)((1 - \tau), \tau x_0, \dots, \tau x_q) = (1 - f(\tau))s + f(\tau)\sigma(x_0, \dots, x_q)$ für alle $\tau \in [0, 1]$ gegeben wird. Nehmen wir für f insbesondere eine glatte Abbildung, die in einer Umgebung von $\tau = 1$ konstant den Wert Eins annimmt, so macht diese Variante des Prismenoperators glatte Simplizes zu glatten Simplizes. Das wird uns insbesondere im Zusammenhang mit dem Beweis des Satzes von de Rham in [TG] 5.5 helfen.

Ergänzung 1.2.19 (Wegintegrale über Homologieklassen). Diese Ergänzung ist für Leser gedacht, die bereits mit den Grundlagen der Funktionentheorie vertraut



Ein 1-Simplex σ und der daraus durch Anwenden des Prismenoperators zu einem Punkt p entstehende 2-Simplex $P\sigma$.

sind. Gegeben $U \subseteq \mathbb{C}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\sigma : \Delta_1 \rightarrow U$ ein 1-Simplex erklären wir das Integral $\int_{\sigma} f(z) dz$, indem wir σ mittels der Projektion auf die zweite Koordinate gegebenen Homöomorphismus $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$ als Weg auffassen und darüber integrieren im Sinne von [FT1] 3.3.8. Lineare Fortsetzung liefert unmittelbar ein Integralbegriff für holomorphe Funktionen über 1-Ketten. Aus der Homotopie-Invarianz des Wegintegrals [FT1] 3.3.9 folgt dann, daß die Integrale über 1-Ränder verschwinden. Wir erhalten auf diese Weise eine wohlbestimmte \mathbb{Z} -bilineare Paarung

$$\begin{aligned} (S_1(U)/B_1(U)) \times \mathcal{O}^{\text{an}}(U) &\rightarrow \mathbb{C} \\ ([\alpha], f) &\mapsto \int_{\alpha} f(z) dz \end{aligned}$$

und insbesondere eine wohlbestimmte \mathbb{Z} -bilineare Paarung zwischen der ersten Homologiegruppe $H_1(U)$ und der additiven Gruppe $\mathcal{O}^{\text{an}}(U)$ der holomorphen Funktionen auf U . Diese Paarungen schreiben wir für jede Klasse b in der Form $(b, f) \mapsto \int_b f(z) dz$.

1.3 Funktorialität der Homologie

1.3.1. In diesem Abschnitt erklären wir für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ Gruppenhomomorphismen $H_q(f) = f_* : H_q X \rightarrow H_q Y$ derart, daß unsere Homologiegruppen Funktoren $H_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen werden.

Definition 1.3.2. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ erklären wir Gruppenhomomorphismen $S_q f : S_q X \rightarrow S_q Y$, indem wir jedem Simplex $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ den Simplex $f \circ \sigma : \Delta_q \rightarrow Y$ zuordnen und diese Abbildung linear auf $S_q X$ fortsetzen.

Lemma 1.3.3. Gegeben $f : X \rightarrow Y$ stetig gilt $\partial_q \circ S_q f = S_{q-1} f \circ \partial_q$, als da heißt, es kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_q X & \xrightarrow{S_q f} & S_q Y \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ S_{q-1} X & \xrightarrow{S_{q-1} f} & S_{q-1} Y \end{array}$$

Beweis. Wir müssen das nur auf jedem q -Simplex $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ prüfen. Es gilt aber in der Tat

$$\begin{aligned} (\partial_q \circ S_q f)(\sigma) &= \partial_q(f \circ \sigma) \\ &= \sum (-1)^i f \circ \sigma \circ k_i^q \\ &= (S_{q-1} f \circ \partial_q)(\sigma) \end{aligned} \quad \square$$

1.3.4. Das Lemma zeigt, daß $S_q f$ Zykel auf Zykel und Ränder auf Ränder abbildet. Für einen q -Zykel z in X hängt also die Homologiekategorie seines Bildes $(S_q f)(z)$ in Y nur von der Homologiekategorie von z ab. Wir erhalten somit einen Gruppenhomomorphismus, das **Vorschieben**

$$\begin{aligned} H_q f : H_q X &\rightarrow H_q Y \\ [z] &\mapsto [(S_q f)(z)] \end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß gilt $H_q(f \circ g) = H_q(f) \circ H_q(g)$ und $H_q(\text{id}) = \text{id}$, also erhalten wir für alle $q \in \mathbb{Z}$ einen Funktor $H_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$. Oft verwenden wir auch die Abkürzung $H_q(f) = f_*$.

1.3.5. Für jeden topologischen Raum X bezeichne X^w die disjunkte Vereinigung seiner Wegzusammenhangskomponenten mit der kofinalen Topologie. Die Identität ist dann eine stetige Abbildung $X^w \rightarrow X$ und der zugehörige Vorschub induziert auf der Homologie offensichtlich einen Isomorphismus

$$HX^w \xrightarrow{\sim} HX$$

Ergänzung 1.3.6 (Funktorialität unter simplizialstetigen Abbildungen). Wir nennen eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von topologischen Räumen **simplizialstetig**, wenn für jedes q und jede stetige Abbildung $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ auch $f \circ \sigma : \Delta_q \rightarrow Y$ stetig ist. Offensichtlich ist jede stetige Abbildung auch simplizialstetig. Unsere singulären Ketten ebenso wie die singuläre Homologie sind sogar Funktoren $H_q : \text{Top}^\Delta \rightarrow \text{Ab}$ auf der Kategorie Top^Δ der topologischen Räume mit simplizialstetigen Abbildungen als Morphismen, und unsere Abbildung aus 1.3.5 ist ein Isomorphismus $X^w \xrightarrow{\sim} X$ in Top^Δ . Von dieser Kategorie erhält man hinwiederum unschwer einen volltreuen Funktor in die Kategorie der sogenannten „simplizialen Mengen“, der als Definitionsbereich für die simpliziale Homologie besonders natürlich wäre, aber ich möchte Sie nicht zu Beginn durch allzugroße Abstraktion allzusehr verwirren.

1.3.7 (**Verträglichkeit der Homologie mit Koprodukten**). Ist $X = \bigsqcup X_w$ eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte Teilmengen, die nicht durch Wege verbunden werden können, und bezeichnet $i_w : X_w \hookrightarrow X$ die jeweilige Einbettung, so liefern die $S i_w : S X_w \rightarrow S X$ einen Isomorphismus $\bigoplus S X_w \xrightarrow{\sim} S X$ und damit liefern auch die $H_q(i_w) : H_q(X_w) \rightarrow H_q(X)$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus H_q(X_w) \xrightarrow{\sim} H_q(X)$$

Wir hatten fast dasselbe bereits in 1.2.14 in etwas weniger präziser Sprache bemerkt. In der in [LA2] 7.7.20 eingeführten Terminologie sind insbesondere die Funktoren $H_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ verträglich mit beliebigen Koprodukten.

1.3.8. Wir wiederholen die vorhergehenden Argumente noch einmal in einer ausgefeilten Sprache und führen dazu die Kategorie der „Kettenkomplexe“ ein.

Definition 1.3.9. Ein **Kettenkomplex** oder **Komplex von abelschen Gruppen** ist ein Paar $C = (C, \partial)$ bestehend aus einer Familie $C = (C_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ abelscher Gruppen und einer Familie von Gruppenhomomorphismen $\partial_q = \partial_q^C : C_q \rightarrow C_{q-1}$ für $q \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0 \quad \text{für alle } q.$$

Ein Morphismus $s : C \rightarrow D$ von Kettenkomplexen, auch **Kettenabbildung** genannt, ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen $s_q : C_q \rightarrow D_q$ derart, daß gilt $\partial_q^D \circ s_q = s_{q-1} \circ \partial_q^C$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ oder, etwas salopp geschrieben, $\partial \circ s = s \circ \partial$. Wir erhalten so die **Kategorie** $\text{Ket} = \text{Ket}(\text{Ab})$ **aller Komplexe von abelschen Gruppen**. Darin gibt es ein finales und kofinales Objekt, den **Nullkomplex**, bei dem eben alle Gruppen und Differentiale Null sind. Analog erklärt man für einen beliebigen Ring R die Kategorie $\text{Ket}(R\text{-Mod})$ aller Komplexe von R -Moduln.

1.3.10. Für diese Struktur ist auch noch eine andere Terminologie üblich. Ganz allgemein nennt man eine abelsche Gruppe C mit einer Zerlegung $C = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C_q$ als interne direkte Summe in eine Familie von mit $q \in \mathbb{Z}$ indizierten Untergruppen eine **graduierete** oder genauer **\mathbb{Z} -graduierete abelsche Gruppe**. Ist zusätzlich ein Gruppenhomomorphismus $\partial : C \rightarrow C$ gegeben mit $\partial(C_q) \subset C_{q-1}$ und $\partial^2 = 0$, so nennt man das Paar (C, ∂) eine **differentielle graduierete abelsche Gruppe** oder kurz eine **dg-Gruppe** mit **Differential** ∂ . Analog definieren wir die Kategorie der differentiellen graduiereten Moduln über einem Ring R und notieren sie dgMod_R , so daß also gilt $\text{Ket}(R\text{-Mod}) = \text{dgMod}_R$. Manchmal arbeitet man auch allgemeiner mit dem Begriff einer **differentiellen abelschen Gruppe**, womit schlicht ein Paar (A, ∂) gemeint ist bestehend aus einer abelschen Gruppe A und einem Gruppenhomomorphismus $\partial : A \rightarrow A$ mit der Eigenschaft $\partial^2 = 0$. Natürlich könnte man auch differentielle graduierete abelsche Gruppen betrachten, bei denen das Differential einen anderen „Grad“ hätte als in unserer Definition, aber die kommen seltener vor und wir blenden sie deshalb vorerst einmal aus.

Beispiel 1.3.11. Für jeden topologischen Raum X ist der Komplex der singulären Ketten (SX, ∂) mit $(SX)_q := S_q X$ ein Kettenkomplex. Für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ bilden nach Lemma 1.2.8 die $S_q(f)$ eine Kettenabbildung $Sf : SX \rightarrow SY$. Da gilt $S(f \circ g) = S(f) \circ S(g)$ sowie $S(\text{id}) = \text{id}$, erhalten wir so einen Funktor

$$S : \text{Top} \rightarrow \text{Ket}$$

1.3.12. In ?? konstruieren wir für jeden topologischen Raum X die „simpliciale Menge“ SX . Was im Einzelfall mit dem Symbol SX gemeint ist, muß der Leser dann aus dem Kontext erschließen. Wenn wir besonders betonen wollen, daß

SX den Komplex und nicht die simpliziale Menge meint, verwenden wir die Notation S_*X .

Definition 1.3.13. Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ definieren wir einen Funktor, die q -te **Homologiegruppe eines Kettenkomplexes**

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_q : \text{Ket} &\rightarrow \text{Ab} \\ C &\mapsto \mathcal{H}_q(C) := \ker \partial_q / \text{im } \partial_{q+1} \end{aligned}$$

als den Quotienten vom Kern des Differentials nach seinem Bild. Auf den Objekten ist das schon mal in Ordnung und wir müssen nur noch erklären, wie ein Morphismus von Kettenkomplexen $s : C \rightarrow D$ Morphismen auf der Homologie $\mathcal{H}_q(s) : \mathcal{H}_q(C) \rightarrow \mathcal{H}_q(D)$ definiert. Aus $\partial^D \circ s = s \circ \partial^C$ folgt aber $s(\text{im } \partial^C) \subset \text{im } \partial^D$, $s(\ker \partial^C) \subset \ker \partial^D$ und damit induziert s Morphismen $\mathcal{H}_q(s) : \mathcal{H}_q(C) \rightarrow \mathcal{H}_q(D)$. Wieder sieht man leicht, daß gilt $\mathcal{H}_q(s \circ t) = \mathcal{H}_q(s) \circ \mathcal{H}_q(t)$ und $\mathcal{H}_q(\text{id}) = \text{id}$, unser \mathcal{H}_q ist also ein Funktor für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Ergänzung 1.3.14. Manchmal betrachten wir auch den Funktor

$$\mathcal{H} : \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$$

der einem Komplex die Gesamtheit seiner Homologiegruppen zuordnet, aufgefaßt als Komplex mit Differential Null. Gegeben eine differentielle abelsche Gruppe (A, ∂) erklärt man ihre **Homologie** als die abelsche Gruppe $\mathcal{H}A := \ker \partial / \text{im } \partial$, die in diesem Fall keine Graduierung trägt.

1.3.15. Wir erhalten mit diesen Begriffsbildungen und Notationen unsere Funktoren der singulären Homologiegruppen $H_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ als die Verknüpfungen $H_q = H_q^{\text{sing}} = \mathcal{H}_q \circ S$ von Funktoren

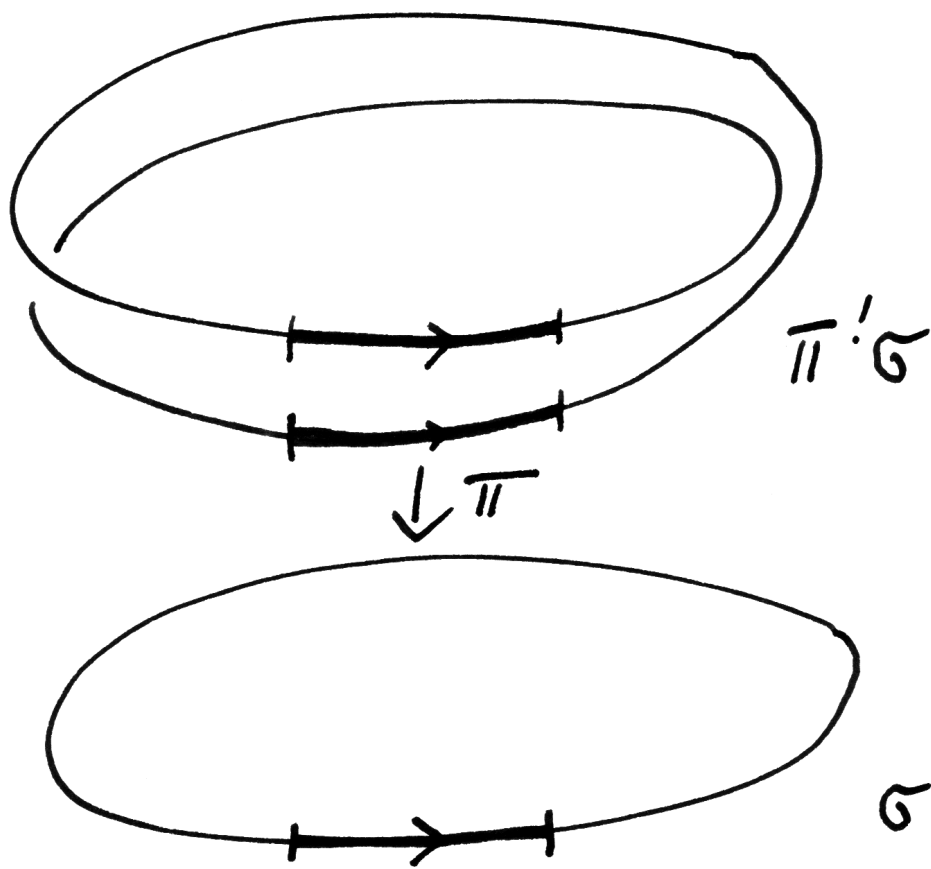
$$\text{Top} \xrightarrow{S} \text{Ket} \xrightarrow{\mathcal{H}_q} \text{Ab}$$

Wir übertragen die Begriffsbildungen **Zykel**, **Rand**, **Homologieklass**e auf beliebige Kettenkomplexe C und schreibt $\mathcal{Z}_q C := \ker \partial_q$ für die Zykeln, $\mathcal{B}_q C := \text{im } \partial_{q+1}$ für die Ränder und $[c] \in \mathcal{H}_q C$ für die Homologieklass eines Zyklus $c \in \mathcal{Z}_q C$.

Übungen

Übung 1.3.16. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung mit endlichen Fasern, so erhält man eine Kettenabbildung $f^* : SY \rightarrow SX$, indem man jedem singulären Simplex die Summe seiner Lifts zuordnet. Man zeige, daß für die auf der Homologie induzierten **Rückzüge**

$$f^* : H_q Y \rightarrow H_q X$$



Der Transfer eines singulären Eins-Simplex unter einer zweiblättrigen Überlagerung der Kreislinie.

im Fall einer n -blättrigen Überlagerung gilt $(H_q f) \circ f^* = n \cdot \text{id} : H_q Y \rightarrow H_q Y$. Ist unsere Überlagerung normal und ist G ihre Gruppe von Decktransformationen, so zeige man weiter $f^* \circ (H_q f) = \sum_{g \in G} H_q g : H_q X \rightarrow H_q X$.

Übung 1.3.17. Man erkläre, wie für einen festen topologischen Raum X die Homologiegruppen mit Koeffizienten aus 1.2.11 als Funktoren $\text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$, $A \mapsto H_q(X; A)$ aufgefaßt werden können, und wieso damit für jeden Ring R die Gruppen $H_q(X; R)$ in natürlicher Weise zu R -Moduln werden, was wir ja auch bereits in 1.2.11 bemerkt hatten.

Übung 1.3.18. Man zeige, daß unsere Isomorphismen $\mathbb{Z}\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} H_0 X$ in ihrer Gesamtheit eine Isotransformation $\mathbb{Z}\pi_0 \xrightarrow{\sim} H_0$ von Funktoren $\text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ bilden.

Ergänzende Übung 1.3.19. Gegeben eine Familie $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Kettenkomplexen derart, daß in jedem Grad nur endlich viele von ihnen nicht verschwinden, ist die offensichtliche Kettenabbildung ein Isomorphismus

$$\bigsqcup_{\alpha \in A} K_\alpha \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha \in A} K_\alpha$$

1.4 Homotopie-Invarianz

Satz 1.4.1 (Homotopie-Invarianz). *Homotope stetige Abbildungen induzieren dieselbe Abbildung auf der Homologie.*

1.4.2. Dieser Satz ist schon ein sehr starkes Hilfsmittel zur Berechnung der singulären Homologiegruppen. Er impliziert zum Beispiel, daß ein zusammenziehbarer Raum dieselbe Homologie hat wie ein Punkt. Wir geben zwei Beweise: Erst einen mehr rechnerischen Beweis, und dann einen mehr konzeptionellen Beweis, der jedoch im Gegensatz zu unserem rechnerischen Beweis auf der Kenntnis der Homologie konvexer Mengen 1.2.17 aufbaut.

Vorschau 1.4.3. Wir werden das im Folgenden durchgeführte konzeptionelle Beweisverfahren später formalisieren zum Satz über azyklische Modelle 5.6.23 und damit auch die sogenannte „Künneth-Formel“ über die Homologie von Produkten zeigen. Aus dieser Formel kann die Homotopie-Invarianz im übrigen leicht direkt hergeleitet werden. Das ist nur insofern nicht ganz fair, als unser Beweis der Künnethformel auf der Homotopieinvarianz aufbaut. Will man die Homotopieinvarianz direkt aus dem Satz über azyklische Modelle herleiten, mag man bemerken, daß bei den Funktoren $\text{Top} \rightarrow \text{Ket}$ gegeben durch $X \mapsto S(X)$ und $X \mapsto S(X \times [0, 1])$ jeweils alle homogenen Komponenten frei sind mit Modellen in unseren Simplizes, beim zweiten Funktor nach 5.6.21. Damit zeigt dieser Satz unmittelbar, daß jede Transformation, die auf der nullten Homologie eine Isotransformation induziert, bereits selbst eine Isotransformation zwischen den

entsprechenden Funktoren $\text{Top} \rightarrow \text{Hot}$ gewesen sein muß. Diese Erkenntnis gilt es dann nur noch anzuwenden auf die Transformation, die von den Projektionen $X \times [0, 1] \rightarrow X$ induziert wird.

Erster Beweis. Bezeichnet $f, g : X \rightarrow Y$ unsere homotopen stetigen Abbildungen, so behauptet der Satz für alle q die Gleichheit $H_q(f) = H_q(g)$ von Abbildungen $H_q X \rightarrow H_q Y$. Es gilt also zu zeigen, daß für jeden Zykel $z \in Z_q X$ die Differenz $(S_q f)(z) - (S_q g)(z)$ ein Rand in Y ist. Anschaulich ist das recht klar: Unsere Differenz ist eben „der Rand des Gebiets, das von besagtem Zykel während der Homotopie von f nach g überstrichen wird“. Etwas formaler sei $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g . Bezeichne $\omega_\nu : \Delta_{q+1} \rightarrow \Delta_q \times [0, 1]$ diejenige affine Abbildung, die die Ecken e_0, \dots, e_{q+1} unseres Standardsimplex der Reihe nach abbildet auf $(e_0, 0), \dots, (e_\nu, 0), (e_\nu, 1), \dots, (e_q, 1)$. Bezeichne $\delta_q : S_q X \rightarrow S_{q+1} Y$ die Abbildung, die auf Simplizes gegeben wird durch

$$\delta_q(\sigma) = \sum_{\nu=0}^q (-1)^\nu h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \omega_\nu$$

Nun prüfen wir für die so gegebenen Abbildungen δ_q die Identitäten $\partial\delta + \delta\partial = S_q g - S_q f$. Sobald das getan ist, sind wir fertig, denn dann gilt für jeden Zykel $z \in Z_q X$ die Formel $(S_q g)(z) - (S_q f)(z) = \partial\delta z$ und unsere Differenz ist in der Tat ein Rand. Für den Nachweis unserer Identitäten kürzen wir $(e_\nu, 0) = v_\nu$ und $(e_\nu, 1) = w_\nu$ ab und vereinbaren für $q+1$ Punkte a, b, \dots, c einer konvexen Teilmenge eines reellen Raums die Notationen $[a, b, \dots, c]$ für die Abbildung von Δ_q in unsere konvexe Teilmenge, die die Ecken der Reihe nach auf diese Punkte wirft. Dann haben wir also $\omega_\nu = [v_0, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, w_q]$ und

$$\begin{aligned} \partial\delta_q(\sigma) &= \sum_{\nu \geq \mu} (-1)^\nu (-1)^\mu h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, \hat{v}_\mu, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, w_q] \\ &\quad + \sum_{\nu < \mu} (-1)^\nu (-1)^{\mu+1} h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, \hat{w}_\mu, \dots, w_q] \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich $\partial(\sigma) = \sum_\mu (-1)^\mu \sigma[e_0, \dots, \hat{e}_\mu, \dots, e_q]$ und damit

$$\begin{aligned} \delta_{q-1}\partial(\sigma) &= \sum_{\nu > \mu} (-1)^\nu (-1)^{\mu+1} h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, \hat{v}_\mu, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, w_q] \\ &\quad + \sum_{\nu < \mu} (-1)^\nu (-1)^\mu h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, \hat{w}_\mu, \dots, w_q] \end{aligned}$$

Nach dem Aufaddieren bleiben nur noch die Terme mit $\nu = \mu$ des Ausdrucks für $\partial\delta_q(\sigma)$ übrig, und auch diese löschen sich paarweise aus bis auf den Summanden mit $\nu = \mu = 0$ vorne und den Summanden mit $\nu = \mu = q$ hinten. Da nun aber gilt $h(\sigma \times \text{id})[w_0, \dots, w_q] = g\sigma$ und $h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, v_q] = f\sigma$, folgt die Behauptung. \square

1.4.4. Es mag der Anschauung helfen, sich klarzumachen, daß die Bilder der ω_ν die vollen Simplizes maximaler Dimension einer Triangulierung von $\Delta_q \times [0, 1]$

sind. Für die formale Argumentation ist das jedoch belanglos. Unserem zweiten Beweis schicken wir eine Vorbemerkung voraus.

1.4.5 (Abstrakte Variante des Yoneda-Lemmas). Ist \mathcal{C} eine Kategorie und $\Delta \in \mathcal{C}$ ein Objekt, so können wir den Funktor $\mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, _): \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ betrachten, der jedem Objekt X die freie abelsche Gruppe über $\mathcal{C}(\Delta, X)$ zuordnet. Ist dann $G: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ ein weiterer Funktor, so liefert die Abbildungsvorschrift $\delta \mapsto \delta_\Delta(\text{id}_\Delta)$ eine Bijektion

$$\text{Ab}^{\mathcal{C}}(\mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, _), G) \xrightarrow{\sim} G(\Delta)$$

zwischen der Menge aller Transformationen $\mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, _) \Rightarrow G$ und der Menge $G(\Delta)$. Man erhält eine Umkehrabbildung, indem man einem $g \in G(\Delta)$ diejenige Familie von Gruppenhomomorphismen $\delta_X: \mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, X) \rightarrow G(X)$ zuordnet, bei der δ_X dadurch gegeben ist, daß es jedem Morphismus $\sigma: \Delta \rightarrow X$ das Element $(G\sigma)(g) \in G(X)$ zuordnet. Wir überlassen die Details des Beweises dem Leser zur Übung, man orientiere sich am Beweis des Yoneda-Lemmas [LA2] 7.10.2.

Beispiel 1.4.6 (Variante des Yoneda-Lemmas für Ketten). Für jeden Funktor $G: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ liefert das Auswerten auf dem tautologischen q -Simplex τ_q eine Bijektion zwischen der Menge der Transformationen von S_q nach G und der Menge $G(\Delta_q)$, in Formeln $\text{Ab}^{\text{Top}}(S_q, G) \xrightarrow{\sim} G(\Delta_q)$, $\delta \mapsto \delta_{\Delta_q}(\tau_q)$. Der Randoperator $\partial: S_q \rightarrow S_{q-1}$ entspricht unter dieser Bijektion etwa der Kette $\partial\tau_q \in S_{q-1}(\Delta_q)$.

Zweiter Beweis. Sei wieder $h: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g . Bezeichnen wir die Inklusionen $X \rightarrow X \times [0, 1]$, $x \mapsto (x, t)$ mit i_t , so gilt $f = h \circ i_0$ und $g = h \circ i_1$. Es reicht nun, $H_q(i_0) = H_q(i_1)$ zu zeigen, denn daraus folgt mit der Funktorialität der Homologie schon

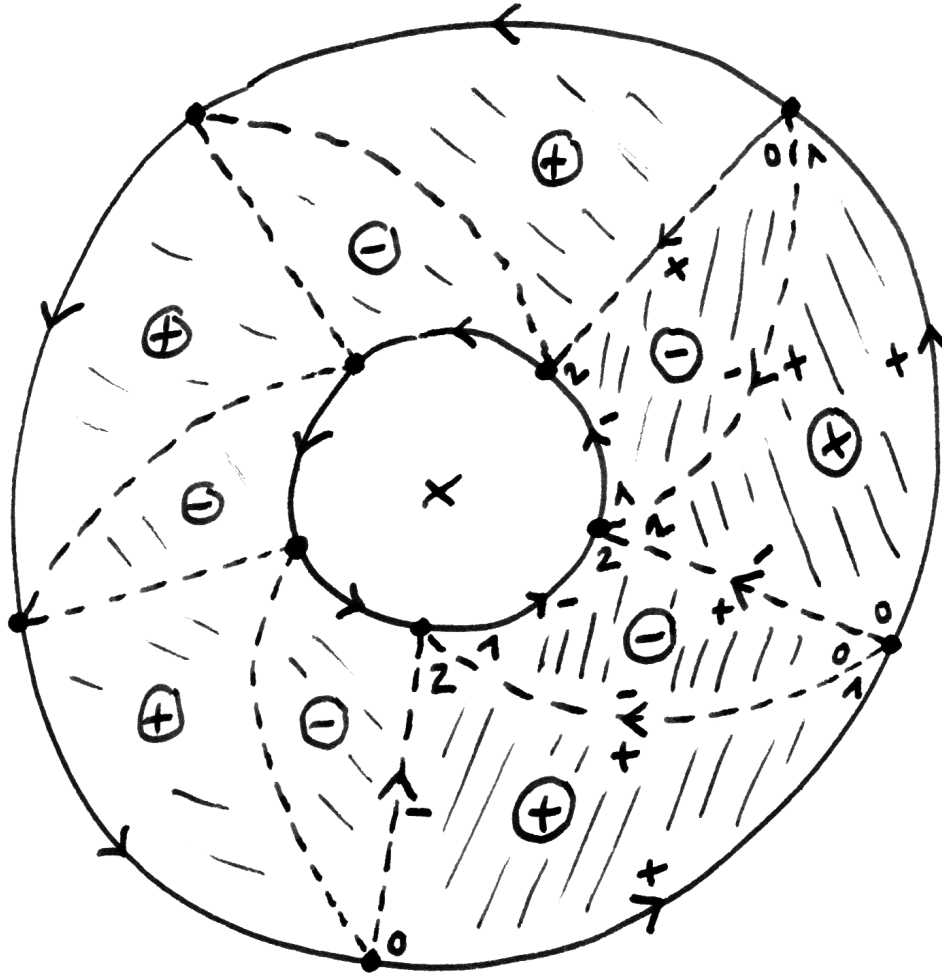
$$H_q(f) = H_q(h) \circ H_q(i_0) = H_q(h) \circ H_q(i_1) = H_q(g)$$

Die Formel $H_q(i_0) = H_q(i_1)$ bedeutet, daß für jeden Zykel $z \in Z_q X$ die Differenz seiner Bilder $(S_q i_0)(z) - (S_q i_1)(z)$ ein Rand ist. Um das nachzuweisen reicht es, eine Familie von Morphismen

$$\delta = \delta_q = \delta_q^X: S_q X \rightarrow S_{q+1}(X \times [0, 1])$$

für $q \in \mathbb{Z}$ zu konstruieren derart, daß gilt $\partial\delta + \delta\partial = S_q i_1 - S_q i_0$, denn dann ist $(S_q i_1)(z) - (S_q i_0)(z) = \partial\delta z$ ein Rand für jeden Zykel $z \in Z_q X$. Eine Möglichkeit, derartige Morphismen explizit anzugeben, liefert die explizite Formel

$$\delta_q \sigma = \sum_{\nu=0}^q (-1)^\nu (\sigma \times \text{id}) \omega_\nu$$



Dies Bild zeigt zwei homotope Abbildungen der Kreislinie in die punktierte Ebene und die Bilder desselben aus der formalen Summe von fünf singulären Eins-Simplizes bestehenden Eins-Zykel unter diesen beiden Abbildungen. Des weiteren ist in der Abbildung eine Zweikette in der punktierten Ebene angedeutet, gegeben durch die formale Summe von insgesamt zehn singulären Zwei-Simplizes, davon die Hälfte mit dem Koeffizienten (-1) , deren Rand gerade die Differenz unserer beiden Eins-Zykel ist. So erkennt man, daß unsere beiden Eins-Zykel dieselbe Homologiekategorie in der punktierten Ebene repräsentieren.

in den Notationen unseres ersten Beweises. Ich will jedoch auch noch einen mehr konzeptionellen Zugang erklären. Es ist bequem, solch eine Familie zu konstruieren als Transformation, wo wir beide Seiten auffassen als Funktoren in X von den topologischen Räumen in die abelschen Gruppen. Dann können wir uns nämlich auf die Variante des Yoneda-Lemmas für Ketten 1.4.6 stützen. Bezeichne dazu $\tau_q \in S_q(\Delta_q)$ den **tautologischen q -Simplex** $\text{id} : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$. Wir hatten gesehen, daß wir nur für alle topologischen Räume X und alle $q \in \mathbb{Z}$ Morphismen $\delta = \delta_q : S_q X \rightarrow S_{q+1}(X \times [0, 1])$ konstruieren müssen derart, daß gilt

$$\partial\delta_q + \delta_{q-1}\partial = S_q i_1 - S_q i_0 \quad (*)_q$$

Wir konstruieren die δ_q als Transformationen $\delta_q : S_q \Rightarrow F_{q+1}$ in den Funktor $F_{q+1} : X \mapsto S_{q+1}(X \times [0, 1])$ von oben. Sie werden dann nach unserer Yoneda-Variante 1.4.6 schon durch die Angabe jeweils eines Elements $\delta_q(\tau_q) = V_q \in S_{q+1}(\Delta_q \times [0, 1])$ eindeutig festgelegt und wir müssen nur unsere V_q so wählen, daß die obigen Gleichungen $(*)_q$ erfüllt sind. Da $(*)_q$ aber eine Gleichung von Transformationen $S_q \Rightarrow F_q$ ist, gilt sie wieder nach unserer Yoneda-Variante 1.4.6 immer, wenn sie nach Auswerten auf dem tautologischen Simplex $\tau_q \in S_q(\Delta_q)$ gilt, also genau dann, wenn gilt

$$(\partial\delta_q + \delta_{q-1}\partial)(\tau_q) = (S_q i_1 - S_q i_0)(\tau_q)$$

in $S_q(\Delta_q \times [0, 1])$. Für $V_q = \delta_q(\tau_q)$ bedeutet das genau

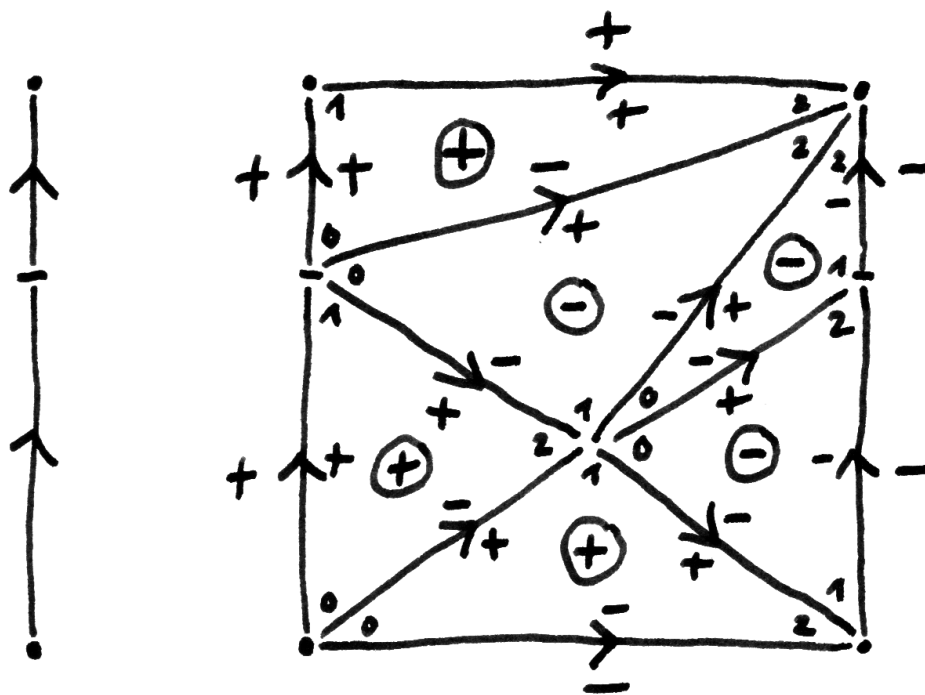
$$\partial V_q = (S_q i_1 - S_q i_0 - \delta_{q-1}\partial)(\tau_q)$$

Man beachte, daß hier die rechte Seite von δ_{q-1} , also von V_{q-1} abhängt. Wir wählen nun mögliche V_q induktiv und nehmen an, daß die V_π für $\pi \leq q-1$ schon konstruiert sind und die Gleichungen $(*)_\pi$ für $\pi \leq q-1$ gelten. Als Basis der Induktion dürfen wir $V_\pi = 0$ für $\pi < 0$ nehmen und als V_0 irgendeinen singulären Simplex $\Delta_1 \rightarrow \Delta_0 \times [0, 1]$, der die Endpunkte des Geradensegments Δ_1 „in der richtigen Reihenfolge“ auf die Endpunkte des Geradensegments $\Delta_0 \times [0, 1]$ abbildet. Da nun nach Lemma 1.2.17 über die Homologie konvexer Mengen für $q > 0$ gilt $H_q(\Delta_q \times [0, 1]) = 0$, können wir eine q -Kette in $\Delta_q \times [0, 1]$ für $q > 0$ als Rand schreiben genau dann, wenn sie ein Zykel ist. Wir finden für $q > 0$ also unser V_q wie gewünscht genau dann, wenn gilt

$$\partial(S_q i_1 - S_q i_0 - \delta_{q-1}\partial)(\tau_q) = 0$$

Das zeigen wir induktiv, indem wir unter Verwendung von $(*)_{q-1}$ rechnen

$$\begin{aligned} \partial(S_q i_1 - S_q i_0 - \delta_{q-1}\partial) &= (S_{q-1} i_1 - S_{q-1} i_0 - \partial\delta_{q-1})\partial \\ &= \delta_{q-2}\partial\partial \\ &= 0 \end{aligned} \quad \square$$



Eine mögliche Wahl von V_0 , die anders ist als im Beweis vorgeschlagen, und dazu eine mögliche Wahl von V_1

Definition 1.4.7. Zwei Kettenabbildungen $f, g : A \rightarrow B$ von Kettenkomplexen heißen **kettenhomotop** oder kurz **homotop**, wenn es eine Familie $\delta_q : A_q \rightarrow B_{q+1}$ von Gruppenhomomorphismen gibt mit $f_q - g_q = \partial_{q+1}\delta_q + \delta_{q-1}\partial_q$ für alle q . Wir schreiben dafür auch manchmal $\delta : f \sim g$.

1.4.8. Eine Kettenabbildung heißt **nullhomotop**, wenn sie homotop ist zur Nullabbildung. Per definitionem sind zwei Kettenabbildungen kettenhomotop, wenn ihre Differenz nullhomotop ist. Ist weiter $g \circ h$ eine Verknüpfung von Kettenabbildungen und ist eine der beiden nullhomotop, so auch die Verknüpfung, wie Sie in 1.4.11 selbst prüfen sollen. Wir können deshalb die **Homotopiekategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen** einführen, mit Kettenkomplexen von abelschen Gruppen als Objekten und Homotopieklassen von Kettenabbildungen als Morphismen. Wir notieren sie $\text{Hot}(\text{Ab})$ oder Hot_{Ab} oder auch einfach nur Hot . Morphismen von Komplexen in der Homotopiekategorie notieren wir manchmal $A \rightarrow_{\text{Hot}} B$. Analog erklärt man für einen beliebigen Ring R die Homotopiekategorie $\text{Hot}_R = \text{Hot}(R\text{-Mod})$ aller Komplexe von R -Moduln. Isomorphismen in einer Homotopiekategorie von Komplexen nennen wir auch **Homotopieäquivalenzen** und notieren sie $\xrightarrow{\sim}$ oder $\xrightarrow{\sim}_{\text{Hot}}$. Ein Komplex heißt **nullhomotop**, wenn er homotopieäquivalent ist zum Nullkomplex.

1.4.9. Unsere Argumente von eben zeigen, daß die Homologiegruppen ganz allgemein Funktoren $\mathcal{H}_q : \text{Hot}(\text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$ liefern. Weiter haben wir gezeigt, daß homotope Abbildungen f, g kettenhomotope Abbildungen Sf, Sg auf den singulären Ketten liefern. Genauer erhalten wir für jede Homotopie $h : f \sim g$ eine Kettenhomotopie $Sf \sim Sg$ als $Sh \circ \delta$ mit δ wie im Beweis von 1.4.1. Bezeichnen wir wie bisher mit Hot die Homotopiekategorie topologischer Räume, so erhalten wir mithin ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Top} & \xrightarrow{S} & \text{Ket}(\text{Ab}) & \xrightarrow{\mathcal{H}_q} & \text{Ab} & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\ \text{hTop} & \xrightarrow{S} & \text{Hot}(\text{Ab}) & \xrightarrow{\mathcal{H}_q} & \text{Ab} & & \end{array}$$

Insbesondere induziert eine Homotopieäquivalenz stets Isomorphismen auf der Homologie. Nun ist die konstante Abbildung von einem topologischen Raum auf einen Punkt eine Homotopieäquivalenz genau dann, wenn unser Raum zusammenziehbar ist. Da Funktoren Isomorphismen zu Isomorphismen machen, liefert also für jeden zusammenziehbaren Raum X die konstante Abbildung Isomorphismen von seiner Homologie mit der Homologie eines Punktes. Wir folgern für X zusammenziehbar $H_q X = \mathbb{Z}$ für $q = 0$ und Null sonst. Wenn wir den ersten Beweis für die Homotopieinvarianz nehmen, erhalten wir unser Lemma 1.2.17 über die Homologie konvexer Mengen als Korollar.

Übungen

Übung 1.4.10. Für den einpunktigen Raum $X = \text{top}$ und den konstanten Null-simplex $\sigma : \Delta_0 \rightarrow \text{top}$ liefert die Vorschrift $n \mapsto n\sigma$ eine Homotopieäquivalenz

$$\mathbb{Z}[0] \xrightarrow{\simeq} S(\text{top})$$

mit der Notation $\mathbb{Z}[0]$ für den Komplex, der \mathbb{Z} ist im Grad Null und Null sonst.

Übung 1.4.11. Man zeige, daß die Verknüpfung einer nullhomotopen Kettenabbildung mit einer beliebigen Kettenabbildung wieder nullhomotop ist, und zwar sowohl für das Davorschalten wie auch für das Dahinterschalten.

Übung 1.4.12 (Hom-Komplex). Sind (C, ∂^C) und (D, ∂^D) Kettenkomplexe, so erklären wir einen Kettenkomplex $(C \rightrightarrows D) = \text{Hom}(C, D)$ durch die Vorschrift

$$(C \rightrightarrows D)_i := \prod_q \text{Hom}(C_q, D_{q+i})$$

mit Differential $\partial(f) = \partial^D \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \partial^C$ und der Konvention $|f| = i$ für $f \in (C \rightrightarrows D)_i$. Man zeige, daß gilt $\partial(\partial(f)) = 0$, daß die Nullzykel des Hom-Komplexes gerade die Kettenabbildungen von C nach D sind, in Formeln $\mathcal{Z}_0(C \rightrightarrows D) = \text{Ket}(C, D)$, und daß diese Gleichheit eine Gleichheit $\mathcal{H}_0(C \rightrightarrows D) = \text{Hot}(C, D)$ zwischen der nullten Homologie und dem Raum der Morphismen von C nach D in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe induziert. In dieser Weise erhalten wir natürliche Abbildungen

$$\mathcal{H}(C \rightrightarrows D) \rightarrow (\mathcal{H}C \rightrightarrows \mathcal{H}D)$$

Vorschau 1.4.13 (Vorzeichen im Hom-Komplex). Die Wahl der Vorzeichen in unserem Hom-Komplex mag willkürlich wirken. Sie kann jedoch zurückgeführt werden auf unsere Vorzeichenwahl bei der Definition des Tensorkomplexes 5.3.1. Genauer bilden nach 5.3.18 die Isomorphismen

$$\alpha_{Y,Z} : \text{Ket}(Y \otimes X, Z) \xrightarrow{\simeq} \text{Ket}(Y, X \rightrightarrows Z)$$

gegeben durch $f \mapsto \bar{f}$ mit $\bar{f}(y) := (\bar{f}(y)_i)$ und $\bar{f}(y)_i : X_i \rightarrow Z_{i+|y|}$ gegeben durch $x \mapsto f_{|y|+|x|}(y \otimes x)$ für homogene y, x eine Adjunktion $(\otimes X, X \rightrightarrows)$ von Funktoren $\text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$ und das Paar $(\alpha, X \rightrightarrows)$ ist nach [TF] 4.8.3 durch $\otimes X$ eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Es gibt auch andere mögliche Paare, von denen das hier betrachtete nur dadurch ausgezeichnet ist, daß ich mir α gut merken kann. Nur in diesem schwachen und sehr menschlichen Sinne werden auch die Vorzeichen im Hom-Komplex durch die Vorzeichen bei der Wahl des Tensorkomplexes bestimmt. Bei der Wahl von α könnte man, wenn man den Teufel am Schwanz ziehen will, durchaus noch irgendwelche Vorzeichen einbauen und müßte dann die Definition von \rightrightarrows eben entsprechend anpassen.

Übung 1.4.14. Sei C ein Komplex von Moduln über einem Ring, dessen Homologiegruppen freie oder allgemeiner „projektive“ Moduln sind. Man zeige, daß es dann in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe genau einen Homomorphismus $\mathcal{H}C \rightarrow C$ gibt, der auf der Homologie die offensichtliche Identifikation $\mathcal{H}(\mathcal{H}C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}C$ induziert, und daß er im Fall von Vektorräumen sogar eine Homotopieäquivalenz ist. In 6.2.11 verallgemeinern wir die zweite Aussage auf gegen die Pfeile beschränkte Komplexe projektiver Moduln. Für Moduln über Hauptidealringen zeigen wir eine Variante in [TG] ??.

1.5 Erste Homologie und Fundamentalgruppe

1.5.1. Der Klarheit halber schreiben wir in diesem Abschnitt anders als sonst $[[\gamma]]$ für die Homotopieklasse mit festen Endpunkten eines Weges und wie üblich $[z]$ für die Homologieklasse eines Zyklus. Bezeichne $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$ die Restriktion der Projektion zur zweiten Koordinate auf den Standard-1-Simplex $\Delta_1 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y = 1\}$.

Satz 1.5.2. 1. Für jeden *bepunkteten Raum* (X, x) gibt es genau einen *Gruppenhomomorphismus* $\pi_1(X, x) \rightarrow H_1 X$ von seiner *Fundamentalgruppe* in seine *erste singuläre Homologiegruppe* mit $[[\gamma]] \mapsto [\gamma \circ c]$ für alle *geschlossenen Wege* $\gamma \in \Omega(X, x)$;

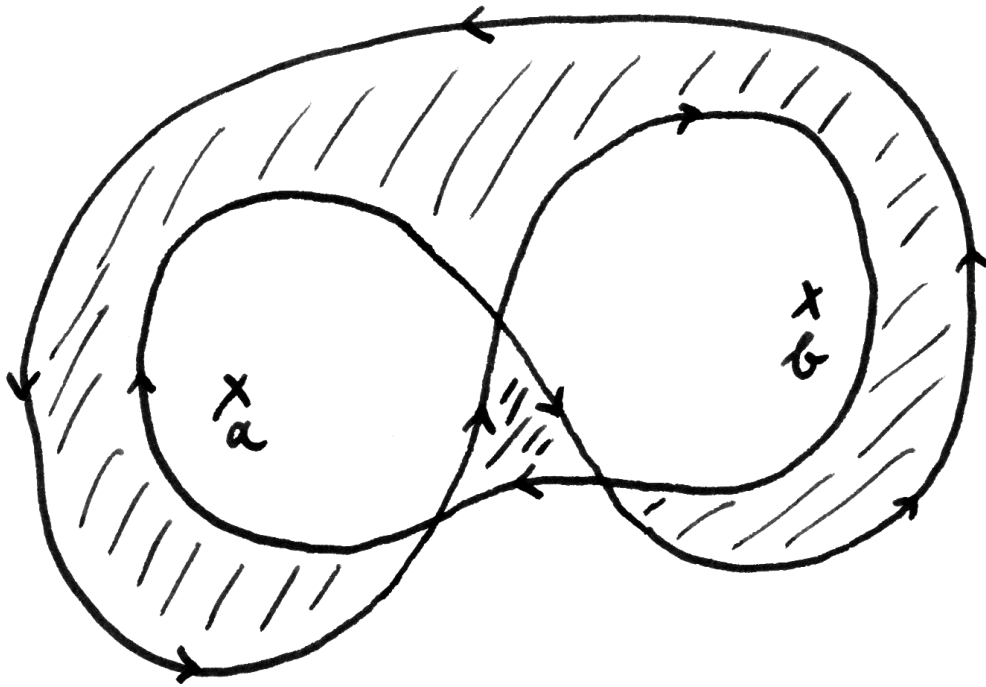
2. Für jeden *wegzusammenhängenden bepunkteten Raum* induziert der *Homomorphismus* aus dem ersten Teil einen *Isomorphismus* zwischen der *Abelisierung* [TF] 1.8.1 der *Fundamentalgruppe* und der *ersten singulären Homologiegruppe*, den sogenannten **Hurewicz-Isomorphismus**

$$\pi_1(X, x)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} H_1 X$$

1.5.3. Ein geschlossener Weg, der unter der im Satz beschriebenen Abbildung zum Nullelement der ersten Homologiegruppe wird, heißt **nullhomolog**.

Ergänzung 1.5.4. Der Hurewicz-Isomorphismus hängt von der a priori unkanonischen Wahl unserer Bijektion $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$ ab. Wählen wir hier statt der Projektion auf die zweite Koordinate die Projektion auf die erste Koordinate, so ändert er sein Vorzeichen.

Beweis. 1. Offensichtlich definiert die Vorschrift $\gamma \mapsto [\gamma \circ c]$ eine Abbildung $\text{hur} : \Omega(X, x) \rightarrow H_1 X$ vom Wegeraum in die erste Homologiegruppe. Um zu zeigen, daß sie auf Homotopieklassen von Wegen konstant ist, geben wir eine alternative Beschreibung. Bezeichne $\text{Exp} : [0, 1] \rightarrow S^1$ unsere übliche Abbildung



Ein geschlossener, nicht zusammenziehbarer, aber dennoch nullhomologer Weg im Komplement einer zweielementigen Teilmenge der komplexen Zahlenebene.

Denken wir uns das Mittelkreuz als Basispunkt und bezeichnet α beziehungsweise β in der Fundamentalgruppe das Umrunden gegen den Uhrzeigersinn von a beziehungsweise b , so ist unsere Fundamentalgruppe nach [TF] 2.5.10 frei erzeugt von α und β und unser Weg repräsentiert das Element $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ in der Fundamentalgruppe.

$t \mapsto \exp(2\pi i t)$. Da Exp nach [TM] 1.7.17 final ist, gibt es zu jedem geschlossenen Weg $\gamma \in \Omega(X, x)$ eine stetige Abbildung $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow X$ mit $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \text{Exp}$. Betrachten wir nun in der Kreislinie S^1 den 1-Zykel $z = \text{Exp} \circ c \in Z_1(S^1)$, so können wir unsere Abbildung von $\Omega(X, x)$ nach $H_1 X$ auch schreiben als

$$\gamma \mapsto [\gamma \circ c] = (H_1 \tilde{\gamma})[z]$$

Sind nun $\gamma, \beta \in \Omega(X, x)$ homotop mit festen Endpunkten, so sind $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\beta}$ homotope Abbildungen von S^1 nach X , da wieder nach [TM] 1.7.17 auch $\text{id} \times \text{Exp} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times S^1$ final ist. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket &\Rightarrow \tilde{\gamma} \simeq \tilde{\beta} \\ &\Rightarrow H_1 \tilde{\gamma} = H_1 \tilde{\beta} \text{ nach Homotopieinvarianz 1.4.1} \\ &\Rightarrow (H_1 \tilde{\gamma})[z] = (H_1 \tilde{\beta})[z] \\ &\Rightarrow [\gamma \circ c] = [\beta \circ c] \end{aligned}$$

Folglich definiert die Vorschrift $\llbracket \gamma \rrbracket \mapsto [\gamma \circ c]$ in der Tat eine wohlbestimmte Abbildung $\pi_1(X, x) \rightarrow H_1 X$. Wir müssen für den ersten Teil nur noch zeigen, daß sie ein Gruppenhomomorphismus ist. Dazu betrachten wir die affine Abbildung $p : \Delta_2 \rightarrow [0, 1]$ mit $(1, 0, 0) \mapsto 0$, $(0, 1, 0) \mapsto 1/2$ und $(0, 0, 1) \mapsto 1$. Offensichtlich gilt für beliebige $\gamma, \beta \in \Omega(X, x)$, ja sogar für zwei beliebige verknüpfbare nicht notwendig geschlossene Wege in $S_1 X$ die Identität

$$\partial((\beta * \gamma) \circ p) = \gamma \circ c - (\beta * \gamma) \circ c + \beta \circ c$$

als da heißt $(\beta * \gamma) \circ c$ ist homolog zu $\gamma \circ c + \beta \circ c$, und für $\gamma, \beta \in \Omega(X, x)$ folgt daraus in $H_1 X$ die Gleichung $\llbracket (\beta * \gamma) \rrbracket = \llbracket \gamma \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket$.

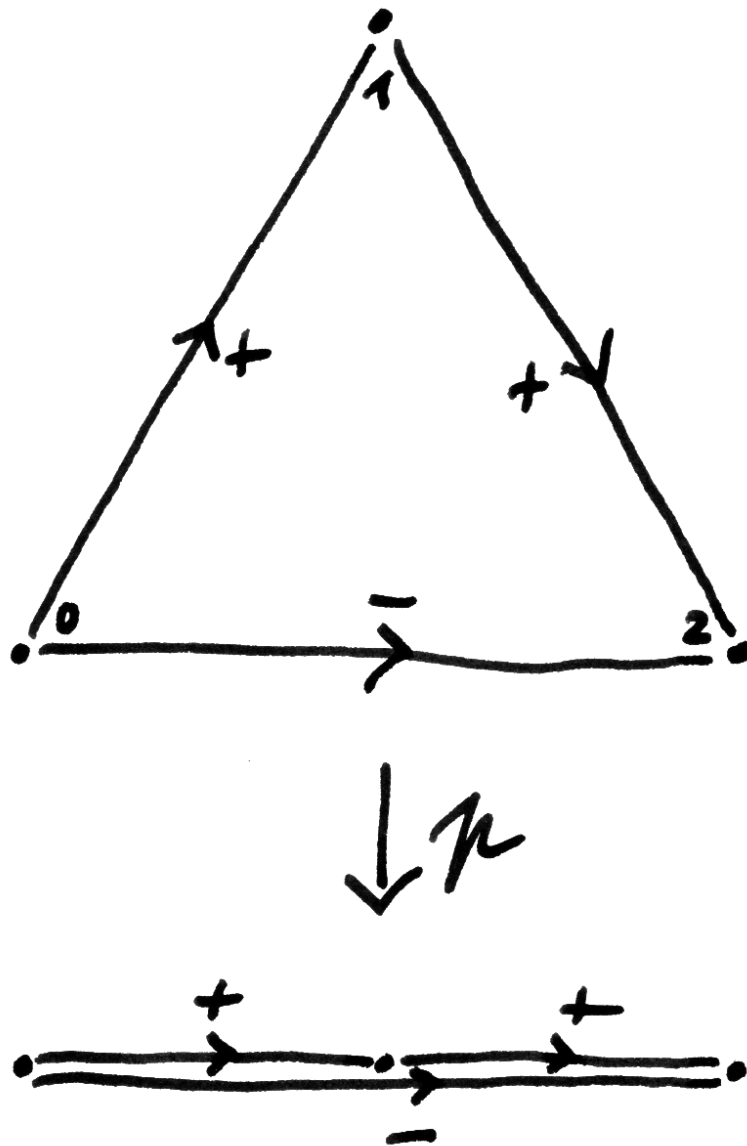
2. Da $H_1 X$ abelsch ist, definiert die Abbildung aus Teil 1 nach [TF] 1.8.3 einen Gruppenhomomorphismus

$$h_1 : \pi_1(X, x)^{\text{ab}} \rightarrow H_1 X$$

Wir nehmen nun X wegzusammenhängend an und wählen für jeden Punkt $y \in X$ einen Weg $\alpha_y \in \Omega(X, y, x)$ von x nach y . Dann definieren wir einen Gruppenhomomorphismus

$$w : S_1 X \rightarrow \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$$

durch die Vorschrift, daß er einen 1-Simplex $\sigma : \Delta_1 \rightarrow X$ abbilden möge auf die Klasse des geschlossenen Weges $w(\sigma) = \bar{\alpha}_z * (\sigma \circ c^{-1}) * \alpha_y$ für $z = \sigma(0, 1)$ und $y = \sigma(1, 0)$ die Enden unseres 1-Simplex. Wir zeigen nun, daß dieser Gruppenhomomorphismus alle Ränder in $B_1 X$ auf das neutrale Element von $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$ wirft. In der Tat, der Rand eines 2-Simplex $\tau : \Delta_2 \rightarrow X$ wird unter unserem Gruppenhomomorphismus abgebildet auf $\llbracket \bar{\alpha}_u * (\tau \circ k) * \alpha_u \rrbracket$, wo $u = \tau(0, 0, 1)$ das Bild



Der tautologische Zwei-Simplex mit seinem Rand sowie der Zwei-Simplex $p : \Delta_2 \rightarrow [0, 1]$ und sein Rand in $S_1([0, 1])$.

einer Ecke von Δ_2 ist und $k : [0, 1] \rightarrow \Delta_2$ den Weg mit Anfangs- und Endpunkt in dieser Ecke bezeichnet, der einmal auf dem Rand von Δ_2 umläuft in einer Richtung, die der Leser sich selber überlegen möge. Da aber schon k selbst homotop ist zum konstanten Weg, gilt dasselbe für die obige Verknüpfung. Folglich definiert unsere Vorschrift einen Gruppenhomomorphismus in der umgekehrten Richtung

$$\bar{w} : H_1 X \rightarrow \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$$

Es bleibt zu zeigen, daß er invers ist zu dem in Teil 1 konstruierten Homomorphismus hur . Um $\bar{w} \circ \text{hur} = \text{id}$ nachzuweisen, wählen wir einen geschlossenen Weg $\gamma \in \Omega(X, x)$ und erkennen, daß unter unserer Verknüpfung seine Klasse abgebildet wird auf die Klasse von $\bar{\alpha}_x * \gamma * \alpha_x$ in $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$. Das zeigt $\bar{w} \circ \text{hur} = \text{id}$. Um $\text{hur} \circ \bar{w} = \text{id}$ nachzuweisen bemerken wir, daß für jeden 1-Simplex σ unser $w(\sigma)$ durch den Weg $\bar{\alpha}_{\sigma(1,0)} * (\sigma \circ c^{-1}) * \alpha_{\sigma(0,1)}$ repräsentiert wird. Nach dem Schluß des vorhergehenden Beweises ist damit $\text{hur}(w(\sigma))$ homolog zur 1-Kette $\sigma + \alpha_{\sigma(1,0)} \circ c - \alpha_{\sigma(0,1)} \circ c$. Definieren wir also $\delta : S_0 X \rightarrow S_1 X$ durch $y \mapsto \alpha_y \circ c$, so ist $\text{hur}(w(\sigma)) - \sigma$ homolog zu $\delta \partial \sigma$ für jeden 1-Simplex σ und nullhomolog für jeden 1-Zykel $a \in Z_1 X$, in Formeln $[\text{hur}(w(a))] = [a] \forall a \in Z_1 X$. \square

Definition 1.5.5. Zwei normierte geschlossene Wege α, β in einem topologischen Raum heißen **frei homotop**, wenn es eine durch $\tau \in [0, 1]$ parametrisierte Familie geschlossener normierter Wege γ_τ gibt mit $\gamma_0 = \alpha, \gamma_1 = \beta$ und so, daß $(t, \tau) \mapsto \gamma_\tau(t)$ stetig ist auf $[0, 1]^2$.

1.5.6. Im Gegensatz zur Homotopie mit festen Endpunkten muß unsere Abbildung auf $[0, 1]^2$ bei einer freien Homotopie also nicht auf der vorderen und hinteren Kante konstant sein, sondern vielmehr auf der vorderen und hinteren Kante denselben Weg darstellen.

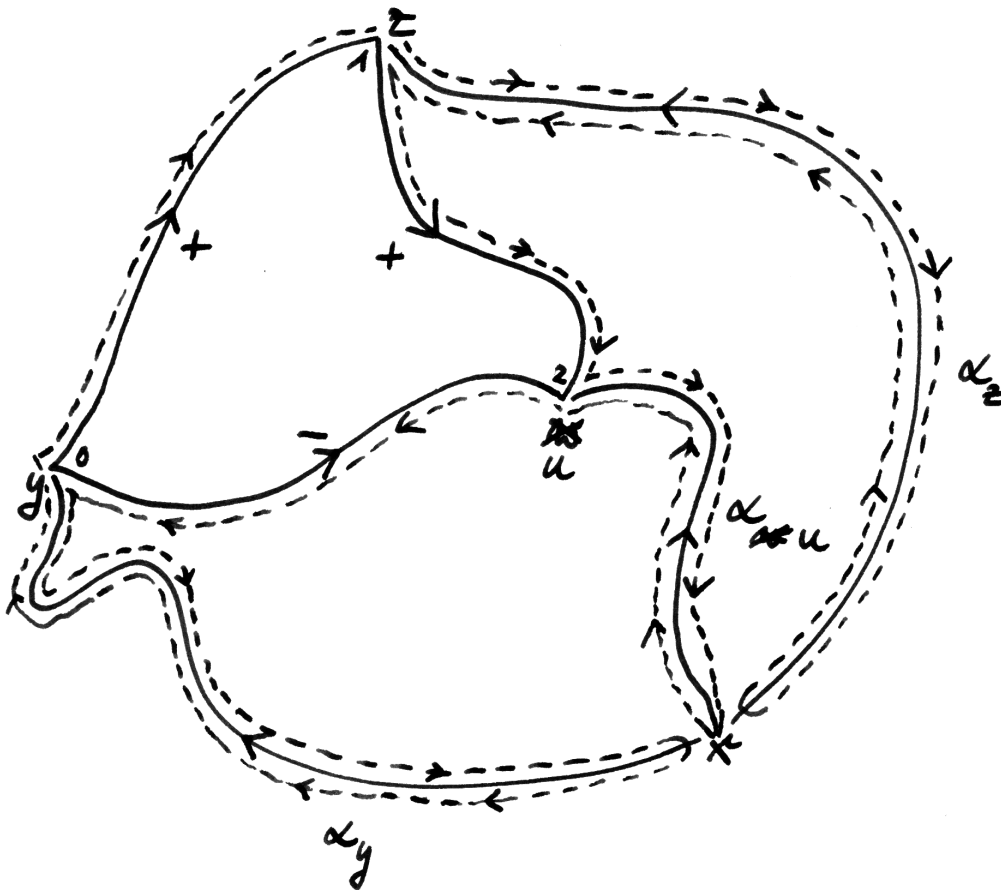
Übungen

Übung 1.5.7. Man zeige, daß je zwei frei homotope geschlossene Wege unter den Hurewicz-Homomorphismen zum jeweiligen Basispunkt auf dieselbe Homologiekategorie abgebildet werden.

Übung 1.5.8. Man zeige, daß die Hurewicz-Isomorphismen für jeden wegzusammenhängenden Raum X einen Isomorphismus $\text{hur}_X : \pi_1(X)^{\text{ab}} \xrightarrow{\cong} H_1(X)$ zwischen seiner basispunktfreien abelisierten Fundamentalgruppe [TF] 1.8.4 und der ersten Homologiegruppe induzieren und daß wir so sogar eine Isotransformation

$$\text{hur} : \pi_1^{\text{ab}} \xrightarrow{\cong} H_1$$

von Funktoren von der Kategorie der wegzusammenhängenden Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen erhalten.



Dies Bild soll illustrieren, warum für einen Zwei-Simplex $\tau : \Delta_2 \rightarrow X$ sein
 Rand unter unserem Gruppenhomomorphismus abgebildet auf
 $[[\bar{\alpha}_u * (\tau \circ k) * \alpha_u]]$, wo $u = \tau(0, 0, 1)$ das Bild einer Ecke von Δ_2 ist und
 $k : [0, 1] \rightarrow \Delta_2$ den Weg mit Anfangs- und Endpunkt in dieser Ecke bezeichnet,
 der einmal auf dem Rand von Δ_2 umläuft.

1.6 Homologie offener Teilmengen der Ebene

1.6.1 (**Umlaufzahlen für Zykel**). Gegeben $w, z \in \mathbb{C}$ zwei verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene spezialisiert der Hurewitz-Isomorphismus 1.5.2 zu einem Isomorphismus

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus w, z) \xrightarrow{\sim} H_1(\mathbb{C} \setminus w)$$

Wir notieren den durch die Umlaufzahl $\gamma \mapsto \text{Um}(\gamma, w)$ aus [TF] 1.7.7 gegebenen Isomorphismus $\text{Um}(\cdot, w) : \pi_1(\mathbb{C} \setminus w, z) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Man kann leicht zeigen, daß die auf der Homologie induzierte Abbildung nicht von z abhängt und folglich mit

$$\text{Um}(\cdot, w) : H_1(\mathbb{C} \setminus w) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

bezeichnet werden kann. Für eine Homologieklassse $\alpha \in H_1(\mathbb{C} \setminus w)$ notieren wir ihr Bild unter dieser Abbildung mit $\text{Um}(\alpha, w)$ und nennen diese Zahl die **Umlaufzahl unserer Klasse** α um den Punkt w . Für einen 1-Zykel $\sigma \in Z_1(\mathbb{C} \setminus w)$ notieren wir das Bild seiner Homologieklassse unter dieser Abbildung wieder mit $\text{Um}(\sigma, w) := \text{Um}([\sigma], w)$ und nennen diese Zahl die **Umlaufzahl des Zyklus** σ um den Punkt w .

Ergänzung 1.6.2. Bei unserer Definition 1.2.19 des Integrals holomorpher Funktionen über 1-Zykel haben wir mit Vorbedacht dieselbe durch die Projektion auf die zweite Koordinate gegebene Identifikation $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$ zugrundegelegt wie bei der Konstruktion des Hurewitz-Isomorphismus. Ist also $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg und $\gamma \circ c : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{C}$ der zugehörige 1-Simplex, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{[\gamma \circ c]} f(z) dz$$

Der mit den Grundlagen der Funktionentheorie vertrauten Leser wird nun leicht einsehen können, daß für jeden Punkt $w \in \mathbb{C}$ und jede Homologieklassse $\gamma \in H_1(\mathbb{C} \setminus w)$ ihre Umlaufzahl um den Punkt w auch durch die Formel

$$\text{Um}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - w} dz$$

beschrieben werden kann, mit dem in 1.2.19 erklärten Integralbegriff. Für im Sinne von 1.2.19 „geschlossene“ 1-Simplizes folgt das unmittelbar aus dem Residuensatz oder auch direkter aus dem Beweis von [FT1] 5.2.1, und im allgemeinen folgt es dann aus der Erkenntnis, daß jeder 1-Zykel homolog ist zu einer Linearkombination geschlossener 1-Simplizes.

Satz 1.6.3 (Homologie offener Teilmengen der Ebene). *Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene, so liefert die durch das Bilden der Umlaufzahlen gegebene Abbildung $H_1(U) \times (\mathbb{C} \setminus U) \rightarrow \mathbb{Z}$, $(\sigma, w) \mapsto \text{Um}(\sigma, w)$ einen Gruppenisomorphismus*

$$H_1(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_1(\mathbb{C} \setminus U, \mathbb{Z})$$

zwischen der ersten Homologiegruppe von U und der Gruppe der stetigen \mathbb{Z} -wertigen Funktionen mit kompaktem Träger auf dem Komplement von U .

1.6.4. Die Injektivität unserer Abbildung bedeutet in anderen Worten, daß ein Zykel in einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene in unserer Teilmenge nullhomolog ist genau dann, wenn er keinen Punkt außerhalb besagter Teilmenge umläuft. In 4.3.5 wird erklärt, wie sich unser Satz auf offene Teilmengen beliebiger endlichdimensionaler Vektorräume verallgemeinern läßt.

Ergänzung 1.6.5. Umläuft ein geschlossener Weg in einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene $U \subseteq \mathbb{C}$ keinen Punkt des Komplements $\mathbb{C} \setminus U$, so ist er nach 1.6.3 insbesondere nullhomolog, und nach 1.2.19 verschwindet folglich das Integral jeder auf unserer Teilmenge holomorphen Funktion über besagten Weg. Diese Aussage ist in der Funktionentheorie bekannt als die **Umlaufzahlversion des Integralsatzes von Cauchy**.

Ergänzung 1.6.6 (Residuensatz, homologische Version). Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $P \subset U$ eine endliche Teilmenge und $f : U \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und γ ein Zykel in $U \setminus P$, der in U nullhomolog ist. So gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{p \in P} \text{Um}(\gamma, p) \text{Res}(f, p)$$

Wir könnten das genauso herleiten wie den Residuensatz [FT1] 5.2.11. Stattdessen führen wir hier einen alternativen Beweis vor, der von der Laurententwicklung unabhängig ist und die Nützlichkeit unserer neuen Sprache zeigen soll. Wählen wir um jede der Singularitäten $w \in P$ einen Kreisweg γ_w mit so kleinem Radius, daß die ganze abgeschlossene Kreisscheibe innerhalb dieses Weges in U enthalten ist und keine andere Singularität enthält, so gilt $\text{Um}(\gamma_w, w) = 1$ und $\text{Um}(\gamma_w, v) = 0$ für alle $v \in P \setminus w$ und für alle $v \in \mathbb{C} \setminus U$. Die Zykel γ und $\sum_w \text{Um}(\gamma, w) \gamma_w$ haben also dieselben Umlaufzahlen um alle Punkte des Komplements von $U \setminus P$ in \mathbb{C} , als da heißt, ihre Differenz ist in $U \setminus P$ nullhomolog. Daraus folgt wegen der Homologieinvarianz des Wegintegrals [FT1] 3.3.9 aber sofort

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{w \in P} \text{Um}(\gamma, w) \int_{\gamma_w} f(z) dz$$

und die Formel aus der Definition des Residuums [FT1] 5.2.8 zeigt dann den Residuensatz.

Beweis von 1.6.3. Jeder Zykel $\sigma \in Z_1(U)$ wird in $S_1(\mathbb{C})$ ein Rand, $\sigma = \partial\alpha$ für $\alpha \in S_2(\mathbb{C})$. Liegt w auf keinem Simplex von α , so gilt sicher $\text{Um}(\sigma, w) = 0$.

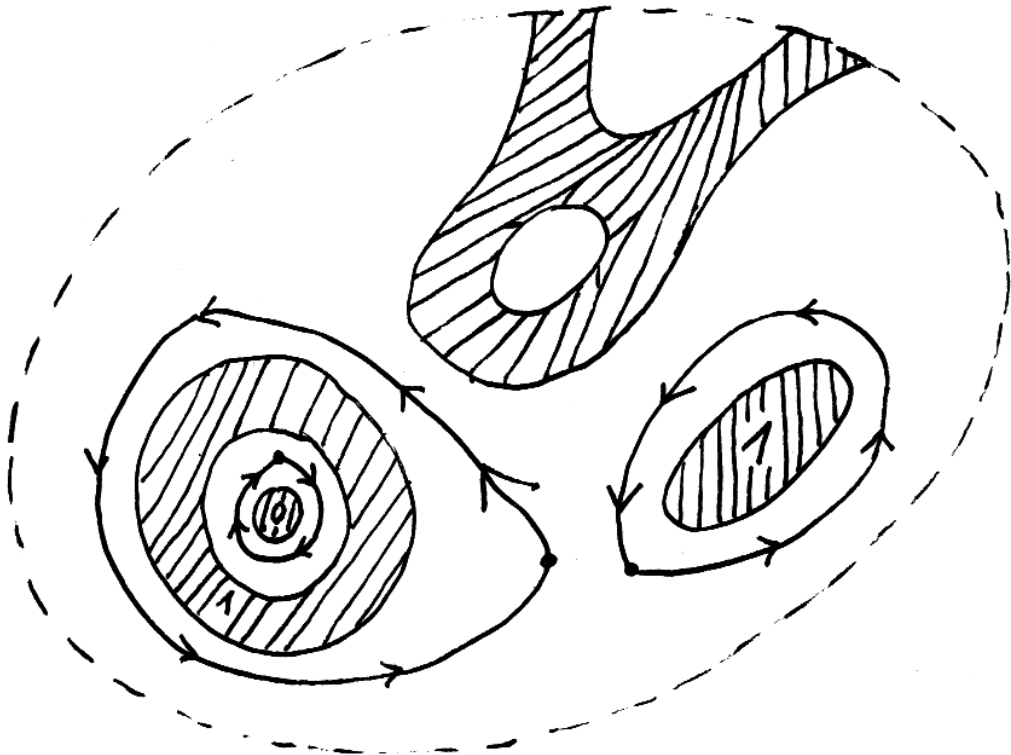
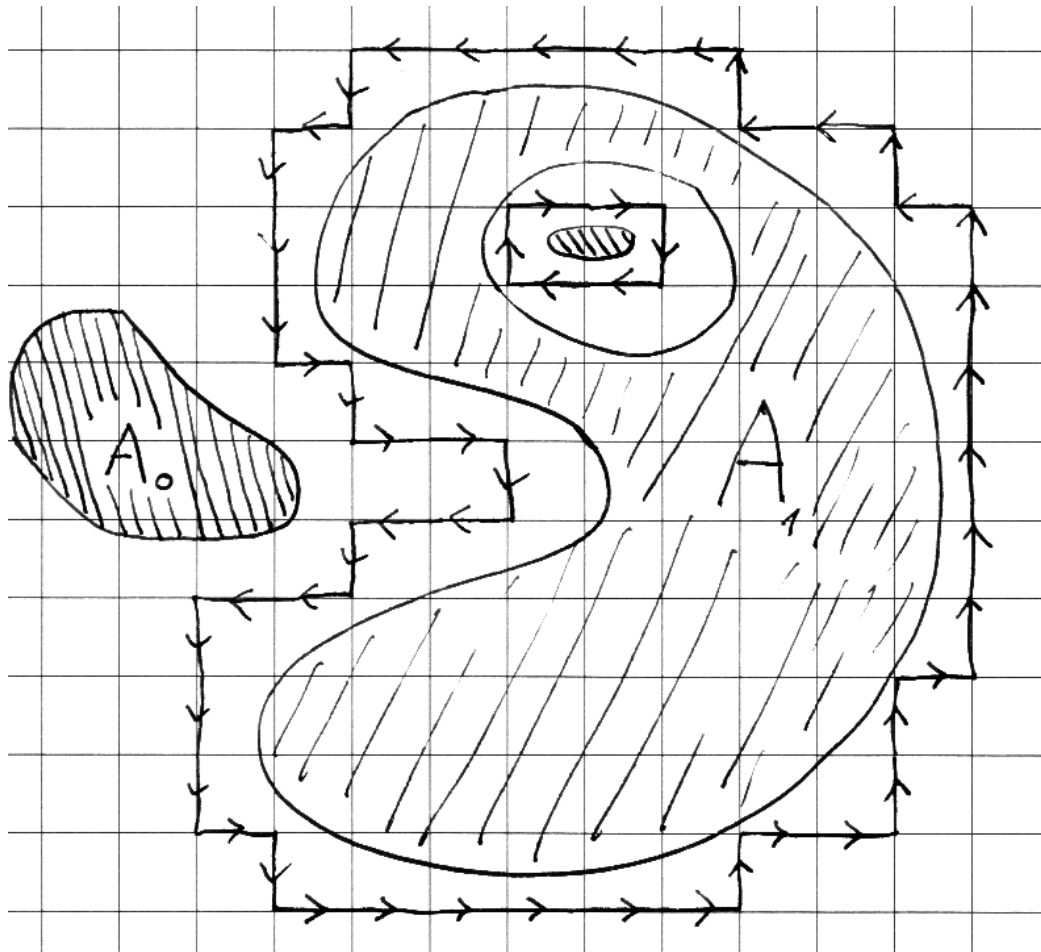


Illustration zum Satz über die Homologie offener Teilmengen der Ebene 1.6.3.

Die Ebene \mathbb{C} habe ich hier ersetzt durch eine „eiförmige“ konvexe offene nichtleere Teilmenge derselben, die ja homöomorph ist. Das Komplement von U ist schraffiert eingezeichnet und besteht aus vier Zusammenhangskomponenten, von denen eine nicht kompakt ist. In die kompakten Zusammenhangskomponenten habe ich Zahlen geschrieben, die die Werte einer Funktion aus $\mathcal{C}_1(\mathbb{C} \setminus U, \mathbb{Z})$ meinen, und darüber hinaus habe ich einen Eins-Zykel in U angegeben, der unter dem Isomorphismus aus unserem Satz auf besagte Funktion abgebildet wird.



Anschauliche Darstellung zum Beweis von Satz 1.6.3. Unser A_0 soll in diesem Beispiel die Vereinigung der zwei eng schraffierten Stücke sein.

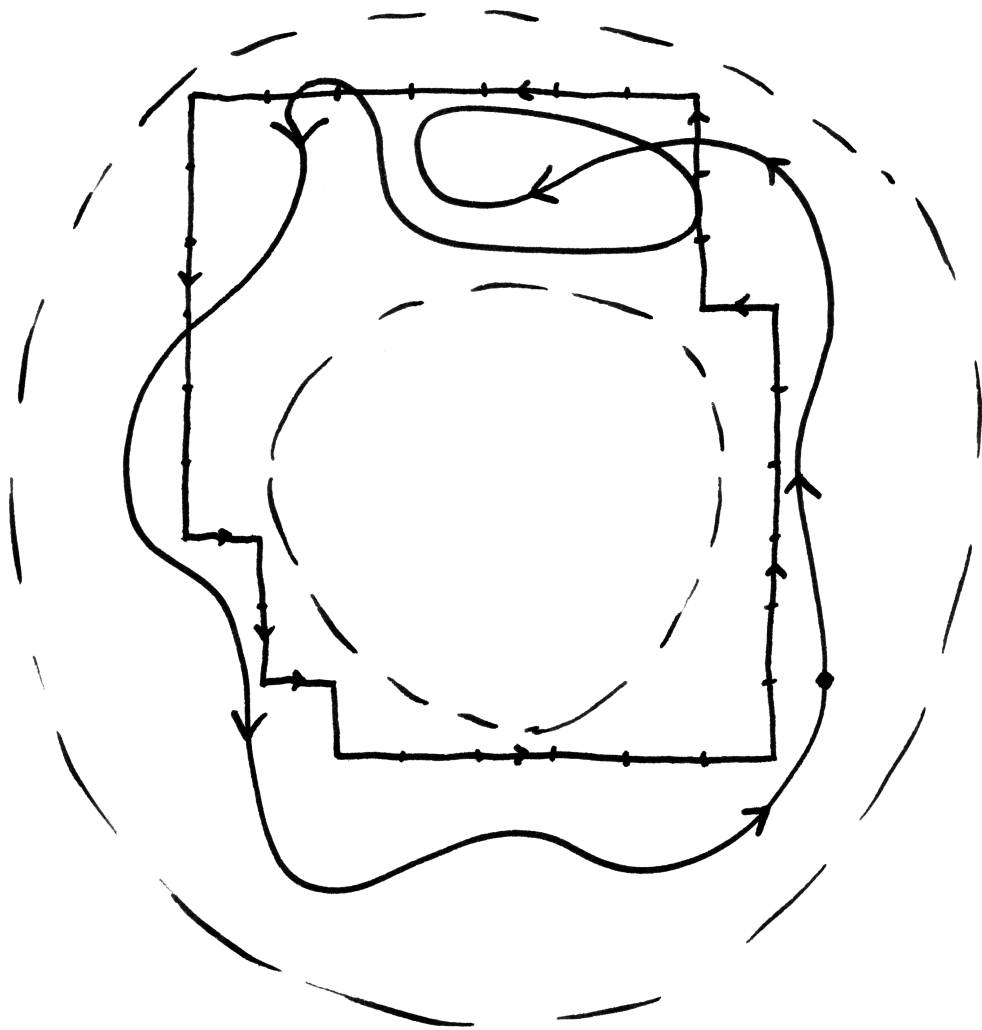
Folglich verschwindet $U_m(\sigma, w)$ bei festem σ für alle w außerhalb eines geeigneten Kompaktums. Daß $w \mapsto U_m(\sigma, w)$ auch stetig von w abhängt, also eine lokal konstante Funktion ist, wird sich der Leser leicht selbst überlegen können. Damit liefert unsere Abbildungsvorschrift schon einmal einen Gruppenhomomorphismus

$$H_1(U) \rightarrow \mathcal{C}_1(\mathbb{C} \setminus U, \mathbb{Z})$$

und es bleibt, dessen Injektivität und Surjektivität zu zeigen. Wir beginnen mit der Surjektivität. Es reicht sicher zu zeigen, daß alle Funktionen im Bild liegen, die nur die Werte Null und Eins annehmen. Dann zerfällt aber das Komplement in die disjunkte Vereinigung $\mathbb{C} \setminus U = A_0 \sqcup A_1$ einer kompakten Teilmenge A_1 , auf der der Wert Eins ist, und einer in $\mathbb{C} \setminus U$ und \mathbb{C} abgeschlossenen Teilmenge, auf der der Wert Null ist. Nach [AN1] ?? existiert ein $\delta > 0$ mit $|x_1 - x_0| > \delta \quad \forall x_1 \in A_1, x_0 \in A_0$. Wir können also auf unsere Ebene ein „Rechenpapier-Raster“ legen, das so fein ist, daß keines der Rechenkästchen sowohl A_0 als auch A_1 trifft. Zu jedem Rechenkästchen erklären wir seinen „Kantenzzykel“, der anschaulich der Summe seiner vier mit konstanter Geschwindigkeit im Gegenuhrzeigersinn zu durchlaufenden Kanten entspricht, in hoffentlich offensichtlicher Weise. Dann betrachten wir die Summe σ aller „Kantenzzykel“ zu Rechenkästchen, die A_1 treffen, und behaupten, daß dieser Zykel σ in U liegt und jeden Punkt von A_1 einmal umläuft, jeden Punkt von A_0 dahingegen keinmal. Letzteres scheint mir offensichtlich. Ersteres scheint mir auch offensichtlich für Punkte, die auf keiner Kante eines Kästchens liegen. Für Punkte auf Kanten und Ecken unseres Rechenpapiers ist es aber auch leicht zu sehen. Damit ist die Surjektivität bewiesen, und es gilt, auch noch die Injektivität zu zeigen. Dazu unterbrechen wir den Beweis und zeigen zunächst einige Hilfsaussagen.

Lemma 1.6.7. *Jeder Zykel in einer offenen Teilmenge der Ebene ist in dieser offenen Teilmenge homolog zu einer formalen Summe von Kanten von Kästchen auf einem hinreichend feinen Rechenpapier.*

Beweis. Nach dem Satz von Hurewicz 1.5.2, genauer der leicht zu zeigenden Surjektivität des Hurewicz-Isomorphismus, ist jeder Zykel in einem wegzusammenhängenden Raum homolog zu einem geschlossenen Weg oder präziser zu einem Zykel, der durch einen einzigen singulären Simplex gegeben wird. Jeder Zykel in einem beliebigen Raum ist folglich homolog zu einer endlichen Linearkombination von derartigen „geschlossenen“ Simplizes. Jeder geschlossene Weg in einer offenen Teilmenge der Ebene ist weiter homolog, ja nach [AN2] 8.7.11 sogar homotop zu einem geschlossenen polygonalen Weg und dann sogar frei homotop zu einem geschlossenen polygonalen Weg mit Ecken aus $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$. Jedes der Geraden-segmente dieser polygonalen Wege ist hinwiederum homotop in unserer offenen



Ein Zykel und eine dazu homologe Summe von Kanten in einer ringförmigen offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene.

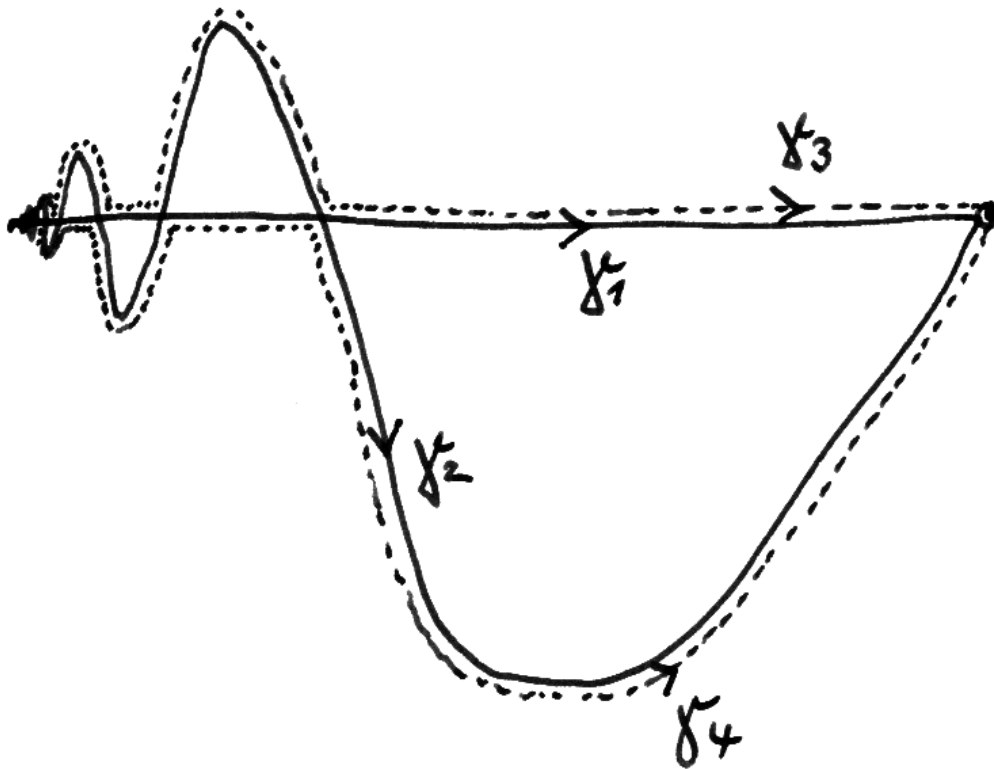
Teilmenge zu einem „Treppenweg“ mit Ecken in $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$, und der Hauptnenner aller Koordinaten aller Ecken aller dieser Treppenwege gibt uns dann eine mögliche Feinheit für unser Rechenpapier. \square

Für den Beweis des Satzes reicht es also zu zeigen, daß jeder solche „Kantenzykel“, der keinen Punkt außerhalb unserer offenen Teilmenge umläuft, bereits in unserer offenen Teilmenge nullhomolog ist. Dazu beachten wir zunächst, daß die Umlaufzahl auf dem Komplement der Spur unseres Kantenzykels in der Ebene lokal konstant ist. Liegt also der Abschluß eines unserer Rechenkästchen nicht ganz in unserer offenen Teilmenge, so verschwindet dort die Umlaufzahl an allen Stellen, die nicht gerade zu Kanten unseres Kantenzykels gehören, und insbesondere im Innern des besagten Kästchens. Die Umlaufzahl unseres Kantenzykels kann nun nur auf dem Innern von endlich vielen Rechenkästchen von Null verschieden sein, und diese gehören nach dem Vorhergehenden mit ihrem Abschluß zu unserer offenen Teilmenge. Wir können also einen weiteren Kantenzykel in unserer offenen Menge konstruieren, der zu unserem ursprünglichen Kantenzykel homolog ist und bei dem die Umlaufzahl um jeden Punkt im Innern jedes Rechenkästchens verschwindet, indem wir bei jedem Rechenkästchen mit von Null verschiedener Umlaufzahl ein geeignetes Vielfaches seines „Randzykels“ zu unserem ursprünglichen Zykel addieren. Auf diese Weise töten wir auf dem entsprechenden Kästchen die Umlaufzahl und auf den anderen Kästchen ändert sich nichts und wir erhalten einen zu unserem ursprünglichen Zykel homologen Kantenzykel, der überhaupt keinen Punkt im Innern irgendeines Rechenkästchens umläuft. Das anschließende Lemma beendet dann den Beweis. \square

Lemma 1.6.8. *In einem Kantenzykel, der keinen Punkt aus dem Innern irgendeines Kästchens umläuft, kommt jede Kante gleich oft in beiden Richtungen vor.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit argumentieren wir nur für senkrechte Kanten. Nehmen wir also an, eine senkrechte Kante käme a -mal in der Richtung nach oben und b -mal in die Gegenrichtung vor. Ziehen wir von unserem Kantenzykel den Randzykel des Kästchens links neben unserer Kante ab, und zwar a -mal im Gegenuhrzeigersinn und b -mal im Uhrzeigersinn, so erhalten wir einen neuen Kantenzykel mit Umlaufzahl $b - a$ auf diesem Kästchen und Umlaufzahl null auf dem Kästchen rechts daneben. Diese Kante selbst gehört aber gar nicht mehr zur Spur unseres Zykel, und weil die Umlaufzahl lokal konstant ist folgt $b - a = 0$. \square

Ergänzung 1.6.9. Für Zykel in nicht notwendig offenen Teilmengen der komplexen Zahlenebene gilt die Aussage von Satz 1.6.3 im allgemeinen nicht mehr, wie nebenstehendes Beispiel illustriert.



Ist $U \subset \mathbb{C}$ nicht offen, so gilt die Aussage von Satz 1.6.3 im allgemeinen nicht mehr, die Umlaufzahlabildung $H_1(U) \rightarrow \mathcal{C}_c(\mathbb{C} \setminus U, \mathbb{Z})$ ist also in dieser Allgemeinheit nicht mehr notwendig ein Isomorphismus. Betrachten wir etwa die stetige Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(x) = x \sin(\pi x^{-1})$ für $x \neq 0$ und $f(x) = 0$ für $x = 0$. Betrachten wir in der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} die Wege

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= t \\ \gamma_2(t) &= t + if(t) \\ \gamma_3(t) &= t + i \sup(f(t), 0) \\ \gamma_4(t) &= t + i \inf(f(t), 0) \end{aligned}$$

Der Zykel $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ hat dann Umlaufzahl Null um jeden Punkt im Komplement seiner Spur. Dennoch ist er in seiner Spur nicht nullhomolog, was ich hier nur heuristisch begründen will: Wie fein ich eine endliche Zerstückelung auch wähle, die Situation in der Nähe des Ursprungs bleibt einfach zu verworren.

Übungen

Übung 1.6.10. Man zeige, daß eine zusammenhängende offene Teilmenge der Ebene \mathbb{R}^2 genau dann überlagerungstrivial ist, wenn ihre erste Homologiegruppe verschwindet. Hinweis: Man benötigt die Argumente der vorhergehenden Beweise und 1.6.8. Die analoge Aussage gilt in höheren Dimensionen im übrigen nicht mehr, das einfachste mir bekannte Gegenbeispiel wird in 3.3.13 diskutiert.

2 Relative singuläre Homologie

In diesem Abschnitt führen wir eine Verallgemeinerung unserer singulären Homologiegruppen ein, die sogenannten „relativen Homologiegruppen“ eines topologischen Raums relativ zu einer Teilmenge. Man mag sich fragen, ob es nicht sinnvoller wäre, erst einmal die bisher eingeführten gewöhnlichen Homologiegruppen so eingehend zu studieren, daß wir sie für einige elementare Beispiele auch berechnen könnten, anstatt gleich zu verallgemeinern. Es erweist sich jedoch, daß die Verallgemeinerung zur relativen Homologie bei der Berechnung der gewöhnlichen Homologiegruppen entscheidend hilft, sobald wir (1) die lange exakte Homologiesequenz hergeleitet haben, die die relative mit der gewöhnlichen Homologie in Beziehung setzt, und (2) den Satz über die Ausschneidung gezeigt haben, der sich nur für die relative Homologie überhaupt formulieren läßt.

2.1 Definition der relativen Homologie

Definition 2.1.1. Ist (X, A) ein **Raumpaar**, als da heißt ein topologischer Raum X mit einer Teilmenge A , so liefert die Einbettung $A \hookrightarrow X$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ Inklusionen $S_q A \hookrightarrow S_q X$ auf den Gruppen der singulären q -Ketten. Die Quotientengruppe bezeichnen wir mit

$$S_q(X, A) := S_q X / S_q A$$

und nennen ihre Elemente **relative q -Ketten**. Wir geben der Quotientenabbildung $S_q X \rightarrow S_q(X, A)$ keinen Namen.

2.1.2. Die Quotientenabbildung liefert einen Isomorphismus zwischen der freien Gruppe über der Menge aller der q -Simplizes $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$, deren Bild nicht in A enthalten ist, und der Gruppe der relativen q -Ketten $S_q(X, A)$. Diese Sichtweise zeigt, daß auch die relativen Ketten eine freie abelsche Gruppe bilden.

2.1.3. Man überzeugt sich leicht, daß es eindeutig bestimmte Gruppenhomomorphismen $\bar{\partial}_q : S_q(X, A) \rightarrow S_{q-1}(X, A)$ gibt derart, daß auch das rechte Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} S_q A & \hookrightarrow & S_q X & \twoheadrightarrow & S_q(X, A) \\ \partial_q \downarrow & & \partial_q \downarrow & & \bar{\partial}_q \downarrow \\ S_{q-1} A & \hookrightarrow & S_{q-1} X & \twoheadrightarrow & S_{q-1}(X, A) \end{array}$$

Es ist klar, daß die $S_q(X, A)$ mit diesem Differential einen Kettenkomplex bilden, daß in anderen Worten gilt $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$. Wir notieren ihn $S(X, A)$ und definieren die

relativen Homologiegruppen von unserem Raumpaars als die Homologie dieses Kettenkomplexes, in Formeln

$$H_q(X, A) := \mathcal{H}_q(S(X, A)) = \ker \bar{\partial}_q / \text{im } \bar{\partial}_{q+1}$$

Die Elemente von $\ker \bar{\partial}_q$ heißen auch die **relativen q -Zykel**, die Elemente von $\text{im } \bar{\partial}_{q+1}$ die **relativen q -Ränder** und für einen relativen Zykel c bezeichnet wieder $[c]$ seine Homologiekategorie.

Vorschau 2.1.4. In 2.4.15 wird klar werden, daß wir unter geeigneten Annahmen an unser Raumpaars (X, A) die relative Homologie $H_q(X, A)$ für $q > 0$ identifizieren können mit der Homologie $H_q(X/A)$ des Raums X/A , der aus X entsteht durch die Identifikation der Teilmenge A zu einem Punkt.

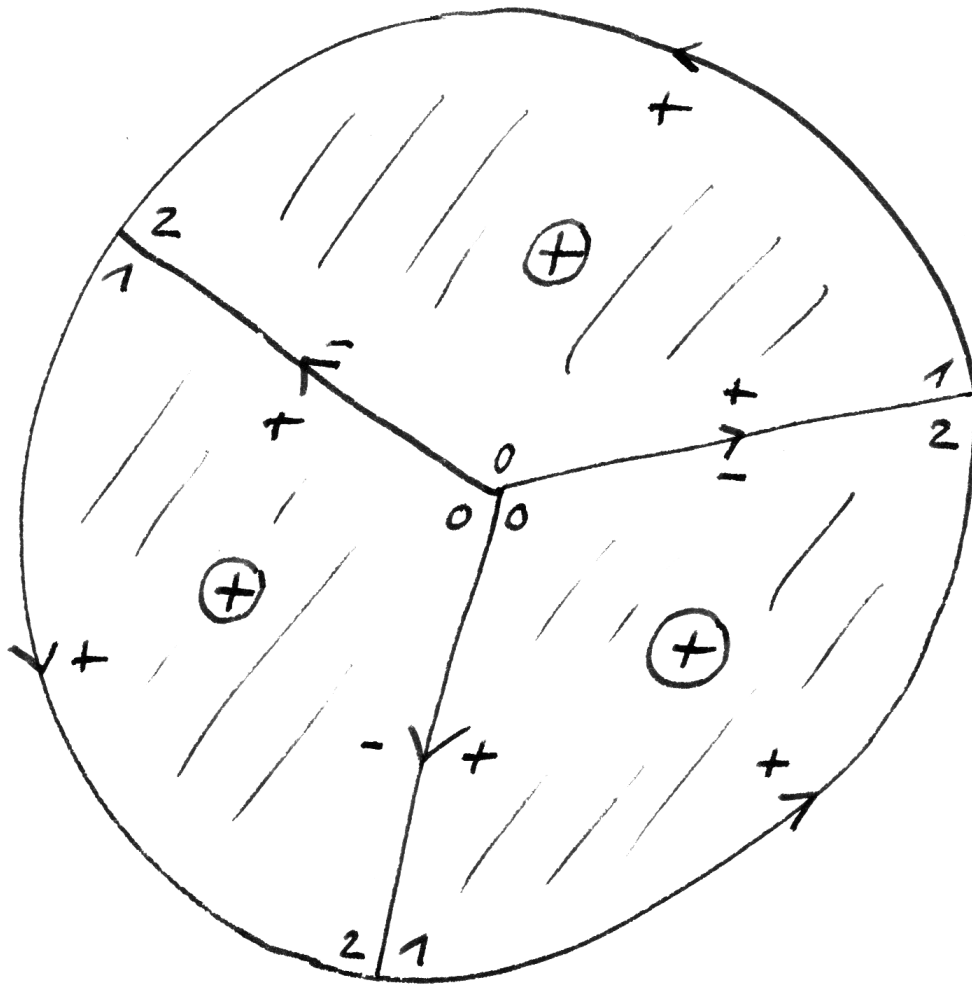
Beispiel 2.1.5. Wir haben $H_1([a, b], \{a, b\}) \cong \mathbb{Z}$, für $a < b$ in \mathbb{R} . Diese Aussage können Sie sich als Übung hier schon überlegen, wir erhalten sie später auch als einen Spezialfall von 2.3.4. Wir werden in 2.3.6 auch für die Homologie der Einheitskreisscheibe relativ zu ihrem Rand die Identität $H_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z}$ zeigen. Hier erkläre ich nur in der schmutzigen Anschauung und ohne Beweis, wie man sich einen Erzeuger dieser relativen Homologie vorstellen mag: Man schneide dazu den Kuchen D^2 wie üblich in Stücke und betrachte jedes der Stücke mit einer geeigneten Orientierung als 2-Simplex. Die formale Summe dieser Simplizes hat dann als Rand nur den Rand des Kuchens selber und bildet folglich einen relativen Zykel, von dem man mithilfe des zweiten Teils von 2.3.4 zeigen kann, daß seine Klasse in der Tat die relative Homologie erzeugt. Die erste relative Homologie des Möbiusbands M aus [TM] 1.7.9 relativ zu seinem Randkreis S^1 hat genau zwei Elemente, $H_1(M, S^1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und ein nichttriviales Element wird repräsentiert durch den 1-Zykel, der „in der Mitte des Möbiusbands einmal umläuft“. Um das alles präzise zu zeigen, benötigen wir jedoch die lange exakte Homologiesequenz 2.2.4.

Definition 2.1.6. Ein **Morphismus von Raumpaaren** $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ist per definitionem schlicht eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subset B$. So ein f induziert eine Abbildung $H_q f$ auf der relativen Homologie. Genauer definiert man zunächst $S_q f : S_q(X, A) \rightarrow S_q(Y, B)$ durch die Bedingung, daß auch das rechte Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} S_q A & \hookrightarrow & S_q X & \twoheadrightarrow & S_q(X, A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_q B & \hookrightarrow & S_q Y & \twoheadrightarrow & S_q(Y, B) \end{array}$$

Dann prüft man, daß diese $S_q f$ sogar mit den Differentialen kommutieren und so einen Morphismus von Kettenkomplexen

$$Sf : S(X, A) \rightarrow S(Y, B)$$



Ein Erzeuger der relativen Homologie $H_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z}$

definieren. Dieser Morphismus liefert dann schließlich auf der Homologie die gewünschten Morphismen $H_q f : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$.

2.1.7. Ich notiere die Kategorie der Raumpaare Top^C . In diesen Notationen ist also die relative Homologie die Verknüpfung von Funktoren

$$\text{Top}^C \xrightarrow{S} \text{Ket}(\text{Ab}) \xrightarrow{H_q} \text{Ab}$$

Die Definition der relativen Ketten schenkt uns natürliche Morphismen $SX \rightarrow S(X, A)$ und damit $H_q X \rightarrow H_q(X, A)$. Es ist klar nach den Definitionen, daß sie im Fall $A = \emptyset$ stets Isomorphismen sind.

Übungen

Übung 2.1.8 (Verträglichkeit der relativen Homologie mit Koprodukten). Die Funktoren $H_q : \text{Top}^C \rightarrow \text{Ab}$ der relativen Homologie sind verträglich mit beliebigen Koprodukten.

Übung 2.1.9. Man konstruiere eine Isotransformation zwischen den beiden folgenden Funktoren von den Raumpaaren in die abelschen Gruppen:

1. $(X, A) \mapsto H_0(X, A)$
2. $(X, A) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Die freie abelsche Gruppe über der Menge aller Wegzu-} \\ \text{-sammenhangskomponenten von } X, \text{ die } A \text{ nicht treffen} \end{array} \right\}$

Übung 2.1.10. Seien $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ zwei Morphismen zwischen Raumpaaren. Eine **Homotopie von f nach g** ist ein Morphismus von Raumpaaren $h : (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \rightarrow (Y, B)$ derart, daß gilt $h \circ i_0 = f$ und $h \circ i_1 = g$. Man zeige: Sind zwei Morphismen $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotop, so induzieren sie dieselben Abbildungen $H_q f = H_q g : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$ auf den relativen Homologiegruppen. Hinweis: Man wiederhole den alten Beweis und zeige sogar stärker, daß $(Sf - Sg) : S(X, A) \rightarrow S(Y, B)$ nullhomotop ist. Man zeige durch ein Beispiel, daß es nicht ausreicht, nur vorauszusetzen, daß f und g als Abbildungen $X \rightarrow Y$ sowie als Abbildungen $A \rightarrow B$ jeweils zueinander homotop sind.

2.2 Lange exakte Homologiesequenz

2.2.1. Ich erinnere daran, daß eine Sequenz $A' \rightarrow A \rightarrow A''$ von Gruppen und Gruppenhomomorphismen **exakt bei A** oder genauer **exakt bei A** heißt, wenn gilt $\text{im}(A' \rightarrow A) = \ker(A \rightarrow A'')$; daß eine längere Sequenz von Gruppen und Gruppenhomomorphismen **exakt** heißt, wenn sie an jeder Stelle mit Vorgänger und Nachfolger exakt ist; daß eine Sequenz $A' \rightarrow A \rightarrow A''$ von Gruppen und

Gruppenhomomorphismen eine **kurze exakte Sequenz** heißt, wenn die Sequenz $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ exakt ist; und daß wir kurze exakte Sequenzen gerne notieren als

$$A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$$

Satz 2.2.2. Sei $C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C''$ eine **kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen**, als da heißt, $C'_q \hookrightarrow C_q \twoheadrightarrow C''_q$ soll für alle q eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen sein. So gilt:

1. Es gibt für jedes q genau eine Abbildung, den sogenannten **Randoperator**

$$\hat{\partial} : \mathcal{H}_q C'' \rightarrow \mathcal{H}_{q-1} C'$$

derart, daß gilt $\hat{\partial}[c''] = [c']$ für Zykel $c'' \in \mathcal{Z}_q C''$ und $c' \in \mathcal{Z}_{q-1} C'$ genau dann, wenn es ein $c \in C_q$ gibt mit $pc = c''$ und $\partial c = ic'$, und diese Abbildung $\hat{\partial}$ ist ein Gruppenhomomorphismus;

2. Mit den von der Funktorialität der Homologie herrührenden Homomorphismen in der Mitte und den Randoperatoren aus dem ersten Teil an den Seiten erhalten wir eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen, die **abstrakte lange exakte Homologiesequenz**

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_{q+1} C'' \rightarrow \mathcal{H}_q C' \rightarrow \mathcal{H}_q C \rightarrow \mathcal{H}_q C'' \rightarrow \mathcal{H}_{q-1} C' \rightarrow \dots$$

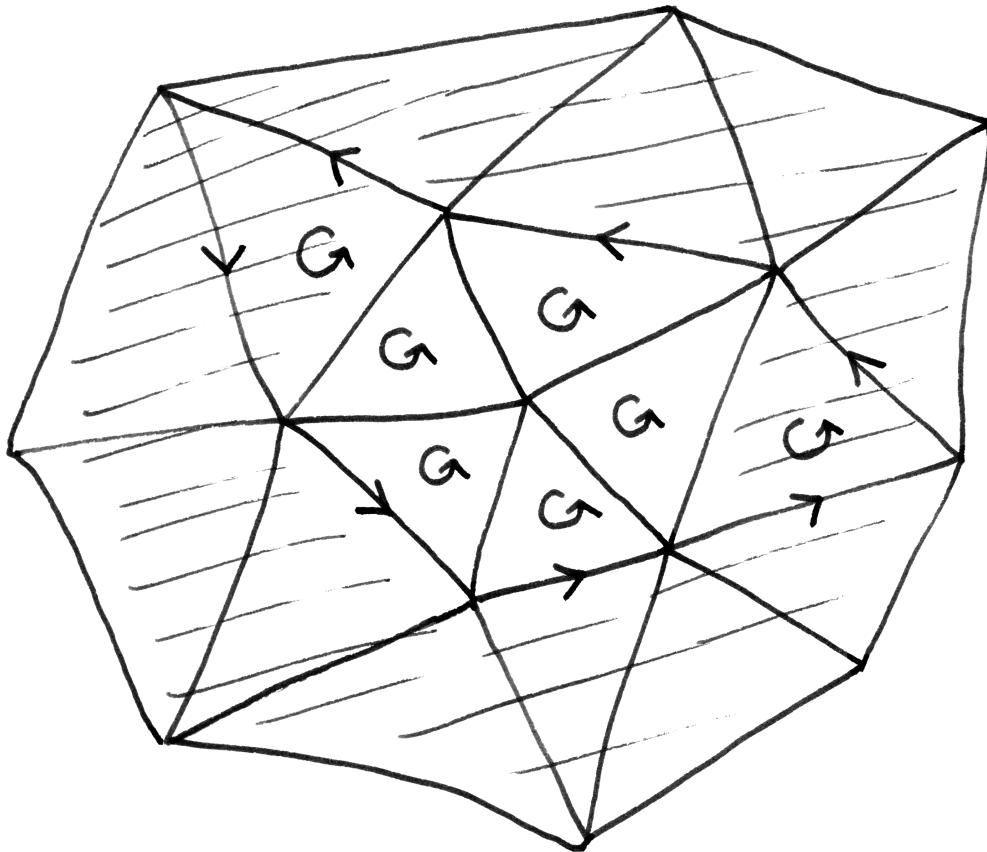
Ergänzung 2.2.3. Ist $C' \hookrightarrow C \twoheadrightarrow C''$ eine kurze exakte Sequenz von nicht notwendig graduierten differentiellen abelschen Gruppen, so erhalten wir in derselben Weise eine periodische lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \mathcal{H} C'' \rightarrow \mathcal{H} C' \rightarrow \mathcal{H} C \rightarrow \mathcal{H} C'' \rightarrow \mathcal{H} C' \rightarrow \dots$$

2.2.4. Die Bezeichnung als Randoperator ist durch die topologische Anwendung motiviert: Wir werden im folgenden zu jedem Raumpaar (X, Z) Homomorphismen $\hat{\partial} = \hat{\partial}_q : \mathcal{H}_q(X, Z) \rightarrow \mathcal{H}_{q-1}(Z)$ konstruieren derart, daß die Sequenz

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_{q+1}(X, Z) \rightarrow \mathcal{H}_q(Z) \rightarrow \mathcal{H}_q(X) \rightarrow \mathcal{H}_q(X, Z) \rightarrow \mathcal{H}_{q-1}(Z) \rightarrow \dots$$

exakt ist, wenn wir diese $\hat{\partial}$ und die von den Einbettungen $(Z, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, Z)$ induzierten Abbildungen als Morphismen nehmen. Ist genauer eine relative Homologieklassse $[c] \in \mathcal{H}_q(X, Z)$ gegeben, so repräsentieren wir $[c]$ durch einen relativen q -Zykel $c \in \mathcal{S}_q(X, Z)$ und diesen durch eine q -Kette $\tilde{c} \in \mathcal{S}_q X$. Dann ist $\partial \tilde{c} \in \mathcal{S}_{q-1} Z$ ein $(q-1)$ -Zykel und wir nehmen als $\hat{\partial}[c]$ seine Homologieklassse, in Formeln $\hat{\partial}[c] := [\partial \tilde{c}]$. Daß wir so eine wohldefinierte Abbildung erhalten und daß mit diesen Abbildungen die oben angegebene Sequenz exakt ist,



Dieses Bild soll den Randoperator der langen exakten Homologiesequenz anschaulich machen. Es stellt einen zweidimensionalen Simplicialkomplex \mathcal{K} mit 18 Zwei-Simplizes dar und darin schraffiert einen Teilkomplex \mathcal{Z} . Die Summe der sieben durch einen Kreis mit einer Orientierung versehenen Zwei-Simplizes ist ein relativer Zwei-Zykel aus $S\mathcal{K}/S\mathcal{Z}$ und repräsentiert eine relative simpliciale Homologiekategorie in $\mathcal{H}_2(S\mathcal{K}/S\mathcal{Z})$. Sein Rand ist die Summe der im Bild durch Pfeile gerichteten Kanten, ein simplicialer Eins-Zykel aus $S\mathcal{Z}$, dessen Homologiekategorie in $\mathcal{H}_1(S\mathcal{Z})$ das Bild unserer relativen simplicialen Homologiekategorie unter dem Randoperator der langen exakten Homologiesequenz repräsentiert.

folgt aus Satz 2.2.2, angewandt auf die kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$SZ \hookrightarrow SX \twoheadrightarrow S(X, Z)$$

Unsere Sequenz heißt die **lange exakte Homologiesequenz des Raumpaars** (X, Z) .

Beweis. Das folgende Diagramm stellt alle im Beweis benötigten Gruppen und Abbildungen dar:

$$\begin{array}{ccccc} & & C_{q+1} & \twoheadrightarrow & C''_{q+1} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ C'_q & \hookrightarrow & C_q & \twoheadrightarrow & C''_q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C'_{q-1} & \hookrightarrow & C_{q-1} & \twoheadrightarrow & C''_{q-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C'_{q-2} & \hookrightarrow & C_{q-2} & & \end{array}$$

Jetzt beginnen wir mit der eigentlichen Argumentation. Ist $c'' \in C''_q$ ein Zykel und $c \in C_q$ ein Urbild, in Formeln $pc = c''$, so folgt $p\partial c = \partial c'' = 0$ und mit Exaktheit bei C_{q-1} gibt es $c' \in C'_{q-1}$ mit $ic' = \partial c$. Dies c' muß sogar ein Zykel sein, denn es gilt $i\partial c' = \partial ic' = \partial^2 c = 0$ und i_{q-2} ist injektiv.

Wir wollen gerne $\hat{\partial}[c''] = [c']$ setzen und müssen zeigen, daß die Homologieklasse $[c']$ weder von der Wahl von c'' noch von der Wahl von c abhängt. Aber sei sonst $b'' \in C''_{q+1}$ gegeben und sei c'' abgeändert zu $c'' + \partial b''$. Wir finden $b \in C_{q+1}$ mit $pb = b''$. Wählen wir $\tilde{c} \in C_q$ mit $p\tilde{c} = c'' + \partial b''$, so folgt $p(\tilde{c} - c - \partial b) = 0$, also $\tilde{c} - c - \partial b = ib'$ für $b' \in C'_q$. Ist nun $\partial \tilde{c} = i\tilde{c}'$ so folgt $i(\tilde{c}' - c') = i\partial b'$ und somit $[\tilde{c}'] = [c']$ wie gewünscht.

Damit ist also $\hat{\partial}$ definiert und wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß dies $\hat{\partial}$ durch die im ersten Teil des Satzes angegebene Eigenschaft charakterisiert wird. Es bleibt nur die Exaktheit unserer Sequenz nachzuweisen. Man folgert mühelos aus den Definitionen daß die Verknüpfung je zweier aufeinanderfolgender Morphismen verschwindet, also $\ker \supset \text{im}$. Wir müssen noch $\ker \subset \text{im}$ an jeder Stelle zeigen.

Bei $\mathcal{H}_q C$ folgt aus $[c] \mapsto 0$ für $c \in \mathcal{Z}_q C$ sofort $pc = \partial b''$ und die Surjektivität von $C_{q+1} \rightarrow C''_{q+1}$ liefert uns $b \in C_{q+1}$ mit $pb = b''$, also $p(c - \partial b) = 0$. Dann gibt es aber nach der Exaktheit von $C'_q \hookrightarrow C_q \twoheadrightarrow C''_q$ ein $c' \in C'_q$ mit $ic' = c - \partial b$ und notwendig ist c' ein Zykel und $[c'] \mapsto [c - \partial b] = [c]$. Bei $\mathcal{H}_q C''$ folgt aus $[c''] \mapsto 0$, daß für jedes Urbild $c \in C_q$ mit $c \mapsto c''$ gilt $\partial c = ic'$ für einen Rand $c' = \partial b'$ in C'_{q-1} . Dann ist aber $c - ib' \in C_q$ ein Zykel und $[c'']$ das Bild von $[c - ib'] \in \mathcal{H}_q C$. Bei $\mathcal{H}_{q-1} C'$ folgt aus $[c'] \mapsto 0$ ja $ic' = \partial c$ für $c \in C_q$ und dann muß $pc \in C''_q$ ein Zykel sein mit $[pc] \mapsto [c']$. Der Satz ist bewiesen. \square

2.2.5. Gegeben ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} C' & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & C'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D' & \hookrightarrow & D & \twoheadrightarrow & D'' \end{array}$$

ist auch das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & \mathcal{H}_q C' & \rightarrow & \mathcal{H}_q C & \rightarrow & \mathcal{H}_q C'' & \rightarrow & \mathcal{H}_{q-1} C' & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & \mathcal{H}_q D' & \rightarrow & \mathcal{H}_q D & \rightarrow & \mathcal{H}_q D'' & \rightarrow & \mathcal{H}_{q-1} D' & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Das folgt aus der Funktorialität von \mathcal{H}_q für die ersten beiden Quadrate und aus der Konstruktion von $\hat{\partial}$ für das dritte Quadrat.

2.2.6. Insbesondere kommutieren für jeden Morphismus $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Raumpaaren mit den Randabbildungen der jeweiligen langen exakten Homologiesequenzen die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \rightarrow & H_{q-1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(Y, B) & \rightarrow & H_{q-1}(B) \end{array}$$

Korollar 2.2.7. Sei $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ein Morphismus von Raumpaaren. Induziert f Isomorphismen $H_q f : H_q X \xrightarrow{\sim} H_q Y$ und $H_q f : H_q A \xrightarrow{\sim} H_q B$ für alle q , so induziert f auch auf der relativen Homologie Isomorphismen

$$H_q f : H_q(X, A) \xrightarrow{\sim} H_q(Y, B)$$

Beweis. Das folgt aus der langen exakten Homologiesequenz mit dem anschließenden Fünferlemma. \square

2.2.8. Induziert in der Situation des Korollars die Abbildung f Homotopieäquivalenzen $X \rightarrow Y$ und $A \rightarrow B$, so induziert f nach unserem Korollar Isomorphismen auf der relativen Homologie, ohne daß es deshalb eine Homotopieäquivalenz von Raumpaaren im Sinne von 2.1.10 sein muß.

Lemma 2.2.9 (Fünferlemma). Wir betrachten ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & D & \rightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' & \rightarrow & D' & \rightarrow & E' \end{array}$$

Sind die beiden Horizontalen exakte Sequenzen und sind alle Vertikalen bis auf die mittlere Isomorphismen, so ist auch die mittlere Vertikale ein Isomorphismus.

Beweis. Diese Diagrammjagd überlassen wir dem Leser. Man bemerke, daß wir sogar bei der Vertikale ganz links nur die Surjektivität verwenden und bei der Vertikale ganz rechts nur die Injektivität. \square

2.2.10. Gegeben $X \supset Y \supset Z$ ein topologischer Raum mit zwei Teilmengen erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\dots H_{q+1}(X, Y) \rightarrow H_q(Y, Z) \rightarrow H_q(X, Z) \rightarrow H_q(X, Y) \rightarrow H_{q-1}(Y, Z) \dots$$

abelscher Gruppen, die **lange exakte Homologiesequenz des Tripels** (X, Y, Z) , aus der kurzen exakten Sequenz $SY/SZ \hookrightarrow SX/SZ \twoheadrightarrow SX/SY$ von Kettenkomplexen, die hinwiederum eine Konsequenz des noetherschen Isomorphiesatzes ist.

Übungen

Übung 2.2.11 (Neunerlemma). Sei gegeben ein kommutatives Diagramm von Gruppen mit kurzen exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} A_3 & \hookrightarrow & B_3 & \twoheadrightarrow & C_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_2 & \hookrightarrow & B_2 & \twoheadrightarrow & C_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \hookrightarrow & B_1 & \twoheadrightarrow & C_1 \end{array}$$

und seien die senkrechten Kompositionen jeweils Null. Sind zwei der Spalten kurze exakte Sequenzen, so auch die Dritte. Hinweis: Im Fall kommutativer Gruppen benutze man die lange exakte Homologiesequenz. Im Fall nichtkommutativer Gruppen bleibt allerdings nur die Diagrammjagd, vergleiche [LA2] 4.7.5.

Übung 2.2.12. Eine kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ von abelschen Gruppen heißt **spaltend**, wenn es einen Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} A' \oplus A''$ gibt derart, daß das folgende Diagramm kommutiert, mit $a' \mapsto (a', 0)$ und $(a', a'') \mapsto a''$ in der unteren Horizontalen:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \\ \parallel & & \downarrow \wr & & \parallel \\ A' & \hookrightarrow & A' \oplus A'' & \twoheadrightarrow & A'' \end{array}$$

Man zeige, daß für eine kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ von abelschen Gruppen gleichbedeutend sind: (1) Die Sequenz spaltet; (2) Die Surjektion $A \twoheadrightarrow A''$ besitzt ein Rechtsinverses; (3) Die Injektion $A' \hookrightarrow A$ besitzt ein Linksinverses.

2.2.13. Man nennt ganz allgemein einen surjektiven Gruppenhomomorphismus, der ein Rechtsinverses besitzt, einen **spaltenden surjektiven Gruppenhomomorphismus** und einen injektiven Gruppenhomomorphismus, der ein Linksinverses besitzt, einen **spaltenden injektiven Gruppenhomomorphismus**. Dieselbe

Terminologie verwendet man bei Moduln über Ringen und auch in noch größerer Allgemeinheit. In welcher Bedeutung das jeweils gemeint ist, ob also die fraglichen Halbinversen Gruppenhomomorphismen, Modulhomomorphismen oder irgendeine andere Art von Morphismen sein sollen, gilt es jeweils aus dem Kontext zu erschließen.

Übung 2.2.14. Eine abelsche Gruppe F heißt **frei**, wenn sie isomorph ist zur freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}M$ über einer Menge M . Man zeige, daß jede Surjektion von einer beliebigen abelschen Gruppe auf eine freie abelsche Gruppe spaltet.

Übung 2.2.15. Sei gegeben ein kommutatives (3×3) -Diagramm von Kettenkomplexen mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & B'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C' & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & C'' \end{array}$$

So kommutiert das Diagramm der Randoperatoren der zugehörigen langen exakten Homologiesequenzen bis auf ein Vorzeichen, und zwar kommutiert genauer das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_q C'' & \xrightarrow{\hat{\partial}} & \mathcal{H}_{q-1} C' \\ \hat{\partial} \downarrow & & \downarrow -\hat{\partial} \\ \mathcal{H}_{q-1} A'' & \xrightarrow{\hat{\partial}} & \mathcal{H}_{q-2} A' \end{array}$$

Übung 2.2.16 (Erweiterte Natürlichkeit der Homologiesequenz). Gegeben ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} & & B' & \hookrightarrow & C' & \twoheadrightarrow & D' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C & & \end{array}$$

gibt es eine wohlbestimmte Abbildung $\mathcal{H}_q D' \rightarrow \mathcal{H}_{q-1} A$, für die die Klasse eines Zyklus $d' \in \mathcal{Z}_q D'$ genau dann auf die Klasse von $a \in \mathcal{Z}_{q-1} A$ abgebildet wird, wenn es ein Urbild $c' \in C'_q$ von d' gibt und ein Urbild $\beta' \in B'_{q-1}$ von $\partial c'$ und ein Urbild $b \in B_q$ vom Bild $c \in C_q$ von c' mit $a = \partial b - \beta$ für $\beta \in B_{q-1}$ das Bild von β' . Mit dieser Abbildung erhalten wir einen Morphismus der langen exakten Homologiesequenz der oberen Horizontale in die durch Negativmachen aller $\mathcal{H}_q A \rightarrow \mathcal{H}_q B$ abgeänderte lange exakte Homologiesequenz der unteren Horizontale

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \rightarrow & \mathcal{H}_{q+1} D' & \rightarrow & \mathcal{H}_q B' & \rightarrow & \mathcal{H}_q C' & \rightarrow & \mathcal{H}_q D' & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & \mathcal{H}_q A & \xrightarrow{-1} & \mathcal{H}_q B & \rightarrow & \mathcal{H}_q C & \rightarrow & \mathcal{H}_{q-1} A & \xrightarrow{-1} & \dots \end{array}$$

Jedes kommutative Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & B' & \twoheadrightarrow & C' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & B & \hookrightarrow & C \twoheadrightarrow D \end{array}$$

liefert auch einen Morphismus der zugehörigen langen exakten Sequenzen mit der Nullabbildung $\mathcal{H}_{q-1}A' \rightarrow \mathcal{H}_q D$. Eigentlich sollte man auch hier Vorzeichen einführen, aber in diesem Fall ist es nicht nötig, weil Minus Null auch Null ist. In [TD] 2.6.32 werden wir beide Aussagen als eine Konsequenz des „Drehens ausgezeichneter Dreiecke“ zu verstehen lernen.

2.3 Ausschneidung und Anwendungen

Satz 2.3.1 (Ausschneidung). *Seien (X, Z) ein Raumpaard und $L \subset Z$ eine Teilmenge von Z , deren Abschluß im Inneren von Z liegt, in Formeln $\bar{L} \subset Z^\circ$. So liefert die Einbettung $(X \setminus L, Z \setminus L) \hookrightarrow (X, Z)$ Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen*

$$H_q(X \setminus L, Z \setminus L) \xrightarrow{\sim} H_q(X, Z)$$

2.3.2. Im Satz meinen wir mit $\bar{L} \subset Z^\circ$ die Bedingung $\text{Cl}_X(L) \subset \text{Of}_X(Z)$. Der Satz besagt salopp gesprochen, daß sich die relative Homologie nicht ändert, wenn wir die Menge L gleichzeitig sowohl aus X als auch aus Z ausschneiden. Eine alternative Formulierung ist

$$H_q(U, U \setminus A) \xrightarrow{\sim} H_q(X, X \setminus A)$$

für Teilmengen $U, A \subset X$ mit $\bar{A} \subset U^\circ$. Man erhält sie durch den Übergang zu den richtigen Komplementen.

2.3.3. Wir stellen den Beweis zurück und geben zunächst einige Anwendungen. Bezeichne $\partial\Delta_n \subset \Delta_n$ den anschaulichen Rand $\partial\Delta_n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0 \text{ für mindestens ein } i\}$ des n -ten Standardsimplex.

Satz 2.3.4 (Homologie von Simplizes relativ zu ihrem Rand). *Die Homologiegruppen $H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ der Standardsimplizes relativ zu ihrem Rand werden gegeben durch*

$$H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Des Weiteren ist die Klasse $[\tau_n]$ des tautologischen Simplex τ_n ein Erzeuger der relativen Homologiegruppe $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$.

2.3.5. Ein meiner Ansicht nach anschaulicherer Zugang zur Berechnung dieser Homologiegruppen vermittelt der „Mayer-Vietoris-Sequenz“ wird in 2.4.12 erklärt. Er liefert jedoch keine explizite Beschreibung eines Erzeugers, und diese explizite Beschreibung werden wir brauchen, um den Zusammenhang zwischen simplizialer und singulärer Homologie zu klären.

Beweis. Für $n = 0$ ist Δ_n ein Punkt und $\partial\Delta_n$ die leere Menge und der Satz ist unsere Aussage 1.2.13 über die Homologie eines Punktes. Den allgemeinen Fall folgern wir durch vollständige Induktion. Dazu betten wir Δ_n ein in Δ_{n+1} , indem wir als letzte Koordinate eine Null anfügen, und betrachten in Δ_{n+1} die Spitze $p = (0, 0, 0, \dots, 1)$, die der Seitenfläche $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ gegenüberliegt. Weiter betrachten wir die Vereinigung $\Lambda_{n+1} \subset \Delta_{n+1}$ aller Seitenflächen, die diese Spitze p enthalten, und die Isomorphismen

$$H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1} \setminus p, \Lambda_{n+1} \setminus p) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

wie sie von den Einbettungen aufgrund der Homotopieinvarianz und der Ausschneidung von p induziert. Die Randabbildung zur langen exakten Homologiesequenz des Tripels $(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$ liefert weiter Isomorphismen

$$H_{q+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

und die erste Behauptung folgt durch Induktion. Unter diesen Isomorphismen geht die Klasse $[\tau_{n+1}] \in H_{n+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1})$ über in $(-1)^{n+1}[\tau_n] \in H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$, und so ergibt sich auch die zweite Behauptung mit vollständiger Induktion. \square

Korollar 2.3.6 (Homologie von Bällen relativ zu ihrem Rand). Für $n \geq 0$ wird die Homologie des n -Balls relativ zu seinem Rand gegeben durch die Formeln

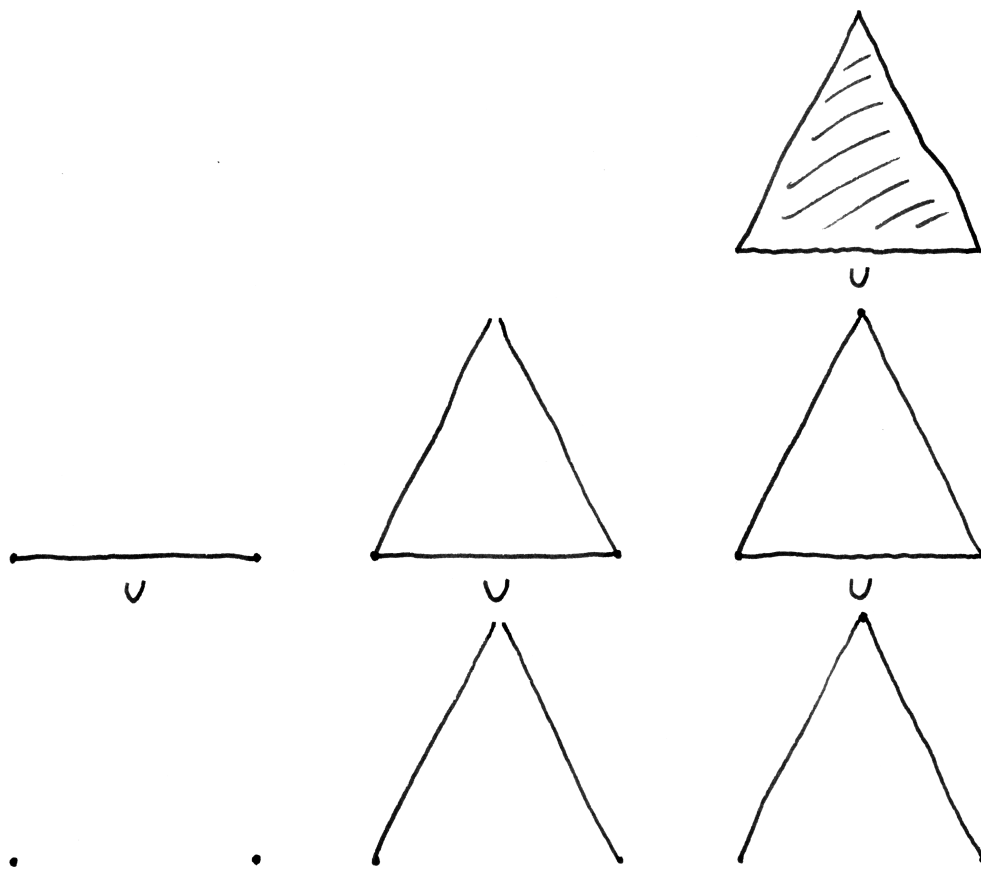
$$H_q(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Das folgt sofort aus 2.3.4, da es etwa nach [TM] 1.4.12 einen Homöomorphismus $\Delta_n \xrightarrow{\sim} D^n$ gibt, der eine Bijektion $\partial\Delta_n \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$ induziert. Alternativ folgt es auch aus dem anschließenden Satz. \square

Satz 2.3.7 (Homologie der Sphären). Die Homologiegruppen der Sphären S^n werden für $n \geq 1$ gegeben durch

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \text{ oder } q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Nullsphäre S^0 besteht schlicht aus zwei Punkten, wir haben in diesem Fall also $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sowie $H_q(S^0) = 0$ für $q > 0$.



Die Raumpaare und das Raumtripel aus dem Beweis von 2.3.4 im Fall $n = 1$.

Beweis. Das ergibt sich aus dem vorhergehenden Korollar 2.3.6 mit der langen exakten Homologiesequenz des Raumpaars (D^{n+1}, S^n) . Einen alternativen und vielleicht anschaulicheren Beweis mithilfe der „Mayer-Vietoris-Sequenz“ geben wir in 2.4.12. Er hat allerdings den Nachteil, keinen expliziten Erzeuger der Homologie zu liefern. \square

2.3.8. Gegeben ein punktierter topologischer Raum (X, x) nennt man seine Homologie $H_q(X, X \setminus x)$ relativ zum Komplement des ausgezeichneten Punktes auch seine **lokale Homologie**.

Korollar 2.3.9 (Lokale Homologie reeller Vektorräume). Für $n \geq 0$ und jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere sind \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m für $n \neq m$ nicht homöomorph.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x = 0$ annehmen. Die Einbettung $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$ induziert nun aufgrund der Homotopieinvarianz 2.2.7 Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen und die Aussage folgt so aus 2.3.6. \square

2.3.10 (**Wahl von Erzeugern**). Bis hierher haben wir die Frage offengelassen, wie man sinnvoll Erzeuger von $H_n(D^n, S^{n-1})$, $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$ und $H_n S^n$ auszeichnen kann. In meinen Augen ist es besonders sinnvoll, mit demjenigen Erzeuger $\tau \in H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus 0)$ zu beginnen, der durch die Klasse des relativen Einszykels $[-1, 1]$ gegeben wird, also durch die affine Abbildung $\Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $e_0 \mapsto -1$ und $e_1 \mapsto 1$. Dann liefert das Kreuzprodukt der relativen Homologie 5.7.12 einen ausgezeichneten Erzeuger

$$\tau^{\times n} \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$$

für alle $n \geq 0$. Daraus erhalten wir mit dem durch die Einbettung gegebenen Isomorphismus $H_n(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$ ausgezeichnete Erzeuger von $H_n(D^n, S^{n-1})$ und mit dem Randoperator ausgezeichnete Erzeuger von $H_n S^n$ für $n \geq 1$ und allgemeiner ausgezeichnete Erzeuger der in 3.3.5 eingeführten reduzierten Homologie $\tilde{H}_n S^n$ für $n \geq -1$. Wie nennen sie unsere **Standarderzeuger**. Damit wir auch hier schon mit diesen Standarderzeugern arbeiten können, geben wir eine explizite Beschreibung und definieren unsere Standarderzeuger

$$\eta_n \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$$

vorerst dadurch, dass sie durch den affinen n -Simplex $[(-\sum e_i), e_1, \dots, e_n]$ repräsentiert werden, eine stetige Abbildung $\Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Da diese Abbildung eine

Homotopieäquivalenz von Raumpaaren $(\Delta_n, \partial\Delta_n) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ induziert und da η_n das Bild der Klasse des tautologischen n -Simplex, die wiederum nach 2.3.4 ein Erzeuger von $[\tau_n] \in H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ ist, erhalten wir so in der Tat einen Erzeuger η_n der lokalen Homologie des \mathbb{R}^n am Ursprung. Die Kompatibilität mit dem Kreuzprodukt wird in Übung 5.8.7 gezeigt.

Korollar 2.3.11 (Unmöglichkeit der Retraktion eines Balls auf seinen Rand).

Sei $n \geq -1$. Es gibt keine stetige Abbildung $r : D^{n+1} \rightarrow S^n$ des $(n+1)$ -Balls auf seine Randsphäre, deren Einschränkung auf die Randsphäre S^n die Identität ist.

Beweis. Sei $i : S^n \hookrightarrow D^{n+1}$ die Einbettung. Aus $r \circ i = \text{id}$ folgt, daß die Verküpfung

$$H_n S^n \rightarrow H_n D^{n+1} \rightarrow H_n S^n$$

von Hr mit Hi die Identität ist. Die Identität auf \mathbb{Z} kann aber nicht über 0 faktorisieren und das erledigt den Fall $n \geq 1$. Im Fall $n = 0$ argumentiert man analog, daß die Identität auf \mathbb{Z}^2 nicht über \mathbb{Z} faktorisieren kann. Der Fall $n = -1$ ist eh klar. \square

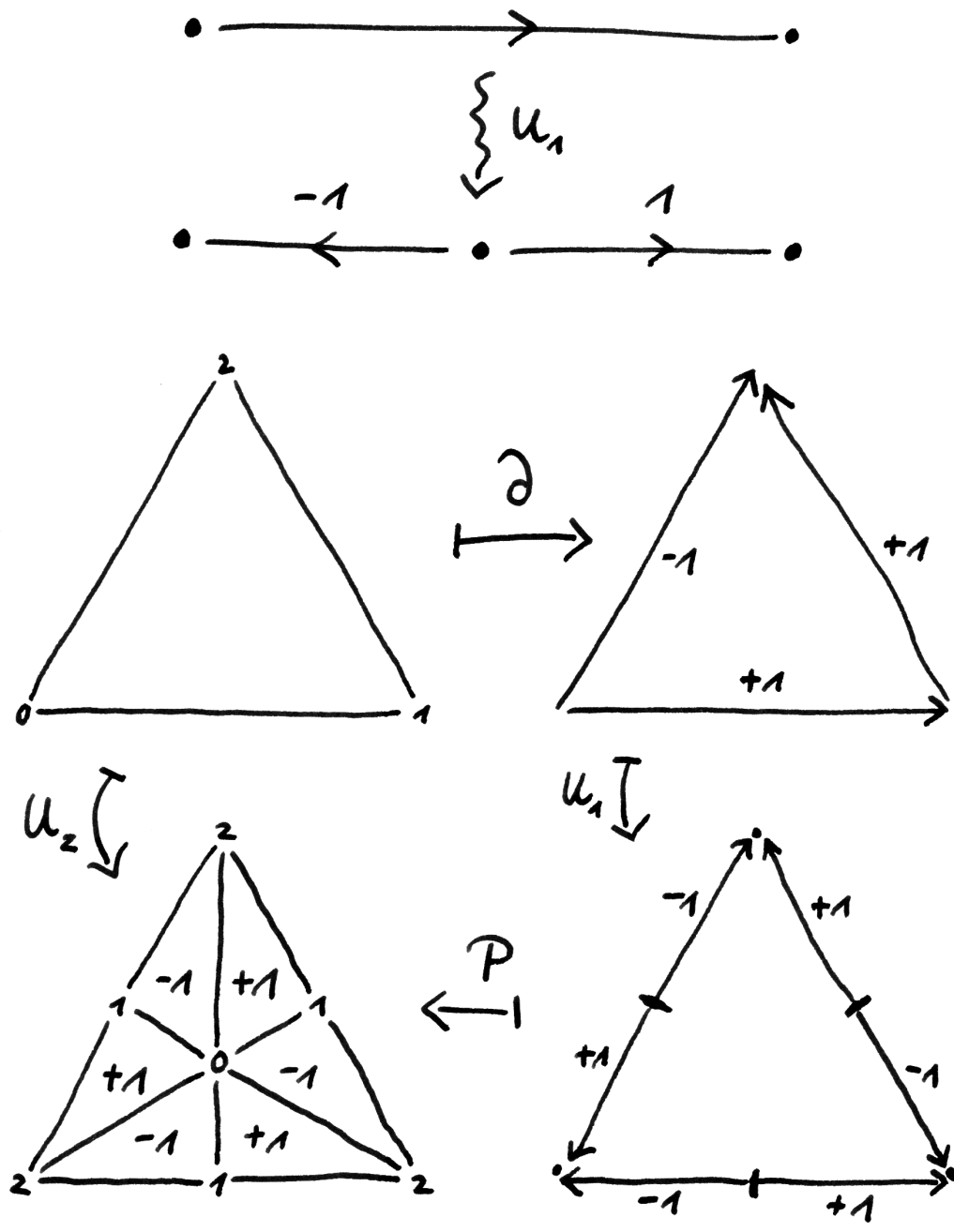
Satz 2.3.12 (Fixpunktsatz von Brouwer). Jede stetige Selbstabbildung des abgeschlossenen n -Balls besitzt einen Fixpunkt.

Beweis. Sei $f : D^n \rightarrow D^n$ stetig. Hätte f keinen Fixpunkt, so könnte man eine stetige Abbildung $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ konstruieren durch die Vorschrift, daß $r(x)$ der Punkt ist, in dem der Strahl, der von $r(x)$ ausgeht und durch x läuft, die Sphäre S^{n-1} trifft. Das stünde jedoch im Widerspruch zum vorhergehenden Korollar 2.3.11. \square

2.4 Beweis des Ausschneidungssatzes

2.4.1. Wir beginnen nun mit den Vorbereitungen zum Beweis des Ausschneidungssatzes. Die zentrale Rolle spielen hier die **Unterteilungsoperatoren** $U_q : S_q X \rightarrow S_q X$, die jeden Simplex „baryzentrisch unterteilen“. Wir konstruieren sie als Transformationen $U_q : S_q \Rightarrow S_q$. Um solche Transformationen festzulegen, brauchen wir ja nach Lemma 1.4.6 nur das Bild des tautologischen q -Simplex $U_q(\tau_q) \in S_q(\Delta_q)$ anzugeben. Für jede konvexe Teilmenge K eines \mathbb{R}^n und jeden Punkt $s \in K$ erinnern wir dazu an den Prismen-Operator $P = P^s : S_q K \rightarrow S_{q+1} K$ aus dem Beweis von 1.2.17. Dann setzen wir $U_q = 0$ für $q < 0$ und definieren U_q für $q \geq 0$ induktiv vermittle der Vorschrift $U_0(\tau_0) := \tau_0$ und $U_q(\tau_q) := P^{s(q)} U_{q-1}(\partial\tau_q)$ für $q > 0$, wo $P^{s(q)}$ den Prismenoperator bezüglich des Schwerpunkts $s(q) := \frac{1}{q+1}(1, 1, \dots, 1)$ von Δ_q bezeichnet.

Lemma 2.4.2. Die Unterteilung $U : SX \rightarrow SX$ ist eine Kettenabbildung.



Der Effekt der Unterteilungsoperatoren U_1 und U_2 auf Simplizes. Die Zahlen an den Ecken der Dreiecksflächen zeigen wieder, wohin die Vektoren der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des \mathbb{R}^3 , deren konvexe Hülle ja der Standardsimplex Δ_2 ist, abgebildet werden.

Beweis. Es gilt zu zeigen $\partial U_q = U_{q-1} \partial$ für alle q . Wir zeigen die Gleichheit durch Induktion über q . Wegen 1.4.6 reicht es, die Gleichheit auf τ_q zu zeigen. Die Fälle $q = 0, 1$ überlassen wir dem Leser. Für $q \geq 2$ und $P = P^{s(q)}$ haben wir

$$\begin{aligned} \partial U_q(\tau_q) &= \partial P U_{q-1} \partial(\tau_q) \\ &= (-P \partial + \text{id}) U_{q-1} \partial(\tau_q) \\ &= U_{q-1} \partial(\tau_q) \end{aligned}$$

Die erste Gleichung nach Definition, die zweite da $\partial P + P \partial = \text{id}$ auf $S_q \Delta_q$ für $q \geq 1$, die dritte da $\partial U_{q-1} = U_{q-2} \partial$ nach Induktion. \square

Lemma 2.4.3. *Die Unterteilung ist in natürlicher Weise kettenhomotop zur Identität, als da heißt, es gibt Transformationen*

$$T_q : S_q \Rightarrow S_{q+1}$$

mit $\partial T_q + T_{q-1} \partial = U_q - \text{id}$ für alle q . Insbesondere induziert U die Identität auf der Homologie.

Vorschau 2.4.4. Dies Lemma wird sich später als eine Konsequenz des Satzes über azyklische Modelle 5.6.23 erweisen.

Beweis. Wir versuchen induktiv mögliche Transformationen T_q zu finden und müssen nur $T_q(\tau_q) \in S_{q+1}(\Delta_q)$ angeben. Wir können mit $T_{-1} = T_0 = 0$ beginnen und müssen dann induktiv die Gleichungen

$$\partial T_q(\tau_q) = -T_{q-1} \partial(\tau_q) + U_q(\tau_q) - \tau_q$$

lösen. Wegen $H_q(\Delta_q) = 0$ für $q \geq 1$ sind diese Gleichungen lösbar, wenn die rechte Seite ein Zykel ist. Dazu rechnen wir nur mit der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} -\partial T_{q-1}(\partial \tau_q) + \partial U_q(\tau_q) - \partial \tau_q &= \\ &= (T_{q-2} \partial - U_{q-1} + \text{id})(\partial \tau_q) + \partial U_q(\tau_q) - \partial \tau_q = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Definition 2.4.5. Gegeben ein System $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen eines topologischen Raums X bezeichne $S_q^\mathcal{V} X \subset S_q X$ die freie Gruppe über allen denjenigen Simplizes, die ganz in einem der $V \in \mathcal{V}$ liegen. Wir nennen $S_q^\mathcal{V} X$ die Gruppe der \mathcal{V} -feinen Ketten.

Satz 2.4.6 (über feine Ketten). *Sei \mathcal{V} eine Überdeckung eines Raums X derart, daß selbst die offenen Kerne der Mengen aus \mathcal{V} schon X überdecken, in Formeln $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V^\circ$. So induziert die Einbettung $S^\mathcal{V} X \hookrightarrow SX$ vom Komplex der \mathcal{V} -feinen Ketten in den Komplex aller singulären Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.*

Vorschau 2.4.7. Mit 6.2.4 wird aus diesem Resultat folgen, daß unsere Einbettung sogar eine Homotopieäquivalenz $S^\vee X \xrightarrow{\sim} SX$ ist.

Beweis. Mit der langen exakten Homologiesequenz müssen wir nur zeigen, daß die Homologie von $SX/S^\vee X$ verschwindet. Nun bilden unsere Abbildungen U und T sicher $S^\vee X$ auf sich selber ab und induzieren also Operatoren \bar{U}, \bar{T} auf dem Quotienten. Offensichtlich ist auch \bar{U} homotop zur Identität vermittle \bar{T} und liefert also die Identität auf den Homologiegruppen von $SX/S^\vee X$. Für jedes q und jede Kette $\gamma \in S_q X$ gibt es aber nach dem anschließenden Lemma 2.4.8 ein $n \gg 0$ mit $U^n \gamma \in S_q^\vee X$, also $\bar{U}^n \bar{\gamma} = 0$ für $\bar{\gamma} \in S_q X/S_q^\vee X$ die Nebenklasse von γ . Wir folgern $\mathcal{H}_q(SX/S^\vee X) = 0$. \square

Lemma 2.4.8. *Sei \mathcal{V} eine offene Überdeckung eines Raums X . Für jedes q und jede Kette $\gamma \in S_q X$ gibt es dann $n \in \mathbb{N}$ mit $U^n \gamma \in S_q^\vee X$.*

2.4.9. Dieselbe Aussage folgt unmittelbar, wenn wir statt eine offenen Überdeckung zu betrachten wie oben schwächer nur annehmen, daß die offenen Kerne der Mengen aus \mathcal{V} bereits X überdecken.

Beweis. Es reicht sicher, das Lemma für jeden Simplex $\gamma : \Delta_q \rightarrow X$ zu zeigen. Nun sieht man, daß der maximale Durchmesser eines Simplex, der mit von Null verschiedenem Koeffizienten in $U^n(\tau_q)$ vorkommt, für $n \rightarrow \infty$ beliebig klein wird. Insbesondere ist für $n \gg 0$ nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue jeder solche Simplex ganz in einer der Mengen $\gamma^{-1}(V)$ mit $V \in \mathcal{V}$ enthalten. Das bedeutet aber gerade $U^n \gamma \in S_q^\vee X$. \square

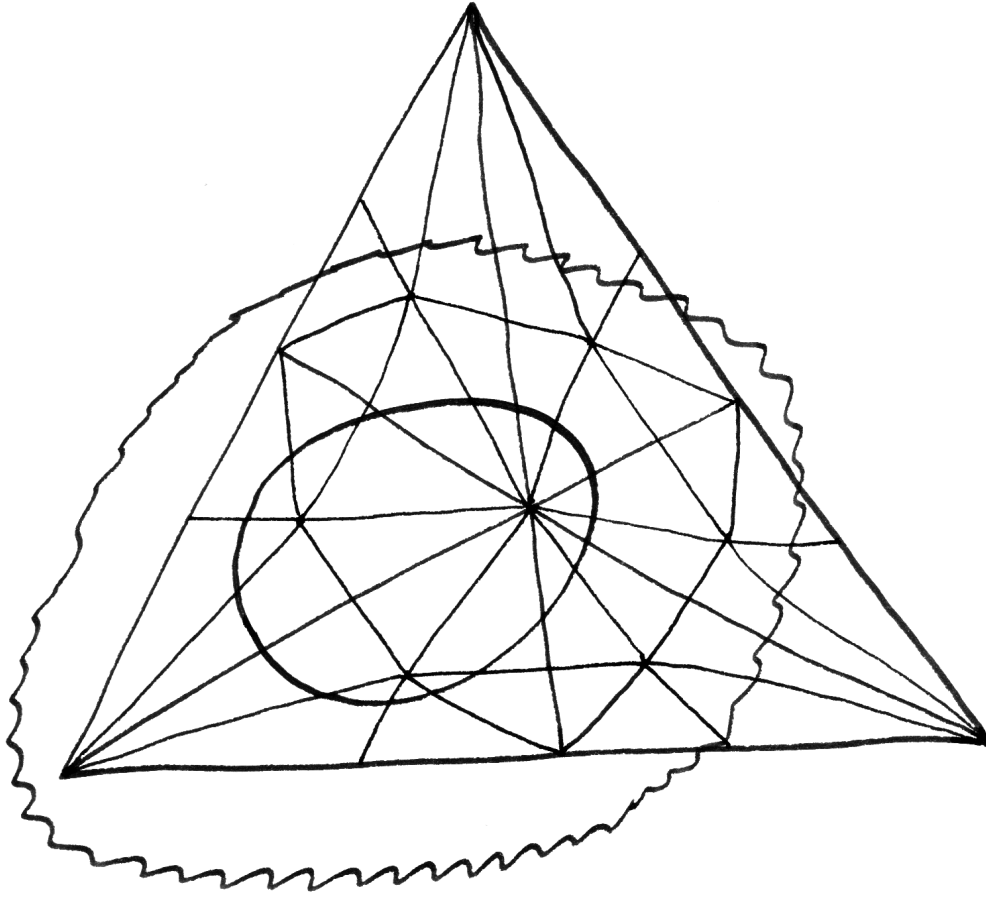
Satz 2.4.10 (Ausschneidung). *Sei (X, Z) ein Raumpaard und $L \subset Z$ eine Teilmenge, deren Abschluß im Inneren von Z liegt, in Formeln $\text{Cl}_X(L) \subset \text{Inn}_X(Z)$. So liefert die Einbettung $(X \setminus L, Z \setminus L) \hookrightarrow (X, Z)$ Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen*

$$H_q(X \setminus L, Z \setminus L) \xrightarrow{\sim} H_q(X, Z)$$

Beweis. Wir betrachten die Überdeckung $X = Z \cup (X \setminus L)$, geben ihr den Namen \mathcal{V} und bilden ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} S(Z \setminus L) & \hookrightarrow & SZ \oplus S(X \setminus L) & \twoheadrightarrow & S^\vee X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(X \setminus L) & \hookrightarrow & SX \oplus S(X \setminus L) & \twoheadrightarrow & SX \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(X \setminus L, Z \setminus L) & \twoheadrightarrow & S(X, Z) & \twoheadrightarrow & SX/S^\vee X \end{array}$$

Hier ist zu verstehen, daß die beiden oberen horizontalen Inklusionen die „diagonalen“ Einbettungen $z \mapsto (z, z)$ sein sollen und die folgenden Surjektionen die



Dieses Bild soll Anschauung für den Ausschneidungsisomorphismus geben. X ist darin die Papierebene, Z alles außerhalb des kleinen Eis und L alles außerhalb der Zackenlinie. Das große Dreieck stellt einen singulären Zweisimplex in X dar, der relativ zu Z ein Zykel ist, da eben sein Rand in Z liegt. Nach zweimaliger baryzentrischer Unterteilung entsteht diese Art Spinnennetz, eine zu unserem Zweisimplex homologe singuläre Zweikette. Lassen wir aus dieser Zweikette alle Simplizes fort, die nicht in $X \setminus L$ liegen, die also aus unserer Zackenlinie herauspieken, so repräsentiert der Rest immer noch dieselbe Homologieklassse in der relativen Homologie $H_2(X, Z)$, die folglich herkommt von einer Homologieklassse in $H_2(X \setminus L, Z \setminus L)$. Damit sollte zumindest die Surjektivität der von der Einbettung $(X \setminus L, Z \setminus L) \hookrightarrow (X, Z)$ auf der Homologie induzierten Abbildung anschaulich klar werden.

Differenzen $(x, y) \mapsto x - y$. Nach dem Neunerlemma ist die untere Horizontale dann auch exakt, und da nach dem Satz über feine Ketten 2.4.6 die Homologie von $SX/S^\vee X$ verschwindet, folgt unser Satz aus der langen exakten Homologiesequenz. \square

2.4.11. Sei $X = X_1 \cup X_2$ ein topologischer Raum mit einer Überdeckung \mathcal{V} durch zwei offene Teilmengen. Wir betrachten die Einbettungen

$$(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_\nu} X_\nu \xrightarrow{j_\nu} X$$

und erhalten eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$S(X_1 \cap X_2) \hookrightarrow SX_1 \oplus SX_2 \twoheadrightarrow S^\vee X$$

Hier fassen wir die Elemente der direkten Summe als Spaltenvektoren auf, die erste Abbildung wird gegeben durch die Spaltenmatrix $(Si_1, Si_2)^\top$, und die zweite durch die Zeilenmatrix $(Sj_1, -Sj_2)$. Nehmen wir dazu die lange exakte Homologiesequenz und verwenden die von der Einbettung $S^\vee X \hookrightarrow SX$ induzierten Identifikationen $\mathcal{H}_q(S^\vee X) \xrightarrow{\sim} H_q X$, so erhalten wir die sogenannte **Mayer-Vietoris-Sequenz**, eine lange exakte Sequenz der Gestalt

$$\dots H_q(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \dots$$

Die ersten beiden Abbildungen dieser Sequenz werden gegeben durch die Spaltenmatrix $(H_q i_1, H_q i_2)^\top$ und die Zeilenmatrix $(H_q j_1, -H_q j_2)$. Die dritte Abbildung ist nicht ganz so leicht explizit anzugeben.

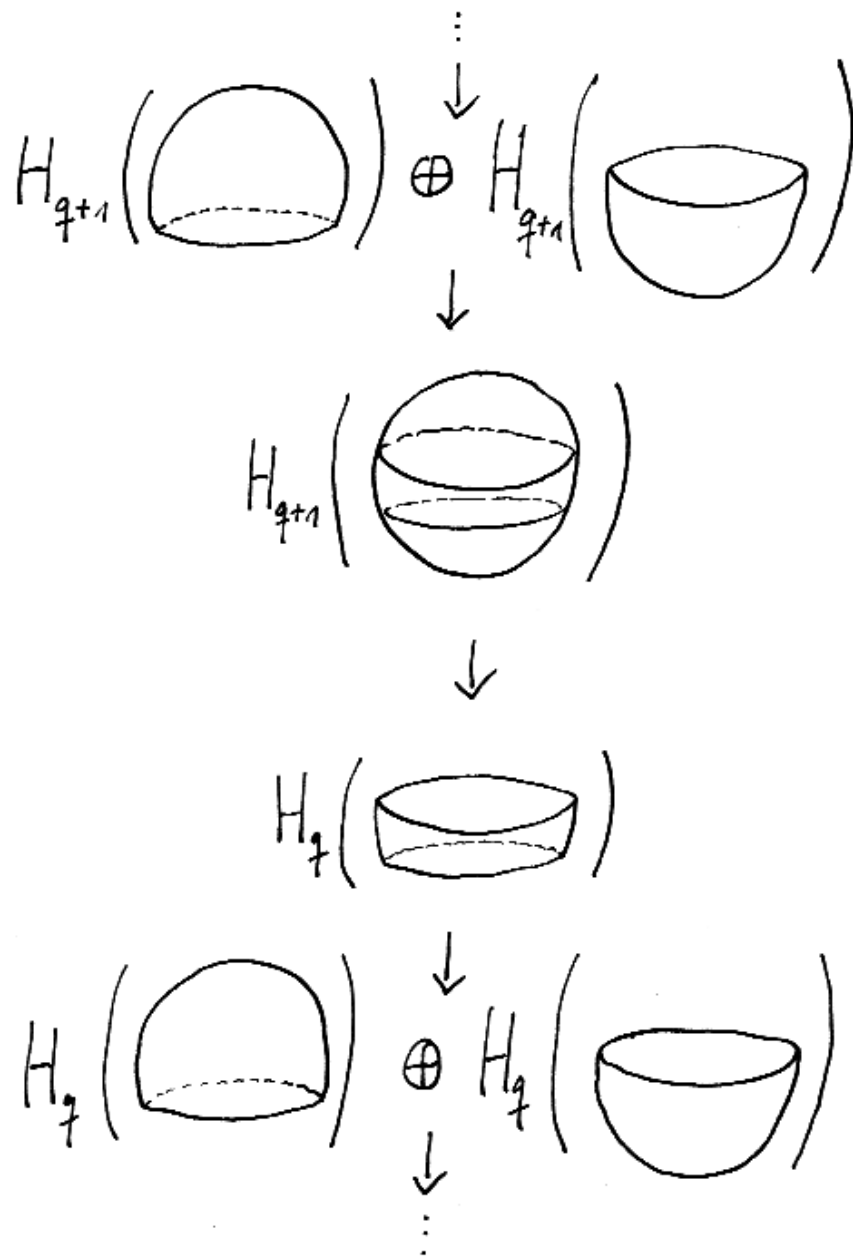
Beispiel 2.4.12 (Homologie der Sphären, Variante). Mithilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz 2.4.11 bestimmen wir ein weiteres Mal die Homologie der Sphären. Man schreibt für diesen Beweis die Kugelschale als die Vereinigung zweier offener etwas über den Äquator hinaus verdickter Hemisphären $S^n = U^+ \cup U^-$ und erhält nach 2.4.11 eine lange exakte Sequenz

$$H_q(U^+) \oplus H_q(U^-) \rightarrow H_q(S^n) \rightarrow H_{q-1}(U^+ \cap U^-) \rightarrow H_{q-1}(U^+) \oplus H_{q-1}(U^-)$$

und so weiter. Der Schnitt $U^+ \cap U^-$ ist homotopieäquivalent zum Äquator S^{n-1} und die Hemisphären sind beide zusammenziehbar und haben folglich dieselbe Homologie wie ein Punkt. Man sieht nun explizit leicht ein, daß wir für $n = 0, 1$ das behauptete Ergebnis erhalten, und für $n \geq 2$ folgt durch Betrachten der obigen Sequenz

$$H_q(S^n) \xrightarrow{\sim} H_{q-1}(U^+ \cap U^-) \cong H_{q-1}(S^{n-1})$$

für $q \geq 2$ und $H_1(S^n) = 0$ und $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Die Homologie der Sphären ergibt sich durch vollständige Induktion. Diese Herleitung gefällt mir eigentlich besser als die Herleitung aus 2.3.4, sie liefert jedoch nicht unmittelbar die Beschreibung eines Erzeugers der Homologie.



Berechnung der Homologie der Sphäre mithilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz.

Übungen

Übung 2.4.13. Man zeige, daß es nicht möglich ist, die Kreislinie durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen mit zusammenhängendem Schnitt zu überdecken. Man zeige, daß es nicht möglich ist, die Sphäre durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen mit einfach wegzusammenhängendem Schnitt zu überdecken. Hinweis: Mayer-Vietoris-Sequenz.

Übung 2.4.14 (Relative Mayer-Vietoris-Sequenz). Sei X ein topologischer Raum und seien $U, V \subseteq X$ zwei offene Teilmengen. Betrachten wir die offene Überdeckung von $U \cup V$ durch U und V und bilden das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 S(U \cap V) & \hookrightarrow & SU \oplus SV & \twoheadrightarrow & S^{\vee}(U \cup V) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 SX & \hookrightarrow & SX \oplus SX & \twoheadrightarrow & SX \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 S(X, U \cap V) & \hookrightarrow & S(X, U) \oplus S(X, V) & \twoheadrightarrow & S(X)/S^{\vee}(U \cup V)
 \end{array}$$

mit „diagonalen“ Abbildungen in den linken Horizontalen und „Differenzen von erstem minus zweitem Term“ in den rechten Horizontalen, so entsteht in der unteren Zeile eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Die natürliche Surjektion $S(X)/S^{\vee}(U \cup V) \twoheadrightarrow S(X, U \cup V)$ induziert weiter Isomorphismen auf der Homologie, und so erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_q(X, U) \oplus H_q(X, V) \rightarrow H_q(X, U \cup V) \rightarrow H_{q-1}(X, U \cap V) \rightarrow \dots$$

und die Randoperatoren dieser Sequenz bilden mit den Randoperatoren der Mayer-Vietoris-Sequenz und den Randoperatoren der langen exakten Homologiesequenzen nach 2.2.15 ein bis auf Vorzeichen kommutierendes Viereck.

Ergänzende Übung 2.4.15. Sei (X, Z) ein Raumpaard. Bezeichne X/Z den Raum mit Quotiententopologie, der entsteht, wenn man Z zu einem Punkt identifiziert. Man zeige: Ist Z abgeschlossen und gibt es U mit $Z \subset U^\circ \subset X$ derart, daß die Einbettungen $Z \hookrightarrow U$ und $Z/Z \hookrightarrow U/Z$ Homotopieäquivalenzen sind, so liefert die offensichtliche Abbildung Isomorphismen

$$H_q(X, Z) \xrightarrow{\sim} H_q(X/Z, Z/Z)$$

Hinweis: Ausschneidung.

Übung 2.4.16 (Ausschneidung und Mayer-Vietoris). Sei $X = U \cup V$ ein topologischer Raum mit einer Überdeckung durch zwei offene Teilmengen. Man zeige, daß die Verknüpfungen

$$H_q(X, U) \xleftarrow{\sim} H_q(V, U \cap V) \rightarrow H_{q-1}(U \cap V)$$

eines umgedrehten Ausschneidungsisomorphismus mit einem Randoperator zusammen mit den offensichtlichen anderen Vertikalen einen Homomorphismus

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & H_q(U \cap V) & \rightarrow & H_q U \oplus H_q V & \rightarrow & H_q X & \rightarrow & H_{q-1}(U \cap V) & \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \uparrow & \\
 \dots & H_{q+1}(X, U) & \rightarrow & H_q U & \rightarrow & H_q X & \xrightarrow{-1} & H_q(X, U) & \dots
 \end{array}$$

von der wie angedeutet durch Vorzeichen leicht veränderten langen Homologiesequenz des Raumpaars (X, U) zur Mayer-Vietoris-Sequenz liefern. Hinweis: Man mag das als Spezialfall von 2.2.16 verstehen, aber eine direkte Argumentation scheint mir eher einfacher.

3 Homologie verklebter Räume

3.1 Singuläre Homologie von Simplizialkomplexen

3.1.1. Zu jedem Simplizialkomplex $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ haben wir in [TF] 2.7.8 einen topologischen Raum $\Delta(\mathcal{K})$ konstruiert, seine **geometrische Realisierung**. Sie besteht aus gewissen Abbildungen $t : E \rightarrow \mathbb{R}$.

3.1.2 (**Standardsimplex als geometrische Realisierung**). Wir betrachten den maximalen Simplizialkomplex $\mathcal{M}_{[q]}$ mit Eckenmenge $[q] := \{0, 1, \dots, q\}$. Wir erinnern andererseits unseren Standardsimplex $\Delta_q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ aus 1.2.2 und erhalten einen Homöomorphismus

$$\tau = \tau_q : \Delta_q \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{M}_{[q]})$$

zwischen dem Standard- q -Simplex und dem vollen Simplex zur Eckenmenge $[q]$ durch $(x_0, \dots, x_q) \mapsto t$ mit $x_i = t(i)$.

Definition 3.1.3. Seien \mathcal{K} ein Simplizialkomplex und $\Delta(\mathcal{K})$ seine geometrische Realisierung. Ein singulärer Simplex alias eine stetige Abbildung

$$\sigma : \Delta_q \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$$

heiße **simplizialsingulär**, wenn er durch Vorschalten unseres Homöomorphismus $\tau : \Delta_q \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{M}_{[q]})$ aus der geometrischen Realisierung einer simplizialen Abbildung $\tilde{\sigma} : \mathcal{M}_{[q]} \rightarrow \mathcal{K}$ hervorgeht. Im Komplex der singulären Ketten der geometrischen Realisierung erklären wir den Unterkomplex der **simplizialsingulären Ketten**

$$S^s\Delta(\mathcal{K}) \subset S\Delta(\mathcal{K})$$

durch die Vorschrift, daß $S^s_q\Delta(\mathcal{K})$ das Erzeugnis der simplizialsingulären q -Simplexes sein soll.

3.1.4. Simpliziale Abbildungen brauchen keineswegs injektiv zu sein.

3.1.5 (**Simplizialketten, simplizialsinguläre Ketten und singuläre Ketten**). Für einen Simplizialkomplex \mathcal{K} haben wir damit drei Kettenkomplexe erklärt, nämlich den besonders kleinen und anschaulichen Komplex der Simplizialketten $S\mathcal{K}$ aus 1.1.5, den unglaublich riesigen Komplex aller singulären Ketten seiner geometrischen Realisierung $S\Delta(\mathcal{K})$ aus 1.2 und darin den Unterkomplex $S^s\Delta(\mathcal{K}) \subset S\Delta(\mathcal{K})$ aller simplizialsingulären Ketten aus 3.1.3. Im folgenden konstruieren wir Kettenabbildungen zwischen diesen Komplexen und zeigen, daß sie Isomorphismen auf der Homologie induzieren. Diese Brücke ist für mich der Hauptweg zur Anschauung in der singulären Homologietheorie, ja in der Homologietheorie überhaupt.

3.1.6 (Von simplizialsingulären Ketten zu Simplizialketten). Sei \mathcal{K} ein Simplizialkomplex. Wir erklären Homomorphismen

$$\text{komb} : S_q^s \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S_q \mathcal{K}$$

von den simplizialsingulären Ketten in die Simplizialketten, indem wir zu jedem simplizialsingulären Simplex $\sigma : \Delta_q \hookrightarrow \Delta(\mathcal{K})$ die simpliziale Abbildung $\tilde{\sigma} : \mathcal{M}_{[q]} \rightarrow \mathcal{K}$ betrachten mit $\sigma = \Delta(\tilde{\sigma}) \circ \tau$ und dann setzen $\text{komb}(\sigma) := [(\tilde{\sigma}(0), \dots, \tilde{\sigma}(q))]$ falls $\tilde{\sigma}$ injektiv ist und $\text{komb}(\sigma) := 0$ sonst. Wir prüfen, daß diese Homomorphismen in ihrer Gesamtheit einen Morphismus von Kettenkomplexen

$$\text{komb} : S^s \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S\mathcal{K}$$

bilden. Um das zu sehen, muß man nur die Verträglichkeit mit den Randoperatoren nachzuweisen. Das ist nicht schwer und sei dem Leser überlassen. Gegeben ein weiterer Simplizialkomplex \mathcal{L} und eine simpliziale Abbildung $\varphi : (E, \mathcal{K}) \rightarrow (F, \mathcal{L})$ im Sinne von [TF] 2.7.12 erhalten wir mit besagten Abbildungen in den Horizontalen darüberhinaus ein kommutatives Quadrat von Kettenabbildungen

$$\begin{array}{ccc} S^s \Delta(\mathcal{K}) & \rightarrow & S\mathcal{K} \\ S\Delta(\varphi) \downarrow & & \downarrow S\varphi \\ S^s \Delta(\mathcal{L}) & \rightarrow & S\mathcal{L} \end{array}$$

mit derjenigen Abbildung $S\varphi : S\mathcal{K} \rightarrow S\mathcal{L}$ als rechter Vertikale, die die Klasse eines angeordneten Simplex $\sigma : \{0, 1, \dots, q\} \hookrightarrow E$ auf die Klasse des angeordneten Simplex $\varphi \circ \sigma : \{0, 1, \dots, q\} \hookrightarrow F$ wirft, falls $\varphi \circ \sigma$ injektiv ist, und auf Null sonst. Der Leser wird unschwer prüfen können, daß $S\varphi$ in der Tat eine Kettenabbildung ist und daß damit unser Quadrat kommutiert.

Satz 3.1.7 (Simpliziale als singuläre Homologie). Für jeden Simplizialkomplex \mathcal{K} induzieren die Kettenabbildungen aus 3.1.6 von den simplizialsingulären Ketten in die Simplizialketten sowie die Einbettung der simplizialsingulären Ketten in die singulären Ketten $S\mathcal{K} \leftarrow S^s \Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S\Delta(\mathcal{K})$ Isomorphismen auf allen Homologiegruppen

$$H_q \mathcal{K} \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}_q(S^s \Delta(\mathcal{K})) \xrightarrow{\sim} H_q(\Delta(\mathcal{K}))$$

3.1.8. Aus 3.1.6 folgt mit den Isomorphismen des Satzes für jede simpliziale Abbildung $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} H_q \mathcal{K} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{H}_q(S^s \Delta(\mathcal{K})) & \xrightarrow{\sim} & H_q(\Delta(\mathcal{K})) & & \\ H_q \varphi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow H_q \Delta(\varphi) & & \\ H_q \mathcal{L} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{H}_q(S^s \Delta(\mathcal{L})) & \xrightarrow{\sim} & H_q(\Delta(\mathcal{L})) & & \end{array}$$

mit $H_q \varphi := \mathcal{H}_q(S\varphi)$ für die Kettenabbildung $S\varphi$ aus 3.1.6 als linker Vertikale.

Vorschau 3.1.9. Aus 6.2.4 und 3.1.6 wird sogar folgen, daß die fraglichen Kettenabbildungen Homotopieäquivalenzen sind.

Beweis. Ich erinnere daran, daß wir unter einem Simplizialkomplex ein Datum (E, \mathcal{K}) verstehen aus einer Menge E von „Ecken“ und einem Mengensystem $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ mit gewissen Eigenschaften und daß wir die Elemente unseres Mengensystems \mathcal{K} die „kombinatorischen Simplizes“ unseres Simplizialkomplexes nennen. Wir wählen nun eine Teilordnung \leq auf der Menge E der Ecken von \mathcal{K} , die auf jedem kombinatorischen Simplex eine Anordnung induziert. So eine Teilordnung nennen wir eine **simpliziale Teilordnung**. Nach [LA1] 1.9.23 ist es sogar stets möglich, eine Anordnung der Menge aller Ecken zu finden, und jede solche Anordnung ist a fortiori eine simpliziale Teilordnung. Ein simplizialsingulärer Simplex $\sigma : \Delta_q \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$ heiße **ordnungsvertrglich**, wenn er durch Vorschalten unseres Homöomorphismus $\tau : \Delta_q \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{M}_{[q]})$ aus der geometrischen Realisierung einer simplizialen Abbildung $\tilde{\sigma} : \mathcal{M}_{[q]} \rightarrow \mathcal{K}$ hervorgeht, die ihrerseits streng monoton ist auf den Ecken. Die von diesen Simplizes erzeugte Untergruppe notieren wir

$$S_q^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) \subset S_q^{\text{s}} \Delta(\mathcal{K})$$

und nennen sie die Gruppe der **ordnungsverträglichen simplizialsingulären q -Ketten von \mathcal{K}** . Offensichtlich bilden die ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten einen Unterkomplex $S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) \subset S^{\text{s}} \Delta(\mathcal{K})$ im Komplex aller simplizialsingulären Ketten von $\Delta(\mathcal{K})$ und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S\mathcal{K} & \leftarrow & S^{\text{s}} \Delta(\mathcal{K}) & \hookrightarrow & S\Delta(\mathcal{K}) \\ & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \\ & & S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) & & \end{array}$$

Der schräge Pfeil nach links oben ist offensichtlich ein Isomorphismus von Kettenkomplexen. Nun zeigen wir in den anschließenden Propositionen 3.1.10 und 3.1.12, daß die beiden anderen Pfeile nach oben auch Isomorphismen auf der Homologie induzieren. Daraus folgt dann der Satz. \square

Proposition 3.1.10. *Fur jede simpliziale Teilordnung der Ecken eines Simplizialkomplexes \mathcal{K} liefert die Einbettung $S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S\Delta(\mathcal{K})$ der ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten in die singulären Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.*

Beweis. Wir schreiben kurz $X := \Delta(\mathcal{K})$ und setzen fur $k \in \mathbb{Z}$

$$X_k := \bigcup_{s \in \mathcal{K}_q, q \leq k} \Delta(s)$$

Dieser Raum heißt das k -**Skelett** von \mathcal{K} . Nun betrachten wir für alle k das folgende kommutative Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc} S^{\text{os}} X_k & \hookrightarrow & S^{\text{os}} X_{k+1} & \twoheadrightarrow & S^{\text{os}} X_{k+1}/S^{\text{os}} X_k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S X_k & \hookrightarrow & S X_{k+1} & \twoheadrightarrow & S X_{k+1}/S X_k \end{array}$$

Das zugehörige Diagramm von langen exakten Homologiesequenzen schreiben wir

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H_{q+1}^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) & \rightarrow & H_q^{\text{os}} X_k & \rightarrow & H_q^{\text{os}} X_{k+1} & \rightarrow & H_q^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \dots & H_{q+1}(X_{k+1}, X_k) & \rightarrow & H_q X_k & \rightarrow & H_q X_{k+1} & \rightarrow & H_q(X_{k+1}, X_k) & \dots \end{array}$$

Wir zeigen nun durch Induktion über k , daß $H_q^{\text{os}} X_k \rightarrow H_q X_k$ ein Isomorphismus ist für alle k und q . Für $k < 0$ ist das klar. Im anschließenden Lemma 3.1.11 werden wir zeigen, daß $H_q^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) \rightarrow H_q(X_{k+1}, X_k)$ ein Isomorphismus ist für alle q und alle k . Der Induktionsschritt besteht dann im Anwenden des Fünferlemmas. Unter der Zusatzannahme $X = X_k$ für $k \gg 0$ ist unser Satz damit bereits bewiesen. Im allgemeinen bemerken wir zusätzlich, daß nach [TF] 2.7.17 jede singuläre Kette von X schon in einem X_k liegt, und überlassen den Rest des Beweises dem Leser zur Übung. Später wird er den Beweis auch mithilfe des Satzes über die Exaktheit filtrierender Kolimites 7.1.18 direkt beenden können. \square

Lemma 3.1.11. *Die durch die von den Einbettungen der ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten in alle singulären Ketten induzierten Abbildungen auf den relativen Ketten liefern Isomorphismen $H_q^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) \xrightarrow{\sim} H_q(X_{k+1}, X_k)$.*

Beweis. Die linke Seite ist hier die Homologie eines Komplexes, der nur im Grad $q = k+1$ lebt. Genauer ist $H_{k+1}^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k)$ frei erzeugt von den Nebenklassen der ordnungsverträglichen simplizialsingulären Simplizes, die durch auf den Ecken streng monoton wachsende simpliziale Abbildungen $\tilde{\sigma} : \mathcal{M}_{[k+1]} \rightarrow \mathcal{K}$ gegeben werden. Bei $q \neq k+1$ dahingegen verschwindet unser Komplex mitsamt seiner Homologie. Wir untersuchen nun die rechte Seite $H_q(X_{k+1}, X_k)$ und betrachten dazu das „verdickte k -Skelett“ $U_k \subset X_{k+1}$, das wir erhalten, indem wir aus X_{k+1} die Schwerpunkte aller $(k+1)$ -Simplizes entfernen. Die beiden Einbettungen

$$(X_{k+1}, X_k) \hookrightarrow (X_{k+1}, U_k) \hookleftarrow (X_{k+1} \setminus X_k, U_k \setminus X_k)$$

induzieren Isomorphismen auf der relativen Homologie: Die linke nach 2.2.7 und 1.4.1, da $X_k \hookrightarrow U_k$ eine Homotopieäquivalenz ist, hier verwendet man auch [?, ?] ?? nach dem das Produkt einer finalen Surjektion mit dem Einheitsintervall auch wieder final ist, und die rechte mit Ausschneidung des k -Skeletts X_k . Das Raumpaar rechts ist aber schlicht die disjunkte unzusammenhängende Vereinigung über

alle $(k + 1)$ -Simplizes $s \in \mathcal{K}_{k+1}$ der Raumpaare $(\Delta^\circ(s), \Delta^\circ(s) \setminus b(s))$, wo wir $\Delta^\circ(s)$ für den „offenen vollen Simplex“ schreiben und mit $b(s)$ den Schwerpunkt von $\Delta(s)$ bezeichnen. Zusammenfassend erhalten wir also mit den offensichtlichen Abbildungen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H_q(X_{k+1}, U_k) & \xleftarrow{\sim} & \bigoplus_s H_q(\Delta^\circ(s), \Delta^\circ(s) \setminus b(s)) \\
 \parallel & & \downarrow \wr \\
 H_q(X_{k+1}, U_k) & \leftarrow & \bigoplus_s H_q(\Delta(s), \Delta(s) \setminus b(s)) \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
 H_q(X_{k+1}, X_k) & \leftarrow & \bigoplus_s H_q(\Delta(s), \partial\Delta(s))
 \end{array}$$

wo die Summen jeweils über alle $(k + 1)$ -Simplizes $s \in \mathcal{K}_{k+1}$ laufen und wir mit $\partial\Delta(s)$ ähnlich wie in 2.3.4 das k -Skelett von $\Delta(s)$ bezeichnen. Die mit \sim bezeichneten Pfeile darin sind offensichtlich Isomorphismen und für die übrigen Pfeile folgt dasselbe. Nach 2.3.4 wissen wir aber, daß $H_q(\Delta(s), \partial\Delta(s))$ verschwindet für $q \neq k + 1$ und daß es für $q = k + 1$ frei ist vom Rang 1 und erzeugt wird von der Klasse desjenigen ordnungsverträglichen simplizialsingulären Simplex $\sigma = \Delta(\tilde{\sigma}) \circ \tau$, für den $\tilde{\sigma} : \mathcal{M}_{[k+1]} \rightarrow \mathcal{K}$ das Bild s hat. Das zeigt das Lemma. \square

Proposition 3.1.12. *Für jede simpliziale Teilordnung der Ecken eines Simplizialkomplexes \mathcal{K} liefert die Einbettung $S^{\text{os}}\Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S^{\text{s}}\Delta(\mathcal{K})$ der ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten in alle simplizialsingulären Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.*

Beweis. Den Fall, daß unser Simplizialkomplex der maximale Simplizialkomplex \mathcal{M}_E zu einer vorgegebenen Eckenmenge E ist, erledigen 1.1.15 und 1.1.17. Den Fall, daß unser Simplizialkomplex endlich ist, folgern wir induktiv. Bezeichne in der Tat $H_q^{\text{s}}\mathcal{K} = \mathcal{H}_q(S^{\text{s}}\Delta(\mathcal{K}))$ die Homologie des Komplexes der simplizialsingulären Ketten in der Realisierung eines Simplizialkomplexes \mathcal{K} . Ist $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''$ eine Darstellung unseres Simplizialkomplexes als Vereinigung zweier Unterkomplexe, so liefert der Beweis der Mayer-Vietoris-Sequenz auch in dieser Situation Mayer-Vietoris-Sequenzen für H^{os} und H^{s} . Mit dem Fünferlemma und Induktion über die Zahl der Simplizes unseres Simplizialkomplexes sehen wir so, daß die Proposition für endliche Simplizialkomplexe folgt, sobald wir sie für die maximalen Simplizialkomplexe zu einer vorgegebenen Eckenmenge kennen. Der Fall beliebiger Simplizialkomplexe hinwiederum folgt aus dem Fall endlicher Simplizialkomplexe mit etwas Nachdenken oder formal mit der Exaktheit filtrierender Kolimites 7.1.18. \square

Korollar 3.1.13. *Ist \mathcal{K} ein Simplizialkomplex, so benötigt man für die q -te Homologie seiner Realisierung nicht mehr Erzeuger, als es in unserem Simplizialkomplex q -Simplizes gibt. In Formeln kann die Gruppe $H_q(\Delta(\mathcal{K}))$ also stets durch $|\mathcal{K}_q|$ Elemente erzeugt werden.*

Ergänzung 3.1.14. Ist \mathcal{K}_q unendlich, so gilt sogar feiner, daß die Kardinalität von $H_q(\Delta(\mathcal{K}))$ kleinergleich der Kardinalität von \mathcal{K}_q ist. Der Beweis bleibt mutatis mutandis derselbe, es werden jedoch Grundkenntnisse zu Kardinalitäten benötigt, wie sie etwa in [AL] 5.3 ausgeführt werden.

Beweis. Hierzu braucht man außer 3.1.7 nur noch erinnern, daß man nach [LA2] 4.4.1 für eine Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe höchstens soviel Erzeuger benötigt wie für die ursprüngliche Gruppe. \square

3.1.15. Wenn wir Homologie mit Koeffizienten betrachten wie in 1.2.11, so bleiben alle bisherigen Resultate und Beweise mit den hoffentlich offensichtlichen Modifikationen gültig, insbesondere auch Satz 3.1.7 über die Beziehung zwischen singulärer und simplizialer Homologie.

Definition 3.1.16. Für einen beliebigen topologischen Raum X setzt man

$$b_q(X) := \dim_{\mathbb{Q}} H_q(X; \mathbb{Q}) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

und nennt diese Zahl die q -te **Betti-Zahl** von X . Sind alle Betti-Zahlen endlich und verschwinden sie für $q \gg 0$, so heißt ihre alternierende Summe

$$\chi(X) := \sum (-1)^q b_q(X) \in \mathbb{Z}$$

die **Euler-Charakteristik** von X und wir sagen, unser Raum „habe eine wohldefinierte Eulercharakteristik“.

3.1.17. Wir haben $\chi(X) = |X|$ für jeden endlichen diskreten Raum X mit $|X|$ Punkten. Es ist auch für allgemeinere Räume oft sinnvoll, $\chi(X)$ als eine Verallgemeinerung der „Zahl der Punkte von X “ aufzufassen. Eine mögliche Begründung wird in 3.1.27 skizziert, eine weitere in 5.6.1 in Gestalt der Formel $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$. Wir schreiben bei einem beliebigen Körper

$$\chi(X; k) := \sum (-1)^q \dim_k H_q(X; k)$$

wann immer dieser Ausdruck sinnvoll ist, als da heißt, wann immer alle Summanden endlich sind und fast alle Summanden verschwinden.

Korollar 3.1.18 (Eulercharakteristik von Simplizialkomplexen). *Die Eulercharakteristik der Realisierung eines endlichen Simplizialkomplexes \mathcal{K} wird für jeden Körper k gegeben durch die der Zahl der Simplizes gerader Dimension abzüglich der Zahl der Simplizes ungerader Dimension, in Formeln*

$$\chi(\Delta(\mathcal{K}); k) = \sum (-1)^q |\mathcal{K}_q|$$

Beweis. Wir wenden das anschließende Lemma 3.1.19 auf den Komplex $S(\mathcal{K}; k)$ der Simplizialketten mit Koeffizienten in k an, dessen Homologie ja nach 3.1.7 genau die Homologie von $\Delta(\mathcal{K})$ mit Koeffizienten in k ist. \square

Lemma 3.1.19. *Ist A ein Komplex endlichdimensionaler k -Vektorräume und verschwinden von den A_i alle bis auf endlich viele, so gilt*

$$\sum (-1)^i \dim_k A_i = \sum (-1)^i \dim_k \mathcal{H}_i A$$

3.1.20. Man nennt die linke Seite hier auch die **Eulercharakteristik** des Kettenkomplexes A . Die Gleichung besagt damit in Worten, daß ein Kettenkomplex dieselbe Eulercharakteristik hat wie seine Homologie.

Beweis. Das folgt sofort aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \dim A_i &= \dim(\ker \partial_i) + \dim(\operatorname{im} \partial_i) \\ \dim \mathcal{H}_i A &= \dim(\ker \partial_i) - \dim(\operatorname{im} \partial_{i+1}) \end{aligned} \quad \square$$

Korollar 3.1.21 (Euler'scher Polyedersatz). *Ist $\Delta(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} S^2$ eine Triangulierung der Kugelschale, so gilt $|\mathcal{F}_0| - |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| = 2$ oder salopp gesagt*

$$|\text{Ecken}| - |\text{Kanten}| + |\text{Flächen}| = 2$$

3.1.22. Daß die Sphäre nicht zu einem Simplizialkomplex mit Simplizes einer Dimension mehr als Zwei homöomorph sein kann, folgt zum Beispiel daraus, daß in unserer Sphäre das Komplement jeder zweielementigen Teilmenge eine nichttriviale Fundamentalgruppe hat.

3.1.23. Das vorhergehende Resultat von Euler, ein Vorläufer der Homologietheorie, hat der Euler-Charakteristik ihren Namen gegeben. Man folgert es auch allgemeiner für in geeigneter Weise definierte „polyedrische“ Zerlegungen der Kugelschale wie sie etwa die platonischen Körper liefern, indem man derartige polyedrische Zerlegungen zu Triangulierungen verfeinert. Zum Beispiel hat ein Würfel 6 Flächen, 12 Kanten und 8 Ecken, und in der Tat gilt $6 - 12 + 8 = 2$.

Übungen

Übung 3.1.24. Gegeben $K \subset U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge in einer offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n zeige man, daß für alle q das Bild der auf der Homologie induzierten Abbildung $H_q K \rightarrow H_q U$ endlich erzeugt ist. Ebenso zeige man, daß das Bild von $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus U) \rightarrow H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ endlich erzeugt ist. Hinweis: Indem man einen vollen Simplex, der K umfaßt, hinreichend oft baryzentrisch unterteilt, erhält man ein Sandwich $K \subset S \subset U$ mit S homöomorph zum Polyeder eines endlichen Simplizialkomplexes. So folgt bereits die erste Aussage. Ein Beweis einer etwas allgemeineren Aussage wird in 3.1.25 skizziert.

Ergänzende Übung 3.1.25 (Endlichkeitsaussagen für Simplicialkomplexe). Sei X die Realisierung eines lokal endlichen Simplicialkomplexes. Gegeben $K \subset U \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge in einer offenen Teilmenge von X zeige man, daß das Bild der auf der Homologie induzierten Abbildung $H_q K \rightarrow H_q U$ für alle q endlich erzeugt ist. Ebenso zeige man, daß das Bild von $H_q(X, X \setminus U) \rightarrow H_q(X, X \setminus K)$ für alle q endlich erzeugt ist. In der Tat ist nach [TF] 2.7.17 jedes Kompaktum $K \subset X$ enthalten in einer Vereinigung endlich vieler Simplizes und trifft folglich auch nur endlich viele Simplizes. Auf jedem dieser von K getroffenen Simplizes hat der Schnitt mit unserem Kompaktum einen positiven Abstand zum Schnitt mit dem Komplement von U . Indem wir baryzentrisch unterteilen, können wir also annehmen, daß es einen Unterkomplex $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ gibt mit $X \setminus K \subset \Delta(\mathcal{L}) \subset X \setminus U$ und der Eigenschaft, daß nur höchstens endlich viele Simplizes von \mathcal{L} nicht zu \mathcal{K} gehören. Dann aber zeigt 3.1.7, daß die relative Homologie $H_q(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$ endlich erzeugt ist für alle q .

Übung 3.1.26. Man bestimme die Eulercharakteristik des Torus $S^1 \times S^1$.

Übung 3.1.27. Ein topologischer Raum X werde von zwei offenen Teilmengen überdeckt, $X = U \cup V$, und beide sowie ihr Schnitt mögen im Sinne von 3.1.16 eine wohldefinierte Eulercharakteristik besitzen. Man zeige, daß dann auch der ursprüngliche Raum eine wohldefinierte Eulercharakteristik besitzt und daß gilt

$$\chi(X) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$$

Übung 3.1.28 (Eulercharakteristik einer endlichen Überlagerung). Ist $Y = \Delta(\mathcal{K})$ die geometrische Realisierung eines endlichen Simplicialkomplexes und $X \rightarrow Y$ eine endliche Überlagerung mit m Blättern, so gilt

$$\chi(X) = m\chi(Y)$$

3.2 Fixpunktsätze und simpliciale Approximation

Lemma 3.2.1 (Spur als Spur auf der Homologie). *Seien k ein Körper, A ein Komplex endlichdimensionaler k -Vektorräume und $\varphi : A \rightarrow A$ ein Endomorphismus von A . Verschwinden von den A_i alle bis auf endlich viele, so gilt für die Spuren*

$$\sum (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi|A_i) = \sum (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi|\mathcal{H}_i A)$$

3.2.2. Der Übersichtlichkeit halber haben wir die von φ auf den A_i und den $\mathcal{H}_i A$ induzierten Abbildungen auch kurzerhand φ notiert. Ist φ die Identität, so erhalten wir zumindest im Fall eines Körpers k der Charakteristik Null unser Lemma

3.1.19 als Spezialfall. Ich nenne die alternierende Summe der Spuren des Endomorphismus φ eines endlichdimensionalen \mathbb{Z} -graduerten Vektorraums seine **Superspur** und notiere sie

$$\text{str}(\varphi|A) := \sum (-1)^i \text{tr}(\varphi|A_i)$$

In [TSK] 3.4.14 erklären wir allgemeiner die Superspur für beliebige, nicht notwendig die Graduierung erhaltende Endomorphismen \mathbb{Z} -graduierter Vektorräume.

Vorschau 3.2.3. In [TSK] 3.4.14 erklären wir allgemeiner die \mathbb{Z} -wertige Spur von Endomorphismen von Komplexen abelscher Gruppen mit endlich erzeugter totaler Homologie und zeigen in [TSK] 3.4.15, daß sie mit „derivierter“ Erweiterung der Skalare verträglich ist.

Beweis. Das folgt sofort aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{tr}(\varphi|A_i) &= \text{tr}(\varphi| \ker \partial_i) + \text{tr}(\varphi| \text{im } \partial_i) \\ \text{tr}(\varphi|\mathcal{H}_i A) &= \text{tr}(\varphi| \ker \partial_i) - \text{tr}(\varphi| \text{im } \partial_{i+1}) \end{aligned}$$

Diese hinwiederum folgert man aus der Additivität der Spur [LA2] 4.6.14. \square

Satz 3.2.4 (Simplizialer Fixpunktsatz). *Sei $\varphi : (E, \mathcal{K}) \rightarrow (E, \mathcal{K})$ eine simpliziale Selbstabbildung eines endlichen Simplizialkomplexes mit $\varphi(s) \neq s$ für alle Simplizes $s \in \mathcal{K}$ mit mindesten zwei Ecken. So gilt für die Zahl der Fixpunkte von φ und Homologie mit Koeffizienten in einem beliebigen Körper die Formel*

$$|E^\varphi| = \sum (-1)^i \text{tr}(H_i \varphi|H_i \mathcal{K})$$

Beweis. Beide Seiten stimmen aufgrund von Lemma 3.2.1 und aufgrund unserer Annahmen überein mit $\sum (-1)^i \text{tr}(S_i \varphi|S_i \mathcal{K})$. \square

Vorschau 3.2.5. Mit der \mathbb{Z} -wertigen Spur [TSK] 3.4.14 gilt die Identität aus dem Beweis $|E^\varphi| = \sum (-1)^i \text{tr}(S_i \varphi|S_i \mathcal{K})$ sogar in \mathbb{Z} .

3.2.6. Ich finde an diesem Satz bemerkenswert, daß er ohne „Fixpunktindizes“ auskommt. Vielmehr erzwingen die Bedingungen des Satzes, daß diese Fixpunktindizes im Fall einer kompakten orientierten triangulierten Mannigfaltigkeit und für Abbildungen dieser speziellen Natur alle Eins sein müssen. Eine partielle Verallgemeinerung auf den Fall stetiger nicht notwendig simplizialer Abbildungen zeigen wir als 3.2.13.

3.2.7. Gegeben ein Simplizialkomplex $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ erklären wir zu jedem Element seiner Realisierung $z \in \Delta(\mathcal{K})$ dessen **Träger** $\text{supp } z \in \mathcal{K}$ als den Träger von z in seiner Eigenschaft als Abbildung $z : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ oder gleichbedeutend

als das kleinste $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $z \in \Delta(\sigma)$. Gegeben ein Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ erklären wir dessen **offenen Stern** $\text{St}(\sigma) \subseteq \Delta(\mathcal{K})$ als die Teilmenge

$$\text{St}(\sigma) := \{z \in \Delta(\mathcal{K}) \mid \sigma \subset \text{supp } z\}$$

Der Leser mag zur Übung zeigen, daß sie in der Tat offen ist. Offensichtlich gilt für beliebiges $z \in \Delta(\mathcal{K})$ auch umgekehrt $\text{supp } z = \{q \in \mathcal{K}_0 \mid z \in \text{St}(q)\}$.

3.2.8. Gegeben ein Simplizialkomplex $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ erklären wir einen neuen Simplizialkomplex, seine **baryzentrische Unterteilung**

$$\text{BK} = \check{\mathcal{K}} = (\check{E}, \check{\mathcal{K}})$$

Als Ecken nehmen wir alle Simplizes des ursprünglichen Komplexes, in Formeln $\check{E} := \mathcal{K}$. Als Simplizes nehmen wir alle endlichen Ketten in der Menge \check{E} für die Inklusionsrelation, also alle bezüglich Inklusion total geordneten endlichen Teilmengen. Man erhält einen ausgezeichneten Homöomorphismus zwischen ihren Realisierungen

$$u : \Delta(\check{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$$

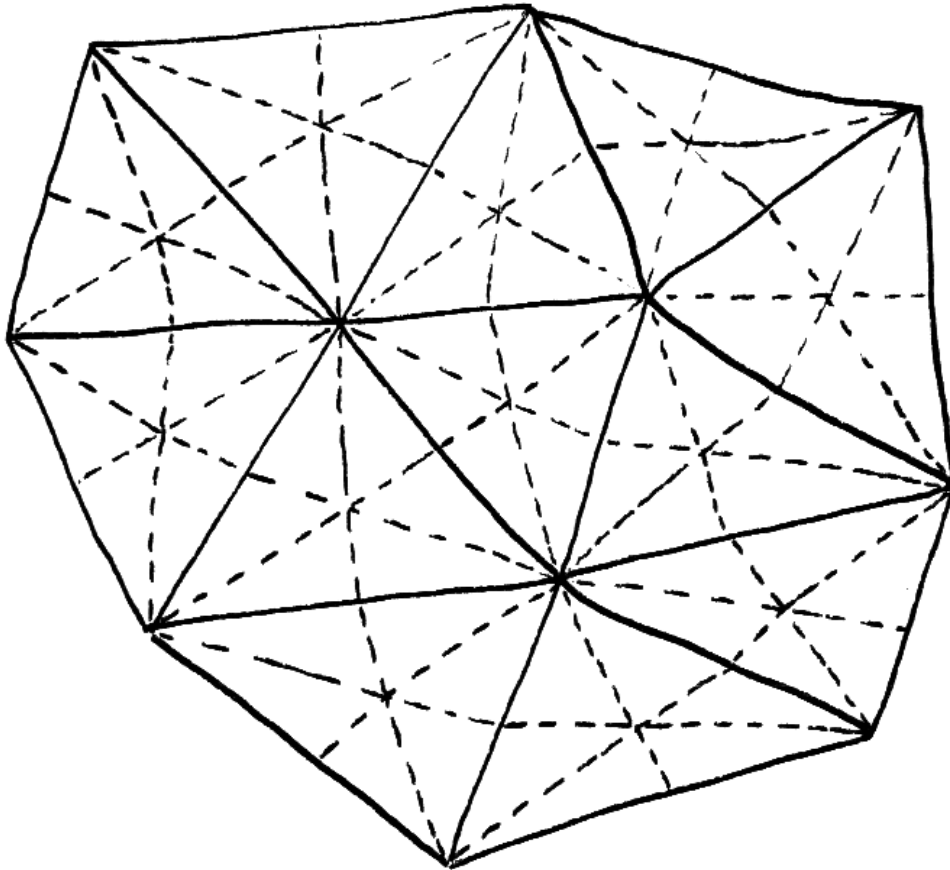
durch die Vorschrift, daß jede Ecke $s \in \check{E} \subset \mathcal{K}$ auf den Schwerpunkt des vollen Simplex $\Delta(s) \subset \Delta(\mathcal{K})$ abgebildet wird und jeder volle Simplex von $\Delta(\check{\mathcal{K}})$ affin in denjenigen vollen Simplex von $\Delta(\mathcal{K})$, der seiner größten Ecke entspricht.

3.2.9. Auf der baryzentrischen Unterteilung $\check{\mathcal{K}}$ eines Simplizialkomplexes \mathcal{K} liefert die umgekehrte Inklusionsrelation von \mathcal{K} stets eine simpliziale Teilordnung, seine **natürliche simpliziale Teilordnung**. Wir kehren hier die Inklusionsrelation um, damit unsere Unterteilungsoperatoren $U_q : S_q \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S_q \Delta(\mathcal{K})$ aus 2.4.1 Abbildungen

$$U_q : S_q^s \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S_q u(S_q^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}}))$$

induzieren für die in Bezug auf die natürliche Teilordnung zu verstehenden ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten der baryzentrischen Unterteilung. Das hinwiederum zeigen wir dann durch Induktion über q . Gegeben ein festes q folgt es offensichtlich für jeden beliebigen Simplizialkomplex, wenn wir es für einen vollen q -Simplex zeigen. Unsere induktive Definition der Unterteilungsoperatoren $U_q(\tau_q) = P^{s(q)} U_{q-1}(\partial \tau_q)$ mit $P^{s(q)}$ dem Prismenoperator bezüglich des Schwerpunkts zeigt dann induktiv die Behauptung, da ja unser im Beweis von 1.2.17 erklärter Prismenoperator die zusätzliche Ecke als erste Ecke davor schreibt.

Satz 3.2.10 (Simpliziale Approximation). *Seien \mathcal{K}, \mathcal{L} endliche Simplizialkomplexe und $f : \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow \Delta(\mathcal{L})$ stetig. So gibt es $n \in \mathbb{N}$ derart, daß für das*



Ein Simplicialkomplex und gestrichelt eingezeichnet seine baryzentrische Unterteilung. Die Ecken der baryzentrischen Unterteilung mag man sich denken als die Schwerpunkte der nichtleeren Simplexes des ursprünglichen Simplicialkomplexes, die Simplexes der baryzentrischen Unterteilung entsprechen den endlichen Ketten in der teilgeordneten Menge der ursprünglichen Simplexes.

Vorschalten des Homöomorphismus $u^n : \Delta(\mathbb{B}^n \mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$ aus der n -fachen baryzentrischen Unterteilung eine simpliziale Abbildung

$$\varphi : (\mathbb{B}^n \mathcal{K})_0 \rightarrow \mathcal{L}_0$$

existiert mit der Eigenschaft, daß für alle $z \in \Delta(\mathbb{B}^n \mathcal{K})$ die beiden Punkte $f(u^n(z))$ und $(\Delta\varphi)(z)$ in einem gemeinsamen vollen Simplex von $\Delta(\mathcal{L})$ liegen.

3.2.11. Unser φ heißt eine **simpliziale Approximation** von f . Offensichtlich ist in dieser Situation $\Delta(\varphi)$ homotop zu $f u^n$ mittels der Homotopie

$$h(z, t) = t(\Delta\varphi)(z) + (1 - t)f(u^n(z))$$

Hierbei sind die Formeln auf der rechten Seite zu verstehen in dem großen Vektorraum, in dem wir unsere geometrische Realisierung von \mathcal{L} als Teilmenge konstruiert hatten.

3.2.12 (**Die schmutzige Anschauung**). Die simpliziale Approximation an einen Homöomorphismus wird im allgemeinen keineswegs ein Isomorphismus sein, sondern vielmehr salopp gesprochen in etwa so aussehen, daß einige wenige klitzekleine Simplizes der entsprechenden mehrfachen baryzentrischen Unterteilung bijektiv stark vergrößert auf Simplizes des Zielkomplexes abgebildet werden, wohingegen die meisten dieser klitzekleinen Simplizes zu Simplizes kleinerer Dimension zusammengedrückt werden. Ich bitte darum, diese anschauliche Beschreibung eines typischen Falls nicht als mathematische Aussage mißzuverstehen.

Beweis. Mithilfe des Überdeckungssatzes von Lebesgue, angewandt auf das Kompaktum $\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{K}_0}$, finden wir $n \in \mathbb{N}$ und eine Abbildung auf den Ecken $\varphi : (\mathbb{B}^n \mathcal{K})_0 \rightarrow \mathcal{L}_0$ mit $f(\text{St}(q)) \subset \text{St}(\varphi(q))$ für alle $q \in (\mathbb{B}^n \mathcal{K})_0$. Wir zeigen, daß dies φ die gesuchte simpliziale Approximation ist. In der Tat gilt für beliebiges $z \in \Delta(\mathbb{B}^n \mathcal{K})$ ja $\text{supp } z = \{q \in (\mathbb{B}^n \mathcal{K})_0 \mid z \in \text{St}(q)\}$ und folglich $\varphi(\text{supp } z) \subset \text{supp } f(z)$. Da jeder Simplex von $\mathbb{B}^n \mathcal{K}$ ein $\text{supp } z$ ist, muß φ simplizial sein und es folgt weiter, daß für alle z unser $(\Delta\varphi)(z)$ zum vollen Simplex $\Delta(\text{supp } f(z))$ gehört. \square

Satz 3.2.13 (Erste Annäherung an den Lefschetz'schen Fixpunktsatz). Gegeben ein endlicher Simplizialkomplex \mathcal{K} und eine fixpunktfreie stetige Selbstabbildung f seiner Realisierung $X := \Delta(\mathcal{K})$ gilt für jeden Koeffizientenkörper k die Identität

$$0 = \sum_q (-1)^q \text{tr} (H_q f | H_q(X; k))$$

3.2.14 (**Fixpunkte von Selbstabbildungen von Sphären**). Nach 3.2.13 hat insbesondere jede stetige Selbstabbildung einer Sphäre gerader Dimension, die homotop ist zur Identität, mindestens einen Fixpunkt. Induziert eine stetige Selbstabbildung einer n -Sphäre S^n positiver Dimension $n > 0$ allgemeiner eine von der

Multiplikation mit $(-1)^{n+1}$ verschiedene Abbildung auf der n -ten Homologiegruppe, hat sie also in einer noch einzuführenden Terminologie einen von $(-1)^{n+1}$ verschiedenen „Abbildungsgrad“, so hat sie mindestens einen Fixpunkt.

Beweis. Indem wir auf X die von einer Norm auf $\mathbb{R}^{\mathcal{K}_0}$ induzierte Metrik d wählen und dann hinreichend oft baryzentrisch unterteilen, dürfen wir annehmen, daß das Minimum von $d(x, f(x))$ größer ist als der Durchmesser jedes vollen Simplex. Für jede simpliziale Approximation $\varphi : (B^n \mathcal{K})_0 \rightarrow \mathcal{K}_0$ an f gilt dann, daß φ keinen Simplex der n -fachen baryzentrischen Unterteilung eines Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ auf σ selbst wirft. Wir dürfen dabei auch $n \geq 1$ annehmen. Jetzt betrachten wir im Komplex SX der singulären Ketten von X den Unterkomplex $S^{os,n}X$ der simplizialsingulären Ketten und das Bild

$$S^{os,n}X \subset SX$$

des Komplexes $S^{os} \Delta(B^n \mathcal{K})$ der orientierungsverträglichen simplizialsingulären Ketten der n -fachen baryzentrischen Unterteilung unter dem natürlichen Homöomorphismus $u^n : \Delta(B^n \mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$. So erhalten wir mit unseren Unterteilungsoperatoren U aus 2.4.1 nach 3.2.9 ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccc} S^{os,n}X & \longrightarrow & S^s X & \xrightarrow{U^n} & S^{os,n}X \\ \cap & & \cap & & \cap \\ SX & \xrightarrow{S\varphi} & SX & \xrightarrow{U^n} & SX \end{array}$$

Seine Vertikalen induzieren nach unserem Vergleichssatz 3.1.7 zusammen mit 3.1.12 Isomorphismen auf der Homologie. Die Verknüpfung in der oberen Horizontale hat nun Spur Null in jedem Grad, denn ihre Matrix in der durch die orientierungsverträglichen simplizialsingulären Simplizes gegebenen Basis hat nur Einträge Null auf der Diagonalen, da unsere simpliziale Approximation keinen Simplex aus der n -fachen baryzentrischen Unterteilung eines Simplex σ auf σ selbst wirft. Nach 3.2.1 induziert dann die Verknüpfung in der oberen Horizontale auch auf der Homologie eine Abbildung mit Superspur Null. Dasselbe folgt erst für die Verknüpfung in der unteren Horizontale und dann wegen $HU^n = \text{id}$ auch für $H\varphi = Hf$. \square

Übungen

Übung 3.2.15. Jede stetige Selbstabbildung der reellen projektiven Ebene hat einen Fixpunkt.

Übung 3.2.16. Man folgere den Fixpunktsatz von Brouwer aus dem Fixpunktsatz von Lefschetz.

Übung 3.2.17 (Nullstellenfreie glatte Vektorfelder und Eulercharakteristik). Besitzt eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit ein glattes nirgends verschwindendes Vektorfeld, so ist ihre Euler-Charakteristik Null. Hinweis: Man verwende, daß jede glatte kompakte Mannigfaltigkeit triangulierbar ist und für jedes glatte nirgends verschwindende Vektorfeld darauf sein „Fluß für ein hinreichend kleines positives Zeitintervall“ eine fixpunktfreie stetige Selbstabbildung ist.

Vorschau 3.2.18. Das gilt genauso für stetige Vektorfelder, muß dann aber anders bewiesen werden.

3.3 Einbettungen von Sphären in Sphären

3.3.1. Im folgenden ist die (-1) -Sphäre wie in [TF] 1.1 als die leere Menge zu verstehen, in Formeln $S^{-1} = \emptyset$.

Satz 3.3.2 (Jordan-Brouwer). Seien $n, r \geq -1$ und sei $s^r \subset S^n$ eine Teilmenge der n -Sphäre, die homöomorph ist zur r -Sphäre S^r . So haben wir:

- $r > n$ *Unmöglich;*
- $r = n$ *Impliziert $S^n = s^r$;*
- $r = n - 1$ *Dann hat $S^n \setminus s^r$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, und der Rand jeder dieser beiden Komponenten ist s^r ;*
- $r \leq n - 2$ *Dann ist $S^n \setminus s^r$ zusammenhängend.*

Vorschau 3.3.3. Im Rahmen der Garbentheorie werden wir in [TG] 4.10.16 einen alternativen Beweis geben, der mir besonders natürlich scheint. Der elementarere Beweis hier wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen. Im Fall $r = n - 1$ induziert für eine zweipunktige Teilmenge Z bestehend aus einem Punkt in jeder Komponente des Komplements $S^n \setminus s^{n-1}$ die Einbettung $s^{n-1} \hookrightarrow S^n \setminus Z$ einen Isomorphismus auf der Homologie. Im Fall $n = 2$ folgt das etwa aus unseren Erkenntnissen zu Umlaufzahlen kreuzungsfreier Wege in [TF] 1.7.10. Im allgemeinen zeigen wir es erst als Übung [TG] 4.10.26.

3.3.4. Als Vorbereitung auf den Beweis beginnen wir mit einer Diskussion der sogenannten „reduzierten Homologie“. Diese Variante der Homologie hilft auch sonst oft, Sonderbetrachtungen im Grad Null zu vermeiden.

Definition 3.3.5. Für jeden topologischen Raum X kann man den Komplex SX der singulären Ketten verlängern zum sogenannten **augmentierten Komplex** $\tilde{S}X$ mit $\tilde{S}_q X := S_q X$ für $q \neq -1$ und $\tilde{S}_{-1} X := \mathbb{Z}$, wobei der zusätzlich benötigte Randoperator $\partial_0 : \tilde{S}_0 X \rightarrow \tilde{S}_{-1} X$ gegeben wird durch die sogenannte **Augmentation** $\partial_0 = \epsilon : \sum n_x x \mapsto \sum n_x$. Offensichtlich erhalten wir so wieder einen Funktor

$$\tilde{S} : \text{Top} \rightarrow \text{Ket}$$

von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe. Wir definieren dann die **reduzierten Homologiegruppen** $\tilde{H}_q(X)$ von X als die Homologiegruppen unseres augmentierten Komplexes und setzen also in Formeln

$$\tilde{H}_q(X) := \mathcal{H}_q(\tilde{S}X)$$

3.3.6 (Verschiedene Konventionen zur reduzierten Homologie). Die vorstehende Definition weicht im Fall $X = \emptyset$ von der in der Literatur gebräuchlichen Konvention ab, bei der, so will es mir scheinen, das Widerstreben gegenüber Homologie in negativen Graden die Oberhand gewonnen hat über das Streben nach Klarheit des Formalismus.

3.3.7 (Beziehung zwischen gewöhnlicher und reduzierter Homologie). Für $X \neq \emptyset$ gilt $\tilde{H}_q(X) = 0$ für $q < 0$, für die leere Menge erhalten wir jedoch $\tilde{H}_{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z}$. Gegeben eine abelsche Gruppe G bezeichne ganz allgemein $G[q]$ den Komplex mit G im Grad q und Nullen sonst. Speziell meint also $\mathbb{Z}[-1]$ den Komplex mit \mathbb{Z} im Grad -1 und Nullen sonst. Wir haben eine kurze exakte Sequenz von Komplexen $\mathbb{Z}[-1] \hookrightarrow \tilde{S}X \rightarrow SX$. Mit der zugehörigen langen Homologiesequenz erhalten wir $H_q X = \tilde{H}_q X$ für $q > 0$ und im Fall $X \neq \emptyset$ eine kurze exakte Sequenz $\tilde{H}_0 X \hookrightarrow H_0 X \rightarrow \mathbb{Z}$, mithin nach 2.2.14 und 2.2.12 einen allerdings nicht kanonischen Isomorphismus $H_0 X \cong \tilde{H}_0 X \oplus \mathbb{Z}$. Es gilt also $\tilde{H}_0 X = 0$ genau dann, wenn X leer oder wegzusammenhängend ist, und die reduzierte Homologie von Sphären wird für alle $n \geq -1$ gegeben durch

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = q; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.3.8 (Lange exakte Homologiesequenz für die reduzierte Homologie). Für ein Raumpaare (X, A) folgt aus der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen $\tilde{S}A \hookrightarrow \tilde{S}X \rightarrow \tilde{S}X/\tilde{S}A$ auch eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{q+1}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_q(A) \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow \tilde{H}_q(X, A) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

für Raumpaare in der reduzierten Homologie, wobei natürlich gilt $\tilde{S}X/\tilde{S}A = SX/SA$ und folglich $\tilde{H}_q(X, A) = H_q(X, A)$. Für jeden Punkt $p \in X$ erhalten wir so insbesondere einen kanonischen Isomorphismus $\tilde{H}_q(X) \rightarrow H_q(X, p)$. Homotope Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ induzieren auch auf der reduzierten Homologie dieselben Abbildungen: Um das zu sehen reicht es, unsere Kettenhomotopie $Sf \simeq Sg$ durch Null auf $\tilde{S}_{-1}X = \mathbb{Z}$ fortzusetzen. Die Mayer-Vietoris-Sequenz und ihr Beweis übertragen sich ebenso ohne Schwierigkeiten in die reduzierte Homologie. Der folgende Beweis ist eine erste Illustration für die Nützlichkeit der reduzierten Homologie.

Proposition 3.3.9. *Gegeben eine stetige Einbettung eines Hyperkubus in eine Sphäre beliebiger Dimension verschwinden die reduzierten Homologiegruppen des Komplements des Bildes in allen Graden.*

Beweis. Seien also in Formeln $r \geq 0$ und $\varphi : [0, 1]^r \rightarrow S^n$ eine stetige Injektion mit Bild $\text{im } \varphi = \varphi([0, 1]^r)$. Unsere Proposition behauptet $\tilde{H}_q(S^n \setminus \text{im } \varphi) = 0$ für alle q . Als stetige Injektion von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum ist φ nach [TM] 1.5.13 ein Homöomorphismus auf sein Bild. Da S^n nie zusammenziehbar ist, folgt $S^n \neq \text{im } \varphi$. Wir können uns also auf $q \geq 0$ beschränken. Dafür machen wir eine Induktion über r und geben dazu der Aussage der Proposition den Namen $P(r)$. Nach Konvention ist $[0, 1]^0$ ein Punkt und $S^n \setminus x$ ist zusammenziehbar, ja sogar homöomorph zu \mathbb{R}^n für alle $x \in S^n$. Das liefert unsere Induktionsbasis $P(0)$. Sei nun $P(r-1)$ bekannt, sei $\varphi : [0, 1]^r \rightarrow S^n$ eine stetige Injektion und sei $z \in \tilde{S}_q(S^n \setminus \text{im } \varphi)$ ein q -Zykel, $q \geq 0$. Es gilt zu zeigen, daß z ein Rand ist. Für $I \subset [0, 1]$ setzen wir

$$U_I := S^n \setminus \varphi(I \times [0, 1]^{r-1})$$

und kürzen $U_{\{t\}} = U_t$ ab. Nach unserer Induktionsannahme $P(r-1)$ gibt es für alle $t \in [0, 1]$ ein $w_t \in S_{q+1}U_t$ mit $\partial w_t = z$. Mit Kompaktheitsargumenten folgt, daß sogar gilt $w_t \in S_{q+1}U_B$ für eine geeignete Umgebung B von t in $[0, 1]$. Mit zusätzlichen Kompaktheitsargumenten gibt es dann eine Folge $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ derart, daß für alle i ein $w_i \in S_{q+1}U_{[t_{i-1}, t_i]}$ existiert mit $\partial w_i = z$. Die Aussage $P(r)$ folgt nun mit Induktion über i , wenn wir noch die anschließende Folgerung aus unserer Induktionsannahme $P(r-1)$ bemerken. \square

Lemma 3.3.10. *Sei $r \geq 1$ und es gelte $P(r-1)$. Sei $\varphi : [0, 1]^r \rightarrow S^n$ eine stetige Injektion. Seien $0 \leq a < b < c \leq 1$. Gegeben Ketten $u \in S_{q+1}U_{[a,b]}$ und $v \in S_{q+1}U_{[b,c]}$ mit $\partial u = \partial v$ gibt es dann auch eine Kette $w \in S_{q+1}U_{[a,c]}$ mit $\partial w = \partial u = \partial v$.*

Beweis. Sicher gilt

$$U_{[a,b]} \cup U_{[b,c]} = U_b \text{ und } U_{[a,b]} \cap U_{[b,c]} = U_{[a,c]}$$

Die Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie liefert uns nun

$$\tilde{H}_{q+1}U_b \rightarrow \tilde{H}_qU_{[a,c]} \rightarrow \tilde{H}_qU_{[a,b]} \oplus \tilde{H}_qU_{[b,c]} \rightarrow \tilde{H}_qU_b$$

Da hier das rechte und linke Ende verschwindet nach $P(r-1)$, steht in der Mitte ein Isomorphismus. Schreiben wir also $\partial u = \partial v = z$, so ist z ein Zykel in $\tilde{S}_qU_{[a,c]}$, der ein Rand wird in $\tilde{S}_qU_{[a,b]} \oplus \tilde{S}_qU_{[b,c]}$. Also muß z auch in $\tilde{S}_qU_{[a,c]}$ bereits ein Rand gewesen sein. \square

Satz 3.3.11 (Homologie des Komplements einer Sphäre in einer Sphäre). *Seien $r, n \geq -1$ und sei $s^r \subset S^n$ eine Teilmenge der n -Sphäre, die homöomorph ist zur r -Sphäre S^r . So gilt*

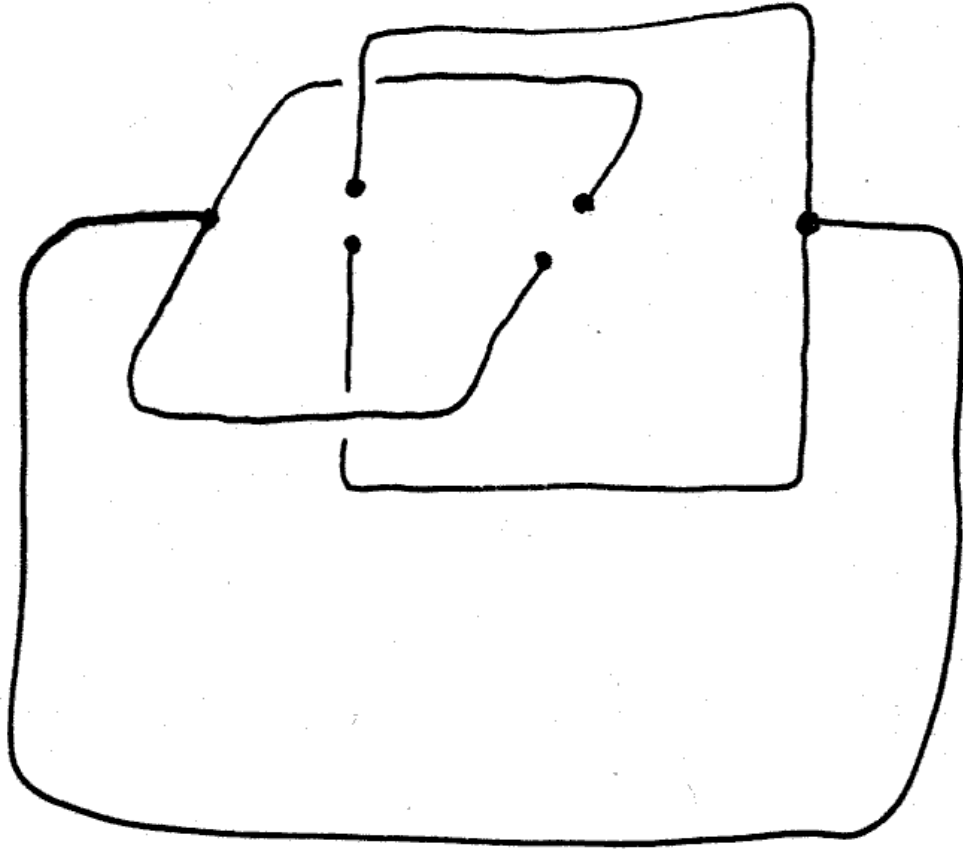
$$\tilde{H}_q(S^n \setminus s^r) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n - r - 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir machen wieder eine Induktion über r . Für $r = -1$ ist die Aussage schon aus 3.3.7 bekannt. Ist nun $r \geq 0$, so schreiben wir $s^r = s_+ \cup s_-$ als Vereinigung von zwei abgeschlossenen Hemisphären mit Schnitt $s_+ \cap s_- = s^{r-1} \cong S^{r-1}$. Wir wenden die reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz an auf $X_{\pm} = S^n \setminus s_{\pm}$, es ist also $X_+ \cup X_- = S^n \setminus s^{r-1}$ und $X_+ \cap X_- = S^n \setminus s^r$ und wir erhalten mit 3.3.9 Isomorphismen $\tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus s^{r-1}) \cong \tilde{H}_q(S^n \setminus s^r)$ und von da ausgehend induktiv $\tilde{H}_q(S^n \setminus s^r) \cong \tilde{H}_{q+r+1}(S^n \setminus s^{-1}) = \tilde{H}_{q+r+1}(S^n)$. \square

Beweis von Jordan-Brouwer 3.3.2. Der Fall $r > n$ ist unmöglich, da \tilde{H}_q stets verschwindet für $q < -1$. Im Fall $r = n$ haben wir $S^n = s^r$, denn $\tilde{H}_{-1}(X) \neq 0$ bedeutet $X = \emptyset$. Im Fall $r \leq n - 2$ haben wir $\tilde{H}_0(S^n \setminus s^r) = 0$ aber $S^n \setminus s^r \neq \emptyset$. Es folgt $H_0(S^n \setminus s^r) \cong \mathbb{Z}$, und damit hat $S^n \setminus s^r$ nach 1.2.15 genau eine Wegzusammenhangskomponente, die auch die einzige Zusammenhangskomponente sein muß. Im Fall $r = n - 1$ haben wir $\tilde{H}_0(S^n \setminus s^r) \cong \mathbb{Z}$, also $H_0(S^n \setminus s^r) \cong \mathbb{Z}^2$ und damit hat $S^n \setminus s^r$ nach 1.2.15 genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Da bei einer offenen Teilmenge von S^n jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung hat, sind das nach [TM] 1.3.15 auch die Zusammenhangskomponenten von $S^n \setminus s^r$. Jetzt müssen wir nur noch im Fall $r = n - 1$ zusätzlich zeigen, daß s^{n-1} im Abschluß jeder der beiden Zusammenhangskomponenten von $S^n \setminus s^{n-1}$ liegt. Für jedes $x \in s^{n-1}$ und eine beliebige offene Umgebung U von x in S^n finden wir eine Teilmenge $A \subset s^{n-1}$ mit $x \in A$ derart, daß gilt $\bar{A} \subset U$ und $s^{n-1} \setminus A \cong [0, 1]^{n-1}$. Wir setzen $B := s^{n-1} \setminus A$. Nach 3.3.9 ist $S^n \setminus B$ wegzusammenhängend. Verbinden wir nun zwei Punkte aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $S^n \setminus s^{n-1}$ in $S^n \setminus B$ durch einen Weg σ , so muß σ durch A laufen. Ist $\sigma(t)$ beziehungsweise $\sigma(s)$ der erste beziehungsweise letzte Punkt von σ in \bar{A} , so liegen für kleines $\epsilon > 0$ notwendig $\sigma(t - \epsilon)$, $\sigma(s + \epsilon)$ in U , aber in verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von $S^n \setminus s^{n-1}$. Jede offene Umgebung U von x trifft also beide Komponenten von $S^n \setminus s^{n-1}$. \square

Korollar 3.3.12. *Seien $n \geq 2$ und $s^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, die homöomorph ist zur $(n - 1)$ -Sphäre S^{n-1} . So zerfällt ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus s^{n-1}$ in zwei Zusammenhangskomponenten, deren Rand jeweils s^{n-1} ist.*

Beweis. Man fasse \mathbb{R}^n auf als das Komplement eines Punktes in S^n . \square



Versuch der Darstellung einer Konstruktionsvorschrift für Alexander's gehörnte Sphäre. Es gilt, sich dieses Bild in fraktaler Weise immer weiter verkleinert ins Unendliche fortgesetzt zu denken, an jedem der beiden Paare von sich gegenüberliegenden Endkugeln teilt sich unser Gebilde also wieder in jeweils zwei Arme, die sich fast wieder treffen, und so weiter. Die hier gezeichneten Drähte sind massiv gemeint und verdünnen sich entsprechend in die Spitzen hinein, so daß dieses ganze Drahtgebilde homöomorph ist zum Einheitsball im \mathbb{R}^3 . Sein Komplement ist nicht einfach wegzusammenhängend, was wir aber nicht beweisen werden. Alexander's gehörnte Sphäre ist die Oberfläche dieses Gebildes.

3.3.13. Der Spezialfall $n = 2$ des vorhergehenden Korollars heißt der **Jordan'sche Kurvensatz**. Er besagt grob gesprochen, daß jede geschlossene Kurve in der Ebene die Ebene in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt. In diesem Fall sagt der **Satz von Schönflies** sogar stärker, daß wir einen Homöomorphismus der Ebene mit sich selber finden können, unter dem unsere geschlossene Kurve dem Einheitskreis entspricht. Im Fall $n = 3$ ist **Alexander's gehörnte Sphäre** eine zum kompakten Ball D^3 homöomorphe Teilmenge des Raums \mathbb{R}^3 , deren Komplement nicht einfach wegzusammenhängend ist, oder vielmehr die Randsphäre dieses Balls. Die abelsch gemachte Fundamentalgruppe dieses Komplements muß aber wieder verschwinden nach dem Satz von Hurewicz 1.5.2 und unserem Satz 3.3.11 über die reduzierte Homologie des Komplements.

Korollar* 3.3.14 (Invarianz von Gebieten). *Jede stetige Injektion $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ist offen.*

3.3.15 (**Diskussion der Terminologie**). Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ zwei Teilmengen, die homöomorph sind als topologische Räume. Aus Korollar 3.3.14 folgt: Ist U offen, so ist auch V offen. In der Funktionentheorie nennt man offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene auch „Gebiete“, daher die Terminologie.

Beweis. Es reicht, wenn wir für jede Einbettung $f : E \hookrightarrow S^n$ der abgeschlossenen Einheitskugel $E \subset \mathbb{R}^n$ in die Sphäre S^n zeigen, daß ihr Inneres E° offenes Bild $f(E^\circ) \subset S^n$ hat. Das Komplement des Bildes der Randsphäre $f(\partial E)$ besteht nach dem Satz von Jordan-Brouwer 3.3.2 aus zwei Zusammenhangskomponenten

$$S^n \setminus f(\partial E) = W_1 \sqcup W_2$$

Da S^n lokal zusammenhängend ist, sind diese Zusammenhangskomponenten offene Teilmengen der Sphäre $W_1, W_2 \subset S^n$. Das Komplement des Bildes $f(E)$ ist auch zusammenhängend nach 3.3.9, somit erhalten wir eine weitere disjunkte Zerlegung in zusammenhängende Teilmengen

$$S^n \setminus f(\partial E) = (S^n \setminus f(E)) \sqcup f(E^\circ)$$

Nach [TM] 1.3.16 muß aber jede zusammenhängende Teilmenge eines Raums in einer seiner Zusammenhangskomponenten enthalten sein. Da unser Raum genau zwei Zusammenhangskomponenten hat, müssen unsere beiden disjunkten zusammenhängenden Teilmengen also genau diese Zusammenhangskomponenten W_1, W_2 sein. Es folgt $f(E^\circ) = W_i \subset S^n$ für ein i . \square

3.3.16. Sind $s, s' \subset S^n$ disjunkte Teilmengen, die homöomorph sind zu S^p beziehungsweise S^q mit $p + q = n - 1$, so kann man ihre **Verschlingungszahl** $v(s, s') \in \mathbb{N}$ definieren als den Betrag des Bildes der Eins unter $\mathbb{Z} \cong \tilde{H}_p(s) \rightarrow \tilde{H}_p(S^n \setminus s') \cong \mathbb{Z}$. Der Spezialfall $q = 0$ wird in 3.3.3 diskutiert. Mehr dazu findet man in [SZ94].

Übungen

Übung 3.3.17 (Einbettungen von Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension). Eine injektive stetige Abbildung von einer nichtleeren kompakten Mannigfaltigkeit in eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit derselben Dimension ist stets surjektiv. Hinweis: Invarianz von Gebieten 3.3.14.

3.4 Homologie von endlichen Zellkomplexen

Definition 3.4.1. Gegeben eine stetige Abbildung $f : Z \rightarrow X$ erklärt man ihren **Abbildungskegel** als den topologischen Raum

$$\text{Keg}(f) = K(f) := ((Z \times [0, 1]) \sqcup X \sqcup \text{top}) / \sim$$

für $\text{top} = \{*\}$ den einpunktigen Raum und die Äquivalenzrelation \sim erzeugt durch $f(z) \sim (z, 0)$ sowie $(z, 1) \sim *$ für alle $z \in Z$. Unsere Definition weicht im Fall $Z = \emptyset$ von der in der Literatur üblichen Definition ab.

Beispiel 3.4.2. Ist $n \geq 0$ und $f : S^{n-1} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so sagt man auch, der Abbildungskegel $K(f)$ entstehe aus X durch **Ankleben einer n -Zelle** **vermittels** f . Im Fall $n = 0$ alias $Z = \emptyset$ entsteht $K(f)$ aus X durch die disjunkte Vereinigung mit einem Punkt; im Fall $n = 1$ durch das Ankleben einer Kante, wobei man ihre beiden Endpunkte mit den Punkten $f(-1)$ und $f(1)$ des Ausgangsraums identifiziert; im Fall $n = 2$ durch das Ankleben einer Kreisscheibe längs ihres Randkreises in der durch f vorgegebenen Weise, und so weiter.

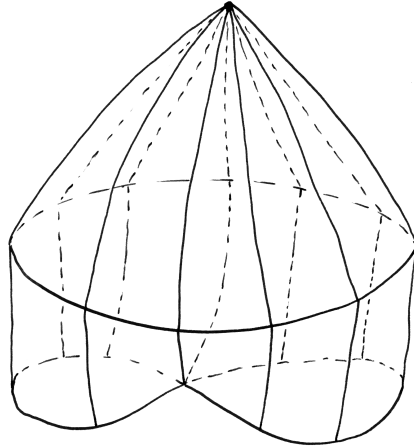
Satz 3.4.3 (Anklebesequenz). Für jede stetige Abbildung $f : Z \rightarrow X$ gibt es in der reduzierten Homologie eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q Z \rightarrow \tilde{H}_q X \rightarrow \tilde{H}_q K(f) \rightarrow \tilde{H}_{q-1} Z \rightarrow \dots$$

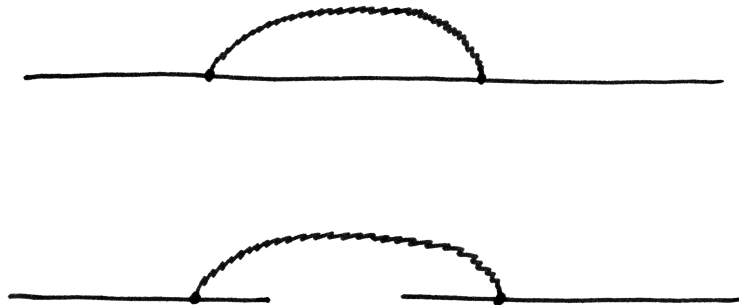
mit der Eigenschaft, daß die erste Abbildung von f induziert wird und die zweite von der Einbettung von X in den Abbildungskegel $K(f)$.

Vorschau 3.4.4. In 3.5.7 zeigen wir mit mehr Mühe eine noch feinere Aussage, die sowohl die Beziehung unserer Sequenz zur langen exakten Homologiesequenz des Raumpaars $(K(f), X)$ klärt als auch den Fall „simultaner Abbildungskegel“ einschließt.

3.4.5 (Änderung der Homologie beim Ankleben einer Zelle). Es können also anschaulich gesprochen beim Ankleben einer n -Zelle im wesentlichen zwei Dinge passieren: Entweder die angeklebte Zelle „füllt ein $(n - 1)$ -Loch“, als da heißt $\tilde{H}_{n-1} S^{n-1} \rightarrow \tilde{H}_{n-1} X$ ist eine Injektion und die $(n - 1)$ -te Homologie von X wird beim Ankleben entsprechend kleiner; Oder die angeklebte Zelle „schafft



Der Abbildungskegel der Abbildung, die eine Kreislinie Z zu einer Acht X zusammenzwickt. Die hier zu sehende Kreislinie in mittlerer Höhe ist das Bild von $Z \times \{1/2\}$ oder vielleicht auch eher von $Z \times \{1/4\}$ im Abbildungskegel.



Zwei Fälle des Anklebens einer Eins-Zelle, hier gezackt eingezeichnet. Im ersten Fall wird ein Eins-Loch geschaffen, im zweiten Fall ein Null-Loch geschlossen.

ein n -Loch“, als da heißt $\tilde{H}_{n-1}S^{n-1} \rightarrow \tilde{H}_{n-1}X$ ist keine Injektion und die n -te Homologie von X wird beim Ankleben entsprechend größer. In diesem Fall kann sich natürlich die $(n-1)$ -te Homologie auch noch etwas verkleinern, es wird eben eine endliche Untergruppe daraus weggeteilt, und das ist dann nicht mehr so leicht anschaulich zu machen. Sie können etwa versuchen, sich das Beispiel vorzustellen, daß an die reell projektive Ebene, die ja durch Ankleben einer Zweizelle längs des Randes eines Möbiusbandes entsteht, noch eine weitere Zweizelle längs der Kreislinie auf der Mitte besagten Möbiusbandes angeklebt wird. In jedem Fall gilt jedoch $\tilde{H}_q X \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_q K(f)$ für $q \neq n, n-1$.

Beweis. Das Bild der ausgezeichneten einpunktigen Menge top im Abbildungskegel bezeichnen wir wieder mit top und das Bild von X wieder mit X . Wir erhalten so zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen des Abbildungskegels $K := K(f)$, deren Komplemente eine offene Überdeckung $K = U \cup V$ bilden. Von diesen offenen Mengen ist $V := K \setminus X$ zusammenziehbar, und der Schnitt unserer beiden offenen Mengen kann identifiziert werden mit $U \cap V = Z \times (0, 1)$. Die durch unsere Erkenntnis $\tilde{H}_q V = 0$ vereinfachte Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie hat dann die Gestalt

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(U \cap V) \rightarrow \tilde{H}_q(U) \rightarrow \tilde{H}_q(K) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

Wendet man 3.4.7 auf $T := [0, 1]$ und die die Topologie des Abbildungskegels definierende finale Abbildung an, so erkennt man leicht, daß die Einbettung $X \hookrightarrow U$ eine Homotopieäquivalenz ist. Wir erhalten sogar ein homotopiekommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \hookrightarrow & U \cap V \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & U \end{array}$$

durch $z \mapsto (z, 1/2)$ in der oberen Horizontalen mit Homotopieäquivalenzen in den Horizontalen. Der Satz ist bewiesen. \square

Vorschau 3.4.6 (Algebraischer und topologischer Abbildungskegel). Unsere Mayer-Vietoris-Sequenz aus dem vorhergehenden Beweis kommt nach 2.4.11 her von einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen, die wir im folgenden Diagramm in die oberen Horizontale geschrieben haben. Hierbei bedeutet \mathcal{W} die offene Überdeckung $K = U \cup V$.

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{S}(U \cap V) & \hookrightarrow & \tilde{S}(U) \oplus \tilde{S}(V) & \twoheadrightarrow & \tilde{S}^{\mathcal{W}}(K) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \\ \tilde{S}(Z) & \rightarrow & \tilde{S}(X) & & \end{array}$$

Die untere Horizontale stellt die von $f : Z \rightarrow X$ induzierte Abbildung dar und mit den durch unser homotopiekommutatives Diagramm vom Ende des vorhergehenden Beweises induzierten Vertikalen entsteht ein homotopiekommutatives

Diagramm von Komplexen freier abelscher Gruppen. Zusammen mit $\tilde{S}^W(K) \rightarrow \tilde{S}(K)$ und ?? liefert das einen ausgezeichneten Isomorphismus $\text{Keg}(\tilde{S}(Z) \rightarrow \tilde{S}(X)) \xrightarrow{\sim} \tilde{S}(K)$ in der derivierten Kategorie $\text{Der}(\text{Ab})$ und zusammen mit ?? sogar in der Homotopiekategorie $\text{Hot}(\text{Ab})$. Er rechtfertigt die Bezeichnung als Abbildungskegel für die rein algebraische Konstruktion Keg aus dem Beweis von 6.2.5.

Proposition 3.4.7. *Ist $p : X \rightarrow Y$ final und surjektiv und T lokal kompakt, so ist auch $p \times \text{id} : X \times T \rightarrow Y \times T$ final und surjektiv.*

3.4.8. Wir geben in [TM] 1.9.15 einen alternativen Beweis.

Beweis. Sei $W \subset Y \times T$ eine Teilmenge mit offenem Urbild $U \Subset X \times T$. Es gilt zu zeigen, daß W selbst offen ist. Sei dazu $(y, t) \in W$ ein Punkt und (x, t) eines seiner Urbilder. Sicher gibt es eine kompakte Umgebung K von t mit $\{x\} \times K \subset U$. Man überlegt sich leicht, daß dann

$$A := \{a \in X \mid \{a\} \times K \subset U\}$$

offen ist in X und daß gilt $A = p^{-1}(p(A))$. Folglich ist $p(A)$ offen in Y und wir haben $(y, t) \in p(A) \times K \subset W$. Mithin liegt mit jedem Punkt auch eine ganze offene Umgebung des besagten Punktes in W und W ist offen. \square

Korollar 3.4.9 (Endlichkeit der Homologie von endlichen Zellkomplexen). *Entsteht ein topologischer Raum X aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften von endlich vielen Zellen, und heften wir dabei keine Zellen einer Dimension $> d$ an, so gilt $H_q X = 0$ für $q > d$ und $H_q X$ ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe für alle $q \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Man benutze für die zweite Aussage, daß bei einer kurzen exakten Sequenz abelscher Gruppen $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ die Mitte endlich erzeugt ist genau dann, wenn die Enden es sind. \square

Beispiel 3.4.10 (Homologie der komplex projektiven Räume). Der $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ ergibt sich aus dem $\mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}$ durch Anheften einer $2n$ -Zelle. Betrachten wir genauer die Abbildung $F : D^{2n} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ gegeben durch die Abbildungsvorschrift

$$z = (z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto \langle z_0, \dots, z_{n-1}, 1 - \|z\| \rangle$$

und nehmen ihre Restriktion zu $f : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}$ als Anklebeabbildung, so konstruiert man ohne Schwierigkeiten einen Homöomorphismus $K(f) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ zwischen dem Abbildungskegel und $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$. Wir erhalten also

$$H_q(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2, \dots, 2n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsteht allgemeiner X aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften von Zellen gerader Dimension, so verschwindet $H_q X$ für ungerades q und für gerades q ist $H_q X$ eine freie abelsche Gruppe, deren Rang gerade die Anzahl der angehefteten q -Zellen ist.

Satz 3.4.11 (Eulercharakteristik von Zellkomplexen). *Der Raum X entstehe aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften von endlich vielen Zellen. Sei c_q die Zahl der verwendeten q -Zellen und sei k ein Körper. So wird die Eulercharakteristik von X gegeben durch die Formel*

$$\chi(X; k) = \sum (-1)^q c_q$$

Beweis. Ist $\dots \rightarrow A_i \xrightarrow{\partial_i} A_{i-1} \rightarrow \dots$ eine lange exakte Sequenz von endlich-dimensionalen Vektorräumen und verschwinden von den A_i alle bis auf endlich viele, so gilt für die Eulercharakteristik unseres Komplexes

$$\sum (-1)^i \dim A_i = \sum (-1)^i \dim \mathcal{H}_i A = 0$$

nach 3.1.19. Schreiben wir unsere Sequenz in der Gestalt

$$\dots \rightarrow D_{q+1} \rightarrow B_q \rightarrow C_q \rightarrow D_q \rightarrow B_{q-1} \rightarrow \dots$$

so folgt

$$\sum (-1)^q \dim C_q = \sum (-1)^q \dim B_q + \sum (-1)^q \dim D_q$$

Nun läßt sich die Eulercharakteristik auch mithilfe der reduzierten Homologie darstellen als $\chi(X; k) - 1 = \sum (-1)^q \dim_k \tilde{H}_q(X; k)$. Mit unserer Anklebesequenz folgt $\chi(X; k) - 1 = \chi(Y; k) - 1 + (-1)^n$, wenn X aus Y durch Ankleben einer n -Zelle entsteht. Der Satz ergibt sich nun mit Induktion. \square

Ergänzung 3.4.12. Der vorhergehende Beweis könnte alternativ auch auf unserer Formel $\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$ aus 3.1.27 aufgebaut werden: Diese Formel liefert sogar allgemeiner unter den offensichtlichen Endlichkeitsannahmen für $f : Z \rightarrow X$ stetig mit den im Beweis der Anklebesequenz diskutierten Argumenten die Formel

$$\chi(K(f)) = \chi(X) + 1 - \chi(Z)$$

Man diese Formel jedoch auch direkt aus der Anklebesequenz folgern.

3.4.13. Gegeben ein topologischer Raum X erklärt man seine **Suspension** als den Abbildungskegel der konstanten Abbildung

$$\Sigma X := K(X \rightarrow \text{top})$$

Unsere Anklebesequenz liefert Isomorphismen $\tilde{H}_{i+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(X)$ für alle i . Unsere Definition weicht im Fall $X = \emptyset$ von der in der Literatur üblichen Definition ab.

Übungen

Übung 3.4.14. Man zeige, daß die Homologie der quaternionalen projektiven Räume gegeben wird durch $H_q(\mathbb{P}^n\mathbb{H}) \cong \mathbb{Z}$ für $q = 0, 4, \dots, 4n$ und Null sonst.

Übung 3.4.15. Man zeige, daß der Abbildungskegel von $S^1 \rightarrow S^1$ gegeben durch $z \mapsto z^2$ homöomorph zur reell projektiven Ebene ist und berechne deren Homologie.

3.5 Zelluläre Homologie

Satz 3.5.1 (Komplex der zellulären Homologie). *Wir betrachten einen Raum X , der aus der leeren Menge entsteht durch das simultane Ankleben von durch $\alpha \in A_0$ indizierten Nullzellen gefolgt vom simultanen Ankleben von durch $\alpha \in A_1$ indizierten Einszellen und so weiter bis zum simultanen Ankleben von durch $\alpha \in A_n$ indizierten n -Zellen. So gibt es einen Komplex*

$$\mathbb{Z}A_n \rightarrow \mathbb{Z}A_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}A_1 \rightarrow \mathbb{Z}A_0$$

aus freien abelschen Gruppen über den Indexmengen der jeweiligen Zellen, der die Homologie von X berechnet.

3.5.2. Bezeichne $\emptyset = X^{\leq -1} \subset X^{\leq 0} \subset X^{\leq 1} \subset \dots \subset X^{\leq n} = X$ die zugehörige Folge von Teilräumen. Mit „simultane Ankleben“ ist gemeint, daß die Anklebeabbildungen der q -Zellen jeweils Werte in $X^{\leq q-1}$ annehmen. Wir nennen $X^{\leq q}$ das q -Skelett.

3.5.3. Wir gehen dabei von der Erkenntnis 3.4.2 aus, daß das Ankleben einer Zelle als Abbildungskegel beschrieben werden kann, und untersuchen erst einmal ganz allgemein die Homologie simultaner Abbildungskegel.

3.5.4. Die Differentiale in diesem Komplex entstehen aus den Anklebeabbildungen in einer im weiteren genauer spezifizierten Weise. Seien $X_q \supset X_{q-1}$ das q -Skelett und das $(q-1)$ -Skelett. Für $\alpha \in A_q$ sei $i_\alpha : (D_q, S_{q-1}) \rightarrow (X_q, X_{q-1})$ das Einfügen der n -Zelle mit Index α mit der auf dem Rand induzierten Anklebeabbildung $f_\alpha : S_{q-1} \rightarrow X_{q-1}$. Sei $\eta_q \in H_q(D_q, S_{q-1})$ unser Standarderzeuger aus 2.3.10. So haben wir Isomorphismen

$$\mathbb{Z}A_q \xrightarrow{\sim} H_q(X_q, X_{q-1})$$

gegeben durch $\alpha \mapsto (H_q i_\alpha)(\eta_q)$ zwischen dem q -Term des Komplexes der zellulären Homologie und der q -ten relativen Homologie der entsprechenden Skelette.

3.5.5. Die Abbildung von Raumpaaren $i_\alpha : (D_q, S_{q-1}) \rightarrow (X_q, X_{q-1})$ induziert eine Abbildung zwischen den jeweiligen langen exakten Homologiesequenzen und insbesondere das kommutative Quadrat im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_q(D_q, S_{q-1}) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{H}_{q-1}(S_{q-1}) & & \mathbb{Z}A_{q-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ H_q(X_q, X_{q-1}) & \rightarrow & \tilde{H}_{q-1}(X_{q-1}) & \rightarrow & H_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2}) \end{array}$$

Die linke obere Horizontale ist ein Isomorphismus, da D_q zusammenziehbar ist. Ich habe reduzierte Homologie genommen, damit gilt $\tilde{H}_0(D_q) = 0$ für $q \geq 0$. Das Bild von η_q obenrum nach $\mathbb{Z}A_{q-1}$ ist die Definition des Randoperators im zellulären Komplex. Das Bild untenrum ist eine alternative Definition.

Beweis. Der Beweis wird in 3.5.10 gegeben. □

3.5.6. Sei $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_\alpha : Z_\alpha \rightarrow X$. Um die Notation zu vereinfachen setzen wir $Z := \bigsqcup Z_\alpha$ und bezeichnen mit $i : Z \rightarrow A$ die „Indexabbildung“ mit Faser Z_α über $\alpha \in A$. Unter dem **simultanen Abbildungskegel** der f_α verstehen wir den Raum

$$K := (X \sqcup (Z \times [0, 1]) \sqcup A) / \sim$$

für die Äquivalenzrelation \sim erzeugt durch $f(z) \sim (z, 0)$ sowie $(z, 1) \sim i(z)$ für alle $z \in Z$.

Satz 3.5.7 (Anklebesequenz, Variante). *Ist $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_\alpha : Z_\alpha \rightarrow X$ und K der simultane Abbildungskegel 3.5.6 der f_α , so gibt es Isomorphismen $\bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{H}_q Z_\alpha \xrightarrow{\sim} H_{q+1}(K, X)$, deren Verknüpfung mit dem Randoperator der langen exakten Homologiesequenz des Raumpaars (K, X) die von den f_α induzierte Abbildung $\bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{H}_q Z_\alpha \rightarrow H_q X$ ist. Insbesondere können wir diese Abbildungen einbetten in eine lange exakte Sequenz*

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{H}_q Z_\alpha \rightarrow H_q X \rightarrow H_q K \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{H}_{q-1} Z_\alpha \rightarrow \dots$$

3.5.8. Für die Isomorphismen, deren Existenz in diesem Satz behauptet wird, geben wir im Beweis sogar eine explizite Konstruktion. Der Satz gilt ebenso und mit fast demselben Beweis, wenn wir darin alle Homologiegruppen zu reduzierten Homologiegruppen machen.

Beweis. Die Bilder von A und X in K sind disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Deren Komplemente bilden eine offene Überdeckung $K = U \cup V$, wobei sich $i : K \rightarrow A$ zu einer stetigen Abbildung $i : V \rightarrow A$ mit zusammenziehbaren Fasern ausdehnen läßt. Gegeben eine stetige Abbildung in einen diskreten Raum $i : Y \rightarrow A$ vereinbaren wir die Notation $\tilde{S}_A Y$ für den durch $i_* : S_0 Y \rightarrow S_0 A$ bis

in den Grad -1 erweiterten Komplex der singulären Ketten. Insbesondere ist $\tilde{S}_A V$ exakt. Wir nennen unsere offene Überdeckung \mathcal{W} und betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{S}_A(U \cap V) & \hookrightarrow & SU \oplus \tilde{S}_A V & \twoheadrightarrow & S^{\mathcal{W}} K \\ & & \uparrow & & \parallel \\ & & SU & \hookrightarrow & S^{\mathcal{W}} K \twoheadrightarrow S^{\mathcal{W}} K / SU \\ & & \parallel & & \downarrow \\ & & SU & \hookrightarrow & SK \twoheadrightarrow SK / SU \end{array}$$

mit kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen in den Horizontalen und hoffentlich offensichtlichen Abbildungen. Es liefert mit der erweiterten Natürlichkeit 2.2.16 der langen exakten Homologiesequenz und unter Verwendung der Exaktheit des Komplexes $\tilde{S}_A V$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{H}_q(U \cap V_\alpha) & \rightarrow & H_q U & \rightarrow & H_q K & \xrightarrow{-1} \bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{H}_{q-1}(U \cap V_\alpha) \dots \\ & \uparrow & & \parallel & & \parallel & \uparrow \\ \dots & \tilde{H}_{q+1}(K, U) & \rightarrow & H_q U & \rightarrow & H_q K & \rightarrow \tilde{H}_q(K, U) \dots \end{array}$$

Die -1 meint dabei an der entsprechenden Stelle das Negative der Randabbildung der Mayer-Vietoris-Sequenz gefolgt von der natürlichen Abbildung in die reduzierte Homologie. Nun ist die Einbettung $X \hookrightarrow U$ eine Homotopieäquivalenz und die $U \cap V_\alpha$ sind homöomorph zu $Z_\alpha \times (0, 1)$ und wir können den Beweis wie im Fall 3.4.3 eines einfachen Abbildungskegels zu Ende bringen. \square

3.5.9 (Ankleben mehrerer Zellen auf einmal). Seien $n \geq 0$ fest gewählt und $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X$ und K der Raum, der aus X entsteht durch Ankleben von Zellen D^n mittels der Abbildungen f_α alias der simultane Abbildungskegel der f_α . So haben wir $H_q(K, X) = 0$ für $q \neq n$ und unsere Konstruktionen liefern einen Isomorphismus $\mathbb{Z}A \xrightarrow{\sim} H_n(K, X)$, dessen Verknüpfung

$$\mathbb{Z}A \xrightarrow{\sim} H_n(K, X) \rightarrow H_{n-1} X$$

mit dem Randoperator der langen exakten Homologiesequenz des Paares (K, X) von den f_α induziert wird in der Weise, daß darunter ein Element $\alpha \in A$ abgebildet wird auf das Bild unseres Standarderzeugers von $\tilde{H}_{n-1} S^{n-1}$ aus 2.3.10 unter f_α . Nehmen wir zusätzlich $H_n X = 0$ an, so erhalten wir eine exakte Vier-Term-Sequenz

$$H_n K \hookrightarrow \mathbb{Z}A \rightarrow H_{n-1} X \twoheadrightarrow H_{n-1} K$$

und Isomorphismen $H_q X \xrightarrow{\sim} H_q K$ für $q \notin \{n, n-1\}$.

3.5.10 (Zelluläre Homologie). Wir betrachten nun einen Raum X , der aus der leeren Menge entsteht durch das Ankleben von durch $\alpha \in A_0$ indizierten Nullzellen gefolgt vom Ankleben von durch $\alpha \in A_1$ indizierten Einszellen und so weiter

bis zum Ankleben von durch $\alpha \in A_n$ indizierten n -Zellen. Bezeichne

$$\emptyset = X^{\leq -1} \subset X^{\leq 0} \subset X^{\leq 1} \subset \dots \subset X^{\leq n} = X^{\leq n+1} = \dots = X$$

die zugehörige Folge von Teilräumen. So liefert 3.5.9 induktiv erst Isomorphismen

$$0 = H_q X^{\leq -1} \xrightarrow{\sim} H_q X^{\leq 0} \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} H_q X^{\leq q-1} \quad H_q X^{\leq q+1} \xrightarrow{\sim} H_q X^{\leq q+2} \xrightarrow{\sim} \dots$$

und dann kommutative Diagramme mit einer exakten Vier-Term-Sequenz in der oberen Horizontale

$$\begin{array}{ccccccc} H_q X^{\leq q} & \hookrightarrow & H_q(X^{\leq q}, X^{\leq q-1}) & \rightarrow & H_{q-1} X^{\leq q-1} & \twoheadrightarrow & H_{q-1} X^{\leq q} \\ & & \uparrow \wr & & \parallel & & \\ & & \bigoplus_{\alpha \in A_q} \tilde{H}_{q-1} S^{\leq q-1} & \rightarrow & H_{q-1} X^{\leq q-1} & & \\ & & \uparrow \wr & & & & \\ & & \mathbb{Z}A_q & & & & \end{array}$$

und mit der wie im Diagramm dargestellt durch die Anklebeabbildungen gegebenen mittleren Abbildung. Das führt unmittelbar zu der Erkenntnis, daß die Homologie von X isomorph ist zur Homologie des aus dem Zusammenstückeln dieser Vier-Term-Sequenzen entstehenden Komplexes

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}A_{q+1} \rightarrow \mathbb{Z}A_q \rightarrow \mathbb{Z}A_{q-1} \rightarrow \dots$$

alias des Komplexes

$$\dots \rightarrow H_{q+1}(X^{\leq q+1}, X^{\leq q}) \rightarrow H_q(X^{\leq q}, X^{\leq q-1}) \rightarrow H_{q-1}(X^{\leq q-1}, X^{\leq q-2}) \rightarrow \dots$$

Die Randoperatoren kommen hier von den langen exakten Homologiesequenzen der entsprechenden Tripel 2.2.10 her. Die Homologie dieses Komplexes nennt man auch die **zelluläre Homologie**. Im übrigen liefert 2.4.15 Isomorphismen $H_q(X^{\leq q}, X^{\leq q-1}) \xrightarrow{\sim} H_q(X^{\leq q}/X^{\leq q-1}, *)$ und $X^{\leq q}/X^{\leq q-1}$ ist ein Bouquet von q -Sphären, genauer eine durch A_q indizierte Familie von an einem Punkt $*$ zusammengeklebten q -Sphären. Das mag zusätzliche Anschauung für die Randabbildungen des zellulären Komplexes geben.

Vorschau 3.5.11 (Zelluläre Homologie von CW-Komplexen). Im Fall eines sogenannten CW-Komplexes X mit n -Skeletten $X^{\leq n}$ liefern die Einbettungen nach 7.1.28 Isomorphismen $H_n X^{\leq n+1} \xrightarrow{\sim} H_n X$. Folglich können wir auch die Homologie eines CW-Komplexes in der in 3.5.10 beschriebenen Weise berechnen.

4 Homologie von Mannigfaltigkeiten

4.1 Homologie und Orientierung

Satz 4.1.1 (Homologie und Determinantenvorzeichen). *Gegeben eine invertierbare lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ ist die davon induzierte Selbstabbildung g_* auf der relativen Homologie $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ die Identität im Fall $\det(g) > 0$ und die Multiplikation mit (-1) im Fall $\det(g) < 0$.*

4.1.2. Wir verwenden hier die Konvention, nach der die Identität auf dem Nullvektorraum die Determinante Eins hat.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n > 0$. Nach [AN2] 8.5.19 hat dann $GL(n; \mathbb{R})$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, die Matrizen mit positiver Determinante und die Matrizen mit negativer Determinante. Homotopieinvarianz zeigt dann, daß g_* nur vom Vorzeichen von $\det(g)$ abhängen kann. Jetzt brette man den Standardsimplex Δ_n so nach \mathbb{R}^n ein, daß alle seine Ecken bis auf Zwei in ein- und derselben Koordinatenebene zu liegen kommen, daß die restlichen beiden Ecken unter der Spiegelung an dieser Koordinatenebene vertauscht werden, und daß der Ursprung im offenen Kern des Bildes liegt. Diese Einbettung liefert einen Isomorphismus

$$H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

Der Effekt der fraglichen Spiegelung kann auf der simplizialen Homologie der linken Seite leicht berechnet werden und ergibt sich dort zu (-1) , da die fragliche Permutation der Ecken von Δ_n eine Transposition und damit ungerade ist. \square

Korollar 4.1.3 (Nullstellenfreie Vektorfelder auf Sphären). *Genau dann gibt es auf der n -Sphäre S^n ein nirgends verschwindendes stetiges Vektorfeld, wenn ihre Dimension n ungerade ist.*

Beweis. Ein Vektorfeld ist für uns eine stetige Abbildung $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ derart, daß $v(x)$ senkrecht steht auf x für alle x , in Formeln $x \perp v(x) \forall x \in S^n$. Ist n ungerade, so können wir ein mögliches v angeben durch

$$v(x_0, \dots, x_n) = (x_1, -x_0, x_2, -x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

In jedem Fall können wir ein nirgends verschwindendes Vektorfeld v auf Länge Eins normieren. Es definiert dann eine Familie von Abbildungen $\varphi_t : S^n \rightarrow S^n$, bei der $\varphi_t(x)$ der Punkt ist, an dem man landet, wenn man von x in Richtung $v(x)$ für die Zeit t auf dem entsprechenden Großkreis um die Sphäre läuft, in Formeln $\varphi_t(x) = (\cos t)x + (\sin t)v(x)$. So erhalten wir nun offensichtlich eine

Homotopie zwischen der Identität und der Antipodenabbildung $a = \varphi_\pi : S^n \rightarrow S^n$, $x \mapsto -x$ und folgern $\tilde{H}_n(a) = \text{id}$ auf $\tilde{H}_n(S^n)$. Da aber die Einbettung $S^n \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0)$ eine Homotopieäquivalenz ist und da folglich gilt $\tilde{H}_n(a) = (-1)^{n+1} \text{id}$ auf $\tilde{H}_n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0)$, kann es eine derartige Homotopie nur für ungerades n geben. \square

Übungen

Übung 4.1.4 (Algebraische und topologische Orientierung). Jedem endlichdimensionalen Vektorraum V über einem angeordneten Körper k hatten wir in der linearen Algebra eine zweielementige Orientierungsmenge oder ausführlicher seine **algebraische Orientierungsmenge** $\text{or}(V) = \text{or}^{\text{alg}}(V)$ zugeordnet und sogar einen Funktor

$$\text{or}^{\text{alg}} : \text{Modf}_k^\times \rightarrow \text{Ens}$$

erklärt. Eine algebraische Orientierung von V war dort eine Vorschrift ε , die jeder angeordneten Basis \mathcal{A} von V ein Vorzeichen $\varepsilon(\mathcal{A})$ so zuordnet, daß diese Vorzeichen mit den Vorzeichen der Basiswechsellmatrizen verträglich sind. Jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V ordnen wir seine **topologische Orientierungsmenge** $\text{or}^{\text{top}}(V)$ zu als die Menge der beiden Erzeuger von $H_n(V, V \setminus 0)$ und erhalten so einen weiteren Funktor

$$\text{or}^{\text{top}} : \text{Modf}_{\mathbb{R}}^\times \rightarrow \text{Ens}$$

Zu jeder angeordneten Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V betrachten wir nun denjenigen Erzeuger $\eta_{\mathcal{A}} \in H_n(V, V \setminus 0)$, der durch den affinen n -Simplex $[(- \sum v_i), v_1, \dots, v_n]$ repräsentiert wird, und erklären unsere **Standardtransformation**

$$\text{std} : \text{or}^{\text{alg}} \xrightarrow{\cong} \text{or}^{\text{top}}$$

durch die Vorschrift $\text{std}_V : \varepsilon \mapsto \varepsilon(\mathcal{A})\eta_{\mathcal{A}}$. Man zeige, daß das wohldefiniert ist. Wir zeigen in [TSK] 4.1.17, daß diese Standardtransformation eine von zwei möglichen „Transformationen von Schmelzfunktoren“ ist für die natürlichen Erweiterungen von or^{alg} und or^{top} zu „Schmelzfunktoren“, die wir ebenfalls dort besprechen. Solch eine Schmelztransformation ist dann bereits festgelegt und festlegbar durch die davon induzierte Bijektion $\text{or}^{\text{alg}}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \text{or}^{\text{top}}(\mathbb{R})$.

Beispiel 4.1.5. Im Fall der angeordneten Standardbasis $\mathcal{S}(n)$ des \mathbb{R}^n ist $\eta_{\mathcal{S}(n)} = \eta_n$ unser Standarderzeuger aus 2.3.10.

Übung 4.1.6 (Verträglichkeiten im Zusammenhang mit Orientierungen). Man

zeige die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
 \text{or}^{\text{alg}} & \xrightarrow[\sim]{\text{std}} & \text{or}^{\text{top}} \\
 \downarrow \wr_{\text{std}} & & \downarrow \wr_{\partial} \\
 \text{dreh} & \xrightarrow[\sim]{\text{hur}} & \text{or}_{\text{abs}}^{\text{top}}
 \end{array}$$

in $\text{Cat}(\text{Mod}_{\mathbb{R}}(2)^{\times}, \text{Ens})$ von Funktoren und Transformationen mit unten rechts dem Funktor $\text{or}_{\text{abs}}^{\text{top}}$, der jedem zweidimensionalen reellen Vektorraum V die Menge der beiden Erzeuger von $H_1(V \setminus 0)$ zuordnet, mit den Standardisomorphismen aus der oberen linken Ecke nach rechts aus 4.1.4 und nach unten zur Menge der beiden Drehsinne aus [TF] 1.8.5 und dem Randoperator der langen exakten Homologiesequenz $\partial : H_2(V, V \setminus 0) \xrightarrow{\sim} H_1(V \setminus 0)$ in der rechten Vertikale und dem Hurewicz-Isomorphismus 1.5.2 in der unteren Horizontale.

Übung 4.1.7. Gegeben ein endliches angeordnetes minimales Erzeugendensystem p_0, p_1, \dots, p_n eines reellen affinen Raums E erinnern wir die zugehörige algebraische Orientierung von \vec{E} aus [LA1] 6.5.21 durch die angeordnete Basis $p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0$. Sei s der Schwerpunkt der p_i . Man zeige, daß die unter unserer Standardidentifikation aus 4.1.4 zugehörige topologische Orientierung alias der zugehörige Erzeuger von $H_n(\vec{E}, E \setminus 0)$ durch den Simplex $\Delta_n \rightarrow \vec{E}$ mit $e_i \mapsto p_i - s$ repräsentiert wird.

Übung 4.1.8 (Orientierung und Vorzeichen der Funktionaldeterminante). Gegeben $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebungen des Ursprungs und $g : A \xrightarrow{\sim} B$ ein Diffeomorphismus mit $g(0) = 0$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(A, A \setminus 0) & \rightarrow & H_n(B, B \setminus 0) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) & \rightarrow & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)
 \end{array}$$

mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante $\det(d_0g)$ als unterer Horizontale. Hinweis: Für vom Ursprung verschiedene Punkte p nahe am Ursprung gilt die Abschätzung $\|g(p) - (d_0g)(p)\| < \|(d_0g)(p)\|$.

4.2 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

4.2.1. Unter einer **topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension n** oder kurz **n -Mannigfaltigkeit** verstehen wir wie in [TM] 1.4.3 einen Hausdorffraum X derart, daß jeder Punkt $p \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n . Viele Autoren fordern von einer Mannigfaltigkeit zusätzlich, daß sie „parakompakt“ sein soll oder „abzählbar basiert“. Wir werden solche Bedingungen stets explizit erwähnen. Vorerst sind sie für uns belanglos.

4.2.2. Sei M eine n -Mannigfaltigkeit. Für jeden Punkt $x \in M$ ist die relative Homologie $H_n(M, M \setminus x)$ alias die n -te lokale Homologie des bepunkteten Raums (M, x) frei vom Rang Eins nach Ausschneidung 2.4.10 und den Resultaten 2.3.9 über die Homologie von Sphären.

Definition 4.2.3. Eine **Orientierung**, genauer **topologische Orientierung** einer n -Mannigfaltigkeit ist eine Zuordnung ω , die jedem Punkt $x \in M$ einen Erzeuger ω_x von $H_n(M, M \setminus x)$ zuordnet und zwar so, daß gilt: Für alle $x \in M$ gibt es eine Umgebung U von x und ein Element $\omega_U \in H_n(M, M \setminus U)$ derart, daß für alle $y \in U$ gilt $\omega_U \mapsto \omega_y$ unter der natürlichen Abbildung $H_n(M, M \setminus U) \rightarrow H_n(M, M \setminus y)$. Wir nennen ω_x die **lokale Orientierung** zur „globalen Orientierung“ ω .

4.2.4 (**Bezug zur Orientierung aus der linearen Algebra**). Gegeben ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum V liefert die in 4.1.4 ausgezeichnete Standardbijektion std_V zwischen $\text{or}(V)$ und der Menge der Erzeuger von $H_n(V, V \setminus 0)$ eine Bijektion zwischen der Menge der Orientierungen auf V im Sinne der linearen Algebra und der Menge der topologischen Orientierungen von V als Mannigfaltigkeit.

4.2.5. Gegeben Räume $M \supset A \supset B$ notieren wir die natürliche Abbildung $H_n(M, M \setminus A) \rightarrow H_n(M, M \setminus B)$ im weiteren Verlauf kurz $\eta \mapsto \eta|_B$, so daß wir etwa eben statt $\omega_U \mapsto \omega_y$ auch $\omega_U|_y = \omega_y$ hätten schreiben dürfen.

4.2.6 (**Bezug zur Orientierung aus der Analysis**). In [AN2] 9.3.3 hatten wir eine Orientierung einer Mannigfaltigkeit, genauer einer eingebetteten n -dimensionalen C^1 -Mannigfaltigkeit M , erklärt als eine Vorschrift, die an jedem Punkt dem eine algebraische Orientierung des Tangentialraums auszeichnet derart, daß noch gewisse zusätzliche Eigenschaften erfüllt sind. Zu jeder derartigen **analytischen Orientierung von M** konstruieren wir eine topologische Orientierung, indem wir von \mathbb{R}^n mit seiner Standardorientierung [LA1] 6.5.2 ausgehen und mit unserer Standardbijektion 4.1.4 eine topologische Orientierung von \mathbb{R}^n konstruieren. Sie wird gegeben durch einen Erzeuger von $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$, den wir den **Standarderzeuger** nennen. Durch Verschieben und Ausschneidung erhalten wir daraus Erzeuger der relativen Homologie $H_n(W, W \setminus p)$ für beliebige $p \in W \subseteq \mathbb{R}^n$. Gegeben eine Karte (W, φ) der Orientierung ε im Sinne von [AN2] 9.3.9 wählen wir dann die Bilder der ε -fachen dieser Erzeuger unter den von φ induzierten Abbildungen $H_n(W, W \setminus p) \rightarrow H_n(M, M \setminus \varphi(p))$ als Erzeuger auf der rechten Seite. Führen wir das für alle zusammenhängenden Karten durch, so erhalten wir wegen der Beziehung 4.1.8 zwischen dem Erhalten der Orientierung und dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante eine wohldefinierte topologische Orientierung auf M . Offensichtlich erhalten wir so für jede C^1 -Mannigfaltigkeit M eine Bijektion zwischen der Menge der analytischen Orientierungen von M und der Menge der topologischen Orientierungen von M .

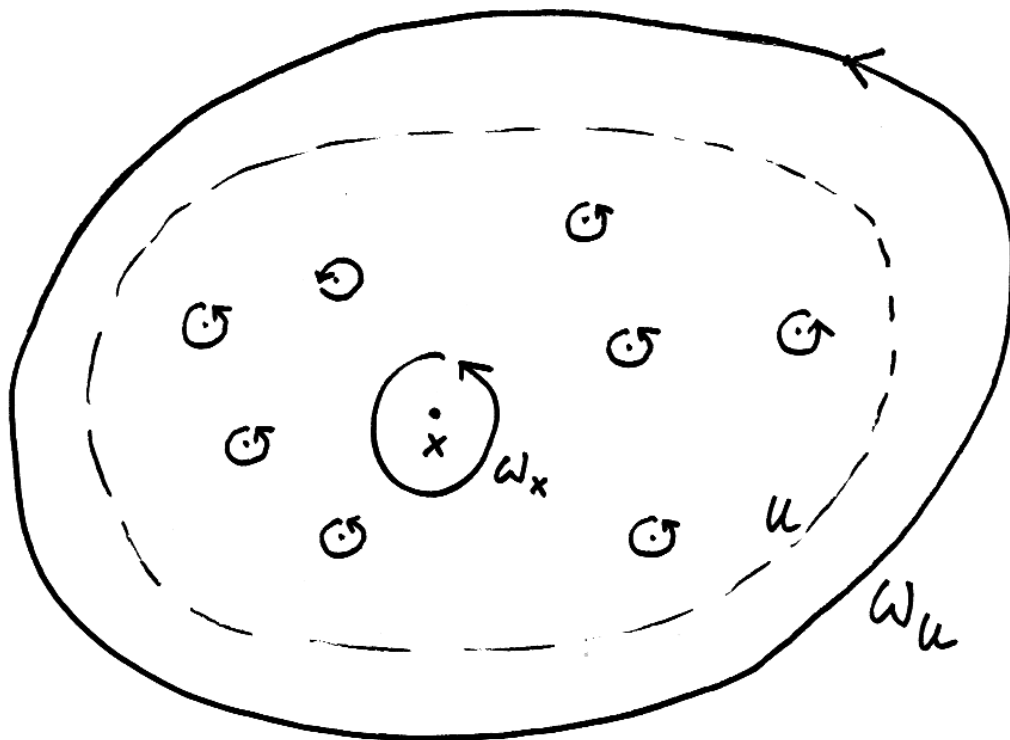


Illustration der Definition einer Orientierung. Die ganzen Punkte $y \in U$ sind nicht beschriftet, erben aber ihre Orientierung von einem gemeinsamen ω_U . Die Homologieklassen habe ich durch Erzeuger angedeutet.

Definition 4.2.7. Eine Mannigfaltigkeit, die mindestens eine Orientierung besitzt, heißt **orientierbar**. Unter einer **orientierten Mannigfaltigkeit** verstehen wir eine Mannigfaltigkeit mit einer ausgezeichneten Orientierung. Eine Orientierung auf M induziert in offensichtlicher Weise eine Orientierung auf jeder offenen Teilmenge von M .

Lemma 4.2.8 (Kriterium für die Gleichheit von Orientierungen). *Stimmen zwei Orientierungen einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit in einem Punkt überein, so sind sie gleich.*

Beweis. Seien M unsere zusammenhängende Mannigfaltigkeit und ω, η unsere beiden Orientierungen. Sei $x \in M$ gegeben mit $\omega_x = \eta_x$. Wir zeigen, daß es eine Umgebung U von x gibt mit $\omega_y = \eta_y \forall y \in U$. Sicher dürfen wir dazu annehmen $M = \mathbb{R}^n$. Per definitionem gibt es einen offenen Ball U um x und Elemente $\omega_U, \eta_U \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus U)$ mit $\omega_U \mapsto \omega_y$ und $\eta_U \mapsto \eta_y \forall y \in U$. Da aber für so ein U die Einbettung Isomorphismen

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus U) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus y)$$

induziert für alle $y \in U$, folgt aus $\omega_x = \eta_x$ bereits $\omega_U = \eta_U$ und dann $\omega_y = \eta_y \forall y \in U$. Die Mengen M_{\pm} aller $x \in M$ mit $\omega_x = \pm \eta_x$ sind folglich offen. Damit ist $M = M_+ \sqcup M_-$ eine Zerlegung in zwei disjunkte offene Teilmengen. Da nach Annahme M_+ nicht leer ist und M zusammenhängend, folgt $\omega = \eta$. \square

Definition 4.2.9. Etwas formaler betrachten wir die Menge

$$\text{or} = \text{or}_M := \bigsqcup_{x \in M} H_n(M, M \setminus x)$$

und versehen sie mit der Topologie, die erzeugt wird von allen Teilmengen der Gestalt $\mathcal{O}(U, \omega) = \{\omega|_x \mid x \in U\}$ für $U \Subset M$ und $\omega \in H_n(M, M \setminus U)$. Wir nennen or_M die **Orientierungsgarbe** von M . Die offensichtliche Abbildung $p : \text{or}_M \rightarrow M$ ist stetig, denn das Urbild von $U \Subset M$ kann beschrieben werden als die Vereinigung aller $\mathcal{O}(V, \omega)$ mit $V \Subset U$.

Vorschau 4.2.10. Nach dem anschließenden Lemma 4.2.12 ist $\text{or}_M \rightarrow M$ eine Überlagerung und damit in einer Terminologie, die wir in [TG] 2.2 einführen, der „étale Raum einer abelschen Garbe auf M “. In dieser Terminologie bedeutet unsere Konstruktion der Orientierungsgarbe die „Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto H_n(M, M \setminus U)$ “.

Beispiel 4.2.11 (Trivialisierung der Orientierungsgarbe von \mathbb{R}^n). Wir konstruieren einen Homöomorphismus $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \text{or}_{\mathbb{R}^n}$ oder vielmehr und noch natürlicher einen Homöomorphismus

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \text{or}_{\mathbb{R}^n}$$

wie folgt: Jedem Paar (ω_0, x) wird dasjenige $\omega_x \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x)$ zugeordnet mit der Eigenschaft, daß es für einen und jeden Ball $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Zentrum im Ursprung und $x \in B$ ein $\omega_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$ gibt mit $\omega_B|_0 = \omega_0$ und $\omega_B|_x = \omega_x$. Wegen der für alle $x \in B$ von der Einbettung induzierten Isomorphismen $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x)$ ist damit ω_x wohldefiniert, und daß unsere Abbildung eine Bijektion ist scheint mir offensichtlich. Sie ist stetig, da das Urbild jedes $\mathcal{O}(U, \omega)$ für einen Ball $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, und da diese Mengen auch schon die Topologie der Orientierungsgarbe erzeugen. Sie ist offen, da diese Urbilder sogar die Topologie der linken Seite erzeugen, wie der Leser unschwer einsehen wird.

Lemma 4.2.12. *Ist $V \subseteq M$ eine offene Teilmenge, so haben wir mit den offensichtlichen Abbildungen ein kartesisches Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \text{or}_V & \longrightarrow & \text{or}_M \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ V & \longrightarrow & M \end{array}$$

In anderen Worten liefert in diesem Diagramm also die obere Horizontale einen Homöomorphismus von or_V mit dem Urbild von V in or_M .

Ergänzung 4.2.13. Insbesondere ist also nach dem vorhergehenden Beispiel 4.2.11 die natürliche Projektion $\text{or}_M \rightarrow M$ eine Überlagerungsabbildung.

Beweis. Mit der offensichtlichen Abbildung $\text{or}_V \rightarrow \text{or}_M$ meinen wir die durch die natürlichen Abbildungen $H_n(V, V \setminus x) \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus x)$ erklärte Injektion $\text{can} : \text{or}_V \hookrightarrow \text{or}_M$. Wir zeigen zunächst, daß sie stetig ist. Es gilt also zu zeigen, daß die Urbilder aller $\mathcal{O}(U, \omega_U)$ offen sind. In der Tat können wir das Urbild einer solchen Menge aber schreiben als

$$\text{can}^{-1}(\mathcal{O}(U, \omega_U)) = \bigcup_{W \subseteq U \cap V, \bar{W} \subset V} \mathcal{O}_V(W, \omega_U|_W)$$

wo wir mit $\omega_U|_W$ das Bild von ω_U unter

$$H_n(M, M \setminus U) \rightarrow H_n(M, M \setminus W) \xleftarrow{\sim} H_n(V, V \setminus W)$$

meinen und mit $\mathcal{O}_V(\ , \)$ die definitionsgemäßen Erzeuger der Topologie auf or_V bezeichnen. Ähnlich aber einfacher erkennt man, daß unsere Injektion $\text{can} : \text{or}_V \rightarrow \text{or}_M$ offen ist. Mithin trägt or_V die von or_M induzierte Topologie, und dann folgt ohne weitere Schwierigkeiten, daß unser Diagramm kartesisch ist. \square

4.2.14. Die Teilmenge $\text{or}_M^\times \subset \text{or}_M$, die aus allen Erzeugern von $H_n(M, M \setminus x)$ für die verschiedenen $x \in M$ besteht, ist eine zweiblättrige Überlagerung von M . Wir nennen sie die **Orientierungsüberlagerung**. Eine Orientierung von M ist nichts anderes als ein Lift $M \rightarrow \text{or}_M^\times$ der Identität auf M alias ein stetiger Schnitt dieser Überlagerung. Insbesondere ist M orientierbar genau dann, wenn $\text{or}_M^\times \rightarrow M$ eine triviale Überlagerung ist. Damit erweist sich das Kriterium 4.2.8 für die Gleichheit von Orientierungen als eine Konsequenz aus Satz [TF] 3.4.10 über die Eindeutigkeit von Lifts. Ist M zusammenhängend und $x \in M$ fest gewählt, so liefert diese Überlagerung eine Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(M, x)$ auf einer zweielementigen Menge alias einen Homomorphismus $\pi_1(M, x) \rightarrow \{\pm 1\}$ und M ist orientierbar genau dann, wenn diese **Orientierungsdarstellung** konstant ist.

Übungen

Übung 4.2.15. Man zeige, daß $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ nicht orientierbar ist.

Übung 4.2.16. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Man zeige: Die faserweise Addition $\text{or}_M \times_M \text{or}_M \rightarrow \text{or}_M$ sowie das faserweise Negative $\text{or}_M \rightarrow \text{or}_M$ sind stetig, und der **Nullschnitt** $M \rightarrow \text{or}_M$ ist auch stetig.

Übung 4.2.17. Eine einfach wegzusammenhängende Mannigfaltigkeit ist stets orientierbar. Allgemeiner ist jede Mannigfaltigkeit orientierbar, deren Fundamentalgruppe keinen Normalteiler vom Index Zwei besitzt.

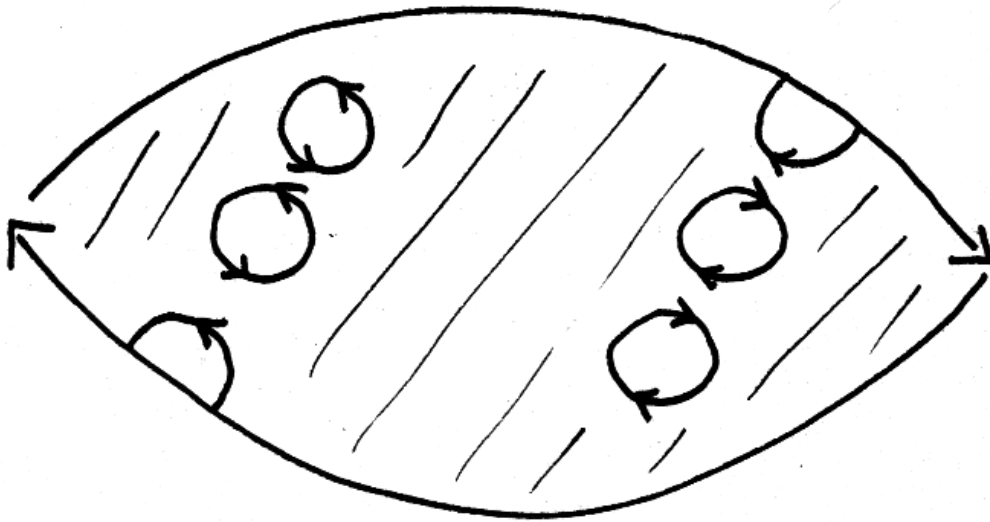
Übung 4.2.18. Für jede n -Mannigfaltigkeit M ist ihre Orientierungsüberlagerung $\tilde{M} := \text{or}_M^\times$ auch eine Mannigfaltigkeit. Weiter können wir auf der Orientierungsüberlagerung eine Orientierung definieren, indem wir von der Projektion $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ ausgehen und für jedes $\tilde{x} \in \tilde{M}$ mit Bild $x := \pi(\tilde{x})$ den durch π vermittelten Isomorphismus $H_n(\tilde{M}, \tilde{M} \setminus \tilde{x}) \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus x)$ betrachten und jeweils das Urbild von \tilde{x} unter diesem Isomorphismus auszeichnen. Wir nennen diese Orientierung die **tautologische Orientierung** der Orientierungsüberlagerung.

Übung 4.2.19. Besitzt eine Mannigfaltigkeit eine Überdeckung durch zwei orientierbare offene Teilmengen mit zusammenhängendem Schnitt, so ist sie auch selbst bereits orientierbar.

4.3 Hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten

Satz 4.3.1 (*n -te Homologie orientierbarer n -Mannigfaltigkeiten*). Gegeben eine kompakte zusammenhängende orientierbare n -Mannigfaltigkeit M ist ihre n -te Homologiegruppe $H_n M$ frei vom Rang Eins und die offensichtliche Abbildung liefert für alle $x \in M$ Isomorphismen

$$H_n M \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus x)$$



Anschauliche Darstellung der Erkenntnis, daß die reell projektive Ebene nicht orientierbar ist. Die reell projektive Ebene ist hier aufgeschnitten dargestellt, die beiden Kanten müssen so wieder verklebt werden, daß Pfeilspitze auf Pfeilspitze geht.

Beweis. Um beim Beweis dieses Satzes die nötige Flexibilität zu haben, zeigen wir im folgenden gleich die allgemeinere Aussage 4.3.5. \square

4.3.2. Ist (M, ω) eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit, so gibt es nach Satz 4.3.1 genau ein Element $\omega_M \in H_n M$ mit $\omega_M \mapsto \omega_x \forall x \in M$. Dies Element ω_M heißt der **Fundamentalzykel** der kompakten orientierten Mannigfaltigkeit M und wird notiert als

$$[M] := \omega_M$$

Manche Autoren nennen $[M]$ die **Fundamentalklasse**, da es sich dabei genau genommen nicht um einen Zykel handelt, sondern vielmehr eine Klasse von Zykeln, eben eine Homologieklasse. Ich halte dafür, daß die Bezeichnung als Fundamentalzykel so viel mehr geometrische Anschauung transportiert, daß es lohnt, dafür diese Inkonsistenz in der Terminologie auszuhalten.

4.3.3. Wir erinnern aus 4.2.9 die Orientierungsgarbe $\text{or}_M \rightarrow M$ einer Mannigfaltigkeit M . Rein topologisch ist das nach 4.2.12 eine Überlagerung, aber zusätzlich trägt jede Faser noch die Struktur einer abelschen Gruppe, die frei ist vom Rang Eins, und die faserweise Addition ebenso wie das faserweise Inverse induziere stetige Abbildungen $\text{or}_M \times_M \text{or}_M \rightarrow \text{or}_M$ beziehungsweise $\text{or}_M \rightarrow \text{or}_M$. In der feineren Sprache aus [AAG] 1.2.1 ist das ein „abelsches Gruppenobjekt in der Kategorie der Überlagerungen von M “.

Definition 4.3.4. Gegeben M eine Mannigfaltigkeit und $A \subset M$ eine Teilmenge nennen wir einen Lift $A \rightarrow \text{or}_M$ der Einbettung $A \hookrightarrow M$ auch einen **stetigen Schnitt über A der Orientierungsgarbe**. Die Gruppe der stetigen Schnitte über A notieren wir

$$\Gamma(A; \text{or}_M) = \Gamma A$$

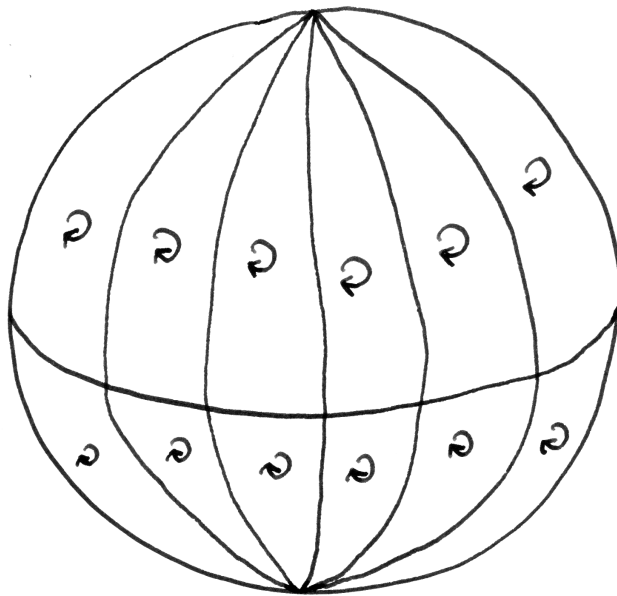
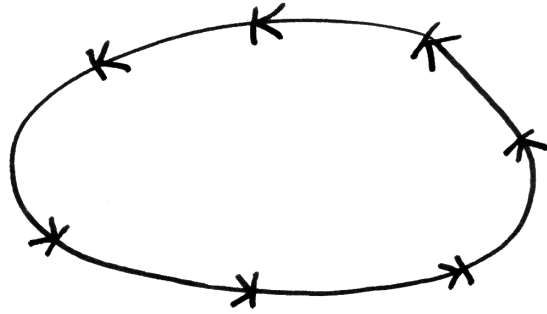
Der **Träger** eines Schnitts $s \in \Gamma A$ ist die Menge $\text{supp } s \subset A$ aller derjenigen Punkte, an denen er von Null verschieden ist. Der Träger eines stetigen Schnitts über A ist stets abgeschlossen in A . Wir notieren die Untergruppe aller stetigen Schnitte mit kompaktem Träger

$$\Gamma_1 A \subset \Gamma A$$

Die Gruppe der nicht notwendig stetigen Schnitte $A \rightarrow \text{or}_M$ notieren wir $\Gamma' A$.

Satz 4.3.5 (Hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten). *Gegeben eine n -Mannigfaltigkeit M und eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset M$ gilt für $q > n$ stets $H_q(M, M \setminus A) = 0$. Für $q = n$ dahingegen induziert die offensichtliche Abbildung $j = j_A : H_n(M, M \setminus A) \rightarrow \Gamma' A$ einen Isomorphismus zwischen der n -ten Homologie von M relativ zum Komplement von A und der Gruppe der stetigen Schnitte mit kompaktem Träger von A in die Orientierungsgarbe, in Formeln einen Isomorphismus*

$$j : H_n(M, M \setminus A) \xrightarrow{\sim} \Gamma_1 A$$



Versuch einer graphischen Darstellung jeweils eines Repräsentanten eines Fundamentalzykels der Kreislinie und der Sphäre.

Beispiel 4.3.6. Unser Isomorphismus $H_1(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_1(\mathbb{C} \setminus U, \mathbb{Z})$ aus 1.6.3 für $U \Subset \mathbb{C}$ liefert obigen Isomorphismus im Spezialfall $M = \mathbb{C}$, wenn wir die Randabbildung der langen exakten Homologiesequenz $H_2(\mathbb{C}, U) \xrightarrow{\sim} H_1(U)$ vorschalten und die Standardorientierung von \mathbb{C} wählen und $A = \mathbb{C} \setminus U$ setzen.

Vorschau 4.3.7. Allgemeinere Aussagen in dieser Richtung macht die sogenannte „starke Poincaré-Dualität“ [TSF] 6.5.2.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß j tatsächlich in $\Gamma_1 A \subset \Gamma' A$ landet. Sei also $\eta \in H_n(M, M \setminus A)$ gegeben. Um zu zeigen, daß $j(\eta)$ ein stetiger Schnitt der Orientierungsgarbe ist, müssen wir zeigen $j(\eta)^{-1}(\mathcal{O}(U, \omega)) \Subset A$ für alle $U \Subset M$ und $\omega \in H_n(M, M \setminus U)$ mit den $\mathcal{O}(U, \omega) := \{\omega|_x \mid x \in U\}$ wie in der Definition der Topologie der Orientierungsgarbe in 4.2.9. Nach Einsetzen der Definitionen gilt es zu zeigen, daß die Menge

$$E := \{x \in A \cap U \mid \omega \text{ und } \eta \text{ haben dasselbe Bild in } H_n(M, M \setminus x)\}$$

offen ist in A . Nehmen wir aber ein $x \in E$ und einen repräsentierenden singulären Zykel $c \in S_n M$ von η und eine offene Umgebung $W \Subset U$ von x mit $\partial c \in S_{n-1}(M \setminus W)$, für die gilt $H_n(M, M \setminus W) \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus y) \forall y \in W$, so folgt $W \cap A \subset E$. Also haben wir $E \Subset A$ und $j(\eta)$ ist ein stetiger Schnitt der Orientierungsgarbe. Schließlich gibt es ein Kompaktum $K \subset M$ mit $c \in S_n K$ und dann verschwindet $j(\eta)$ außerhalb von $K \cap A$. Folglich landet j stets in $\Gamma_1 A$. Jetzt machen wir uns an den Beweis der restlichen Aussagen. Um Schreibarbeit zu sparen setzen wir $H_q(\setminus A) := H_q(M, M \setminus A)$ und bemerken zunächst:

Lemma 4.3.8. *Sind A_1, A_2 abgeschlossen in M und gilt der Satz für A_1, A_2 und $A_1 \cap A_2$, so gilt er auch für $A_1 \cup A_2$.*

Beweis. Das folgt mit dem Fünferlemma aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_n(\setminus A_1 \cup A_2) & \rightarrow & H_n(\setminus A_1) \oplus H_n(\setminus A_2) & \rightarrow & H_n(\setminus A_1 \cap A_2) \\ & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ 0 & \rightarrow & \Gamma_1(A_1 \cup A_2) & \rightarrow & \Gamma_1 A_1 \oplus \Gamma_1 A_2 & \rightarrow & \Gamma_1(A_1 \cap A_2) \end{array}$$

mit exakten Zeilen, wo wir oben die relative Mayer-Vietoris-Sequenz 2.4.14 benutzt haben und am Anfang unsere Voraussetzung $H_{n+1}(\setminus A_1 \cap A_2) = 0$. \square

Jetzt gehen wir in mehreren Schritten von Spezialfällen bis zur allgemeinen Situation.

1. Ist $M = \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, dem wir auch Seiten der Länge Null erlauben, so gilt der Satz ganz offensichtlich, da für jeden Punkt $p \in A$ die Einbettung $\mathbb{R}^n \setminus A \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus p$ eine Homotopieäquivalenz ist.

2. Ist $M = \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so gilt der Satz. In der Tat, gegeben $z \in S_q \mathbb{R}^n$ mit $\partial z \in S_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ finden wir $\epsilon > 0$ und $E \subset \mathbb{R}^n$ endlich mit

$$A \subset B := \bigcup_{v \in E} v + [-\epsilon, \epsilon]^n$$

und $\partial z \in S_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus B)$. Es folgt, daß unser $[z] \in H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$ das Bild von $[z] \in H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$ ist. Nun gilt der Satz für unsere „Würfelmenge“ B nach Schritt 1 und dem Lemma. Das zeigt unsere Behauptung im Fall $q > n$. Im Fall $q = n$ zeigen wir zunächst die Injektivität $j_A[z] = 0 \Rightarrow [z] = 0$. Dazu wählen wir unsere Würfelmenge B zusätzlich so, daß jeder Würfel von B die Menge A trifft, etwa indem wir $E \subset A$ wählen. Dann ist die Restriktion $\Gamma B \rightarrow \Gamma A$ injektiv und aus $j_A[z] = 0$ folgt $j_B[z] = 0$ und damit $[z] = 0$ sogar in $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$. Das zeigt die Injektivität von j_A . Um die Surjektivität von j_A zu zeigen, argumentieren wir ähnlich: Jeder stetige Schnitt $s \in \Gamma A$ ist lokal konstant und gleichmäßig stetig, läßt sich also stetig auf eine geeignete kompakte Würfelmenge B ausdehnen und kommt damit sogar von einer Klasse aus $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$ her.

3. Ist A kompakt und M beliebig, so können wir A schreiben als eine endliche Vereinigung von Kompakta, die jeweils ganz in einer Karte enthalten sind. Dann sind wir fertig mit Induktion nach Schritt 2 und dem Lemma und Ausschneidung.

4. Sei nun A abgeschlossen und M lasse sich einbetten als offene Teilmenge mit kompaktem Abschluß in eine größere n -Mannigfaltigkeit X , in Formeln $M \Subset X$ mit \bar{M} kompakt. So bezeichnen wir den Rand von M in X mit $\partial M = \bar{M} \setminus M$, betrachten die lange exakte Sequenz des Tripels

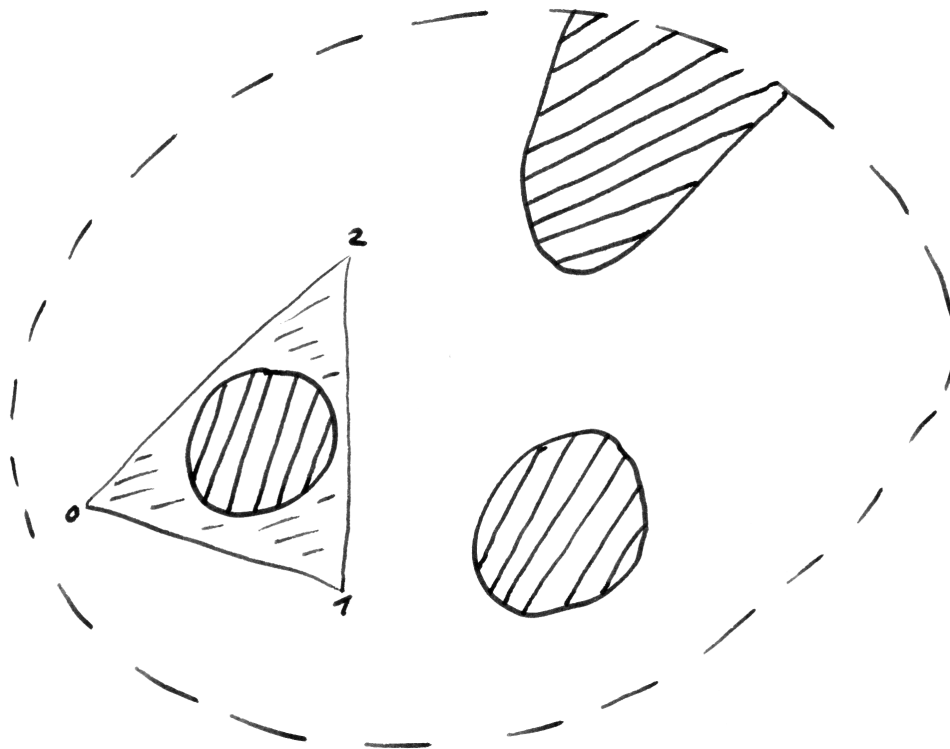
$$(X, X \setminus \partial M, X \setminus (\partial M \cup A))$$

und beachten, daß ∂M und $\partial M \cup A$ kompakt sind. Mit dem bereits Bewiesenen folgt für $q > n$ schon $0 = H_q(X \setminus \partial M, X \setminus (\partial M \cup A))$ und durch Ausschneiden von $X \setminus \bar{M}$ auch $0 = H_q(M, M \setminus A)$. Im Fall $q = n$ erhalten wir mit derselben Ausschneidung ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M, M \setminus A) & \hookrightarrow & H_n(X, X \setminus (\partial M \cup A)) & \rightarrow & H_n(X, X \setminus \partial M) \\ \downarrow & & \downarrow \lambda & & \downarrow \lambda \\ \Gamma_1 A & \hookrightarrow & \Gamma_1(\partial M \cup A) & \rightarrow & \Gamma_1(\partial M) \end{array}$$

mit exakten Zeilen, wo die zweite horizontale Abbildung der unteren Zeile einen Schnitt mit kompaktem Träger fortsetzt durch Null. Die Behauptung folgt mit dem Fünferlemma.

5. Der allgemeine Fall. Sei zunächst $q > n$ und $z \in S_q M$ ein Repräsentant von $\omega \in H_q(M, M \setminus A)$. So finden wir $U \Subset M$ mit $z \in S_q U$ und \bar{U} kompakt. Nach



Dieses Bild soll den Satz über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten illustrieren. In der großen offenen Ellipse M betrachten wir die abgeschlossene Teilmenge A , die aus den beiden kompakten kleinen schraffierten Eiern und einer ebenfalls eingezeichneten nichtkompakten Zusammenhangskomponente besteht. Die Orientierungsgarbe ist in diesem Fall isomorph zu $M \times \mathbb{Z}$, ihre Schnitte über A müssen auf allen drei Zusammenhangskomponenten von A konstant sein, und die Schnitte mit kompaktem Träger sind genau die Schnitte, die auf der nichtkompakten Komponente verschwinden. Der ebenfalls eingezeichnete singuläre Zweisimplex ist ein Zykel in M relativ zu $M \setminus A$. Seine Homologiekategorie entspricht dem Schnitt aus $\Gamma_1 A$, der auf der entsprechenden Komponente von A den Wert plus oder Minus Eins annimmt, je nach Wahl der Identifikation unserer Orientierungsgarbe mit $M \times \mathbb{Z}$, und der auf dem Rest von A den Wert Null annimmt.

dem vorhergehenden Punkt verschwindet die Klasse von z schon in $H_q(U, U \setminus A)$, also erst recht in $H_q(M, M \setminus A)$ und es folgt $H_q(M, M \setminus A) = 0$ für $q > n$. Im Fall $q = n$ beachten wir für $U \Subset M$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U \setminus A) & \rightarrow & H_n(M, M \setminus A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_1(A \cap U) & \rightarrow & \Gamma_1 A \end{array}$$

wo die untere Horizontale ausdehnt durch Null. Ist \bar{U} kompakt, so ist die linke Vertikale ein Isomorphismus nach dem vorigen Schritt. Aber jedes $\omega \in H_n(M, M \setminus A)$ wird repräsentiert von einem $z \in S_n M$, wir finden dann $U \Subset M$ mit \bar{U} kompakt und $z \in S_n U$ und so kommt ω schon her von einem $[z] \in H_n(U, U \setminus A)$. Das zeigt die Injektivität von j_A . Die Surjektivität zeigen wir ähnlich: Für jedes $s \in \Gamma_1 A$ gibt es $U \Subset M$ mit \bar{U} kompakt und $s \in \Gamma_1(A \cap U)$ und dann kommt s sogar schon her von $H_n(U, U \setminus A)$. \square

Korollar 4.3.9. *Ist M eine zusammenhängende aber nicht kompakte oder nicht orientierbare n -Mannigfaltigkeit, so gilt $H_n M = 0$.*

Beweis. Wir erhalten einen Homöomorphismus $M \sqcup (\mathbb{N}_{\geq 1} \times \text{or}_M^\times) \xrightarrow{\sim} \text{or}_M$ durch die Vorschrift, die auf M der Nullschnitt der Orientierungsgarbe ist und sonst die Multiplikation mit der entsprechenden natürlichen Zahl in jeder Faser. Ist also M zusammenhängend und hat $\text{or}_M \rightarrow M$ einen von Null verschiedenen stetigen Schnitt, so hat der bereits ganz M als Träger und es gibt auch einen stetigen Schnitt von or_M^\times alias eine Orientierung. \square

Korollar 4.3.10 (Alexander-Dualität in einem Spezialfall). *Ist $A \Subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen mit endlich vielen kompakten und beliebig vielen sonstigen Zusammenhangskomponenten, so gilt für die Zahl k der kompakten Zusammenhangskomponenten*

$$\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong \mathbb{Z}^k$$

4.3.11. Die Aussage des Korollars ist ein Spezialfall der sogenannten „Alexander-Dualität“ [TG] 5.1.22.

Beweis. Wir haben $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ nach der langen exakten Homologiesequenz und der linke Raum ist isomorph zu $\Gamma_1 A \cong \mathbb{Z}^k$ nach unserem Satz 4.3.5. Man verwende hierbei, daß der Abschluß von A in der Einpunktkompaktifizierung S^n von \mathbb{R}^n nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat, so daß insbesondere alle kompakten Zusammenhangskomponenten offen sind in A . \square

4.3.12 (Umlaufzahl als Spezialfall der Alexanderdualität). Sind wir im Spezialfall $M = \mathbb{C}$ und benutzen die durch $(1, i)$ gegebene Orientierung von \mathbb{C} , um

$\Gamma_1 A$ zu identifizieren mit stetigen Abbildungen $A \rightarrow \mathbb{Z}$ mit kompaktem Träger, so ordnet unser Isomorphismus

$$H_1(\mathbb{C} \setminus A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_1 A$$

der Klasse $[\gamma]$ eines Zyklus γ diejenige Funktion $A \rightarrow \mathbb{Z}$ zu, deren Wert an einer Stelle $z \in A$ die Umlaufzahl im Sinne von 1.6.2 des Zyklus γ um den Punkt z ist.

Definition 4.3.13. Sei $f : M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung von kompakten orientierten zusammenhängenden n -Mannigfaltigkeiten. Der **Abbildungsgrad** $\text{grad } f$ von f ist die ganze Zahl, die angibt, auf welches Vielfache des Fundamentalzyklus von N der Fundamentalzykel von M abgebildet wird, in Formeln

$$f_*[M] = (\text{grad } f)[N]$$

4.3.14 (**Nichtsurjektionen haben Abbildungsgrad Null**). Insbesondere ist eine Abbildung von zusammenhängenden orientierten kompakten Mannigfaltigkeiten derselben Dimension mit von Null verschiedenem Abbildungsgrad stets surjektiv, da für jeden Punkt $x \in N$ die Mannigfaltigkeit $N \setminus x$ keine kompakte Zusammenhangskomponente hat und da nach 4.3.9 folglich gilt $H_n(N \setminus x) = 0 \ \forall x \in N$. Jede Abbildung, deren Bild einen Punkt x nicht enthält, faktorisiert jedoch als $M \rightarrow (N \setminus x) \hookrightarrow N$.

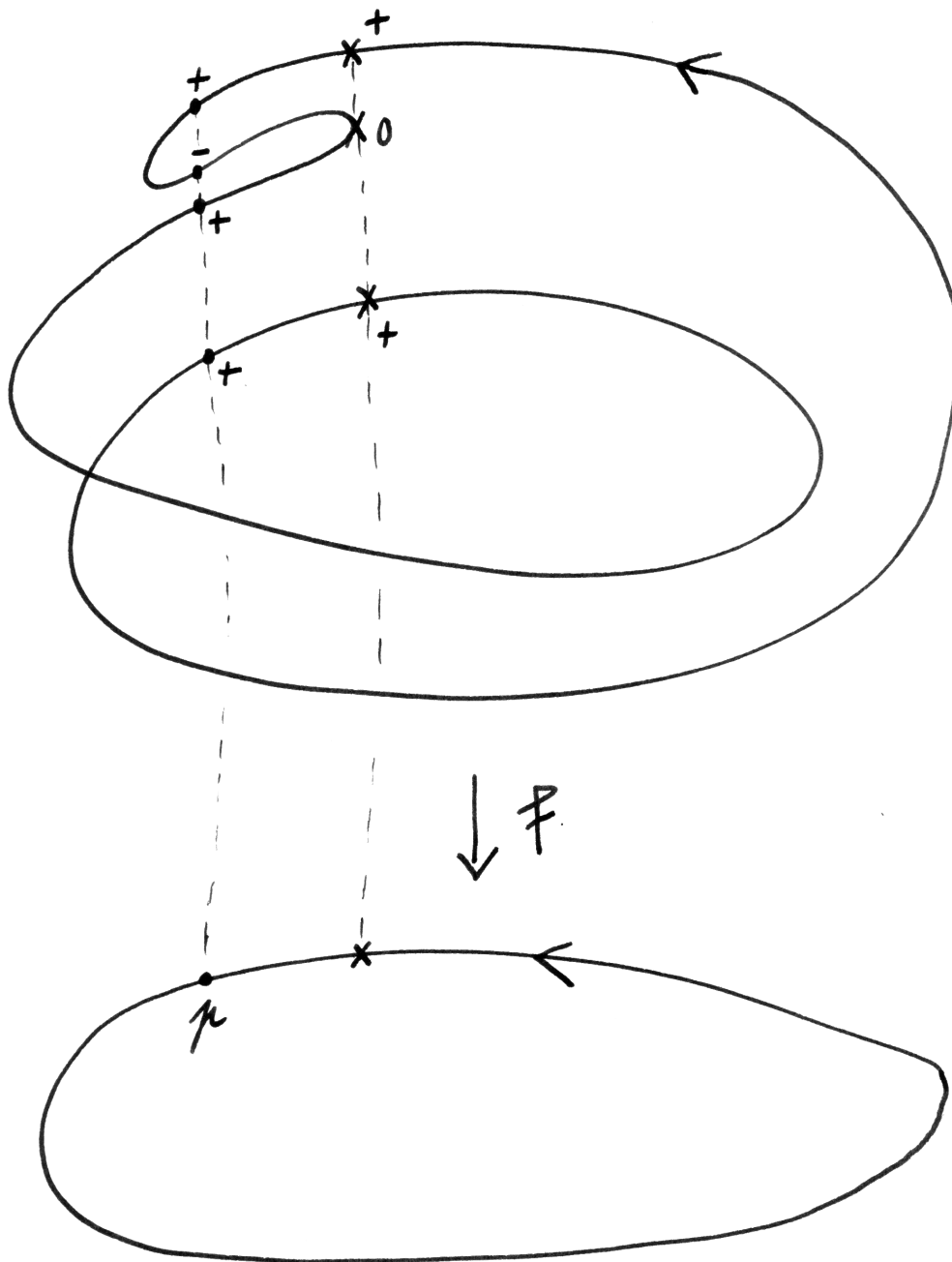
4.3.15. Homotope Abbildungen von zusammenhängenden orientierten kompakten Mannigfaltigkeiten derselben Dimension haben nach 1.4.1 denselben Abbildungsgrad.

Definition 4.3.16. Sei $f : M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung von orientierten n -Mannigfaltigkeiten (M, ω) und (N, η) . Ist $q \in M$ ein isolierter Punkt der Faser über $f(q)$, gibt es in anderen Worten eine offene Umgebung $U \Subset M$ von q mit $U \cap f^{-1}(f(q)) = \{q\}$, so erklären wir den **lokalen Abbildungsgrad von f bei q** als die ganze Zahl $\text{grad}_q f \in \mathbb{Z}$, die gegeben wird durch die Gleichung

$$f_* \omega_q = (\text{grad}_q f) \eta_{f(q)}$$

für $f_* : H_n(U, U \setminus q) \rightarrow H_n(N, N \setminus f(q))$ die auf der Homologie induzierte Abbildung und ω_q beziehungsweise $\eta_{f(q)}$ die entsprechenden lokalen Orientierungen. Diese Abbildung hängt offensichtlich nicht von der Wahl von U ab.

Beispiel 4.3.17. In Übung 4.1.8 haben Sie gezeigt, daß der lokale Grad im Fall eines lokalen Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n gerade das Vorzeichen der Funktionaldeterminante ist. In Übung 4.3.21 werden Sie unter anderem zeigen, daß der lokale Abbildungsgrad am Ursprung der Potenzabbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ genau n ist.



Eine Abbildung einer Kreislinie auf sich selbst vom Abbildungsgrad Zwei. Die Orientierungen sind durch Pfeilspitzen angedeutet. An den Punkten des Urbilds zweier Punkte sind auch die lokalen Abbildungsgrade eingetragen, unter Verwendung der Abkürzungen \pm für ± 1 .

Satz 4.3.18 (Abbildungsgrad als Summe lokaler Abbildungsgrade). *Gegeben eine stetige Abbildung von kompakten orientierten zusammenhängenden n -Mannigfaltigkeiten $f : M \rightarrow N$ und ein Punkt $p \in N$ mit endlichem Urbild ist der Abbildungsgrad von f die Summe der lokalen Abbildungsgrade bei den Urbildern unseres Punktes, in Formeln*

$$\text{grad } f = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \text{grad}_q f$$

Beweis. Wir nummerieren die Punkte aus der Faser über p als q_1, \dots, q_r und wählen für sie paarweise disjunkte offene Umgebungen U_1, \dots, U_r . Dann betrachten wir für jedes j das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n M & \xrightarrow{\sim} & H_n(M, M \setminus q_j) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_j, U_j \setminus q_j) \\ \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ H_n M & \rightarrow & H_n(M, M \setminus \{q_1, \dots, q_r\}) & \xleftarrow{\sim} & \bigoplus_i H_n(U_i, U_i \setminus q_i) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n N & \xrightarrow{\sim} & H_n(N, N \setminus p) & = & H_n(N, N \setminus p) \end{array}$$

Hier meint der letzte Isomorphismus der mittleren Horizontalen Ausschneidung gefolgt von der relativen Version der Zerlegung der Homologie 2.1.8. Wir erinnern die Verträglichkeit der relativen Homologie mit Koprodukten 2.1.8, die Zeilenmatrix $(H_n \text{ in}_i)_i$ liefert also einen Isomorphismus

$$\bigoplus_i H_n(U_i, U_i \setminus p_i) \xrightarrow{\sim} H_n(\bigcup_i U_i, \bigcup_i U_i \setminus p_i)$$

für die als Spalte verstandenen Einträge der direkten Summe. Gehen wir von der Mitte der linken Vertikalen direkt nach unten, so wird der Fundamentalzykel $[M]$ abgebildet auf $(\text{grad } f)[N]$. Gehen wir dahingegen in der mittleren Horizontale nach rechts, so erhalten wir das Tupel der $\omega_M|_{q_i}$, wie die obere Hälfte des Diagramms zeigt, und gehen wir dann nach unten, so erhalten wir die Summe der lokalen Abbildungsgrade multipliziert mit $\eta_N|_p$. Gehen wir wieder nach links, so folgt die Behauptung. \square

Vorschau 4.3.19 (Schnittpaarung und Poincaré-Dualität). Ich kann nun einige Aussagen zumindest formulieren, deren Beweise uns noch lange beschäftigen werden. Gegeben eine kompakte orientierte n -Mannigfaltigkeit M werden wir in 6.4.10 für alle q mit $0 \leq q \leq n$ eine bilineare Abbildung konstruieren, die sogenannte „Schnittpaarung“

$$\begin{array}{ccc} H_q M \times H_{n-q} M & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ (\zeta, \xi) & \mapsto & \zeta \odot \xi \end{array}$$

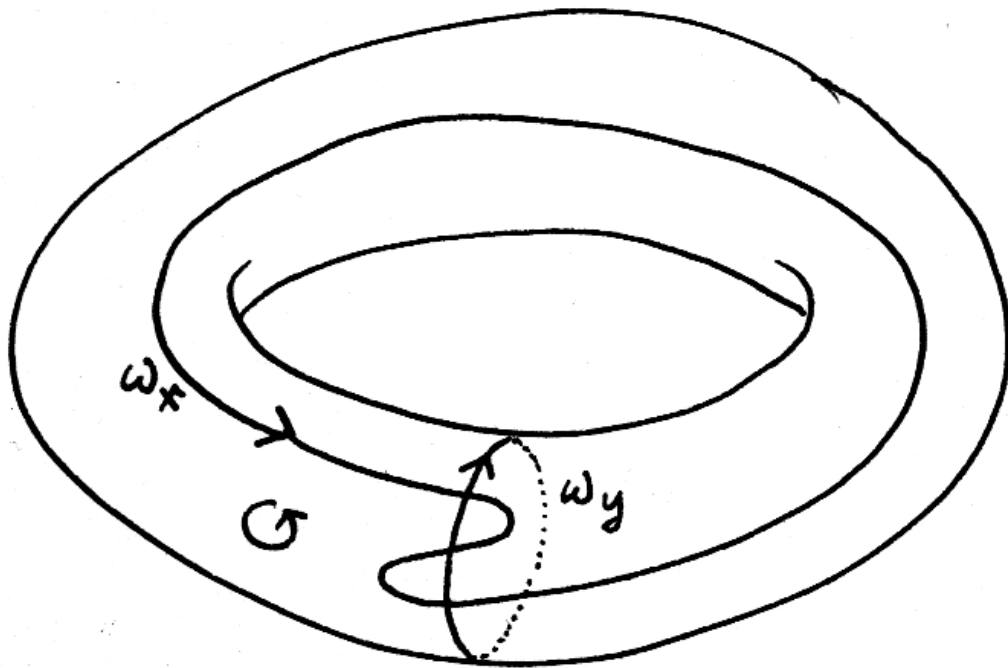


Illustration zur Schnittpaarung. Als orientierte Mannigfaltigkeit M habe ich den Torus gewählt, mit der durch den kleinen Kreisfeil angedeuteten Orientierung. Die orientierten Untermannigfaltigkeiten X und Y sind als befeilte Kurven zu sehen. Sie schneiden sich in der Punkten, die gemäß unserer Vorschrift zweimal mit $+1$ und einmal mit -1 zu gewichten sind. Die gesamte Schnittzahl wäre in diesem Fall also $\omega_X \odot \omega_Y = 1$.

Sie ordnet je zwei Homologieklassen komplementären Grades ihre **Schnittzahl** zu und hat eine anschauliche Bedeutung, zu deren genauer Formulierung ich etwas ausholen muß. Gegeben eine orientierte abgeschlossene q -dimensionale Untermannigfaltigkeit $X \looparrowright M$, also eine abgeschlossene Teilmenge, die mit der Spurtopologie zu einer q -dimensionalen Mannigfaltigkeit wird und die zusätzlich mit einer Orientierung versehen ist, erhalten wir ja einen Fundamentalzykel $[X] \in H_q X$. Dessen Bild in der Homologie von M notieren wir kurzerhand $[X] \in H_q M$. Seien nun $X \looparrowright M$ und $Y \looparrowright M$ abgeschlossene orientierte Untermannigfaltigkeiten komplementärer Dimensionen q und $n - q$. Wir nehmen zusätzlich an, daß es um jeden Schnittpunkt $s \in X \cap Y$ eine offene Umgebung $U \Subset M$ und einen Homöomorphismus $U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ gibt, unter dem die von M auf U induzierte Orientierung der Standardorientierung des \mathbb{R}^n entspricht und die Homöomorphismen $X \cap U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^q \times 0$ sowie $Y \cap U \xrightarrow{\sim} 0 \times \mathbb{R}^{n-q}$ induziert. Erklären wir schließlich Vorzeichen $\epsilon(s), \eta(s)$ dadurch, daß sie angeben, ob unsere letzten beiden Homöomorphismen die vorgegebenen Orientierungen auf X und Y mit den Standardorientierungen auf \mathbb{R}^q und \mathbb{R}^{n-q} identifizieren oder nicht, so gilt für die Schnittzahl der zu X und Y gehörigen Fundamentalzykel die Identität

$$[X] \odot [Y] = \sum_{s \in X \cap Y} \epsilon(s) \eta(s)$$

Wir erklären in 6.4.10, wie man die Schnittpaarung aus dem „cup-Produkt der Kohomologie“ zusammen mit dem „Isomorphismus der Poincaré-Dualität“ erhalten kann. Wir zeigen aber erst in [TSF] 6.4.31, daß die auf diesem Wege konstruierte bilineare Abbildung wirklich die hier für unsere Schnittpaarung behauptete anschauliche Eigenschaft hat. Zusätzlich werden wir zeigen, daß unsere Schnittpaarung, wenn alle $H_q M$ freie abelsche Gruppen sind, Isomorphismen

$$H_q M \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_{n-q} M, \mathbb{Z})$$

induziert, und daß ihr Analogon für „Koeffizienten in einem Körper“ stets nicht-ausgeartete Paarungen liefert. Diese Aussagen und Verschiedene ihrer Varianten sind bekannt als „Poincaré-Dualität“. Im nächsten Abschnitt beginnen wir unsere Arbeit an diesem Themenkomplex mit der Diskussion von „Homologie mit Koeffizienten“.

Übungen

Übung 4.3.20 (Fundamentalzykel in der simplizialen Homologie). Ist eine kompakte orientierbare n Mannigfaltigkeit M mit einer Triangulierung $M \cong \Delta(\mathcal{K})$ versehen, so können wir jedem n -Simplex dieser Triangulierung ein Vorzeichen und eine Anordnung derart zuordnen, daß die Summe der entsprechenden mit

Vorzeichen versehenen simplizialsingulären n -Simplizes ein Zykel ist. Ist M auch noch zusammenhängend, so gibt es genau zwei derartige Zyklen, und ihre Homologieklassen sind genau die beiden Erzeuger von $H_n M$, also die beiden Fundamentalzykel zu den beiden möglichen Orientierungen. Hinweis: Man gehe von 4.3.1 aus.

Übung 4.3.21. Man bestimme die lokalen Abbildungsgrade der nichtkonstanten Polynomfunktionen $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Übung 4.3.22 (Rückzug von Orientierungen). Ist $f : M \rightarrow N$ eine étale Abbildung von n -Mannigfaltigkeiten und $x \in M$ ein Punkt, so gibt es genau einen Isomorphismus $H_n(M, M \setminus x) \xrightarrow{\sim} H_n(N, N \setminus f(x))$, der für alle Umgebungen U von x , die homöomorph auf ihr Bild abgebildet werden, verträglich ist mit den von f induzierten Isomorphismen $H_n(U, U \setminus x) \xrightarrow{\sim} H_n(f(U), f(U) \setminus f(x))$. Wir erhalten so ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{or}_M & \rightarrow & \text{or}_N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \rightarrow & N \end{array}$$

Insbesondere läßt sich jede Orientierung von N „zurückziehen“ zu einer Orientierung von M .

Übung 4.3.23 (Orientierungsgarbe auf Quotient nach freier Operation). Jede Operation einer Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit induziert eine Operation auf der Orientierungsgarbe, die verträglich ist mit der faserweisen Addition. Operiert eine Gruppe D topologisch frei auf einer Mannigfaltigkeit M , so ist auch M/D eine Mannigfaltigkeit und die obere Horizontale aus 4.3.22 induziert einen Homöomorphismus

$$(\text{or}_M)/D \xrightarrow{\sim} \text{or}_{(M/D)}$$

Übung 4.3.24 (Orientierbarkeit reell projektiver Räume). Die Kugelschalen S^r sind orientierbar für alle $r \geq 0$. Für $r \geq 1$ sind sie auch zusammenhängend und die Antipodenabbildung $S^r \xrightarrow{\sim} S^r$ bildet einen Fundamentalzykel ab auf sich selber für r ungerade und auf sein Negatives für r gerade. Der reell projektive Raum $\mathbb{P}^r \mathbb{R}$ ist orientierbar für $r = 0$ und $r \geq 1$ ungerade, jedoch nicht für $r \geq 1$ gerade.

Übung 4.3.25 (Fixpunkte von Selbstabbildungen von Sphären). Eine stetige Selbstabbildung einer Sphäre S^n mit von $-(-1)^n$ verschiedenem Abbildungsgrad hat stets einen Fixpunkt. Hinweis: Lefschetz'scher Fixpunktsatz 3.2.13.

Übung 4.3.26. Gegeben eine nichtkompakte zusammenhängende Einsmannigfaltigkeit besteht das Komplement jedes Punktes aus zwei Zusammenhangskomponenten. Hinweis: Die Schwierigkeit liegt im nicht abzählbar basierten Fall beziehungsweise darin, die Klassifikation im abzählbar basierten Fall zu vermeiden, in dem danach die reelle Zahlengerade das einzige Beispiel ist.

Übung 4.3.27 (Einbettung kompakter n -Mannigfaltigkeiten in den \mathbb{R}^n). Eine nichtleere kompakte orientierbare n -Mannigfaltigkeit kann nicht in den \mathbb{R}^n eingebettet werden. Hinweis: Man schalte eine Einbettung $\mathbb{R}^n \hookrightarrow S^n$ nach und bemerke, daß der Abbildungsgrad der Komposition Null sein muß. Dasselbe Argument funktioniert für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten, wenn wir Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ betrachten, wie wir sie gleich kennenlernen werden.

4.4 Endlichkeitsaussagen für Mannigfaltigkeiten*

4.4.1. Nicht alle kompakten Mannigfaltigkeiten sind triangulierbar alias homöomorph zur Realisierung eines endlichen Simplizialkomplexes. Im folgenden zeigen wir, daß ihre Homologiegruppen dennoch stets endlich erzeugt sind.

Satz 4.4.2 (Wilder). *Alle Homologiegruppen kompakter Mannigfaltigkeiten sind endlich erzeugt. Ist allgemeiner M eine Mannigfaltigkeit und $K \subset M$ eine kompakte Teilmenge, so ist das Bild von $H_q K \rightarrow H_q M$ endlich erzeugt für alle $q \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Per Induktion über q mithilfe des anschließenden Lemmas. \square

Ergänzung 4.4.3. Der Satz gilt mit demselben Beweis auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand oder mit Ecken, ja mit 3.1.25 für beliebige Hausdorffräume, in denen jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge der Realisierung eines lokal endlichen Simplizialkomplexes. Nach [Hir75] gilt er damit insbesondere für separierte komplexe Varietäten. Weiter gilt er mit demselben Beweis auch für Homologie mit Koeffizienten in einem beliebigen noetherschen Ring. Eine Variante dieses Resultats für relative Homologie wird in 7.3.22 gezeigt werden.

Lemma 4.4.4. *Seien X ein lokal kompakter Hausdorffraum und $q \geq 0$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß gilt:*

1. *Für jedes Paar $M \subset W$ von Teilmengen von X mit M kompakt und W offen in X ist das Bild von $H_{q-1} M \rightarrow H_{q-1} W$ endlich erzeugt;*
2. *Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung mit endlich erzeugter q -ter Homologie.*

So ist $\text{im}(H_q K \rightarrow H_q X)$ endlich erzeugt für jedes Kompaktum $K \subset X$.

Beweis. Wir betrachten in der Potenzmenge von X die Teilmenge

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_q := \left\{ K \subset X \mid \begin{array}{l} K \text{ ist kompakt und besitzt eine offene} \\ \text{Umgebung } U \text{ } \textcircled{\subset} \text{ } X \text{ derart, daß das Bild} \\ \text{von } H_q U \rightarrow H_q X \text{ endlich erzeugt ist.} \end{array} \right\}$$

Nach unseren Annahmen besitzt jeder Punkt von X eine Umgebung aus \mathcal{E} . Aus $K \in \mathcal{E}$ und $L \not\in \mathcal{E}$ folgt ohne Schwierigkeiten $L \in \mathcal{E}$. Können wir zeigen, daß mit zwei Kompakta L und K stets auch ihre Vereinigung zu \mathcal{E} gehört, so gehört offensichtlich jede kompakte Teilmenge von X zu \mathcal{E} und wir sind fertig. Seien also $K, L \in \mathcal{E}$ und $U, V \subseteq X$ offen mit $K \subset U$ und $L \subset V$ und $\text{im}(H_q U \rightarrow H_q X)$ und $\text{im}(H_q V \rightarrow H_q X)$ endlich erzeugt. Da X nach Voraussetzung lokal kompakt ist, finden wir etwa nach [AN3] 1.10.9 auch $U_1 \subseteq U$, $V_1 \subseteq V$ mit $K \subset U_1 \subset \bar{U}_1 \subset U$ und $L \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V$ und \bar{U}_1, \bar{V}_1 kompakt. Dann betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_q(U_1 \cup V_1) & \rightarrow & H_{q-1}(U_1 \cap V_1) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_q U \oplus H_q V & \rightarrow & H_q(U \cup V) & \rightarrow & H_{q-1}(U \cap V) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 H_q X \oplus H_q X & \rightarrow & H_q X & &
 \end{array}$$

Das Bild der linken Vertikale ist endlich erzeugt nach Wahl von U und V . Das Bild der rechten Vertikalen ist endlich erzeugt nach unserer ersten Annahme, angewandt auf $M = \bar{U}_1 \cap \bar{V}_1$ und $W = U \cap V$. Die mittlere Horizontale ist exakt als Teil einer Mayer-Vietoris-Sequenz. Dann muß aber nach dem anschließenden Lemma 4.4.5 auch das Bild der Komposition in der mittleren Vertikalen endlich erzeugt sein und es folgt $L \cup K \in \mathcal{E}$. \square

Lemma 4.4.5. *Sei gegeben ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & \rightarrow & B \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 C & \rightarrow & D & \rightarrow & E \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 F & \rightarrow & G & &
 \end{array}$$

Ist das Bild der beiden äußeren Vertikalen CF und BE endlich erzeugt und ist die mittlere Horizontale exakt bei D , so ist auch das Bild der Komposition AG in der mittleren Vertikalen endlich erzeugt.

Beweis. Unter $D \rightarrow E$ geht $\text{im}(AD)$ nach $\text{im}(BE)$. Wir finden also endlich viele $d_1, \dots, d_s \in \text{im}(AD)$ derart, daß sich jedes Element aus $\text{im}(AD)$ schreiben läßt als $c + r_1 d_1 + \dots + r_s d_s$ mit $r_i \in \mathbb{Z}$ und $c \in \text{im}(CD)$. Der Rest des Arguments bleibe dem Leser überlassen. \square

5 Koeffizientenwechsel und Künneth-Formel

5.1 Homologie mit Koeffizienten

5.1.1. Sei G eine abelsche Gruppe. In unseren bisherigen Argumenten können wir stets \mathbb{Z} statt G schreiben und erhalten so allgemeinere Funktoren von topologischen Räumen oder Raumpaaren in die abelschen Gruppen. Sie heißen die **Homologie** beziehungsweise **relative** beziehungsweise **reduzierte Homologie mit Koeffizienten in G** . Genauer definieren wir die q -te Homologie

$$H_q(X; G)$$

eines Raums X mit Koeffizienten in G , indem wir die Homologie des Komplexes $S(X; G)$ der singulären Ketten mit Koeffizienten in G nehmen, wobei $S_q(X; G)$ die Menge aller endlichen formalen Ausdrücke $\sum n_\sigma \sigma$ bezeichnet mit $n_\sigma \in G$ und $n_\sigma = 0$ für alle bis auf endlich viele Simplizes $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$. Wir schreiben $\tilde{H}_q(X; G)$ für die reduzierten Homologiegruppen und $H_q(X, A; G)$ für die relativen Homologiegruppen mit Koeffizienten in G .

5.1.2 (**Funktorialität in den Koeffizienten**). Halten wir den Raum X fest, so wird $G \mapsto H_q(X; G)$ ein Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen in sich selber. Unter einer **additiven Struktur** auf einer Kategorie \mathcal{C} versteht man ganz allgemein die Vorgabe einer Verknüpfung „Addition“ auf jeder Morphismenmenge $\mathcal{C}(X, Y)$ derart, daß die Morphismenmengen darunter abelsche Gruppen sind und die Verknüpfung von Morphismen bilinear. Ein Funktor zwischen Kategorien mit additiver Struktur heißt **additiv**, wenn er Gruppenhomomorphismen auf den Morphismenräumen induziert. In dieser Terminologie trägt die Kategorie der abelschen Gruppen eine additive Struktur in natürlicher Weise und unsere Funktoren $G \mapsto H_q(X; G)$ sind additiv. Ist insbesondere R ein Ring und G ein R -Modul, so werden die Homologiegruppen mit Koeffizienten in G in natürlicher Weise zu R -Moduln.

5.1.3. Die meisten der bisher bewiesenen allgemeinen Aussagen, insbesondere Homotopieinvarianz, lange exakte Homologiesequenz, Ausschneidung, Mayer-Vietoris-Sequenz und Anklebesequenz gelten in der Homologie mit Koeffizienten genauso mit demselben oder fast demselben Beweis. Bei den bisherigen speziellen Resultaten zur Homologie und reduzierten Homologie von Punkten und Sphären kann man direkt prüfen, daß alle Argumente ebenso mit Koeffizienten G funktionieren und wir nur im Endresultat jeweils G statt \mathbb{Z} erhalten. Wir werden in 5.5.2 zeigen, daß Ähnliches allgemein gilt, solange die Homologiegruppen mit Koeffizienten in \mathbb{Z} alle frei sind über \mathbb{Z} .

Beispiel 5.1.4 (Mit zwei Farben färbbare Landkarten). Wir behaupten, daß sich eine Landkarte, bei der an jedem „Mehrländereck“ eine gerade Anzahl von

Grenzen beginnt, stets so mit zwei Farben färben läßt, daß keine zwei benachbarten Staaten dieselbe Farbe haben, wobei Staaten nicht als benachbart gelten, die nur Grenzsteine gemeinsam haben. Um das zu zeigen, ergänzen wir die Anschauungsebene durch einen Punkt im Unendlichen zu einer Sphäre und unterteilen unsere Staaten durch zusätzliche Grenzen aber ohne zusätzliche Mehrländerecken in Bundesländer, bis wir eine Triangulierung der Sphäre erhalten. Daß das möglich sein soll, verstehen wir als Teil unserer Definition des Begriffs einer „Landkarte“. Die Summe der Staatsgrenzen ist dann ein simplizialer Einszykel mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Koeffizienten, der der Rand einer Zweikette sein muß. Diese ist die gesuchte Färbung.

5.1.5. Wie in 4.2.9 definieren wir für jede n -Mannigfaltigkeit M und jede abelsche Gruppe G die **Orientierungsgarbe** $\text{or}_M(G)$ **mit Koeffizienten in G** . Wie in 4.3.5 zeigen wir auch für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset M$, daß gilt $H_q(M, M \setminus A; G) = 0$ für $q > n$ und daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$j = j_A : H_n(M, M \setminus A; G) \xrightarrow{\sim} \Gamma_1(A; \text{or}_M(G))$$

induziert, wobei rechts die Schnitte mit kompaktem Träger von A in die Orientierungsgarbe mit Koeffizienten in G zu verstehen sind. Man erkennt ohne Schwierigkeiten, daß die fragliche Orientierungsgarbe eine Überlagerung ist, und für zusammenhängendes M gerade die Überlagerung, die von der Operation der Fundamentalgruppe auf G mittels der Orientierungsdarstellung aus 4.2.14 herkommt. Daraus folgt, daß für eine kompakte zusammenhängende n -Mannigfaltigkeit M und einen beliebigen Punkt $x \in M$ die kanonische Abbildung

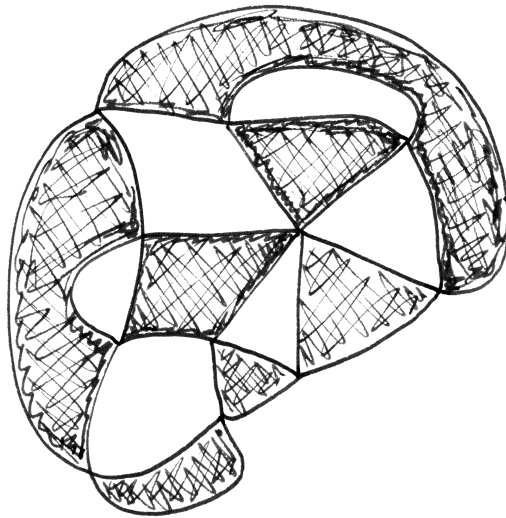
$$H_n(M; G) \rightarrow H_n(M, M \setminus x; G)$$

ein Isomorphismus ist für M orientierbar und ein Isomorphismus mit der Gruppe der Fixpunkte der Multiplikation mit (-1) für M nicht orientierbar. Gegeben ein Kring k nennen wir eine n -Mannigfaltigkeit **k -orientierbar**, wenn $\text{or}_M(k)$ einen globalen Schnitt besitzt, der an jeder Stelle $x \in M$ ein Erzeuger des freien k -Moduls $H_n(M, M \setminus x; k)$ vom Rang Eins ist. Unter einer **k -Orientierung** von M verstehen wir die Auswahl eines derartigen globalen Schnitts. Ist M kompakt, so heißt das zugehörige Element

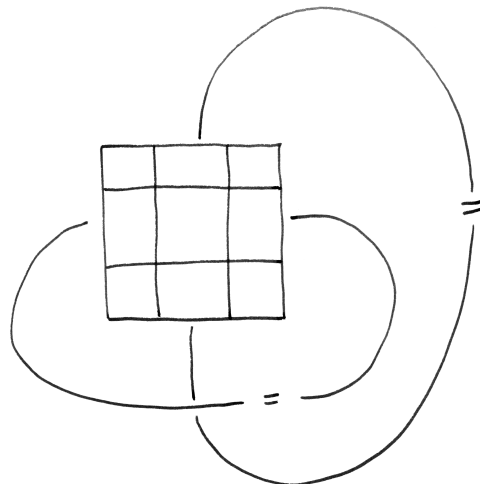
$$[M] = [M]_k = \omega_M = \omega_M(k) \in H_n(M; k)$$

der **Fundamentalzykel mit Koeffizienten in k** der k -orientierten kompakten n -Mannigfaltigkeit M .

Satz 5.1.6. *Gegeben eine abelsche Gruppe G verwenden wir im folgenden die Notation $G_2 := \{a \in G \mid a + a = 0\}$ für die Fixpunkte der Multiplikation mit*



Eine Zweifärbung einer ebenen „geraden“ Karte



Eine nicht zweifärbbare „gerade“ Karte auf dem Torus

(−1). Die **Homologie der reell projektiven Räume** $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ mit Koeffizienten in G wird in dieser Notation gegeben durch

$$H_q(\mathbb{P}^n\mathbb{R}; G) \cong \begin{cases} G & q = 0; \\ G/2G & 0 < q < n, \quad q \text{ ungerade}; \\ G_2 & 0 < q < n, \quad q \text{ gerade}; \\ G & 0 < q = n, \quad n \text{ ungerade}; \\ G_2 & 0 < q = n, \quad n \text{ gerade}; \\ 0 & q > n. \end{cases}$$

Beweis. Wir kürzen für diesen Beweis $H_q(X; G) = H_q X$ und $\mathbb{P}^n\mathbb{R} = \mathbb{P}^n$ ab. Für $n \geq 0$ geht \mathbb{P}^{n+1} aus \mathbb{P}^n hervor durch Ankleben einer $(n+1)$ -Zelle und die verklebende Abbildung ist schlicht die offensichtliche zweifache Überlagerung $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$. Wir haben also $\tilde{H}_q \mathbb{P}^{n+1} = \tilde{H}_q \mathbb{P}^n$ für $q \neq n+1, n$ und $\tilde{H}_q \mathbb{P}^{n+1} = 0$ für $q > n+1$ sowie eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{H}_{n+1} \mathbb{P}^{n+1} \rightarrow \tilde{H}_n S^n \rightarrow \tilde{H}_n \mathbb{P}^n \rightarrow \tilde{H}_n \mathbb{P}^{n+1} \rightarrow 0$$

Es reicht zu zeigen, daß hier der mittlere Pfeil die Nullabbildung ist für n gerade beziehungsweise das Doppelte eines Isomorphismus für $n > 0$ ungerade. Der Fall $n = 0$ ist eh klar. Für $n > 0$ betrachten wir nun das kommutative Diagramm aus dem Beweis von 4.3.18 mit Koeffizienten in G . Genauer betrachten wir um $p \in \mathbb{P}^n$ eine trivial überlagerte offene Umgebung U , die homöomorph ist zu einem offenen Ball. Wir haben dann $\pi^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$ und $\pi^{-1}(U) = U_1 \sqcup U_2$ für offene Umgebungen U_i von p_i in S^n . Wir erinnern die Verträglichkeit der relativen Homologie mit Koprodukten 2.1.8, die Zeilenmatrix $(H_n \text{ in}_1, H_n \text{ in}_2)$ liefert also einen Isomorphismus

$$H_n(U_1, U_1 \setminus p_1) \oplus H_n(U_2, U_2 \setminus p_2) \xrightarrow{\sim} H_n(U_1 \cup U_2, U_1 \setminus p_1 \cup U_2 \setminus p_2)$$

für die als Spalte verstandenen Einträge der direkten Summe. Wir erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n S^n & \rightarrow & H_n(S^n, S^n \setminus \pi^{-1}(p)) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_1, U_1 \setminus p_1) \oplus H_n(U_2, U_2 \setminus p_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n \mathbb{P}^n & \hookrightarrow & H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus p) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U, U \setminus p) \end{array}$$

und unten links ist für n ungerade unsere Injektion sogar ein Isomorphismus. Mit $a : S^n \rightarrow S^n$ der Antipodenabbildung kommutiert nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_n S^n & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n, S^n \setminus p_1) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_1, U_1 \setminus p_1) & \xrightarrow{\sim} & H_n(U, U \setminus p) \\ \downarrow a & & \downarrow a & & \downarrow a & & \parallel \\ H_n S^n & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n, S^n \setminus p_2) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_2, U_2 \setminus p_2) & \xrightarrow{\sim} & H_n(U, U \setminus p) \end{array}$$

Da aber nach 4.1.1 die Antipodenabbildung auf der n -ten reduzierten Homologie der Sphäre S^n die Multiplikation mit $(-1)^{n+1}$ induziert, unterscheiden sich die Verknüpfung in der oberen und in der unteren Horizontale hier um $(-1)^{n+1}$. Die Abbildung im oberen Diagramm von $H_n S^n$ nach $H_n(U, U \setminus p)$ ist nun die Summe der beiden horizontalen Isomorphismen aus dem unteren Diagramm und damit das $(1 + (-1)^{n+1})$ -fache eines Isomorphismus. So folgt, daß für n ungerade auch $H_n S^n \rightarrow H_n \mathbb{P}^n$ das Doppelte eines Isomorphismus sein muß wie gewünscht. \square

Übungen

Übung 5.1.7. Gegeben eine kurze exakte Sequenz $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$ von abelschen Gruppen und ein topologischer Raum X zeige man, wie in natürlicher Weise Randoperatoren definiert werden können derart, daß eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_q(X; G') \rightarrow H_q(X; G) \rightarrow H_q(X; G'') \rightarrow H_{q-1}(X; G') \rightarrow \dots$$

entsteht. Diese Randoperatoren heißen die **Bockstein-Homomorphismen**.

5.2 Tensorprodukt abelscher Gruppen

Vorschau 5.2.1. Ich bespreche hier nur Tensorprodukte über \mathbb{Z} und die zugehörige multilineare Algebra. Allgemeinere Tensorprodukte werden in [KAG] 2.6 diskutiert.

5.2.2. Seien U, V, W abelsche Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : U \times V \rightarrow W$ heiße **biadditiv**, wenn gilt $\varphi(u_1 + u_2, v) = \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)$ und $\varphi(u, v_1 + v_2) = \varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2)$ für alle $u, u_1, u_2 \in U$ und $v, v_1, v_2 \in V$. Gegeben abelsche Gruppen V_1, \dots, V_r, W nennen wir allgemeiner eine Abbildung

$$\varphi : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$$

multiadditiv, wenn sie in jeder Variablen ein Gruppenhomomorphismus wird, sobald wir die anderen Variablen festhalten. Im Fall $r = 0$ ist eine multiadditive Abbildung des leeren Produkts nach W schlicht eine beliebige Abbildung des leeren Produkts alias der einelementigen Menge nach W . Die Gesamtheit aller derartigen multiadditiven Abbildungen notieren wir

$$\text{Ab}(V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_r, W)$$

und $\text{Ab}(\curlywedge, W)$ im Fall $r = 0$. In diesem Fall liefert das Auswerten auf dem einzigen Element des leeren Produkts eine Bijektion $\text{Ab}(\curlywedge, W) \xrightarrow{\sim} W$.

5.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). Die im vorhergehenden eingeführte Terminologie suggeriert, daß die fraglichen abelschen Gruppen additiv notiert sein sollen. In manchen Kontexten ist das unglücklich. Dann rede ich unverfänglicher von „Bimorphismen“ und „Multimorphismen“.

Satz 5.2.4. Seien $r \geq 0$ eine natürliche Zahl und V_1, \dots, V_r abelsche Gruppen. So gilt:

1. Es gibt ein Paar (T, τ) bestehend aus einer abelschen Gruppe T und einer multiadditiven Abbildung $\tau \in \text{Ab}(V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_r, T)$ derart, daß für jede weitere abelsche Gruppe W das Vorscalten von τ eine Bijektion

$$(\circ\tau) : \text{Ab}(T, W) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}(V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_r, W)$$

zwischen der Menge aller Gruppenhomomorphismen $T \rightarrow W$ und der Menge aller multiadditiven Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$ induziert. Wir nennen solch ein τ eine **universelle multiadditive Abbildung**;

2. Gegeben ein weiteres derartiges Paar (S, σ) existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $c : T \rightarrow S$ mit $c \circ \tau = \sigma$ und genau ein Gruppenhomomorphismus $d : S \rightarrow T$ mit $d \circ \sigma = \tau$ und diese Abbildungen sind zueinander inverse Isomorphismen zwischen T und S .

Beweis der Eindeutigkeit 5.2.4.2. Die Existenz und Eindeutigkeit von c folgt sofort aus der universellen Eigenschaft von (T, τ) . Die Existenz und Eindeutigkeit von d folgt ebenso aus der universellen Eigenschaft von (S, σ) . Schließlich gilt $(d \circ c) \circ \tau = \tau = \text{id}_T \circ \tau$ und damit folgt $d \circ c = \text{id}_T$ wieder nach der universellen Eigenschaft von τ . Die Identität $c \circ d = \text{id}_S$ zeigt man genauso. \square

5.2.5. Unsere Paare sind nach Teil 2 „eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus“, wenn sie denn existieren. Insbesondere kommt es auf die genaue Konstruktion ebensowenig an wie auf die genaue Konstruktion der natürlichen oder der reellen Zahlen. Solch ein Paar verdient damit eine eigene Notation und den bestimmten Artikel. Man nennt T das **Tensorprodukt der V_i** und notiert es im Fall $r > 0$ als

$$T := V_1 \otimes \dots \otimes V_r$$

und notiert die universelle multiadditive Abbildung $(v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r$. Im Fall $r = 1$ nimmt man meist $T = V_1$ und wählt als universelle multiadditive Abbildung die Identität. Im Fall $r = 0$ nimmt man meist $T = \mathbb{Z}$ und wählt als universelle multiadditive alias beliebige Abbildung $\text{ens} \rightarrow \mathbb{Z}$ vom leeren Produkt alias der einelementigen Menge nach \mathbb{Z} die Abbildung $*$ $\mapsto 1$. Wenn spezifiziert werden muß, daß das Tensorprodukt abelscher Gruppen gemeint ist, schreiben wir genauer \otimes_{Ab} oder auch $\otimes_{\mathbb{Z}}$ im Vorgriff auf die allgemeine Konstruktion \otimes_k des Tensorprodukts über einem Ring k .

Beweis der Existenz 5.2.4.1. Der Einfachkeit halber schreibe ich die Details nur für biadditive Abbildungen aus. Wir erinnern aus 1.1.1 die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}\Lambda$ über einer Menge Λ und aus 1.1.2 die Abbildung $\text{can} : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}\Lambda$. Wir

beginnen mit der freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}(U \times V)$ über der Menge $U \times V$. Darin betrachten wir die Untergruppe $R \subset \mathbb{Z}(U \times V)$, der erzeugt wird von allen Ausdrücken

$$\begin{aligned} &(u_1 + u_2, v) - (u_1, v) - (u_2, v) \\ &(u, v_1 + v_2) - (u, v_1) - (u, v_2) \end{aligned}$$

für $u, u_1, u_2 \in U$ und v, v_1, v_2 . Schließlich definieren wir T als den Quotienten

$$T := \mathbb{Z}(U \times V)/R$$

und erklären $\tau : U \times V \rightarrow T$ als die Abbildung, die jedem Paar (u, v) die Nebenklasse $\tau(u, v) := \text{can}(u, v) + R$ von $\text{can}(u, v)$ zuordnet. Die Bilinearität von τ folgt dann unmittelbar aus der Definition der herausgeteilten Untergruppe R . Um die im Satz behauptete universelle Eigenschaft nachzuweisen, arbeiten wir mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} U \times V & \longrightarrow & \mathbb{Z}(U \times V) & \longrightarrow & T \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & W & & \end{array}$$

Für jede Abbildung $b : U \times V \rightarrow W$ gibt es nach der universellen Eigenschaft der freien abelschen Gruppe über einer vorgegebenen Menge genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{b} : \mathbb{Z}(U \times V) \rightarrow W$ mit $\tilde{b} \circ \text{can} = b$. Ist hier b biadditiv, so gilt offensichtlich $\tilde{b}(R) = 0$, also gibt es nach der universellen Eigenschaft des Quotienten genau einen Gruppenhomomorphismus $\hat{b} : T \rightarrow W$ mit $\hat{b}\tau(v, w) = b(v, w)$. Diese Abbildung \hat{b} ist eindeutig bestimmt durch b , da die $\tau(v, w)$ unser T als Gruppe erzeugen. \square

5.2.6 (Notation für Gruppenhomomorphismen aus Tensorprodukten). Seien U, V abelsche Gruppen. Die Elemente der Gestalt $u \otimes v$ erzeugen $U \otimes V$ als Gruppe. Geben wir einen Gruppenhomomorphismus $U \otimes V \rightarrow W$ in eine weitere abelsche Gruppe an durch eine Vorschrift der Gestalt $u \otimes v \mapsto b(u, v)$, so ist der Leser implizit gefordert, die Biadditivität der Abbildung $b : U \times V \rightarrow W$ zu prüfen, und gemeint ist dann eigentlich der durch die universelle Eigenschaft definierte Gruppenhomomorphismus $\hat{b} : U \otimes V \rightarrow W$. Analoge Vereinbarungen treffen wir für Abbildungen aus Tensorprodukten mit einer beliebigen Zahl von Faktoren.

Definition 5.2.7. Sind $f : V \rightarrow V'$ und $g : W \rightarrow W'$ Homomorphismen abelscher Gruppen, so definieren wir einen Gruppenhomomorphismus $f \otimes g : V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$ durch die Vorschrift

$$(f \otimes g)(v \otimes w) := f(v) \otimes g(w)$$

in unserer Konvention 5.2.6. Wir nennen $f \otimes g$ das **Tensorprodukt der Gruppenhomomorphismen f und g** . Analog erklären wir das Tensorprodukt einer beliebigen endlichen Familie von Gruppenhomomorphismen.

5.2.8 (Universell bedeutet stark universell bei abelschen Gruppen). Universelle multiadditive Abbildungen $\tau : U_1 \times \dots \times U_r \rightarrow T$ haben sogar die stärkere universelle Eigenschaft, daß das Vorschalten von τ in der entsprechenden Variablen für beliebige abelsche Gruppen V_1, \dots, V_s und W eine Bijektion

$$\text{Ab}(T \curlywedge V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_s, W) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}(U_1 \curlywedge \dots \curlywedge U_r \curlywedge V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_s, W)$$

induziert. In der Tat kann man die entsprechende Abbildung in offensichtlicher Weise in ein kommutatives Dreieck einfügen mit zwei Isomorphismen in eine dritte Ecke $\text{Ab}(U_1 \curlywedge \dots \curlywedge U_r, \text{Ab}(V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_s, W))$ als weiteren Kanten, in dem $\text{Ab}(V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_s, W)$ mithilfe der Addition auf W selbst als abelsche Gruppe aufgefaßt wird.

5.2.9 (Multiverknüpfung multiadditiver Abbildungen). Gegeben eine multiadditive Abbildung $V_1 \times \dots \times V_s \rightarrow W$ und jeweils multiadditive Abbildungen $U_{i,1} \times \dots \times U_{i,r(i)} \rightarrow V_i$ erklären wir in hoffentlich offensichtlicher Weise ihre **Multiverknüpfung**, eine multiadditive Abbildung der Familie aller $U_{i,j}$ nach W .

5.2.10 (Multiverknüpfung universeller multiadditiver Abbildungen). Aus der starken Universalität universeller multiadditiver Abbildungen folgt ohne weitere Schwierigkeiten, daß jede Multiverknüpfung universeller multiadditiver Abbildungen wieder universell ist. Diese Erkenntnis bedeutet eine Art „Assoziativität“ unserer Tensorprodukte. In der Tat erhalten wir etwa einen ausgezeichneten Isomorphismus $(U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes (V \otimes W)$ aus der Erkenntnis, daß die offensichtlichen multiadditiven Abbildungen von $U \times V \times W$ in beide Gruppen universell sind als Multiverknüpfungen universeller multiadditiver Abbildungen. Ebenso erhalten wir einen ausgezeichneten Isomorphismus $U \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} U$ mit der impliziten Interpretation von \mathbb{Z} versehen mit der universellen multiadditiven Abbildung $* \mapsto 1$ als dem leeren Tensorprodukt.

5.2.11. Gegeben abelsche Gruppen V, W verwenden wir von nun an die Notation $V \rightrightarrows W$ für die Menge $\text{Ab}(V, W)$ aller Gruppenhomomorphismen mit ihrer offensichtlichen Struktur als abelsche Gruppe.

Proposition 5.2.12 (Adjunktion von Tensor und Hom). *Gegeben abelsche Gruppen U, V, W erhalten wir durch die Vorschrift $f \mapsto \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(u \otimes v) = (f(u))(v)$ einen Isomorphismus*

$$\text{Ab}(U, V \rightrightarrows W) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}(U \otimes V, W)$$

Beweis. Wir können unseren Isomorphismus is pe zu einem kommutativen Dreieck ergänzen durch die zusätzliche Menge $\text{Ab}(U \curlyvee V, W)$ und die zwei offensichtlichen Abbildungen dorthin. \square

Vorschau 5.2.13. Die Proposition bedeutet in der Terminologie aus [TF] 4.3, daß die Funktoren $\otimes V$ und $(V \rightrightarrows)$ zueinander adjungiert sind.

5.2.14 (Rechtsexaktheit des Tensorprodukts). Gegeben eine rechtsexakte Sequenz $U'' \rightarrow U \rightarrow U'$ von abelschen Gruppen und eine weitere abelsche Gruppe V ist auch die Sequenz $U'' \otimes V \rightarrow U \otimes V \rightarrow U' \otimes V$ rechtsexakt. Um das einzusehen, muß man nur prüfen, daß eine biadditive Abbildung $U \times V \rightarrow W$ genau dann über $U' \times V$ faktorisiert, wenn sie auf $U \times V$ verschwindet. Das aber scheint mir klar.

5.3 Torsionsprodukt von abelschen Gruppen

Definition 5.3.1 (Tensorprodukt von Komplexen). Sind X, Y Komplexe von Rechts- beziehungsweise Linksmoduln über einem Ring R , so bildet man einen Komplex von abelschen Gruppen $X \otimes_R Y$, ihr **Tensorprodukt** alias den **Tensorkomplex**, durch die Vorschrift $(X \otimes_R Y)_n := \bigoplus_{p+q=n} X_p \otimes_R Y_q$ mit dem Differential

$$\partial(x \otimes y) := \partial x \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial y$$

5.3.2 (Vertauschung von Tensorfaktoren). Sind X, Y Komplexe von Rechts- beziehungsweise Linksmoduln über einem Ring R , so liefert die Abbildungsvorschrift $x \otimes y \mapsto (-1)^{|x||y|} y \otimes x$ einen Isomorphismus von Kettenkomplexen $v : X \otimes_R Y \rightarrow Y \otimes_{R^{\text{opp}}} X$. Speziell erhalten wir so für $X, Y \in \text{Ket}$ einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$v : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

Um das alles nachzuweisen, prüfen wir die Bedingung $\partial v(x \otimes y) = v\partial(x \otimes y)$ durch die Umformungen

$$\begin{aligned} \partial v(x \otimes y) &= (-1)^{|x||y|} \partial(y \otimes x) \\ &= (-1)^{|x||y|} \partial y \otimes x + (-1)^{|x||y|+|y|} y \otimes \partial x \\ v\partial(x \otimes y) &= v(\partial x \otimes y) + (-1)^{|x|} v(x \otimes \partial y) \\ &= (-1)^{|y||x|+|y|} y \otimes \partial x + (-1)^{|x|} (-1)^{|x||y|+|x|} \partial y \otimes x \end{aligned}$$

Vorschau 5.3.3. In [TSK] 2.3.2 führen wir die „Schmelzkategorie der Kettenkomplexe“ ein als einen formalen Rahmen, in dem derartige Vorzeichenfragen ein für allemal gelöst werden können.

5.3.4. Ob mit dem Symbol \otimes das Tensorprodukt zweier Moduln oder vielmehr das Tensorprodukt zweier Komplexe gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen. Da das Tensorprodukt mit direkten Summen vertauscht, kommt es darauf auch nicht wesentlich an.

5.3.5 (**Funktorialitäten des Tensorprodukts von Komplexen**). Offensichtlich ist das Tensorprodukt von Komplexen ein Funktor

$$\text{Ket}(\text{Mod-}R) \times \text{Ket}(R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Ket}(\text{Ab})$$

Er geht auf die Homotopiekategorien über. Sind genauer $f, g : C \rightarrow C'$ Kettenhomomorphismen und ist δ eine Kettenhomotopie zwischen f und g , in Formeln $\delta\partial + \partial\delta = f - g$, so ist $\delta \otimes \text{id}$ eine Kettenhomotopie zwischen $f \otimes \text{id}$ und $g \otimes \text{id}$. Analoges gilt für den zweiten Tensorfaktor. Das Tensorprodukt liefert damit auch einen Funktor

$$\text{Hot}(\text{Mod-}R) \times \text{Hot}(R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab})$$

5.3.6. Gegeben eine abelsche Gruppe M betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$$

Mit $\mathbb{Z}M$ meinen wir hier die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}M := \mathbb{Z}\langle M \rangle$ über der Menge M und mit KM den Kern der offensichtlichen Surjektion $\mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$. Wir notieren $\mathcal{P}M$ das Anfangsstück dieser kurzen exakten Sequenz, also den Komplex mit $\mathcal{P}_1M = KM$ und $\mathcal{P}_0M = \mathbb{Z}M$ und $\mathcal{P}_qM = 0$ für $q \neq 0, 1$. Wir nennen $\mathcal{P}M$ die **Standardauflösung von M** . Gegeben zwei abelsche Gruppen M, N erklären wir eine dritte abelsche Gruppe $M * N$, ihr **Torsionsprodukt**, als die erste Homologiegruppe des Tensorprodukts ihrer Standardauflösungen, in Formeln

$$M * N := M *_Z N := \mathcal{H}_1(\mathcal{P}M \otimes_Z \mathcal{P}N)$$

Wir erhalten so in offensichtlicher Weise einen Funktor $*$: $\text{Ab} \times \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$.

5.3.7 (**Das Torsionsprodukt von höheren Standpunkten**). Die Definition des Torsionsprodukts mag auf den ersten Blick bizarr wirken. Erst das gleich folgende Beispiel 5.3.12 und die Anwendung im universellen Koeffiziententheorem 5.5.2 zeigen ihre Sinnhaftigkeit. Vom höheren Standpunkt aus betrachtet ist das Torsionsprodukt unser erstes Beispiel für einen „derivierten Funktor“. Genauer haben wir hier den „ersten derivierten Funktor des Tensorprodukts“ vor uns, vergleiche [TG] 3.2.25. Von einem noch höheren Standpunkt aus führen wir in [TSF] 9.9.14 die Schmelzkategorie $\text{Der}(\text{Ab})$ ein und darin die universelle Verschmelzung $M \curlyvee N \rightarrow M \otimes^L N$. In dieser Sprache haben wir $M * N = \mathcal{H}^1(M \otimes^L N)$.

5.3.8. Eine abelsche Gruppe heißt **torsionsfrei**, wenn sie außer der Null keine Elemente endlicher Ordnung hat.

5.3.9 (**Vereinfachte Berechnung des Torsionsprodukts**). Wir kürzen im folgenden $\otimes_{\mathbb{Z}} = \otimes$ ab. Bezeichne M die Gruppe M , aufgefaßt als Komplex mit einem einzigen Eintrag im Grad Null. Wenn Unklarheiten aufkommen, mag man diesen Komplex feiner $M[0]$ notieren. Wir erhalten eine offensichtliche surjektive Kettenabbildung $\mathcal{P}M \twoheadrightarrow M$. Wir behaupten, daß für jedes weitere N die induzierte Abbildung $\mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N \twoheadrightarrow M \otimes \mathcal{P}N$ Isomorphismen

$$\mathcal{H}_i(\mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_i(M \otimes \mathcal{P}N)$$

auf der Homologie liefert. In der Tat ist der Kern unserer surjektiven Kettenabbildung $\mathcal{P}M \twoheadrightarrow M$ der Komplex K^2M mit KM in den Graden Null und Eins, der Identität dazwischen als Randoperator, und Nullen an allen anderen Stellen. Dieser Komplex K^2M ist nun offensichtlich nullhomotop. Da $\mathcal{P}N$ aus torsionsfreien Gruppen besteht, erhalten wir mit [KAG] 2.5.16 eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$K^2M \otimes \mathcal{P}N \hookrightarrow \mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N \twoheadrightarrow M \otimes \mathcal{P}N$$

Da darin der erste Komplex nullhomotop ist, muß nach der langen exakten Homologiesequenz die zweite Abbildung Isomorphismen auf der Homologie liefern. Anders gesagt hat die Abbildung $M \otimes \mathcal{P}N \twoheadrightarrow M \otimes \mathbb{Z}N$ also den Kern $M * N$ und den Kokern $M \otimes N$.

5.3.10 (**Das Torsionsprodukt mit einer torsionsfreien Gruppe ist Null**). Ist von zwei abelschen Gruppen M, N eine torsionsfrei, so gilt $M * N = 0$. In der Tat folgt aus unserer vereinfachten Berechnung der Torsionsgruppe nach 5.3.9 für M torsionsfrei sofort

$$M * N = \mathcal{H}_1(\mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_1(M \otimes \mathcal{P}N) = 0$$

Hier verwenden wir [KAG] 2.5.16 für die letzte Gleichung. Den Fall von torsionsfreiem N behandelt man analog.

5.3.11. Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ erhält man nach [KAG] 2.5.16 für alle N eine kurze exakte Sequenz von Komplexen $M' \otimes \mathcal{P}N \hookrightarrow M \otimes \mathcal{P}N \twoheadrightarrow M'' \otimes \mathcal{P}N$ und daraus mit 5.3.9 eine exakte Sequenz, die **Torsionssequenz** oder genauer **Torsionssequenz im ersten Eintrag**

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M' * N & \hookrightarrow & M * N & \twoheadrightarrow & M'' * N & \rightarrow \\ & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & 0 \end{array}$$

die natürlich ist in der kurzen exakten Sequenz $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ und in N . Analog konstruieren wir die **Torsionssequenz im zweiten Eintrag**.

5.3.12 (**Torsionsprodukt mit zyklischer Gruppe**). Für jede abelsche Gruppe N und jede natürliche Zahl $m \neq 0$ liefert der Randoperator der Torsionssequenz zur offensichtlichen kurzen exakten Sequenz $\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * N \xrightarrow{\sim} \{a \in N \mid ma = 0\}$$

Die Gruppe auf der rechten Seite würde man in Worten die „Gruppe aller Elemente von N mit m -Torsion“ nennen, daher wohl auch die Bezeichnung der linken Seite als „Torsionsprodukt“.

Übungen

Übung 5.3.13. Man zeige, daß das Torsionsprodukt mit beliebigen direkten Summen vertauscht.

Ergänzende Übung 5.3.14. Das Torsionsprodukt $M * N$ von zwei abelschen Gruppen besitzt niemals Elemente unendlicher Ordnung. Hinweis: Man zeige dazu $(M * N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

Ergänzende Übung 5.3.15. Man zeige, daß unser $v : \mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N \rightarrow \mathcal{P}N \otimes \mathcal{P}M$ aus 5.3.2 Isomorphismen $v_{M,N} : M * N \xrightarrow{\sim} N * M$ liefert mit $v_{M,N} \circ v_{N,M} = \text{id}$. Man zeige weiter, daß für $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ eine kurze exakte Sequenz sogar das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M'' * N & \longrightarrow & M' \otimes N \\ \downarrow & & \downarrow \\ N * M'' & \longrightarrow & N \otimes M' \end{array}$$

kommutiert mit den Randabbildungen der entsprechenden Torsionssequenzen in den Horizontalen und unseren Vertauschungen in den Vertikalen.

Übung 5.3.16 (Tensor-Hom-Adjunktion). Man erinnere unseren Homkomplex 1.4.12 und und zeige, daß für je drei Komplexe $X, Y, Z \in \text{Ket}$ die „offensichtliche“ Abbildung eine Bijektion

$$\text{Ket}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\sim} \text{Ket}(X, Y \rightrightarrows Z)$$

liefert. Speziell erhalten wir so eine Adjunktion $(\otimes Y, (Y \rightrightarrows \))$ von Funktoren $\text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$ der Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen in sich selber. Die Koeinheit dieser Adjunktion $(Y \rightrightarrows Z) \otimes Y \rightarrow Z$ heißt das **Auswerten**.

Übung 5.3.17. Jeder Morphismus $X \otimes Y \rightarrow Z$ von Komplexen induziert einen Morphismus $\mathcal{H}X \otimes \mathcal{H}Y \rightarrow \mathcal{H}Z$ ihrer Homologien, hier gedacht als Komplexe mit Differential Null.

Übung 5.3.18. Seien A, B Ringe und $M \in \text{Ket}(\text{Mod-}A)$, $X \in \text{Ket}(A\text{-Mod-}B)$ und $N \in \text{Ket}(\text{Mod-}B)$ Komplexe. So erhalten wir mit dem Hom aus 1.4.12 einen Isomorphismus von Komplexen

$$\text{Hom}_{-B}(M \otimes_A X, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{-A}(M, \text{Hom}_{-B}(X, N))$$

gegeben durch $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi}(m)(x) = \varphi(m \otimes x)$, und der induzierte Isomorphismus auf den Nullzykeln liefert ein adjungiertes Paar $(\otimes_A X, \text{Hom}_{-B}(X, \))$ von Funktoren zwischen dgMod_{-A} und dgMod_{-B} .

Ergänzung 5.3.19. Arbeiten wir in Übung 5.3.18 statt mit Rechts- mit Linksmoduln $M \in \text{Ket}(A\text{-Mod})$, $X \in \text{Ket}(B\text{-Mod-}A)$ und $N \in \text{Ket}(B\text{-Mod})$, so haben wir analog

$$\text{Hom}_B(X \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_B(X, N))$$

vermittels $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi}(m)(x) = (-1)^{|m||x|} \varphi(x \otimes m)$. Daraus erhalten wir insbesondere ein adjungiertes Paar $(X \otimes_A \ , \text{Hom}_B(X, \))$ von Funktoren zwischen dgMod_A und dgMod_B .

5.4 Erste Anwendungen in der Homologietheorie

Proposition 5.4.1 (Tensorprodukt und Homologie). Ist $C \in \text{Ket}$ ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen und A eine abelsche Gruppe, so liefert die Vorschrift $a \otimes [c] \mapsto [a \otimes c]$ Homomorphismen

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{H}_q C) \rightarrow \mathcal{H}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} C)$$

Ist die abelsche Gruppe A flach alias torsionsfrei, so sind diese Homomorphismen Isomorphismen.

Beweis. Die offensichtlichen vertikalen Abbildungen liefern ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{B}_q C) & \longrightarrow & A \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{Z}_q C) & \twoheadrightarrow & A \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{H}_q C) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} C) & \hookrightarrow & \mathcal{Z}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} C) & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} C) \end{array}$$

Darin ist auch die obere Horizontale rechtsexakt nach [KAG] 2.5.8, deshalb induziert es die behauptete gestrichelt eingezeichnete Abbildung auf der Homologie. Ist A torsionsfrei, so ist die obere Horizontale auch exakt und bei Vertikalen sind Isomorphismen und induzieren deshalb einen Isomorphismus auf der Homologie. \square

Korollar 5.4.2 (Koeffizientenwechsel). *Ist X ein topologischer Raum und A eine abelsche Gruppe, so liefert die Vorschrift $a \otimes [c] \mapsto [a \otimes c]$ natürliche Homomorphismen $A \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(X) \rightarrow H_q(X; A)$. Ist die abelsche Gruppe A flach alias torsionsfrei, so sind diese Homomorphismen sogar Isomorphismen*

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(X) \xrightarrow{\sim} H_q(X; A)$$

Beweis. Die vorhergehende Proposition 5.4.1 liefert uns schon einmal Homomorphismen $A \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(X) \rightarrow \mathcal{H}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} SX)$, $a \otimes [c] \mapsto [a \otimes c]$ und für A flach sind sie Isomorphismen. Übung 5.4.3 liefert uns weiter die recht offensichtlichen Isomorphismen $\mathcal{H}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} SX) \xrightarrow{\sim} H_q(X; A)$. \square

Übungen

Übung 5.4.3. Für jede abelsche Gruppe A und jeden topologischen Raum X und jedes $a \in A$ und jede q -Kette $c \in S_q X$ erklären wir die q -Kette $a \otimes c \in S_q(X; A)$ mit Koeffizienten in A in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Dann liefert die Abbildung $a \otimes c \mapsto a \otimes c$ Isomorphismen $A \otimes_{\mathbb{Z}} S_q X \xrightarrow{\sim} S_q(X; A)$ für alle q und sogar einen Isomorphismus $A \otimes_{\mathbb{Z}} SX \xrightarrow{\sim} S(X; A)$ von Komplexen.

5.5 Universelles Koeffiziententheorem

5.5.1. In diesem Abschnitt kürzen wir systematisch $\otimes_{\mathbb{Z}} = \otimes$ und $*_{\mathbb{Z}} = *$ ab.

Satz 5.5.2 (Universelles Koeffiziententheorem der Homologie). *Gegeben ein topologischer Raum X und eine abelsche Gruppe G gibt es Isomorphismen*

$$H_q(X; G) \cong (H_q(X) \otimes G) \oplus (H_{q-1}(X) * G)$$

5.5.3. Dasselbe gilt für relative Homologie und mit Koeffizienten in einem beliebigen Hauptidealring R , für den wir allerdings erst noch das Torsionsprodukt $*_R$ einführen müssten. Der Satz behauptet nur die Existenz solcher Isomorphismen. Inwieweit sie natürlich sind, wird im Beweis genauer diskutiert werden.

Beispiel 5.5.4. Da H_0 stets frei ist, gilt stets $H_1(X) \otimes G \xrightarrow{\sim} H_1(X; G)$ für die erste Homologie.

Beispiel 5.5.5. Nach 5.1.6 ist die Folge der $H_q(\mathbb{P}^n \mathbb{R}; \mathbb{Z})$ für $n \geq 2$ bis auf Isomorphismus

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0, \dots, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \begin{cases} 0, \mathbb{Z} & n \text{ ungerade;} \\ 0 & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Beschreibung 5.1.6 der Homologie mit Koeffizienten G entsteht daraus nach dem universellen Koeffiziententheorem, indem man \mathbb{Z} durch $G = G \otimes \mathbb{Z}$ ersetzt, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch $G/2G = G \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und die Nullen durch $G_2 = G * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis. Tensorieren wir die kurze exakte Sequenz $KG \hookrightarrow \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow G$ über \mathbb{Z} mit dem Komplex von freien abelschen Gruppen SX , so erhalten wir mit 5.4.3 eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$SX \otimes KG \hookrightarrow SX \otimes \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow S(X; G)$$

Bilden wir die lange exakte Homologiesequenz und beachten die Isomorphismen $(\mathcal{H}_q SX) \otimes \mathbb{Z}G \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q(SX \otimes \mathbb{Z}G)$ und $(\mathcal{H}_q SX) \otimes KG \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q(SX \otimes KG)$ nach 5.4.1, so ergibt sich mit der Abkürzung $H_q := \mathcal{H}_q(SX)$ die lange exakte Sequenz

$$H_q \otimes KG \rightarrow H_q \otimes \mathbb{Z}G \rightarrow H_q(X; G) \rightarrow H_{q-1} \otimes KG \rightarrow H_{q-1} \otimes \mathbb{Z}G$$

und dann mit der Rechtsexaktheit von \otimes und der Definition von $*$ und 5.5.7 eine kurze exakte Sequenz

$$H_q(X) \otimes G \hookrightarrow H_q(X; G) \twoheadrightarrow H_{q-1}(X) * G$$

Es bleibt zu zeigen, daß sie spaltet. Aber die kurze exakte Sequenz $Z_q X \hookrightarrow S_q X \twoheadrightarrow B_{q-1} X$ spaltet, da $B_{q-1} X \subset S_{q-1} X$ frei ist nach 5.5.11. Wir finden nach 2.2.12 also ein Linksinverses $S_q X \twoheadrightarrow Z_q X$ der Einbettung der Zyklen in die Ketten, und das induziert die gesuchte Spaltung $H_q(X; G) \rightarrow H_q(X) \otimes G$. \square

5.5.6. Die Spaltung im vorhergehenden Beweis ist für festes X natürlich in G . Sie kann aber nicht bei festem $G \neq 0$ natürlich in X gewählt werden. Dazu hätte ich gerne ein gut zugängliches Beispiel etwa eines Raums X mit einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow X$, die die Identität auf $H_1(X)$ und $H_2(X)$ induziert, nicht aber auf $H_2(X; G)$.

5.5.7. Ist $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen, so ist $(\text{cok}(A \rightarrow B)) \rightarrow C \rightarrow (\text{ker}(D \rightarrow E))$ eine kurze exakte Sequenz.

Korollar 5.5.8 (Freiheit für Homologie von Mannigfaltigkeiten). *Gegeben eine orientierbare n -Mannigfaltigkeit M ist $H_{n-1}M$ torsionsfrei.*

5.5.9. Ist M zusätzlich kompakt, so sind zusätzlich alle Homologiegruppen endlich erzeugt nach dem Satz von Wilder 4.4.2 und wir folgern, daß $H_{n-1}M$ eine freie abelsche Gruppe sein muß. Für M abzählbar basiert zeige ich das in [TSF] 6.4.4. Ich weiß nicht, ob für beliebige nicht notwendig abzählbar basierte orientierbare Mannigfaltigkeiten die Homologie im Grad Eins unter der Dimension eine freie abelsche Gruppe sein muß.

Beweis. Nach der Variante mit Koeffizienten 5.1.5 des Satzes über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten ist für jede abelsche Gruppe G die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $H_n(M) \otimes G \xrightarrow{\sim} H_n(M; G)$. Aus dem universellen Koeffiziententheorem 5.5.2 folgt damit $H_{n-1}(M) * G = 0$. \square

Beispiel 5.5.10. Die Sphäre S^3 kann mit der Struktur einer topologischen Gruppe versehen werden, indem wir ihre Elemente als Quaternionen der Länge 1 auffassen. Die n -ten komplexen Einheitswurzeln bilden darin eine zyklische Untergruppe μ_n und der Quotient S^3/μ_n hat nach Überlagerungstheorie die Fundamentalgruppe $\mu_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und nach dem Satz von Hurewicz 1.5.2 auch erste Homologie $H_1(S^3/\mu_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Kompakte orientierbare Mannigfaltigkeiten einer Dimension > 2 können also durchaus Torsion in ihrer Homologie haben.

Satz 5.5.11. *Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei.*

5.5.12. Der anschließende Beweis zeigt allgemeiner: Jeder Untermodul eines freien Moduls über einem Hauptidealring ist frei. Für endlich erzeugte Gruppen folgt das aus [LA2] 4.4.1 in Verbindung mit [LA2] 4.4.4, für endlich erzeugte Moduln analog aus [KAG] 1.4.9 in Verbindung mit [KAG] 2.4.8. Die Hauptarbeit besteht darin, auch nicht notwendig endlich erzeugte Gruppen beziehungsweise Moduln zu behandeln.

Beweis. Sei I eine Menge und $U \subset \mathbb{Z}I$ eine Untergruppe. Wir betrachten die Menge aller Paare (J, B) wo $J \subset I$ eine Teilmenge ist und B eine \mathbb{Z} -Basis des Schnitts $U \cap \mathbb{Z}J$. Diese Menge ist nicht leer und ist induktiv geordnet. Sie besitzt also nach Zorns Lemma [LA1] 1.9.15 ein maximales Element (J_m, B_m) und es gilt zu zeigen $J_m = I$. Aber sonst sei $i \in I \setminus J_m$. Das Bild von $U \cap \mathbb{Z}(J_m \cup \{i\})$ in $\mathbb{Z}i$ unter der offensichtlichen Projektion ist von der Form $r\mathbb{Z}i$ für ein $r \in \mathbb{Z}$. Ist $r \neq 0$, so wählen wir ein Urbild u von ri in U und $(J_m \cup \{i\}, B_m \cup \{u\})$ wäre ein größeres Paar. Ist $r = 0$, so wäre schon $(J_m \cup \{i\}, B_m)$ ein größeres Paar. In jedem Fall steht $J_m \neq I$ im Widerspruch zur Maximalität von (J_m, B_m) . \square

5.6 Singuläre Ketten in Produkträumen

5.6.1 (**Anschauung für das Kreuzprodukt der Homologie**). Gegeben topologische Räume X, Y scheint mir anschaulich klar, daß man natürliche Produktabbildungen

$$H_p(X) \times H_q(Y) \rightarrow H_{p+q}(X \times Y)$$

erwarten darf. Suchen wir zum Beispiel das Produkt von zwei Homologieklassen vom Grad 1, und werden diese Klassen repräsentiert durch geschlossene Wege in X beziehungsweise Y , so liefern unsere beiden Wege zusammen eine Abbildung des 2-Torus nach $X \times Y$, und jede Triangulierung dieses 2-Torus liefert einen 2-Zykel im Produkt, der dann das Produkt unserer beiden 1-Klassen repräsentieren soll. Diese Anschauung werden wir im folgenden zur Definition des „Kreuzprodukts der Homologie“ formalisieren und zeigen, wie uns die „Künneth-Formel“

erlaubt, die Homologie eines Produkts aus der Homologie seiner Faktoren zu berechnen. Arbeiten wir zur Vereinfachung mit Koeffizienten in einem Körper k , so liefert nach dieser Formel das Kreuzprodukt sogar Isomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(X; k) \otimes_k H_q(Y; k) \xrightarrow{\sim} H_n(X \times Y; k)$$

Besitzen insbesondere X und Y eine im Sinne von 3.1.16 wohldefinierte Eulercharakteristik, so auch $X \times Y$ und es gilt $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$. Der Fall ganzzahliger Koeffizienten ist nur unwesentlich komplizierter. Nach diesen Vorbemerkungen beginnen wir nun mit der formalen Arbeit. Die formale Definition des Kreuzprodukts werden wir in 5.7.2 angeben.

Beispiel 5.6.2 (Das Kreuzprodukt auf der nullten Homologie). Im Fall $n = 0$ kommen wir noch ohne größere Vorarbeiten zum Ziel. Wir erinnern dazu den Funktor $\pi_0 : \text{Top} \rightarrow \text{Ens}$ der Wegzusammenhangskomponenten und unseren Isomorphismus $\mathbb{Z}\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} H_0X$ aus 1.3.18 und erhalten für je zwei topologische Räume X, Y natürliche Isomorphismen

$$H_0X \otimes H_0Y \xleftarrow{\sim} \mathbb{Z}\pi_0X \otimes \mathbb{Z}\pi_0Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\pi_0(X \times Y) \xrightarrow{\sim} H_0(X \times Y)$$

Der dritte Isomorphismus kommt dabei von der Verträglichkeit $\pi_0X \times \pi_0Y \xrightarrow{\sim} \pi_0(X \times Y)$ von π_0 mit endlichen Produkten her. Analoges gilt für die Homologie mit Koeffizienten in einem beliebig vorgegebenen Ring.

5.6.3. Gegeben eine Kategorie \mathcal{A} mit additiver Struktur erklären wir in der offensichtlichen Weise die Kategorie $\text{Ket}(\mathcal{A}) = \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ der Komplexe von Objekten von \mathcal{A} und ihre Homotopiekategorie $\text{Hot}(\mathcal{A}) = \text{Hot}_{\mathcal{A}}$. Gegeben Komplexe C, D bilden wir dann wie in [TS] 1.4.12 den Hom-Komplex $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, D) \in \text{Ket}(\text{Ab})$ und haben per definitionem

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(C, D) = \mathcal{H}_0 \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, D)$$

Im Spezialfall $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ verwenden wir für den Hom-Komplex auch die Notation $\text{Hom}_R(C, D)$. Unsere Homotopiekategorie $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$ erbt von \mathcal{A} in offensichtlicher Weise eine additive Struktur und auch eine k -lineare Struktur, wenn \mathcal{A} eine k -lineare Struktur trägt.

5.6.4. Wir betrachten nun die Funktoren $S \otimes S : (X, Y) \mapsto S(X \times Y)$ und $S(\times) : (X, Y) \mapsto SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY$ von der Kategorie $\text{Top} \times \text{Top}$ der Paare topologischer Räume in die Kategorie Ket der Komplexe. Wir können sie als Komplexe von Funktoren alias Objekte von $\text{Ket}(\text{Ab}^{\text{Top} \times \text{Top}})$ auffassen und wie in 5.6.3 die zugehörige Homotopiekategorie $\text{Hot}(\text{Ab}^{\text{Top} \times \text{Top}})$ bilden. Man beachte, daß wir

für eine beliebige Kategorie \mathcal{C} einen offensichtlichen Isomorphismus von Kategorien $\text{Ket}(\text{Ab})^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \text{Ket}(\text{Ab}^{\mathcal{C}})$ zur Verfügung haben und einen offensichtlichen Funktor

$$\text{Hot}(\text{Ab}^{\mathcal{C}}) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab})^{\mathcal{C}}$$

Letzterer Funktor ist jedoch im allgemeinen kein Isomorphismus von Kategorien, ja noch nicht einmal eine Äquivalenz von Kategorien.

Satz 5.6.5 (Eilenberg-Zilber). *In der Homotopiekategorie $\text{Hot}(\text{Ab}^{\text{Top} \times \text{Top}})$ gibt es zwischen den beiden Objekten $S \otimes S$ und $S(\times)$ genau einen Morphismus, der auf der nullten Homologie dieselben Abbildungen induziert wie die offensichtlichen Isomorphismen $S_0 X \otimes S_0 Y \xrightarrow{\sim} S_0(X \times Y)$, und dieser ist in besagter Homotopiekategorie ein Isomorphismus*

$$S \otimes S \xrightarrow{\sim} S(\times)$$

5.6.6. Wir beweisen diesen Satz nach einigen Vorbereitungen im Anschluß an den Satz über azyklische Modelle 5.6.23. Unser Satz gilt mit demselben Beweis für jede volle Unterkategorie von $\text{Top} \times \text{Top}$, zu deren Objekten alle Paare (Δ_p, Δ_q) von Standardsimplizes gehören.

5.6.7. Einen Repräsentanten in $\text{Ket}(\text{Ab}^{\text{Top} \times \text{Top}})$ für den im Satz beschriebenen Isomorphismus in $\text{Hot}(\text{Ab}^{\text{Top} \times \text{Top}})$ beziehungsweise seinen Inversen nennen wir eine **Eilenberg-Zilber-Transformation** beziehungsweise eine **Alexander-Whitney-Transformation**. Beispiele für derartige Transformationen werden wir in 5.8.3 und 5.8.5 angeben.

Vorschau 5.6.8. Der Satz gilt analog für eine beliebige endliche Zahl von Faktoren und der Beweis bleibt im wesentlichen derselbe. Für diese Allgemeinheit will ich aber die Diskussion von Tensorprodukten mit einer beliebigen endlichen Zahl von Tensorfaktoren abwarten. Mehr dazu in [TSK] 4.1.2.

5.6.9. Der vorstehende Satz 5.6.5 liefert für je zwei topologische Räume X, Y eine ausgezeichnete Homotopieäquivalenz $SX \otimes SY \xrightarrow{\sim} S(X \times Y)$. Wir nennen sie die **Eilenberg-Zilber-Äquivalenz** und ihre Inverse die **Alexander-Whitney-Äquivalenz**. Will man ihre anschauliche Bedeutung verstehen, so mag das in 5.8.3 gegebene explizite Beispiel helfen. Wir wollen den Satz von Eilenberg-Zilber mithilfe der Methode der „azyklischen Modelle“ beweisen und müssen dazu die nötige Terminologie einführen. Zum Aufwärmen beweisen wir erst einmal eine einfachere verwandte Aussage, das sogenannte „Hauptlemma der homologischen Algebra“.

Definition 5.6.10. Sei R ein Ring. Ein R -Modul P heißt **projektiv**, wenn jeder surjektive Homomorphismus $A \twoheadrightarrow A''$ von R -Moduln auf den Homomorphismenräumen eine Surjektion $\text{Hom}_R(P, A) \twoheadrightarrow \text{Hom}_R(P, A'')$ induziert.

Beispiel 5.6.11. Ist $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln über einem Ring R und ist M ein weiterer R -Modul, so ist die induzierte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_R(M, A') \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, A) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(M, A'')$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß keineswegs wieder eine Surjektion sein. Für die kurze exakte Sequenz $2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ etwa kommt die Identität $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht von einem Morphismus $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ her. Insbesondere ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht projektiv als \mathbb{Z} -Modul.

Beispiele 5.6.12. Gegeben ein Ring R ist jeder freie R -Modul projektiv. Insbesondere ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ projektiv als $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Modul. Sind P', P'' zwei R -Moduln und ist ihre Summe $P' \oplus P''$ projektiv, so auch die Summanden P' und P'' . Über einem Ring der Gestalt $R = R' \times R''$ für zwei Ringe R', R'' ist insbesondere $R' \times 0$ ein projektiver Modul, der jedoch nicht frei ist, falls R' und R'' von Null verschieden sind.

Lemma 5.6.13. *Ein Modul über einem Ring ist projektiv genau dann, wenn er direkter Summand eines freien Moduls ist.*

Beweis. Natürlich ist jeder direkte Summand eines freien Moduls projektiv. Ist umgekehrt P ein projektiver R -Modul, so finden wir einen freien Modul F und eine Surjektion $F \twoheadrightarrow P$. Nach Annahme induziert diese Surjektion eine Surjektion $\mathrm{Hom}_R(P, F) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, P)$. Jedes Urbild der Identität auf P ist dann eine Spaltung der Surjektion $F \twoheadrightarrow P$. \square

Satz 5.6.14 (Hauptlemma der homologischen Algebra). *Seien gegeben ein Ring R , ein Komplex projektiver R -Moduln P mit $P_q = 0$ für $q < 0$ und ein Komplex C von R -Moduln mit $\mathcal{H}_q(C) = 0$ für $q > 0$. So induziert das Bilden der nullten Homologie eine Bijektion*

$$\mathrm{Hot}_R(P, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathcal{H}_0 P, \mathcal{H}_0 C)$$

zwischen der Menge aller Homotopieklassen von Kettenabbildungen und der Menge aller R -linearen Abbildungen auf der nullten Homologie.

5.6.15. Im folgenden Beweis zeigen wir, daß das sogar unter schwächeren Voraussetzungen gilt. Genauer benötigen wir nur die Exaktheit der Zeilen des großen Diagramms in unserem Beweis und noch genauer sogar nur deren Exaktheit „auf der Diagonale und der ersten oberen Nebendiagonale“ also bei den $\mathrm{Hom}(P_i, C_i)$ und den $\mathrm{Hom}(P_{i+1}, C_i)$. Man mag diese Voraussetzung salopp gesprochen als eine Forderung der Art verstehen, daß die P_q in geeigneter Weise „relativ zu den C_q projektiv sind“.

Beweis. Beide Seiten bleiben unverändert, wenn wir beim Komplex C den Anteil C_0 im Grad Null durch $\mathcal{Z}_0 C$ ersetzen und die C_q für $q < 0$ durch Null. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß bereits gilt $q < 0 \Rightarrow C_q = 0$. Jetzt betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \text{Hom}(P_2, \mathcal{H}_0 C) & \leftarrow & \text{Hom}(P_2, C_0) & \leftarrow & \text{Hom}(P_2, C_1) & \leftarrow & \text{Hom}(P_2, C_2) \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Hom}(P_1, \mathcal{H}_0 C) & \leftarrow & \text{Hom}(P_1, C_0) & \leftarrow & \text{Hom}(P_1, C_1) & \leftarrow & \text{Hom}(P_1, C_2) \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Hom}(P_0, \mathcal{H}_0 C) & \leftarrow & \text{Hom}(P_0, C_0) & \leftarrow & \text{Hom}(P_0, C_1) & \leftarrow & \text{Hom}(P_0, C_2) \dots \\
 \cup & & & & & & \\
 \text{Hom}(\mathcal{H}_0 P, \mathcal{H}_0 C) & & & & & &
 \end{array}$$

Seine Zeilen sind alle exakt und die Kompositionen in den Spalten sind alle Null. Eine Kettenabbildung $f \in \text{Ket}_R(P, C)$ besteht aus einem Tupel von Elementen $f_i \in \text{Hom}(P_i, C_i)$ „längs der Diagonale“ derart, daß das Bild von f_i unter dem Pfeil nach oben mit dem Bild von f_{i+1} unter dem Pfeil nach links zusammenfällt, also $\partial \circ f_{i+1} = f_i \circ \partial$. Um die Surjektivität zu zeigen, klettern wir im Diagramm hoch und benutzen dabei nur die Exaktheit der Zeilen an den Stellen $\text{Hom}(P_{i+1}, C_i)$. Um die Injektivität zu zeigen, müssen wir zeigen, daß jede Kettenabbildung $P \rightarrow C$ nullhomotop ist, die die Nullabbildung $\mathcal{H}_0 P \rightarrow \mathcal{H}_0 C$ induziert. Eine Kettenhomotopie zwischen f und der Nullabbildung besteht aus einem Tupel von Elementen $s_i \in \text{Hom}(P_i, C_{i+1})$ derart, daß gilt $s_0 \mapsto f_0$ und daß f_{i+1} die Summe des Bildes von s_i unter dem Pfeil nach oben mit dem Bild von s_{i+1} unter dem Pfeil nach links ist, also $f_{i+1} = s_i \circ \partial + \partial \circ s_{i+1}$. Um so eine Kettenhomotopie zu finden, klettern wir wieder in unserem Diagramm hoch und benutzen diesmal nur die Exaktheit der Zeilen an den Stellen $\text{Hom}(P_i, C_i)$. \square

Definition 5.6.16. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Unter dem **freien Funktor in die Kategorie der abelschen Gruppen** $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ über einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Objekten von \mathcal{C} verstehen wir den Funktor

$$F : Y \mapsto \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\mathcal{C}(M_i, Y)$$

Beispiel 5.6.17. Der Funktor $S_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ der singulären q -Ketten ist der freie Funktor zur einelementigen Familie (Δ_q) von topologischen Räumen.

Proposition 5.6.18. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ der freie Funktor zur Familie $(M_i)_{i \in I}$ und $G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ ein weiterer Funktor. So haben wir eine Bijektion

$$\begin{aligned}
 \text{Ab}^{\mathcal{C}}(F, G) &\xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} G(M_i) \\
 \eta &\mapsto (\eta_{M_i}(\text{id}_i))_{i \in I}
 \end{aligned}$$

für $\text{id}_i \in F(M_i) = \bigoplus_{j \in I} \mathbb{Z}\mathcal{C}(M_j, M_i)$ dem Tupel mit einmal der Identität an der i -ten Stelle und Nullen an allen Stellen mit Index $j \neq i$.

Beweis. Den Beweis dieser Verallgemeinerung der Variante 1.4.6 des Yoneda-Lemmas überlassen wir dem Leser. Wie immer bezeichnet $\text{Ab}^{\mathcal{C}}$ die Kategorie der Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$. \square

5.6.19. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Eine **Basis eines Funktors**

$$G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$$

ist eine Familie $(M_i, m_i)_{i \in I}$ von Paaren bestehend aus jeweils einem Objekt $M_i \in \mathcal{C}$ und einem Element $m_i \in G(M_i)$ seines Bildes unter unserem Funktor derart, daß für jedes $X \in \mathcal{C}$ die $(Gf)(m_i)$ mit $i \in I$ und $f \in \mathcal{C}(M_i, X)$ eine \mathbb{Z} -Basis von $G(X)$ bilden. Nach unserer Proposition 5.6.18 entsprechen die Basen von G zu einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Objekten eineindeutig den Isotransformationen des freien Funktors über besagter Familie nach G .

Beispiel 5.6.20. Für alle $n \geq 0$ ist die Familie $((\Delta_q, \Delta_p), \tau_q \otimes \tau_p)_{p+q=n}$ eine Basis des Funktors $\text{Top} \times \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ mit $(X, Y) \mapsto (\text{SX} \otimes \text{SY})_n$.

Beispiel 5.6.21. Für alle $n \geq 0$ ist $(\Delta_n, (\tau_n, \varphi))_{\varphi \in \text{Top}(\Delta_n, [0,1])}$ eine Basis des Funktors $\text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ gegeben durch $X \mapsto \text{S}_n(X \times [0, 1])$.

Definition 5.6.22. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und $\mathcal{M} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Teilmenge. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ heißt **frei mit Modellen in \mathcal{M}** , wenn er eine Basis $(M_i, m_i)_{i \in I}$ besitzt derart, daß alle M_i zu \mathcal{M} gehören.

Satz 5.6.23 (über azyklische Modelle). Seien \mathcal{C} eine Kategorie und $F, G \in \text{Ket}(\text{Ab}^{\mathcal{C}})$ Komplexe von Funktoren mit $F_q = 0$ für $q < 0$. Wir nehmen an, daß es eine Menge \mathcal{M} von Objekten von \mathcal{C} gibt derart, daß die homogenen Komponenten $F_q : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ von F frei sind mit Modellen in \mathcal{M} und daß für alle $M \in \mathcal{M}$ die Homologie $\mathcal{H}_q(GM)$ verschwindet für $q > 0$. So induziert der Übergang zur nullten Homologie eine Bijektion

$$\text{Hot}(\text{Ab}^{\mathcal{C}})(F, G) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0 F, \mathcal{H}_0 G)$$

5.6.24. Mit $\mathcal{H}_0 F$ meinen wir den Funktor $X \mapsto \mathcal{H}_0(FX)$ alias den Funktor $\mathcal{H}_0 \circ F$. Wenn Sie bereits mit den sogenannten „abelschen Kategorien“ vertraut sind, mögen Sie erkennen, daß $\text{Ab}^{\mathcal{C}}$ selbst eine abelsche Kategorie ist und daß $\mathcal{H}_0 F$ gleichbedeutend in diesem begrifflichen Rahmen verstanden werden kann.

5.6.25. Ein topologischer Raum, dessen reduzierte Homologie identisch verschwindet, heißt **azyklisch für die singuläre Homologie**. Übertragen nennt man manchmal auch Komplexe azyklisch, deren Homologie vom Grad Null abgesehen identisch verschwindet. Die wesentliche Voraussetzung des vorhergehenden Satzes

läßt sich dahingehend formulieren, daß „ G in echt positiven Graden azyklisch ist auf den Modellen von F “. Spezialisiert man den Satz über azyklische Modelle auf den Fall einer Kategorie \mathcal{C} mit nur einem Objekt und einem Morphismus, eben der Identität dieses einzigen Objekts, so erhält man dieselbe Aussage wie bei der Spezialisierung des Hauptlemmas der homologischen Algebra 5.6.14 auf den Fall freier \mathbb{Z} -Moduln anstelle projektiver R -Moduln.

Beweis. Wir wiederholen den Beweis des Hauptlemmas der homologischen Algebra 5.6.14 und ersetzen darin überall R -Mod durch $\text{Ab}^{\mathcal{C}}$. Die Gruppen von Transformationen $\text{Ab}^{\mathcal{C}}(F_p, G_q)$ können nach 5.6.18 identifiziert werden mit Produkten $\prod_{i \in I(p)} G_q(M_i)$ für geeignete Familien $I(p) \rightarrow \mathcal{M}$ von Modellen und bilden folglich nach unserer Annahme der „Azyklizität der Modelle“ exakte Zeilen. Damit funktioniert dann unser vorheriger Beweis ohne weitere Änderungen. \square

Beweis von Eilenberg-Zilber 5.6.5. Der Funktor $(X, Y) \mapsto S_n(X \times Y)$ hat als Basis die einelementige Familie $((\Delta_n, \Delta_n), \text{diag})$, wobei $\text{diag} : \Delta_n \rightarrow \Delta_n \times \Delta_n$ die diagonale Einbettung und dann auch den n -Zykel $\text{diag} \in S_n(\Delta_n \times \Delta_n)$ bezeichnet. Der Funktor $(X, Y) \mapsto (SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY)_n$ hat als Basis die $(n+1)$ -elementige Familie $((\Delta_p, \Delta_q), \tau_p \otimes \tau_q)_{p+q=n}$ mit den Tensorprodukten der tautologischen Simplexes als zweiten Einträgen. Wir prüfen als nächstes, daß beide Funktoren auf ihren eigenen Modellen und den Modellen des jeweils anderen Funktors azyklisch sind, daß also die höheren Homologiegruppen der Komplexe $S(\Delta_p \times \Delta_q)$ und $S\Delta_p \otimes_{\mathbb{Z}} S\Delta_q$ verschwinden. Die erste Aussage folgt daraus, daß $\Delta_p \times \Delta_q$ konvex ist. Um die zweite Aussage einzusehen, betrachten wir den Kettenkomplex $\mathbb{Z}[0]$, der nur im Grad Null lebt und dort \mathbb{Z} ist, und bilden die Folge von Kettenabbildungen $S(\Delta_p) \rightarrow S(\text{top}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}[0]$. Man erkennt, daß alle diese Abbildungen Homotopieäquivalenzen sind, zum Beispiel mit 1.4.9 für die erste Abbildung und expliziter Rechnung für die Zweite, oder alternativ mit 6.2.4. Es folgt eine Homotopieäquivalenz $S\Delta_p \otimes_{\mathbb{Z}} S\Delta_q \rightarrow \mathbb{Z}[0] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[0]$ und so die Azyklizität dieses Komplexes. Nach dem Satz über azyklische Modelle 5.6.23 liefert das Bilden der nullten Homologie also eine Bijektion

$$\text{Hot}(\text{Ab}^{\text{Top} \times \text{Top}})(S \otimes S, S(\times)) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}^{\text{Top} \times \text{Top}}(\mathcal{H}_0(S \otimes S), \mathcal{H}_0S(\times))$$

und ebenso eine Bijektion auf Morphismen in der Gegenrichtung und ebenso Bijektionen in den Fällen, in denen in den Klammern zweimal derselbe Funktor steht. So erhalten wir insgesamt einen Isomorphismus zwischen der vollen Unterkategorie mit zwei Objekten $\{S \otimes S, S(\times)\} \subset \text{Hot}(\text{Ab}^{\text{Top} \times \text{Top}})$ und der vollen Unterkategorie mit zwei Objekten $\{\mathcal{H}_0(S \otimes S), \mathcal{H}_0S(\times)\} \subset \text{Ab}^{\text{Top} \times \text{Top}}$. Nun gilt es nur noch zu zeigen, daß die offensichtlichen Isomorphismen $S_0(X \times Y) \xrightarrow{\sim} S_0X \otimes S_0Y$ Isomorphismen $H_0(X \times Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0(SX \otimes SY)$ auf der nullten Homologie induzieren. Es scheint mir jedoch offensichtlich, daß unsere Isomorphismen

der Grad-Null-Anteile unserer Komplexe Ränder zu Rändern machen und daß die davon auf der nullten Homologie induzierte Abbildung unter der Verknüpfung mit dem Inversen des von der Variation [KAG] 2.6.17 zur Rechtsexaktheit des Tensorprodukts herrührenden Isomorphismus $H_0 X \otimes H_0 Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0(SX \otimes SY)$ genau unseren Isomorphismus 5.6.2 liefert. Der Satz folgt. \square

5.7 Tensorprodukt und Homologie

5.7.1 (**Homologie von Tensorproduktkomplexen**). Sind C, D Komplexe von Rechts- beziehungsweise Linksmoduln über einem Ring R , so haben wir offensichtliche Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_p C \otimes_R \mathcal{H}_q D & \rightarrow & \mathcal{H}_{p+q}(C \otimes_R D) \\ [c] \otimes [d] & \mapsto & [c \otimes d] \end{array}$$

Verschwinden unsere beiden Komplexe in allen Graden, die man von Null aus in Richtung der Pfeile erreicht, so liefert die natürliche Abbildung sogar einen Isomorphismus $\mathcal{H}_0 C \otimes_R \mathcal{H}_0 D \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0(C \otimes_R D)$ als Konsequenz aus der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts [KAG] 2.6.17.

Definition 5.7.2. Gegeben topologische Räume X, Y notieren wir die von der Eilenberg-Zilber-Äquivalenz $SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY \xrightarrow{\simeq} S(X \times Y)$ nach 5.7.1 induzierten Abbildungen mit dem Symbol \times als

$$\begin{array}{ccc} H_p X \times H_q Y & \rightarrow & H_{p+q}(X \times Y) \\ (c, d) & \mapsto & c \times d \end{array}$$

und nennen sie das **Kreuzprodukt der Homologie**.

5.7.3. Ist R ein Ring, so liefert die Vorschrift $(c \otimes d) \otimes r \mapsto c \otimes rd$ Isomorphismen von R -Bimoduln $(SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY) \otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{\sim} S(X; R) \otimes_R S(Y; R)$. In der Tat kann man zum Beispiel argumentieren, daß die so definierte Abbildung eine Basis für die Linksoperation von R in eine ebensolche überführt. Damit liefert die Eilenberg-Zilber-Abbildung wohlbestimmte Homotopieäquivalenzen $S(X; R) \otimes_R S(Y; R) \xrightarrow{\simeq} S(X \times Y; R)$. Die nach 5.7.1 auf der Homologie induzierten Abbildungen schreibt man in der Form

$$\begin{array}{ccc} H_p(X; R) \times H_q(Y; R) & \rightarrow & H_{p+q}(X \times Y; R) \\ (c, d) & \mapsto & c \times d \end{array}$$

und nennt sie das **Kreuzprodukt der Homologie mit Koeffizienten**.

Proposition 5.7.4 (Formelsammlung für das Kreuzprodukt). *Das Kreuzprodukt der Homologie hat die folgenden Eigenschaften:*

Natürlichkeit: Gegeben stetige Abbildungen $f : X \rightarrow K$ und $g : Y \rightarrow L$ haben wir für beliebige $a \in H_p X$ und $b \in H_q Y$ in $H_{p+q}(K \times L)$ die Gleichheit

$$(f_* a) \times (g_* b) = (f \times g)_*(a \times b)$$

Eins: Gegeben ein topologischer Raum X und $a \in H_p X$ eine Homologieklassse und $\delta \in H_0(\text{top})$ der kanonische Erzeuger der Homologie eines Punktes gilt

$$(\text{pr}_X)_*(a \times \delta) = a$$

Assoziativität: Gegeben X, Y, Z topologische Räume und a, b, c jeweils Homologieklassen und $\text{ass} : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ die offensichtliche Bijektion gilt

$$\text{ass}_*((a \times b) \times c) = a \times (b \times c)$$

Graduierte Kommutativität: Gegeben $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ die Vertauschungsabbildung für topologische Räume X, Y und Homologieklassen $a \in H_p X$ sowie $b \in H_q Y$ gilt in $H_{p+q}(Y \times X)$ bei kommutativem Koeffizientenring R die Identität

$$\tau_*(a \times b) = (-1)^{pq} b \times a$$

Vorschau 5.7.5. Wir erklären in [TSK] 4.1.9, inwiefern diese Eigenschaften zusammen mit den Funktorialitäten $(\text{id}_X)_*(a) = a$ und $f_*(g_*(a)) = (f \circ g)_*(a)$ bedeuten, daß unsere Homologie als ein „Schmelzfunktor von der kartesischen Schmelzkategorie der topologischen Räume in die Schmelzkategorie der graduierten Paritätsgruppen“ aufgefaßt werden kann. Der kanonische Erzeuger $\delta \in H_0(\text{top})$ ist in diesem Kontext als das „Kreuzprodukt mit überhaupt keinem Faktor in der Homologie des kartesischen Produkts über die leere Familie topologischer Räume“ zu verstehen.

Beweis. Die Natürlichkeit folgt sofort aus der Natürlichkeit der Eilenberg-Zilber-Äquivalenz 5.6.5. Die graduierte Kommutativität folgt daraus, daß mit der Notation η für unsere Eilenberg-Zilber-Äquivalenz die Komposition

$$S \otimes S \xrightarrow{v} S \otimes S \xrightarrow{\eta} S(\times) \xrightarrow{\tau_*} S(\times)$$

von Morphismen in der Homotopiekategorie $\text{Hot}(\text{Ab}^{\text{Top} \times \text{Top}})$ mit v der Vertauschung der Tensorfaktoren nach 5.3.2 auch die charakterisierenden Eigenschaften der Eilenberg-Zilber-Äquivalenz aus 5.6.5 hat. Für die Eins-Eigenschaft betrachten wir die Komposition

$$S \xrightarrow{\otimes 1} S \otimes S(\text{top}) \xrightarrow{\eta} S(\times \text{top}) \xrightarrow{\text{pr}_*} S$$

von Morphismen in der Homotopiekategorie $\text{Hot}(\text{Ab}^{\text{Top}})$ und folgern direkt aus dem Satz über azyklische Modelle 5.6.23, daß sie die Identität sein muß. Für die Assoziativität schließlich betrachten wir in $\text{Hot}(\text{Ab}^{\text{Top}^3})$ mit variablen topologischen Räumen X, Y, Z das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} (SX \otimes SY) \otimes SZ & \longrightarrow & S(X \times Y) \otimes SZ & \longrightarrow & S((X \times Y) \times Z) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ SX \otimes (SY \otimes SZ) & \longrightarrow & SX \otimes S(Y \times Z) & \longrightarrow & S(X \times (Y \times Z)) \end{array}$$

mit hoffentlich offensichtlichen Morphismen. Es gilt zu zeigen, daß es kommutiert. Wieder wenden wir den Satz über azyklische Modelle 5.6.23 an. Der Ausgangsfunktor ist frei mit Modellen $(\Delta_p, \Delta_q, \Delta_r)$ und der Zielfunktor ist auf diesen Modellen azyklisch. Folglich reicht es zu zeigen, daß beide Kompositionen dieselbe Abbildung auf der nullten Homologie induzieren. Das ist jedoch klar. \square

Lemma 5.7.6. *Sind C, D Komplexe von Vektorräumen über einem Körper k , so liefern die natürlichen Abbildungen Isomorphismen*

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}_p(C) \otimes_k \mathcal{H}_q(D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_n(C \otimes_k D)$$

Beweis. Nach 1.4.14 gibt es in der Homotopiekategorie der Komplexe von k -Vektorräumen eindeutig bestimmte Isomorphismen $\mathcal{H}C \xrightarrow{\sim} C$ und $\mathcal{H}D \xrightarrow{\sim} D$, die auf der Homologie die offensichtlichen Identifikationen induzieren. Mit 5.3.5 folgt eine Homotopieäquivalenz $\mathcal{H}C \otimes \mathcal{H}D \xrightarrow{\sim} C \otimes D$, die dann den gewünschten Isomorphismus $\mathcal{H}C \otimes \mathcal{H}D \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(C \otimes D)$ induziert. \square

Satz 5.7.7 (Künneth-Formel mit Koeffizienten in einem Körper). *Für zwei beliebige topologische Räume X, Y und Homologie mit Koeffizienten in einem Körper k liefert das Kreuzprodukt der Homologie Isomorphismen*

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(X; k) \otimes_k H_q(Y; k) \xrightarrow{\sim} H_n(X \times Y; k)$$

Beweis. Für diesen Beweis vereinbaren wir die Abkürzungen $HX := H(X; k)$ und $SX := S(X; k)$ sowie $\otimes := \otimes_k$. Unser Lemma 5.7.6 und die Homotopieäquivalenz $SX \otimes SY \xrightarrow{\sim} S(X \times Y)$ liefern dann auf der Homologie Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} HX \otimes HY & & H(X \times Y) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{H}(SX) \otimes \mathcal{H}(SY) & \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(SX \otimes SY) \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}S(X \times Y) \end{array} \quad \square$$

Satz 5.7.8 (Künneth-Formel). Gegeben topologische Räume X und Y liefert das Kreuzprodukt der Homologie die erste Abbildung einer natürlichen kurzen exakten Sequenz

$$\bigoplus_{p+q=n} (\mathbb{H}_p X \otimes \mathbb{H}_q Y) \hookrightarrow \mathbb{H}_n(X \times Y) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} (\mathbb{H}_p X * \mathbb{H}_q Y)$$

Diese Sequenz, deren zweite Abbildung im Beweis explizit angegeben werden wird, spaltet für alle X und Y , aber es gibt keine natürliche Wahl einer Spaltung für alle X und Y .

Ergänzung 5.7.9. Die von der Vertauschung $X \times Y \rightarrow Y \times X$ auf der Homologie induzierte Abbildung läßt sich zu einem Morphismus der entsprechenden Künneth-Sequenzen ergänzen. Wie die zugehörige Abbildung auf dem Tensorprodukt der Homologien aussieht, erklärt die „graduierte Kommutativität des Kreuzprodukts“ nach [TSK] 4.1.13. Wie die zugehörige Abbildung auf dem Torsionsprodukt der Homologien aussieht, habe ich mir nicht so genau überlegt.

5.7.10. Arbeitet man mit Koeffizienten in einem Hauptidealring, so gilt dieselbe Formel mit demselben Beweis.

5.7.11 (**Konventionen zum Verschieben von Komplexen**). Ist C ein Komplex, so bezeichnen wir mit

$$C[1]$$

den „um Eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex“, in Formeln $(C[1])_q = C_{q-1}$ beziehungsweise später einmal bei „Kokettenkomplexen“ $(C[1])^q = C^{q+1}$. Jedes Element $c \in C$ liefert ein Element $c[1] \in C[1]$. Entgegen leider üblichen Konventionen führe ich hier beim Randoperator *kein* Vorzeichen ein. Bezeichnet also $\mathbb{Z}[1]$ den um Eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex $\mathbb{Z}[0]$ und ist C ein Komplex von abelschen Gruppen, so definiert die Abbildung $c \otimes n[1] \mapsto nc[1]$ einen Isomorphismus von Komplexen $C \otimes \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{\sim} C[1]$. Dahingegen bezeichne

$$[1]C$$

den um Eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex, bei dem zusätzlich der Randoperator ∂ durch $-\partial$ ersetzt wird. Jedes Element $c \in C$ liefert auch ein Element $[1]c \in [1]C$, und in diesen Notationen haben wir dann $\partial([1]c) = -[1](\partial c)$. Diesmal liefert $n[1] \otimes c \mapsto [1]nc$ einen Isomorphismus von Komplexen $\mathbb{Z}[1] \otimes C \xrightarrow{\sim} [1]C$. Die offensichtliche Abbildung induziert dann einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$(C \otimes D)[1] \xrightarrow{\sim} C \otimes (D[1])$$

und die Abbildung $[1]c \mapsto (-1)^{|c|}c[1]$ mit $|c| = q$ für $c \in C_q$ ist ein Isomorphismus $[1]C \xrightarrow{\sim} C[1]$.

Beweis. Sicher haben wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$ZX \hookrightarrow SX \rightarrow BX[1]$$

Vorne und hinten stehen hier Komplexe mit Differential Null. Tensorieren wir über \mathbb{Z} mit dem aus freien abelschen Gruppen bestehenden Komplex SY , so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$ZX \otimes SY \hookrightarrow SX \otimes SY \rightarrow BX[1] \otimes SY$$

Da ZX und BX nach 5.5.11 auch aus freien abelschen Gruppen bestehen und Differential Null haben, hat die zugehörige lange exakte Homologiesequenz die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \rightarrow & (BX[1] \otimes HY)_{n+1} & \rightarrow \\ \rightarrow & (ZX \otimes HY)_n & \rightarrow & \mathcal{H}_n(SX \otimes SY) & \rightarrow & (BX[1] \otimes HY)_n & \rightarrow \\ \rightarrow & (ZX \otimes HY)_{n-1} & \rightarrow & & & & \end{array}$$

Man überzeugt sich mühelos, daß die Randabbildungen hier schlicht von den Einbettungen der Ränder in die Zyklen induziert werden, so daß sich aufgrund der kurzen exakten Sequenz $BX \hookrightarrow ZX \rightarrow HX$ und der exakten Tor-Sequenz eine natürliche kurze exakte Sequenz der Gestalt

$$(HX \otimes HY)_n \hookrightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow (HX * HY)_{n-1}$$

ergibt. Um eine Spaltung dieser Sequenz anzugeben, wählen wir Linksinverse der Einbettungen $ZX \hookrightarrow SX, ZY \hookrightarrow SY$. Solche Linksinversen existieren, da ja die jeweiligen Kokerne BX, BY nach 5.5.11 frei sind als Untergruppen der freien abelschen Gruppen SX, SY . \square

Übungen

Übung 5.7.12. Man zeige: Jede Eilenberg-Zilber-Transformation läßt sich auf genau eine Weise zu einer Transformation

$$S(X, A) \otimes S(Y, B) \rightarrow S(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$$

zwischen Funktoren auf Paaren von Raumpaaren fortsetzen, die wohlbestimmt ist als Transformation zwischen Funktoren in die Homotopiekategorie der Kettenkomplexe. Wir erhalten so das **Kreuzprodukt der relativen Homologie**

$$H_q(X, A) \otimes H_p(Y, B) \rightarrow H_{q+p}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$$

Man beachte die Identität $((X \times B) \cup (A \times Y))^c = A^c \times B^c$ von Komplementmengen. Mit der Notation $H_q^D(X) := H_q(X, X \setminus D)$ wird unser relatives Kreuzprodukt also zu einer Abbildung

$$H_q^D(X) \otimes H_p^E(Y) \rightarrow H_{q+p}^{D \times E}(X \times Y)$$

Der Vorschub gelingt dann für stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ mit $f(X \setminus D) \subset (Y \setminus E)$ alias $D \supset f^{-1}(E)$.

Übung 5.7.13 (Formelsammlung für das relative Kreuzprodukt). Das Kreuzprodukt der relativen Homologie hat die folgenden Eigenschaften:

Natürlichkeit: Gegeben Morphismen von Raumpaaren $f : (X, A) \rightarrow (K, I)$ und $g : (Y, B) \rightarrow (L, J)$ gilt für $a \in H_p(X, A)$ und $b \in H_q(Y, B)$ die Gleichheit

$$(f_*a) \times (g_*b) = (f \times g)_*(a \times b)$$

Eins: Gegeben ein Raumpaar (X, A) und $a \in H_p(X, A)$ eine Homologieklassse und $\delta \in H_0(\text{top}, \emptyset)$ der kanonische Erzeuger der Homologie eines Punktes gilt

$$(\text{pr}_X)_*(a \times \delta) = a$$

Assoziativität: Gegeben $(X, A), (Y, B), (Z, C)$ Raumpaare und a, b, c jeweils relative Homologieklassen und $\text{ass} : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ die offensichtliche Bijektion gilt

$$\text{ass}_*((a \times b) \times c) = a \times (b \times c)$$

Graduierte Kommutativität: Gegeben $\tau : (X, A) \times (Y, B) \xrightarrow{\sim} (Y, B) \times (X, A)$ die Vertauschungsabbildung für Raumpaare $(X, A), (Y, B)$ und Homologieklassen $a \in H_p(X, A)$ sowie $b \in H_q(Y, B)$ gilt bei kommutativem Koeffizientenring R die Identität

$$\tau_*(a \times b) = (-1)^{pq} b \times a$$

Übung 5.7.14 (Relatives Kreuzprodukt als Isomorphismus). Gegeben $(X, A), (Y, B)$ Raumpaare mit $A \Subset X$ und $B \Subset Y$ oder A beliebig und $B = \emptyset$ liefert unsere relative Eilenberg-Zilber-Transformation aus 5.7.12 Isomorphismen auf der Homologie. Hinweis: Nach dem Satz über feine Ketten 2.4.6 liefert unter diesen Annahmen

$$S((X \times B) + S(A \times Y)) \rightarrow S((X \times B) \cup (A \times Y))$$

Isomorphismen auf der Homologie. In diesen Fällen ist bei Koeffizienten in einem Körper k das Kreuzprodukt auf der relativen Homologie also ein Isomorphismus

$$H_q(X, A; k) \otimes_k H_p(Y, B; k) \rightarrow H_{q+p}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y); k)$$

Übung 5.7.15 (Nichtexistenz einer Wurzel aus dem \mathbb{R}^3). Für ungerades n kann es keinen topologischen Raum X geben derart, daß $X \times X$ homöomorph ist zu \mathbb{R}^n . Hinweis: Kreuzprodukt als Isomorphismus 5.7.14.

Übung 5.7.16 (Kreuzprodukt von Fundamentalzykeln). Gegeben zwei kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten ist das Kreuzprodukt ihrer Fundamentalzykel der Fundamentalzykel ihres Produkts unter einer wohlbestimmten Orientierung, der **Produktorientierung**.

Ergänzende Übung 5.7.17. Gegeben ein Ring A und ein A -Modul M bezeichne M^* den A -Rechtsmodul $\text{Hom}_A(M, A)$. Gegeben ein Ring A und ein A -Rechtsmodul N bezeichne weiter *N den A -Modul $\text{Hom}_{-A}(N, A)$. Man zeige, daß das Auswerten Homomorphismen $M \rightarrow {}^*(M^*)$ und $N \rightarrow ({}^*N)^*$ induziert. Man zeige, daß diese Homomorphismen für endlich erzeugte projektive Moduln Isomorphismen sind. Bezeichnet $A\text{-pModf}$ die Kategorie der endlich erzeugten projektiven A -Moduln und $\text{pModf-}A$ die Kategorie der endlich erzeugten projektiven A -Rechtsmoduln, so liefert unser Dualisieren mithin eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{pModf-}A \xrightarrow{\sim} A\text{-pModf}^{\text{opp}}$$

Übung 5.7.18. Man berechne die Homologie von $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

Übung 5.7.19 (Verschieben und Hom-Komplexe). Gegeben Komplexe X, Y liefern die offensichtlichen, ohne alle Vorzeichen erklärten Identifikationen Isomorphismen von Komplexen

$$\begin{aligned} \text{Hom}(X, Z) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X[1], Z[1]) \\ \text{Hom}([1]X, Z) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X, Z)[-1] \\ \text{Hom}(X, [1]Z) &\xrightarrow{\sim} [1]\text{Hom}(X, Z) \end{aligned}$$

Später werden sich diese Isomorphismen als Spezialfälle von Aussagen über das Tensorieren mit Einheiten [TSK] 3.4.20 und [TSK] 3.4.16 erweisen, angewandt auf die Einheit $\mathbb{Z}[1]$ der Schmelzkategorie Ket .

Übung 5.7.20. Seien R ein Ring und C ein exakter Komplex von R -Moduln und P ein Komplex von projektiven R -Moduln, der in Richtung der Differentiale beschränkt ist, als da heißt, irgendwann kommen nur noch Nullen. Man zeige, daß dann der Hom-Komplex $\text{Hom}_R(P, C)$ auch exakt ist. Hinweis: Hauptlemma der homologischen Algebra 5.6.14 und Interpretation der Homologie des Hom-Komplexes als Homotopieklassen 1.4.12.

5.8 Eilenberg-Zilber und Alexander-Whitney*

5.8.1. Um zusätzliche Anschauung bereitzustellen, gebe ich eine mögliche Eilenberg-Zilber-Transformation auch noch explizit an. Wir werden diese explizite

Form nicht benötigen, deshalb führe ich den Beweis nicht aus. Wir betrachten für $n = p + q$ alle affinen injektiven Abbildungen

$$\omega : \Delta_n \rightarrow \Delta_p \times \Delta_q$$

mit der Eigenschaft, daß sie Ecken auf Paare von Ecken werfen und „in jeder Komponente monoton wachsen auf den Ecken“. So eine Abbildung entspricht eindeutig einer Injektion

$$\omega = (\alpha, \beta) : \{0, \dots, n\} \hookrightarrow \{0, \dots, p\} \times \{0, \dots, q\}$$

mit monoton wachsenden α und β . Man erkennt, daß für solch ein ω notwendig gilt $\omega(0) = (0, 0)$, $\omega(n) = (p, q)$ und daß beim Übergang von i zu $i + 1$ entweder α oder β aber nicht beide um 1 wachsen. Man kann sich so ein ω vorstellen als einen Weg von $(0, 0)$ nach (p, q) , der in jedem von n Zeitschritten entweder eins nach oben oder eins nach rechts gehen darf. Die Fläche unterhalb dieses Weges im Quadrat $[0, p] \times [0, q]$ notieren wir $n(\omega)$, in Formeln

$$n(\omega) = \sum_{0 \leq i < j < p+q} (\beta(i+1) - \beta(i))(\alpha(j+1) - \alpha(j))$$

Unsere Abbildungen $\omega : \Delta_n \rightarrow \Delta_p \times \Delta_q$ sind die n -Simplizes einer Triangulierung von $\Delta_p \times \Delta_q$, aber diese Erkenntnis ist nur für die Anschauung von Belang. Jetzt definieren wir Homomorphismen

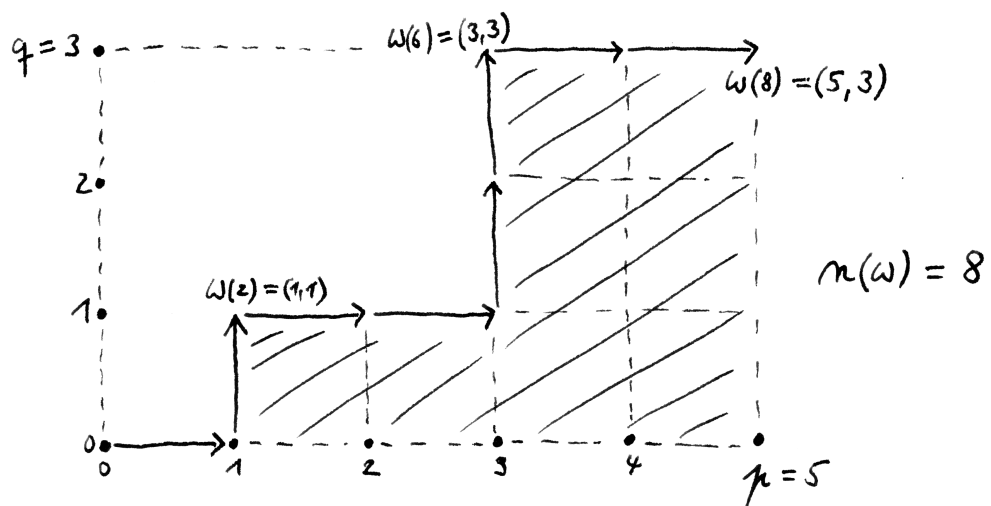
$$\begin{aligned} S_p X \otimes_{\mathbb{Z}} S_q Y &\rightarrow S_{p+q}(X \times Y) \\ \sigma \otimes \tau &\mapsto \sum_{\omega} (-1)^{n(\omega)} (\sigma \times \tau) \circ \omega \end{aligned}$$

und erhalten so eine Transformation von Funktoren von der Kategorie aller Paare topologischer Räume in die Kategorie der Gruppen.

Ergänzung 5.8.2. Im übrigen entsprechen unsere Wege eineindeutig den sogenannten (p, q) -Shuffles aus dem Beweis von [AN2] 9.1.9. Des weiteren entsprechen diese Wege auch eineindeutig den Worten, die man durch das Hintereinanderschreiben von p Einsen und q Nullen bilden kann und die wir etwa in [GR] 1.5.23 betrachtet hatten.

Lemma 5.8.3. *Die in 5.8.1 angegebenen Homomorphismen bilden eine Eilenberg-Zilber-Transformation $S \otimes_{\mathbb{Z}} S \rightarrow S(\times)$ in $\text{Ket}(\text{Ab}^{\text{Top} \times \text{Top}})$.*

Beweis. Unsere Homomorphismen sind offensichtlich funktoriell und tun in der nullten Homologie das Richtige. Nach dem Satz über azyklische Modelle 5.6.23 und dem Beweis des Satzes von Eilenberg-Zilber müssen also nur prüfen, daß sie für alle X, Y eine Kettenabbildung bilden. Das überlassen wir dem Leser. \square



Graphische Darstellung einer unserer in beiden Komponenten monotonen Injektionen ω im Fall $p = 5, q = 3$.

Definition 5.8.4. Die Abbildungen

$$\lambda_p^{p+q} = \lambda_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_{p+q} \quad \text{und} \quad \rho_q^{p+q} = \rho_q : \Delta_q \rightarrow \Delta_{p+q},$$

die hinten q Nullen anhängen beziehungsweise vorne p Nullen davorschieben, heißen die p -**Vorderseite** beziehungsweise die q -**Hinterseite** unseres Standard-simplex. Hier steht λ für „links“ und ρ für „rechts“.

Lemma 5.8.5. *Gegeben topologische Räume X, Y schreiben wir einen beliebigen n -Simplex $\Delta_n \rightarrow X \times Y$ in der Form (σ, τ) mit $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$, $\tau : \Delta_n \rightarrow Y$. In dieser Notation bilden die Abbildungen*

$$\begin{aligned} A_n : S_n(X \times Y) &\rightarrow (SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY)_n \\ (\sigma, \tau) &\mapsto \sum_{p+q=n} \sigma \lambda_p \otimes \tau \rho_q \end{aligned}$$

eine Kettenabbildung $A : S(X \times Y) \rightarrow SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY$, die **Alexander-Whitney-Abbildung**, und diese Abbildungen bilden in ihrer Gesamtheit eine *Alexander-Whitney-Transformation*.

Beweis. Die im Lemma definierte Abbildung ist offensichtlich funktoriell und tut das Richtige in der nullten Homologie. Nach dem Satz über azyklische Modelle 5.6.23 und dem Beweis des Satzes von Eilenberg-Zilber müssen wir also nur prüfen, daß sie für alle X, Y eine Kettenabbildung ist. Dazu rechnen wir mit der Vereinbarung, die a priori undefinierten Ausdrücke $\sigma \lambda_0 k_0$ und $\tau \rho_0 k_0$ als Null zu verstehen, zunächst

$$\partial A(\sigma, \tau) = \sum_{p+q=n} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \lambda_p k_i \otimes \tau \rho_q + (-1)^p \sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma \lambda_p \otimes \tau \rho_q k_j \right)$$

Ebenso finden wir auch

$$A \partial(\sigma, \tau) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \sum_{a+b=n-1} \sigma k_\nu \lambda_a \otimes \tau k_\nu \rho_b$$

Für die entsprechenden Abbildungen mit Werten in Δ_n für $n = a + b + 1$ gilt nun

$$\begin{aligned} k_\nu \lambda_a &= \begin{cases} \lambda_{a+1} k_\nu & \text{falls } 0 \leq \nu \leq a+1; \\ \lambda_a & \text{falls } a+1 \leq \nu \leq n; \end{cases} \\ k_\nu \rho_b &= \begin{cases} \rho_b & \text{falls } 0 \leq \nu \leq a; \\ \rho_{b+1} k_{\nu-a} & \text{falls } a \leq \nu \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit können wir $A \partial(\sigma, \tau)$ umschreiben zu

$$\sum_{a+b+1=n} \left((-1)^\nu \sum_{\nu=0}^a \sigma \lambda_{a+1} k_\nu \otimes \tau \rho_b + (-1)^{a+1+\mu} \sum_{\mu=0}^b \sigma \lambda_a \otimes \tau \rho_{b+1} k_{\mu+1} \right)$$

und wenn wir in der ersten Summe $p = a + 1$, $q = b$, $i = \nu$ substituieren und in der Zweiten $p = a$, $q = b + 1$, $j = \mu + 1$ ergibt sich

$$A\partial(\sigma, \tau) = \sum_{p+q=n} \left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \sigma \lambda_p k_i \otimes \tau \rho_q + (-1)^p \sum_{j=1}^q (-1)^j \sigma \lambda_p \otimes \tau \rho_q k_j \right)$$

wobei wir die erste Summe im Fall $p = 0$ und die zweite im Fall $q = 0$ als Null zu verstehen haben. Es folgt $\partial A(\sigma, \tau) = A\partial(\sigma, \tau)$. \square

Übungen

Übung 5.8.6. Bezeichne $A^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die vom Standardsimplex erzeugte affine Hyperebene aller Punkte mit Koordinatensumme Eins. Wir versehen sie mit der durch das angeordnete minimale affine Erzeugendensystem e_0, \dots, e_n gegebenen algebraischen Orientierung [LA1] 6.5.21. Man zeige, daß für $\omega : \Delta_n \rightarrow \Delta_p \times \Delta_q$ wie in 5.8.1 das Vorzeichen $(-1)^{n(\omega)}$ die Verträglichkeit des induzierten Isomorphismus $\omega : A^n \xrightarrow{\sim} A^p \times A^q$ von affinen Räumen mit der eben gegebenen Orientierung auf A^n und dem Produkt nach [LA1] 6.5.17 der eben gegebenen Orientierungen auf A^p und A^q beschreibt.

Übung 5.8.7 (Kompatibilität der Standarderzeuger mit dem Kreuzprodukt). Für die Standarderzeuger $\eta_n \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ aus 2.3.10 zeige man $\eta_n = \tau^{\times n}$ für $\tau = \eta_1$ wie dort. Hinweis: Man berechne das relative Kreuzprodukt $\tau \times \eta_n$ aus 5.7.12 mithilfe der Alexander-Whitney-Transformation 5.8.1. Es ist eine Summe mit Vorzeichen versehener affiner Simplizes und jeder Summand gehört zu derselben topologischen Orientierung der Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^{n+1} . Hier mag 4.1.7 helfen. Diese wenig erfreuliche Übung dient dem Prüfen der Rückwärtskompatibilitäten.

6 Kohomologie

6.1 Singuläre Kohomologie

6.1.1 (**Obere und untere Indizes**). Komplexe abelscher Gruppen haben wir bislang stets (A_q, ∂_q) notiert mit $\partial_q : A_q \rightarrow A_{q-1}$. Im folgenden ist es aber oft auch praktisch, sie (A^q, d^q) zu notieren mit $A^q := A_{-q}$ und $d^q := \partial_{-q} : A^q \rightarrow A^{q+1}$. Es ist allgemeine Konvention, daß bei oberer Stellung des Index das Differential in Richtung wachsender Indizes geht und bei unterer Stellung des Index in Richtung fallender Indizes. Im Kontext von Differentialen in Richtung wachsender Indizes bezeichnet man die Ränder, Zykel und Homologiegruppen meist als **Koränder** $\mathcal{B}^q C$, **Kozykel** $\mathcal{Z}^q C$ und **Kohomologiegruppen** $\mathcal{H}^q C$, aber das werden wir im allgemeinen nicht so genau nehmen. Im Kontext der Kohomologiegruppen topologischer Räume, die wir gleich einführen werden, trägt die Stellung des Index jedoch darüber hinaus jedoch noch die zusätzliche Information, daß eben Kohomologie und nicht Homologie gemeint ist, und da müssen wir diese Unterscheidung sehr genau nehmen.

6.1.2. Wir erinnern daran, wie wir in 1.4.12 für je zwei Komplexe $C, D \in \text{Ket}$ den Hom-Komplex $C \rightrightarrows D$ eingeführt hatten. Gegeben ein topologischer Raum X und eine abelsche Gruppe M erklären wir die **Kohomologiegruppen von X mit Koeffizienten in M** als die Gruppen

$$H^q(X; M) = H_{\text{sing}}^q(X; M) := \mathcal{H}^q(SX \rightrightarrows M[0])$$

Sie sind Funktoren $\text{Top}^{\text{opp}} \times \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$. Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ induziert insbesondere Homomorphismen $f^* : H^q(Y; M) \rightarrow H^q(X; M)$. Sie heißen die **Rückzüge der Kohomologie**. Im Spezialfall $M = \mathbb{Z}$ kürzen wir unsere Kohomologiegruppen ab zu

$$H^q X := H^q(X; \mathbb{Z})$$

6.1.3 (**Homotopieinvarianz der Kohomologie**). Homotope Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ induzieren nach 1.4.9 kettenhomotope Kettenabbildungen alias dieselben Morphismen $SX \rightarrow SY$ in Hot und damit auch dieselben Abbildungen $f^* = g^* : H^q Y \rightarrow H^q X$. Insbesondere induziert jede Homotopieäquivalenz Isomorphismen auf der Kohomologie.

Beispiel 6.1.4 (Kohomologie eines Punktes). Für den einpunktigen Raum zeigt unsere Diskussion 1.2.13 des Komplexes $S(\text{top})$ unmittelbar, daß die Kettenabbildung $\mathbb{Z}[0] \rightarrow S(\text{top})$, die $1 \in \mathbb{Z}$ auf den einzigen singulären Nullsimplex abbildet, eine Homotopieäquivalenz ist. Wenden wir darauf $\rightrightarrows M[0]$ an, entsteht wieder eine Homotopieäquivalenz. Diese liefert dann einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$H^0(\text{top}; M) \xrightarrow{\sim} M$$

durch Nachschalten des ausgezeichneten Isomorphismus $\mathcal{H}^0(\mathbb{Z}[0] \rightrightarrows M[0]) \xrightarrow{\sim} M$, der seinerseits gegeben wird durch das Auswerten auf $1 \in \mathbb{Z}$. Das Urbild von $1 \in \mathbb{Z}$ heißt der **kanonische Erzeuger von** $H^0(\text{top})$. Wir notieren ihn $1 = 1_{\text{top}} \in H^0(\text{top})$.

6.1.5. Das Auswerten $(SX \rightrightarrows M[0]) \curlywedge SX \rightarrow M[0]$ aus 5.3.16 induziert auf der Homologie nach 5.3.17 bilineare Abbildungen, die **Kronecker-Paarungen**

$$H^q(X; M) \times H_q X \rightarrow M$$

Wir notieren sie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und finden etwa $\langle 1_{\text{top}}, \delta \rangle = 1$ für $\delta \in H_0(\text{top})$ unseren kanonischen Erzeuger der Homologie des einpunktigen Raums. Man prüft leicht, daß unsere Kroneckerpaarungen Isomorphismen

$$H^0(X; M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_0 X, M)$$

induzieren. Das „universelle Koeffiziententheorem der Kohomologie“ 6.7.2 wird zeigen, daß sie auch Isomorphismen $H^1(X; M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1 X, M)$ induzieren, daß aber für $H^q(X; M)$ mit $q \geq 2$ die analogen Aussagen im allgemeinen nicht mehr gelten und für $M = \mathbb{Q}$ dann doch wieder.

6.1.6 (**Kohomologie mit Körperkoeffizienten**). Arbeiten wir mit Koeffizienten in einem Körper k , so liefert 1.4.14 eindeutig bestimmte Homotopieäquivalenzen $\mathcal{H}(S(X; k)) \xrightarrow{\sim} S(X; k)$ und damit liefern die entsprechend zur Homologie mit Koeffizienten verallgemeinerten Kroneckerpaarungen Isomorphismen

$$H^q(X; k) \xrightarrow{\sim} H_q(X; k)^*$$

Im Fall von Körperkoeffizienten ist also salopp gesprochen die Kohomologie schlicht der Dualraum der Homologie.

6.1.7. Ich buchstabiere die im obigen Formalismus zusammengefaßten Definitionen im folgenden auch noch explizit aus. Wir vereinbaren dazu die Notation $S^*(X; M) := (SX \rightrightarrows M[0])$ und haben also per definitionem $H^q(X; M) = \mathcal{H}^q S^*(X; M)$. Der Komplex $S^*(X; M)$ besteht per definitionem aus den Gruppen

$$S^q(X; M) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_q X, M) \xleftarrow{\sim} \text{Ens}(\text{Top}(\Delta_q, X), M)$$

Deren Elemente heißen **singuläre Koketten von X mit Koeffizienten in M** . Der Randoperator wird per definitionem gegeben durch $\partial(f) = -(-1)^{|f|} f \circ \partial$. Eine Kokette $c \in S^q(X; M)$ nennen wir eine **Kokette vom Grad q** und schreiben $|c| = q$. Den Wert einer Kokette $c \in S^q(X; M)$ auf einer Kette $z \in S_q X$ notieren wir $\langle c, z \rangle \in M$. Sprechen wir ohne nähere Spezifikation von singulären Koketten, so meinen wir Koeffizienten in \mathbb{Z} . Den Randoperator des Komplexes $\text{Hom}(SX, M) = (SX \rightrightarrows M[0])$ nennen wir den **Korandoperator**.

6.1.8 (Verträglichkeit der Kohomologie mit Koprodukten). Ist $X = \bigsqcup X_w$ eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte Teilmengen, die nicht durch Wege verbunden werden können, und bezeichnet $i_w : X_w \hookrightarrow X$ die jeweilige Einbettung, so liefern nach 1.3.7 die $S i_w : S X_w \rightarrow S X$ einen Isomorphismus $\bigoplus S X_w \xrightarrow{\sim} S X$ und dual liefern auch die $S^* i_w : S^* X \rightarrow S^* X_w$ einen Isomorphismus $S^* X \rightarrow \prod_w S^* X_w$ für das gradweise Produkt von Komplexen und schließlich die Rückzüge der Kohomologie Isomorphismen

$$H^q(X) \xrightarrow{\sim} \prod_w H^q(X_w)$$

In der in [LA2] 7.7.20 eingeführten Terminologie sind insbesondere die Funktoren $H^q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$ verträglich mit beliebigen Koprodukten. Dasselbe gilt für Kohomologie mit Koeffizienten mit demselben Beweis. Für die nullte Kohomologie erhalten wir so eine Bijektion

$$H^0(X; M) \xrightarrow{\sim} \{f : X \rightarrow M \mid f \text{ ist konstant auf allen Wegen in } X\}$$

6.1.9 (Anschauung für die erste Kohomologie). Die erste Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe M kann man sich im Fall eines „lokal zusammenziehbaren“ Raums als die Menge aller Isomorphieklassen von „ M -Hauptfaserbündeln“ veranschaulichen, wobei M mit der diskreten Topologie zu verstehen ist, so daß unsere Hauptfaserbündel topologisch betrachtet Überlagerungen sind. Der Wert einer Isomorphieklasse von Hauptfaserbündeln auf einem durch einen geschlossenen Weg dargestellten Zykel wird dann berechnet, indem man „den Weg liftet und ihm das Gruppenelement zuordnet, das den Anfangspunkt auf den Endpunkt schiebt“.

Vorschau 6.1.10. Für allgemeine topologische Räume werden wir die Menge aller Isomorphieklassen von M -Hauptfaserbündeln in [TG] 1.2.6 und [TG] 5.2.1 mit der „ersten Garbenkohomologie unseres Raums mit Koeffizienten in M “ identifizieren.

6.1.11 (Tensorprodukt und Dualisieren). Gegeben ein Komplex $A \in \text{Ket}$ erklären wir den **dualen Komplex** als $A^* := (A \rightrightarrows \mathbb{Z}[0])$. Gegeben Komplexe $A, B \in \text{Ket}$ erklären wir einen natürlichen Homomorphismus

$$t = t_{A,B} : A^* \otimes B^* \rightarrow (A \otimes B)^*$$

Wir können ihn explizit angeben durch $(f \otimes g)(a \otimes b) := (-1)^{|g||a|} f(a)g(b)$ für homogene Elemente. Man prüft dann leicht, daß diese natürlichen Homomorphismen auch eine Transformation der entsprechenden Funktoren in der Homotopiekategorie Hot bilden. Konzeptioneller wird das in [TSK] 1.6.25 erklärt.

Definition 6.1.12. Gegeben topologische Räume X, Y betrachten wir in Hot die Verknüpfung $S^*X \otimes_{\mathbb{Z}} S^*Y \rightarrow (SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY)^* \rightarrow S^*(X \times Y)$ unserer natürlichen Morphismen aus 6.1.11 mit der dualisierten Alexander-Whitney-Äquivalenz aus 5.6.9. Die davon nach 5.7.1 auf der Kohomologie induzierten Abbildungen notieren wir

$$\begin{aligned} H^p X \times H^q Y &\rightarrow H^{p+q}(X \times Y) \\ (c, d) &\mapsto c \times d \end{aligned}$$

und nennen sie das **Kreuzprodukt der Kohomologie**. Analoge Definitionen vereinbaren wir für Kohomologie mit Koeffizienten in einem Kring.

Proposition 6.1.13 (Formelsammlung für das Kreuzprodukt). *Das Kreuzprodukt der Kohomologie hat die folgenden Eigenschaften:*

Natürlichkeit: *Gegeben stetige Abbildungen $f : X \rightarrow K$ und $g : Y \rightarrow L$ haben wir für beliebige $a \in H^p K$ und $b \in H^q L$ in $H^{p+q}(X \times Y)$ die Gleichheit*

$$(f^*a) \times (g^*b) = (f \times g)^*(a \times b)$$

Eins: *Gegeben X ein topologischer Raum und $a \in H^p X$ eine Kohomologieklassse und $1 \in H_0(\text{top})$ der kanonische Erzeuger der Kohomologie eines Punktes und $\text{pr}_X : X \times \text{top} \rightarrow X$ die Projektion gilt*

$$(\text{pr}_X)^* a = (a \times 1)$$

Assoziativität: *Gegeben X, Y, Z topologische Räume und a, b, c jeweils Kohomologieklassen und $\text{ass} : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ die offensichtliche Bijektion gilt*

$$\text{ass}^*(a \times (b \times c)) = (a \times b) \times c$$

Graduierte Kommutativität: *Gegeben $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ die Vertauschungsabbildung für topologische Räume X, Y und Kohomologieklassen $a \in H^p X$ und $b \in H^q Y$ gilt in $H^{p+q}(Y \times X)$ die Identität*

$$\tau^*(a \times b) = (-1)^{pq} b \times a$$

Beweis. Die Natürlichkeit folgt aus der Natürlichkeit der Alexander-Whitney-Äquivalenz 5.6.9. Die graduierte Kommutativität folgt sofort, wenn wir ihren Beweis im Fall des Kreuzprodukts der Homologie noch ergänzen um die Gleichheit $v^* \circ t = t \circ v : A^* \otimes B^* \rightarrow (B \otimes A)^*$, die man sowohl schlicht nachrechnen als auch aus der allgemeinen Theorie der Schmelzkategorien in [TSK] 1.1.1 folgende konzeptuell erhalten kann. Die Eins-Eigenschaft folgt ähnlich, indem wir ihren

Beweis im Fall des Kreuzprodukts der Homologie ergänzen um die Erkenntnis, daß für jeden Komplex A die Verknüpfung

$$A^* \rightarrow A^* \otimes I \rightarrow A^* \otimes I^* \rightarrow (A \otimes I)^* \rightarrow A^*$$

der Morphismen $(\otimes 1)^* \circ t \circ (\text{id} \times \text{can}) \circ (\otimes 1)$ die Identität ist, für $\text{can} : I \xrightarrow{\sim} I^*$ der offensichtliche Morphismus. Das kann man sowohl schlicht nachrechnen als auch aus der allgemeinen Theorie der Schmelzkategorien in [TSK] 1.1.1 folgende konzeptuell erhalten. Für die Assoziativität schließlich erinnern wir aus dem Beweis der Assoziativität des Kreuzprodukts der Homologie unsere homotopiekommutativen Diagramme von Homotopieäquivalenzen und erhalten durch Dualisieren und Invertieren aller horizontalen Pfeile die Mitte eines homotopiekommutativen Diagramms der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
 (S^*X \otimes S^*Y) \otimes S^*Z & & & & \\
 \downarrow & & & & \\
 (SX \otimes SY)^* \otimes S^*Z & \longrightarrow & S(X \times Y)^* \otimes S^*Z & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 ((SX \otimes SY) \otimes SZ)^* & \longrightarrow & (S(X \times Y) \otimes SZ)^* & \longrightarrow & S((X \times Y) \times Z))^* \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 (SX \otimes (SY \otimes SZ))^* & \longrightarrow & (SX \otimes S(Y \times Z))^* & \longrightarrow & S(X \times (Y \times Z))^* \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 S^*X \otimes (SY \otimes SZ)^* & \longrightarrow & S^*X \otimes S^*(Y \times Z) & & \\
 \uparrow & & & & \\
 S^*X \otimes (S^*Y \otimes S^*Z) & & & &
 \end{array}$$

Die Morphismen in den Außenbereichen sind alle irgendwelche t vom Tensorprodukt der Dualen zum Dualen des Tensorprodukts. Die Assoziativität folgt nun, sobald wir zeigen, daß die linke Vertikale zu einem kommutativen Diagramm ergänzt werden kann durch den offensichtlichen Morphismus von ganz unten nach ganz oben. Das kann man sowohl schlicht nachrechnen als auch aus der allgemeinen Theorie der Schmelzkategorien in [TSK] 1.1.1 folgende konzeptuell erhalten. Wenden wir dann \mathcal{H} an, so ergibt sich die behauptete Assoziativität ohne weitere Schwierigkeiten. \square

Vorschau 6.1.14. Eine geschlossene Darstellung dieser Argumentation und auch der anschließenden Diskussion des Kohomologierings im Rahmen der Schmelzkategorien gebe ich in [TSK] 4.2.2 folgende.

6.1.15 (**Kohomologiering**). Gegeben ein topologischer Raum X definieren wir das **cup-Produkt** auf seiner Kohomologie durch

$$a \cup b := \Delta^*(a \times b)$$

Das cup-Produkt ist also für alle p, q eine biadditive Abbildung

$$H^p X \times H^q X \rightarrow H^{p+q} X$$

Unsere Formeln für das Kreuzprodukt 6.1.13 zeigen unmittelbar, daß $H^* X$ mit dem cup-Produkt ein Ring wird mit Einselement $1_X := \text{fin}^*(1_{\text{top}}) \in H^0 X$ für $\text{fin} : X \rightarrow \text{top}$ die konstante Abbildung und $1_{\text{top}} \in H^0(\text{top})$ der kanonische Erzeuger. Dieser Ring

$$H^* X = \bigoplus_{q \geq 0} H^q X$$

heißt der **Kohomologiering von X** . Die graduierte Kommutativität des Kreuzprodukts zeigt

$$a \cup b = (-1)^{|a||b|} b \cup a$$

Man sagt deshalb auch, der Kohomologiering sei **graduiert kommutativ**. Schließlich folgt aus unseren Formeln 6.1.13 für das Kreuzprodukt, daß der Rückzug der Kohomologie unter stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ durch Ringhomomorphismen $f^* : H^* Y \rightarrow H^* X$ geschieht.

Beispiel 6.1.16. Sind $i_w : X_w \hookrightarrow X$ die Einbettungen der Wegzusammenhangskomponenten von X , so liefern die Rückzüge nach 6.1.8 sogar einen Isomorphismus von graduierten Ringen

$$H^* X \xrightarrow{\sim} \prod H^* X_w$$

Man beachte hier, daß hier rechts das Produkt von graduierten Ringen verstanden werden muß, das nur aus denjenigen Tupeln des Produktrings besteht, bei denen es eine gemeinsame Schranke für die Grade der von Null verschiedenen homogenen Anteile der Einträge unseres Tupels gibt. Das Urbild des Tupels mit einer Eins an der Stelle w und Nullen sonst notiere ich $1_w \in H^0 X$. Diese Kohomologieklassen können wir auch charakterisieren durch $\langle 1_w, \delta_v \rangle = \delta_{w,v}$ für $\delta_v \in H_0 X$ das Bild des zur Wegzusammenhangskomponente X_v gehörigen kanonischen Erzeugers in der Homologie.

Satz 6.1.17 (Künnethformel der Kohomologie). *Sind alle Homologiegruppen eines Raums X endlich erzeugt und frei oder, noch allgemeiner, endlich erzeugt und projektiv über dem gewählten Koeffizientenring, so induziert für jeden weiteren Raum Y das Kreuzprodukt der Kohomologie einen Isomorphismus*

$$H^* X \otimes H^* Y \xrightarrow{\sim} H^*(X \times Y)$$

6.1.18. Ganz ohne Endlichkeitsbedingung kann man hier nicht auskommen, denn schon wenn X und Y unendliche diskrete Mengen sind, ist das Analogon der Künneth-Formel 5.7.7 für die Kohomologie selbst mit Koeffizienten in einem Körper offensichtlich falsch. Ohne Endlichkeitsbedingungen erhält man aber im Beweis immer noch $(HX \otimes SY)^* \xrightarrow{\sim} (SY \Rightarrow H^*X)$ und so ausgezeichnete Isomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} H^q(Y; H^p(X; k)) \xrightarrow{\sim} H^n(X \times Y; k)$$

Beweis. Nach 1.4.14 im Fall von Körperkoeffizienten oder 6.2.11 im allgemeinen gibt es genau einen Isomorphismus $SX \xrightarrow{\sim} HX$ in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe, der den offensichtlichen Isomorphismus auf der Homologie induziert. Nehmen wir dann zusätzlich für den vorletzten Isomorphismus alle Homologiegruppen von X als endlich erzeugt an, so erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$S^*(X \times Y) \xrightarrow{\sim} (SX \otimes SY)^* \xrightarrow{\sim} (HX \otimes SY)^* \xrightarrow{\sim} (HX)^* \otimes S^*Y \xleftarrow{\sim} (H^*X \otimes S^*Y)$$

Man sieht unschwer ein, daß der auf der Kohomologie in der Gegenrichtung induzierte Isomorphismus gerade das Kreuzprodukt ist. \square

Übungen

Übung 6.1.19. Gegeben eine kurze exakte Sequenz $L \hookrightarrow M \twoheadrightarrow N$ von abelschen Gruppen und ein topologischer Raum X zeige man, wie analog zu 5.1.7 in natürlicher Weise Randoperatoren definiert werden können derart, daß eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H^q(X; L) \rightarrow H^q(X; M) \rightarrow H^q(X; N) \rightarrow H^{q+1}(X; L) \rightarrow \dots$$

entsteht. Diese Randoperatoren heißen wie **Bockstein-Homomorphismen** wie im Fall der Homologie.

Übung 6.1.20 (Kreuzprodukte und Kroneckerpaarung). Gegeben topologische Räume X, Y und Kohomologieklassen $c \in H^p X, d \in H^q Y$ sowie Homologieklassen $\lambda \in H_p X, \mu \in H_q Y$ zeige man die Verträglichkeit

$$\langle c \times d, \lambda \times \mu \rangle = (-1)^{pq} \langle c, \lambda \rangle \langle d, \mu \rangle$$

der Kreuzprodukte mit der Kroneckerpaarung.

Übung 6.1.21 (Cup-Produkt für Koketten). Sei X ein topologischer Raum. Mit Hilfe der Alexander-Whitney-Abbildung 5.8.5 zeige man, daß das cup-Produkt induziert wird von der Abbildung $\cup : S^*X \times S^*X \rightarrow S^*X$, die Koketten $a \in S^p X$,

$b \in S^q X$ auf diejenige Kokette $a \cup b$ abbildet, die in den Notationen 5.8.4 auf einem Simplex $\sigma : \Delta_{p+q} \rightarrow X$ den Wert

$$\langle a \cup b, \sigma \rangle = (-1)^{pq} \langle a, \sigma \lambda_p \rangle \langle b, \sigma \rho_q \rangle$$

annimmt. Mehr dazu wird in [TSK] 4.3.3 diskutiert.

6.2 Kriterium für Homotopieäquivalenzen

6.2.1. Viele der für die Homologie bewiesenen Resultate überträgt man mühelos von der Homologie auf die Kohomologie mit Hilfe der in diesem Abschnitt entwickelten Methoden der homologischen Algebra.

Definition 6.2.2. Wir nennen einen Komplex **beschränkt in Richtung der Differentiale**, wenn wir in Richtung der Differentiale gehend ab einer Stelle nur noch $C_q = 0$ treffen.

Definition 6.2.3. Wir nennen eine Kettenabbildung einen **Quasiisomorphismus**, wenn sie Isomorphismen auf allen Homologiegruppen induziert. Wir notieren Quasiisomorphismen $\xrightarrow{\sim}$.

Satz 6.2.4 (Kriterium für Homotopieäquivalenzen). *Seien R ein Ring und P, Q in Richtung der Differentiale beschränkte Komplexe von projektiven R -Moduln. So ist jeder Quasiisomorphismus $f : Q \xrightarrow{\sim} P$ bereits eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Das folgt durch zweifaches Anwenden der anschließenden technischen Proposition 6.2.5. \square

Proposition 6.2.5 (Spalten von Quasiisomorphismen). *Jeder Quasiisomorphismus $f : C \xrightarrow{\sim} P$ von einem Komplex von Moduln über einem Ring zu einem in Richtung der Differentiale beschränkten Komplex projektiver Moduln besitzt ein Rechtsinverses in der Homotopiekategorie, es gibt also $h : P \rightarrow C$ mit $fh \simeq \text{id}_P$.*

Beweis. Wir konstruieren für eine beliebige Kettenabbildung $f : C \rightarrow P$ einen Komplex $K = K(f) = \text{Keg}(f)$, den **Abbildungskegel von f** , wie folgt: Wir setzen $K_n = C_{n-1} \oplus P_n$, fassen die Elemente dieser Summe als Spaltenvektoren auf und definieren den Randoperator $\partial^K : K_n \rightarrow K_{n-1}$ durch die Matrix

$$\partial^K = \begin{pmatrix} -\partial^C & 0 \\ f & \partial^P \end{pmatrix}$$

Man prüft mühelos $\partial^K \circ \partial^K = 0$. Bezeichnet $[1]C$ wie in 5.7.11 den verschobenen Komplex mit $([1]C)_n = C_{n-1}$ und Randoperator $\partial^{[1]C} = -\partial^C$, so ergibt sich mit den offensichtlichen Abbildungen eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$P \hookrightarrow K(f) \rightarrow [1]C$$

Man überzeugt sich, daß der Randoperator der zugehörigen langen exakten Homologiesequenz gerade $\mathcal{H}_n f : \mathcal{H}_n C \rightarrow \mathcal{H}_n P$ ist. Ist speziell $\mathcal{H}_n f$ ein Isomorphismus für alle n , so ist der Abbildungskegel $K(f)$ exakt nach der langen exakten Homologiesequenz. Ist zusätzlich P ein in Richtung der Differentiale beschränkter Komplex von projektiven R -Moduln, so ist nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra 5.6.14 die Kettenabbildung $P \hookrightarrow K(f)$ nullhomotop. Setzen wir so eine Homotopie an als Spaltenmatrix $(h, \delta)^\top$, so ergibt sich die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} -\partial^C & 0 \\ f & \partial^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ \delta \end{pmatrix} \partial^P = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id}_P \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren bedeutet die erste Zeile, daß $h : P \rightarrow C$ eine Kettenabbildung ist, und die Zweite, daß fh homotop ist zur Identität auf P . \square

6.2.6. Die Beziehung zwischen dem hier eingeführten algebraischen Abbildungskegel und dem topologischen Abbildungskegel aus 3.4.1 wird in 3.4.6 besprochen. Kurz gesagt konstruieren wir dort für jede stetige Abbildung $f : Z \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz

$$\tilde{S}(K(f)) \xrightarrow{\sim} \text{Keg}(\tilde{S}f)$$

Lemma 6.2.7 (Kohomologie bei freien Homologiegruppen). *Sind alle Homologiegruppen eines topologischen Raums X mit Koeffizienten in einem Ring R freie Linksmoduln, so induziert die Kroneckerpaarung mit Koeffizienten für jeden R -Modul M Isomorphismen*

$$H^q(X; M) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_R(H_q(X; R), M)$$

Vorschau 6.2.8. Weitere Aussagen in derselben Richtung liefert das „universelle Koeffiziententheorem der Kohomologie“ 6.7.2.

Beweis. Nach 6.2.11 ist unter unseren Voraussetzungen der Komplex $S(X; R)$ als Komplex von Linksmoduln homotop zu seiner Homologie $H(X; R)$. Also ist auch der Komplex $S^*(X; M) = \text{Hom}_R(S(X; R), M)$ homotop zum Komplex $\text{Hom}_R(H(X; R), M)$. \square

6.2.9 (**Kohomologie von Sphären**). Wenden wir Lemma 6.2.7 an mit $k = \mathbb{Z}$, so erhalten wir Formeln für die Kohomologie von Sphären, jeweils mit beliebigen Koeffizienten.

Ergänzung 6.2.10. Jeder stetigen Abbildung $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ für $n \geq 1$ ordnet man eine ganze Zahl, ihre **Hopf-Invariante**, zu wie folgt: Bezeichnet X den Raum, der aus S^n entsteht durch Ankleben einer $2n$ -Zelle mittels der Abbildung f , so erhält man aus der analog zu 3.4.3 gebildeten „Anklebesequenz der

Kohomologie“ zwei Isomorphismen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H^n X & \xrightarrow{\sim} & H^n S^n & \rightarrow & \dots \\ \dots & \rightarrow & H^{2n-1} S^{2n-1} & \xrightarrow{\sim} & H^{2n} X & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Nun nimmt man den kanonischen Erzeuger von $H^n S^n$, holt ihn zurück nach $H^n X$, quadriert ihn im Kohomologieren des verklebten Raums X , betrachtet das Urbild unter dem Korand in $H^{2n-1} S^{2n-1}$ und erhält ein Vielfaches des kanonischen Erzeugers. Der Faktor, mit dem hier multipliziert werden muß, heißt dann die **Hopf-Invariante von f** . Ihre Konstruktion ist eine erste Illustration für die Nützlichkeit des cup-Produkts und damit der Kohomologie überhaupt. Man kann zeigen, daß sie nur von der Homotopieklasse von f abhängt, siehe zum Beispiel [Vic94].

Übungen

Übung 6.2.11. Gegeben ein Komplex C von Moduln mit projektiver Homologie wissen wir aus 1.4.14, daß es in der Homotopiekategorie genau einen Homomorphismus $\mathcal{H}C \rightarrow C$ gibt, der auf der Homologie den offensichtlichen Isomorphismus $\mathcal{H}(\mathcal{H}C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}C$ induziert. Man zeige, daß wenn auch unser Komplex selber aus projektiven Moduln besteht und beschränkt ist in Richtung der Differentiale, daß dann dieser Homomorphismus eine Homotopieäquivalenz ist.

Übung 6.2.12 (Homkomplex, Tensorkomplex und Abbildungskegel). Gegeben eine Kettenabbildung $A \rightarrow B$ und ein Komplex C konstruiere man einen Isomorphismus von Kettenkomplexen, der als mittlerer vertikaler Pfeil das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} ([1]A) \rightrightarrows C & \longrightarrow & \text{Keg}(A \rightarrow B) \rightrightarrows C & \longrightarrow & (B \rightrightarrows C) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \parallel \\ [-1](A \rightrightarrows C) & \longrightarrow & [-1] \text{Keg}((B \rightrightarrows C) \rightarrow (A \rightrightarrows C)) & \longrightarrow & (B \rightrightarrows C) \end{array}$$

mit der offensichtlichen linken Vertikale nach 5.7.19 oder gleichbedeutend nach [TSK] 3.4.20 zum Kommutieren bringt. Ebenso konstruiere man einen Isomorphismus von Kettenkomplexen, der als mittlerer vertikaler Pfeil das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} C \rightrightarrows B & \longrightarrow & C \rightrightarrows (\text{Keg}(A \rightarrow B)) & \longrightarrow & C \rightrightarrows ([1]A) \\ \parallel & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ C \rightrightarrows B & \longrightarrow & \text{Keg}((C \rightrightarrows A) \rightarrow (C \rightrightarrows B)) & \longrightarrow & [1](C \rightrightarrows A) \end{array}$$

mit der offensichtlichen rechten Vertikale nach 5.7.19 oder gleichbedeutend nach [TSK] 3.4.20 zum Kommutieren bringt. Schließlich konstruiere man einen Iso-

morphismus von Kettenkomplexen, der als mittlerer vertikaler Pfeil das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 C \otimes B & \longrightarrow & C \otimes (\text{Keg}(A \rightarrow B)) & \longrightarrow & C \otimes ([1]A) \\
 \parallel & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 C \otimes B & \longrightarrow & \text{Keg}((C \otimes A) \rightarrow (C \otimes B)) & \longrightarrow & [1](C \otimes A)
 \end{array}$$

mit der offensichtlichen rechten Vertikale zum Kommutieren bringt.

6.3 Relative Kohomologie

6.3.1. Gegeben $X \supset A$ ein topologischer Raum mit einer Teilmenge erinnere ich an den Komplex $S(X, A)$ der relativen Ketten aus 2.1.3. Wir definieren die **relative Kohomologie** mit Koeffizienten in M unseres Paares (X, A) als die Kohomologie des Komplexes $S^*(X, A; M) := (S(X, A) \rightrightarrows M[0])$ der **relativen Koketten** und erhalten so Funktoren

$$H^q : (\text{Top}^{\text{C}})^{\text{opp}} \times \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$$

Lemma 6.2.7 zur Kohomologie bei freien Homologiegruppen gilt mit demselben Beweis analog auch für die relative Kohomologie, vergleiche Übung 6.3.5. Gegeben ein Raumpaar (X, A) liefern die spaltenden kurzen exakten Sequenzen $S_q A \hookrightarrow S_q X \twoheadrightarrow S_q(X, A)$ mittels Dualisierung spaltende kurze exakte Sequenzen $S^q A \leftarrow S^q X \leftarrow S^q(X, A)$. Die kurze exakte Sequenz der Komplexe der singulären Koketten liefert wiederum die **lange exakte Kohomologiesequenz**

$$0 \rightarrow H^0(X, A) \rightarrow H^0 X \rightarrow H^0 A \rightarrow H^1(X, A) \rightarrow \dots$$

mit einem im Raumpaar (X, A) natürlichen Randoperator. Dasselbe gilt auch mit beliebigen Koeffizienten. Wir übertragen beispielhaft noch einige weitere Aussagen auf die Kohomologie.

Satz 6.3.2 (Ausschneidung für die Kohomologie). *Ist (X, A) ein Raumpaar und $V \subset A$ eine Teilmenge mit $\bar{V} \subset A^\circ$, so liefert die Einbettung von Raumpaaren $i : (X \setminus V, A \setminus V) \hookrightarrow (X, A)$ Isomorphismen auf den relativen Kohomologiegruppen*

$$H^q(X, A) \xrightarrow{\sim} H^q(X \setminus V, A \setminus V)$$

Beweis. Nach dem Ausschneidungssatz 2.4.10 induziert die von der Einbettung herkommende Kettenabbildung $S_i : S(X \setminus V, A \setminus V) \rightarrow S(X, A)$ Isomorphismen auf der Homologie und ist mithin nach 6.2.4 eine Homotopieäquivalenz. Dann ist auch die transponierte Abbildung $S^*i : S^*(X, A) \rightarrow S^*(X \setminus V, A \setminus V)$ eine Homotopieäquivalenz und induziert Isomorphismen auf der Kohomologie. \square

6.3.3. Geht man in der Herleitung der Mayer-Vietoris-Sequenz und der relativen Mayer-Vietoris-Sequenz in 2.4.11 und 2.4.14 aus kurzen exakten Sequenzen von Komplexen freier abelscher Gruppen zuerst zu den dualen Komplexen über und bildet erst dann die lange exakte Homologiesequenz, so erhält man lange exakte Sequenzen von Kohomologiegruppen, genannt die **Mayer-Vietoris-Sequenz** und die **relative Mayer-Vietoris-Sequenz der Kohomologie**. Letzteren Fall führen wir beim Beweis der Poincaré-Dualität in 7.4.7 noch genauer aus.

6.3.4 (**Simpliziale Kohomologie**). Gegeben ein Simplizialkomplex \mathcal{K} erinnern wir aus dem Beweis der Gleichheit von simplizialer und singulärer Homologie 3.1.7 das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S\mathcal{K} & \leftarrow & S^s\Delta(\mathcal{K}) & \hookrightarrow & S\Delta(\mathcal{K}) \\ & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\ & & S^{os}\Delta(\mathcal{K}) & & \end{array}$$

aus den Komplexen der Simplizialketten, der simplizialsingulären Ketten, der singulären Ketten und der ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten in Bezug auf eine Anordnung auf den Ecken unseres Simplizialkomplexes. Nach 3.1.7 induzieren hier alle Pfeile Isomorphismen auf der Homologie. Da alle unsere Komplexe aus freien abelschen Gruppen bestehen, sind nach 6.2.4 sogar alle Pfeile Homotopieäquivalenzen. Folglich erhalten wir durch Anwenden von $\text{Hom}(_, \mathbb{Z})$ wieder ein kommutatives Diagramm von Homotopieäquivalenzen, das wir

$$\begin{array}{ccccc} S^*\mathcal{K} & \rightarrow & S_s^*\Delta(\mathcal{K}) & \leftarrow & S^*\Delta(\mathcal{K}) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & S_{os}^*\Delta(\mathcal{K}) & & \end{array}$$

notieren und das Isomorphismen zwischen den Kohomologiegruppen dieser Komplexe liefert. Die Elemente von $S_{os}^q\Delta(\mathcal{K})$ kann man auffassen als unendliche formale Linearkombinationen ordnungsverträglicher simplizialsingulärer q -Simplizes, formal haben wir eine kanonische Bijektion $S_{os}^q\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(\mathcal{K}_q, \mathbb{Z})$. Der Korandoperator ordnet einem q -Simplex die formale Summe mit geeigneten Vorzeichen aller $(q+1)$ -Simplizes zu, die unseren q -Simplex enthalten. Ähnlich kann man die Gruppe der **Simplizialkocetten** $S^q\mathcal{K}$ identifizieren mit der Gruppe aller Abbildungen $f : \mathcal{K}_q^{\leq} \rightarrow \mathbb{Z}$ von der Menge aller angeordneten q -Simplizes nach \mathbb{Z} mit der Eigenschaft $f(\sigma \circ \pi) = (\text{sgn } \pi)f(\sigma)$ für alle Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_{q+1}$. Zur Übung empfehle ich, diese **simpliziale Kohomologie** für eine Triangulierung der reellen Zahlengerade explizit zu berechnen.

Übungen

Übung 6.3.5 (Relative Kohomologie bei freien Homologiegruppen). Man zeige, daß Lemma 6.2.7 unverändert auch für die relative Kohomologie gilt: Sind alle

relativen Homologiegruppen eines Raumpaars (X, A) mit Koeffizienten in einem Ring R freie Linksmoduln, so induziert die Kroneckerpaarung mit Koeffizienten für jeden R -Modul M Isomorphismen

$$H^q(X, A; M) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_R(H_q(X, A; R), M)$$

Übung 6.3.6 (Lokale Kohomologie endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorräume). Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ zeige man $H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x; M) \cong M$ für $q = n$ und Null sonst. Weiter zeige man für jede konvexe beschränkte Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in C$, daß die Einbettung einen Isomorphismus $H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x; M) \xrightarrow{\cong} H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus C; M)$ induziert.

Übung 6.3.7 (Relative Kroneckerpaarung und Funktorialität). Gegeben ein Raumpaar (X, A) erklärt man die **Kroneckerpaarung**

$$\langle , \rangle : H^p(X, A) \times H_p(X, A) \rightarrow \mathbb{Z}$$

als den Effekt der Auswertungsabbildung $S^*(X, A) \otimes S(X, A) \rightarrow \mathbb{Z}[0]$ auf der Homologie. Man zeige für $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ein Morphismus von Raumpaaren und $b \in H^p(Y, B)$ sowie $c \in H_p(X, A)$ die Identität

$$\langle f^*b, c \rangle = \langle b, f_*c \rangle$$

6.4 Homologie als Kohomologiemodul

Vorschau 6.4.1. Die im vorhergehenden und im folgenden gegebene Darstellung von cup und cap hat zum Ziel, ohne große Umwege die zur Formulierung und zum Beweis der Poincaré-Dualität benötigten Hilfsmittel bereitzustellen. Ich finde sie wenig befriedigend und ziemlich verwirrend und will kurz den Zugang skizzieren, der in [TSK] entwickelt wird und der mir transparenter scheint. Jedes Objekt X einer Kategorie \mathcal{C} ist nach [TSK] 2.2.10 in banaler Weise ein Koabmonoid der zugehörigen banalen Trennkategorie $\wedge \mathcal{C}$ mit der Koverknüpfung $(\text{id}, \text{id}) : X \rightarrow X \wedge X$. Nach [TSK] 4.1.4 bilden die simplizialen Ketten einen Trennschmelzfunktor

$$S : \wedge \text{Top} \rightarrow \text{Hot}$$

von der banalen Trennkategorie der topologischen Räume in Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe abelscher Gruppen oder vielmehr zwischen den zugehörigen Trennschmelzkategorien. Aus dem banalen Koabmonoid eines topologischen Raums X wird so ein Koabmonoid SX in Hot mit der Komultiplikation, die wir als

$$\eta \Delta_* : SX \rightarrow SX \otimes SX$$

kennengelernt haben. Unter dem Nachschalten des Dualisierens, einem Trennfunktor $\text{Hot}^t \rightarrow \text{Hot}^{\text{opp}}$, wird daraus der Trennfunktor der singulären Koketten

$$S^* : \mathcal{A}\text{Top} \rightarrow \text{Hot}^{\text{opp}}$$

und ein Koabmonoid S^*X in Hot^{opp} alias Abmonoid S^*X in Hot mit der entsprechend dualisierten Multiplikation

$$S^*X \otimes S^*X \rightarrow S^*X$$

als Verknüpfung. Das cap-Produkt ist dann eine Struktur von SX als S^*X -Modul, die uns in solchen Situationen immer zur Verfügung steht. Arbeiten wir zum Beispiel mit der Trennschmelzkategorie Mod_k der k -Vektorräume, so ist ein Koabmonoid A eine kokommutative kounitäre Koalgebra und wir erhalten eine natürliche Struktur von A als A^* -Modul für die durch Dualisieren entstehende Kringalgebra A^* . Die eigentlich grundlegenden Strukturen sind in meinen Augen der Trennfunktor $S : \mathcal{A}\text{Top} \rightarrow \text{Hot}$ und die davon abgeleitete Komultiplikation $SX \rightarrow SX \otimes SX$ und werden erst sichtbar, sobald die entsprechende Terminologie zur Verfügung steht. Unsere verschiedenen Produkte erweisen sich in diesem Licht als die Schatten, die diese Strukturen in Homologie und Kohomologie werfen.

6.4.2. Gegeben ein topologischer Raum X betrachten wir in der Homotopiekategorie der Komplexe die Sequenz

$$S^*X \otimes SX \rightarrow S^*X \otimes SX \otimes SX \rightarrow \mathbb{Z}[0] \otimes SX \rightarrow SX$$

mit der Komposition $\eta\Delta_* : SX \rightarrow S(X \times X) \rightarrow SX \otimes SX$ des Vorschubs unter der Diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times X$ mit der Alexander-Whitney-Äquivalenz η aus 5.6.9 tensoriert von links mit S^*X für den ersten Pfeil und dem Auswerten vorne als zweitem Pfeil. Diese Komposition wird meist \cap notiert und heißt **cap-Produkt**. Auf der Kohomologie erhalten wir so bilineare Abbildungen

$$\cap : H^p X \times H_q X \rightarrow H_{q-p} X$$

Auch diese heißen **cap-Produkte**. Salopp gesprochen bedeutet das ein „partielles Auswerten einer Kohomologiekategorie auf einer Homologiekategorie“.

6.4.3 (**Cap-Produkt mit Koeffizienten in einem Körper**). Wenn wir mit Koeffizienten in einem Körper arbeiten, können wir bereits in der Homologie selbst $\Delta_*c = \sum c_1^i \times c_2^i$ schreiben und erhalten die Identität $b \cap c = \sum \langle b, c_1^i \rangle c_2^i$. Im allgemeinen liefert jedoch das Kreuzprodukt keinen Isomorphismus auf die Homologie des Produktraums und wir müssen das cap-Produkt zunächst für Ketten erklären, bevor wir auf die Homologie absteigen können.

Proposition 6.4.4. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gilt für alle $b \in H^p Y$ und $z \in H_q X$ die **Projektionsformel**

$$f_*(f^*b \cap z) = b \cap (f_*z)$$

6.4.5. Anders und etwas unscharf gesagt kommutiert also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^*X \times HX & \longleftarrow H^*Y \times HX & \longrightarrow H^*Y \times HY \\ \downarrow & & \downarrow \\ HX & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & HY \end{array}$$

Beweis. Wir betrachten das offensichtliche kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^*X \otimes SX & \longleftarrow & S^*Y \otimes SX & \longrightarrow & S^*Y \otimes SY \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^*X \otimes S(X \times X) & \longleftarrow & S^*Y \otimes S(X \times X) & \longrightarrow & S^*Y \otimes S(Y \times Y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^*X \otimes SX \otimes SX & \longleftarrow & S^*Y \otimes SX \otimes SX & \longrightarrow & S^*Y \otimes SY \otimes SY \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ SX & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & & SY \end{array}$$

und gehen zur Homologie über. □

Proposition 6.4.6. Gegeben ein topologischer Raum X gilt für alle $a \in H^p X$, $b \in H^q X$ und $c \in H_{p+q} X$ die **Adjunktionsformel**

$$\langle a \cup b, c \rangle = \langle a, b \cap c \rangle$$

Beweis. Gegeben ein Morphismus von Komplexen $\varphi : A \rightarrow B$ und ein Morphismus von Komplexen $\psi : C \rightarrow B^*$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} C \otimes A & \rightarrow & B^* \otimes A & \rightarrow & A^* \otimes A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C \otimes B & \rightarrow & B^* \otimes B & \rightarrow & \mathbb{Z}[0] \end{array}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise erklärten Pfeilen. Jetzt nehmen wir als $\varphi : A \rightarrow B$ die Verknüpfung $\eta\Delta_* : SX \rightarrow SX \otimes SX$ des Vorschubs unter der Diagonale mit einer Alexander-Whitney-Transformation und als $\psi : C \rightarrow B^*$ die Verknüpfung $tv : S^*X \otimes S^*X \rightarrow (SX \otimes SX)^*$ und erhalten eine Gleichheit von zwei Kettenabbildungen

$$S^*X \otimes S^*X \otimes SX \rightarrow \mathbb{Z}[0]$$

Die davon induzierte Gleichheit von Abbildungen auf der Homologie ist unsere Adjunktionsformel. □

Satz 6.4.7 (Homologie als Kohomologiemodul). *Das cap-Produkt macht die Homologie jedes Raums zu einem Modul über seinem Kohomologiering. Ist also X ein topologischer Raum, so gelten für alle $a \in H^p X, b \in H^q X, c \in H_r X$ die Identitäten*

$$(a \cup b) \cap c = a \cap (b \cap c) \quad \text{und} \quad 1 \cap c = c.$$

Beweis. Wir beginnen mit der ersten Identität. Dazu bemerken wir, daß die obere Horizontale im kommutativen Diagramm aus dem vorhergehenden Beweis der Adjunktionsformel 6.4.6 durch das Tensorieren mit A aus einer Sequenz $C \rightarrow B^* \rightarrow A^*$ entsteht. Tensorieren wir unser ganzes Diagramm von rechts mit einem Komplex \bar{A} und bauen mithilfe irgendeines Morphismus $\tilde{A} \rightarrow A \otimes \bar{A}$ noch eine Zeile oben an, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} C \otimes \tilde{A} & \rightarrow & B^* \otimes \tilde{A} & \rightarrow & A^* \otimes \tilde{A} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C \otimes A \otimes \bar{A} & \rightarrow & B^* \otimes A \otimes \bar{A} & \rightarrow & A^* \otimes A \otimes \bar{A} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C \otimes B \otimes \bar{A} & \rightarrow & B^* \otimes B \otimes \bar{A} & \rightarrow & \bar{A} \end{array}$$

Spezialisieren wir das nun wie bei Beweis der Adjunktionsformel 6.4.6 und setzen außerdem $\bar{A} = \tilde{A} = A = SX$ und nehmen als Morphismus $\tilde{A} \rightarrow A \otimes \bar{A}$ ein weiteres Mal $\eta \Delta_*$, so erhalten wir eine Gleichheit von zwei Kettenabbildungen

$$S^* X \otimes S^* X \otimes SX \rightarrow SX$$

Die davon induzierte Gleichheit von Abbildungen auf der Homologie ist unsere erste Formel. Für die zweite Formel gehen wir aus von einem Spezialfall der rechten Hälfte des ersten kommutativen Diagramms aus dem Beweis der Adjunktionsformel

$$\begin{array}{ccc} S^*(\text{top}) \otimes SX & \rightarrow & S^*(\text{top}) \otimes S(\text{top}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^* X \otimes SX & \rightarrow & \mathbb{Z}[0] \end{array}$$

Tensorieren wir von rechts mit SX und halten noch den Vorschub unter der Diagonale und Alexander-Whitney davor und lassen den einpunktigen Raum top aus der Notation weg, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} S^* \otimes SX & \rightarrow & S^* \otimes S(X \times X) & \rightarrow & S^* \otimes SX \otimes SX & \rightarrow & S^* \otimes S \otimes SX \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^* X \otimes SX & \rightarrow & S^* X \otimes S(X \times X) & \rightarrow & S^* X \otimes SX \otimes SX & \rightarrow & SX \end{array}$$

Für den „oberen Weg“ gilt dann $1 \otimes c \mapsto c$, da ja die diagonale Einbettung gefolgt von der Projektion auf den zweiten Eintrag die Identität ist. Dahingegen gilt für den „unteren Weg“ per definitionem $1 \otimes c \mapsto 1 \cap c$. Das zeigt, was wir wollten. \square

Beispiel 6.4.8 (Cap-Produkt und Kronecker-Paarung). Ist X wegzusammenhängend und $\delta \in H_0X$ der kanonische Erzeuger, so liefert die Adjunktionsformel angewandt auf $a = 1$ und $b \in H^pX$ und $c \in H_pX$ die Beziehung

$$b \cap c = \langle b, c \rangle \delta$$

zwischen Kroneckerpaarung und cap-Produkt. Ist allgemeiner $i : X_w \hookrightarrow X$ die Einbettung einer Wegzusammenhangskomponente und $\delta_w \in H_0X_w$ der kanonische Erzeuger und $c = i_*c_w$ mit $c_w \in H_pX_w$ beliebig, so finden wir mit der Adjunktionsformel

$$b \cap i_*c_w = \langle i^*b, c_w \rangle i_*\delta_w$$

Vorschau 6.4.9 (Poincaré-Dualität für kompakte Mannigfaltigkeiten). Für jede kompakte orientierte Mannigfaltigkeit liefert das cap-Produkt mit ihrem Fundamentalzykel einen Isomorphismus zwischen ihrer Kohomologie und ihrer Homologie. Ist genauer M eine kompakte orientierte n -Mannigfaltigkeit so liefert das cap-Produkt mit ω für alle p einen Isomorphismus

$$\cap[M] : H^pM \xrightarrow{\sim} H_{n-p}M$$

Dieser Satz und sein Beweis gelten mit Koeffizienten in einem beliebigen kommutativen Ring. Gilt in unserem Ring $1 + 1 = 0$, so benötigt man noch nicht einmal die Voraussetzung der Orientierbarkeit. Wir zeigen das alles in 7.4.3.

Vorschau 6.4.10 (Schnittpaarung durch Poincaré-Dualität). Sei M eine kompakte orientierte n -Mannigfaltigkeit. Unter den durch Poincaré-Dualität 6.4.9 im Fall einer kompakten orientierten n -Mannigfaltigkeit gegebenen Isomorphismen

$$H^pM \xrightarrow{\sim} H_{n-p}M$$

entspricht das cup-Produkt $H^{n-p}M \times H^pM \rightarrow H^nM$ einer bilinearen Abbildung auf der Homologie, die unter dem Nachschalten der Augmentation $H_0M \rightarrow \mathbb{Z}$ unsere in 4.3.19 gesuchte Schnittpaarung

$$H_pM \times H_{n-p}M \rightarrow \mathbb{Z}$$

liefert. Daß diese bilineare Abbildung die in 4.3.19 für die Schnittpaarung behauptete anschauliche Eigenschaft hat, wird allerdings erst in [TSF] 6.4.31 klar werden. Eine erste Anschauung im triangulierbaren Fall mag 7.5.7 geben.

Vorschau 6.4.11. Sei M eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit. Nach der Adjunktionsformel $\langle a \cup b, [M] \rangle = \langle a, b \cap [M] \rangle$ entsprechen sich unter den Identifikationen der Poincaré-Dualität für einen beliebigen kommutativen Koeffizientenring

k per definitionem die cup-Produkt-Paarung, die beiden Kronecker-Paarungen und die Schnittpaarung

$$\begin{aligned} H^{n-p}(M; k) \times H^p(M; k) &\rightarrow k, (a, b) \mapsto \langle a \cup b, [M] \rangle \\ H^{n-p}(M; k) \times H_{n-p}(M; k) &\rightarrow k, (a, \beta) \mapsto \langle a, \beta \rangle \\ H_p(M; k) \times H^p(M; k) &\rightarrow k, (\alpha, b) \mapsto \pm \langle b, \alpha \rangle \\ H_p(M; k) \times H_{n-p}(M; k) &\rightarrow k, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \odot \beta \end{aligned}$$

Falls eine dieser Paarungen eine Bijektion des linken Raums auf den Dualraum des rechten Raumes oder das Umgekehrte induziert, so folgt dasselbe für die beiden anderen Paarungen. Haben wir etwa Koeffizienten in einem Körper oder ist $H_{n-p-1}(M; \mathbb{Z})$ eine freie abelsche Gruppe, so liefert nach 6.7.2 die Paarung in der Mitte eine Bijektion des linken Raums auf den Dualraum des rechten Raumes und dasselbe folgt für die anderen Paarungen. In 7.4.9 diskutieren wir Verallgemeinerungen auf den Fall nicht notwendig kompakter Mannigfaltigkeiten.

6.4.12 (Herkunft der Notationen cup und cap). Für das Schnittprodukt schiene mir die Notation \cap naheliegend und das cup-Produkt ist dazu in gewisser Weise dual. Ich vermute hier die Herkunft der Notation \cup für das cup-Produkt, kann das aber nicht belegen.

6.4.13 (Heuristisches zur Poincaré-Dualität). Um einen anschaulichen Beweis der Poincaré-Dualität zu geben, verallgemeinert man zunächst unseren Satz 3.1.7 über den Zusammenhang von singulärer und simplizialer Homologie von endlichen Simplizialkomplexen auf Räume, die statt aus Simplizes in ähnlicher Art aus komplizierteren kompakten konvexen Polyedern zusammengesetzt sind, wie zum Beispiel die Oberflächen der platonischen Körper. So kann etwa die Homologie der Sphäre mithilfe einer Dodekaeder-Zerlegung berechnet werden durch einen Komplex der Gestalt $\mathbb{Z}^{12} \rightarrow \mathbb{Z}^{30} \rightarrow \mathbb{Z}^{20}$ für die 12 Flächen, 30 Kanten und 20 Ecken. Gehen wir nun über zur „dualen“ Zerlegung in kompakte konvexe Polyeder, im Beispiel zur Ikosaeder-Zerlegung der Sphäre in 20 Flächen mit 30 Kanten und 12 Ecken, so kann man den Komplex, der ursprünglich die Homologie berechnet, in natürlicher Weise identifizieren mit dem Komplex, der bezüglich dieser dualen Zerlegung die Kohomologie berechnet. Da aber Homologie und Kohomologie von der Zerlegung gänzlich unabhängig sind, ergibt sich $H_i M \cong H^{n-i} M$ für jede orientierte kompakte triangulierbare n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Es ist nicht allzu schwer, diese Skizze zu einem richtigen Beweis auszubauen, siehe zum Beispiel [SZ94]. Wir werden jedoch einen anderen Weg gehen, der Triangulierbarkeitsvoraussetzungen vermeidet und auch abgesehen davon zu allgemeineren Resultaten führt. Genauer wollen wir unseren Satz durch eine Art Induktion über alle offenen Teilmengen beweisen und werden dazu eine Version formulieren, die

auch nichtkompakte Mannigfaltigkeiten einbezieht. Das benötigt einige algebraische Vorbereitungen.

Übungen

Übung 6.4.14 (Cap-Produkt für Ketten). Sei X ein topologischer Raum. Mit Hilfe der Alexander-Whitney-Abbildung 5.8.5 zeige man, daß das cap-Produkt induziert wird von der Abbildung $\cap : S^*X \times SX \rightarrow SX$, die ein Paar (b, σ) mit $b \in S^qX$ und $\sigma : \Delta_{p+q} \rightarrow X$ ein Simplex in den Notationen [TS] 5.8.4 abbildet auf

$$b \cap \sigma = (-1)^{pq} \langle b, \sigma \rho_q \rangle \sigma \lambda_p$$

Mehr dazu wird in [TSK] 4.3.3 diskutiert.

Übung 6.4.15 (Cap-Produkte für Raumpaare). Für Raumpaare (X, A) induziert jede Alexander-Whitney-Transformation 5.6.9 eine Kettenabbildung

$$S(X \times X, X \times A) \xrightarrow{\sim} SX \otimes S(X, A)$$

Man sieht leicht ein, daß sie Isomorphismen auf der Homologie induziert und deshalb nach dem Kriterium für Homotopieäquivalenzen 6.2.4 eine Homotopieäquivalenz sein muß. Man sieht auch leicht ein, daß sie wohlbestimmt ist bis auf Homotopie, denn Alexander-Whitney-Transformationen sind wohlbestimmt bis auf Homotopie im Sinne von 5.6.5 und jede Homotopie zwischen zwei Alexander-Whitney-Transformationen im Sinne von 5.6.5 geht offensichtlich auf die Quotienten über. Die zur Konstruktion in 6.4.2 analoge Komposition

$$\begin{array}{ccc} S^*X \otimes S(X, A) & & S(X, A) \\ \downarrow & & \uparrow \\ S^*X \otimes S(X \times X, X \times A) & \longrightarrow & S^*X \otimes SX \otimes S(X, A) \end{array}$$

liefert eine Verallgemeinerung

$$\cap : H^p(X) \times H_q(X, A) \rightarrow H_{q-p}(X, A)$$

des cap-Produkts, unter der auch die relative Homologie $H(X, A)$ ein Modul über dem Kohomologiering H^*X wird. Man prüft das mit denselben Argumenten wie im bereits behandelten nichtrelativen Fall. Die Variante

$$\begin{array}{ccc} S^*(X, A) \otimes S(X, A) & & SX \\ \downarrow \text{id} \otimes \Delta_* & & \uparrow \text{ev} \otimes \text{id} \\ S^*(X, A) \otimes S(X \times X, A \times X) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \eta} & S^*(X, A) \otimes S(X, A) \otimes SX \end{array}$$

liefert durch Übergang zur Homologie eine weitere Verallgemeinerung des cap-Produkts, diesmal zu einer Abbildung

$$\cap : H^p(X, A) \times H_q(X, A) \rightarrow H_{q-p}X$$

Man prüfe auch in diesem Fall für X wegzusammenhängend und $p = q$ die Beziehung

$$b \cap c = \langle b, c \rangle \delta$$

zwischen cap-Produkt und Kroneckerpaarung. Man zeige weiter für jeden Morphismus von Raumpaaren $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ mit den entsprechenden cap-Produkten in den Vertikalen und den offensichtlichen durch Rückzug auf der Kohomologie und Vorschub auf der Homologie gegebenen Horizontalen die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, A) \times H(X, A) & \longleftarrow H^*(Y, B) \times H(X, A) & \longrightarrow H^*(Y, B) \times H(Y, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ HX & \longrightarrow & HY \end{array}$$

Ergänzende Übung 6.4.16 (Tensorprodukt von dg-Moduln). Gegeben über einem \mathbb{Z} -graduierten Ring R ein \mathbb{Z} -graduierter Rechtsmodul M und ein \mathbb{Z} -graduierter Linksmodul N ist der Kern der Surjektion $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \rightarrow M \otimes_R N$ stets ein im Sinne von [KAG] 6.6.7 homogener Teilraum und $M \otimes_R N$ ist folglich in natürlicher Weise \mathbb{Z} -graduiert. Ist R sogar ein dg-Ring und sind M und N beide dg-Moduln, so induziert das offensichtliche Differential auf $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ ein Differential auf $M \otimes_R N$.

Ergänzende Übung 6.4.17. Gegeben dg-Moduln M, N über einem dg-Ring R ist die Menge der mit der Operation von R in hoffentlich offensichtlicher Weise verträglichen Elemente des Hom-Komplexes $(M \rightrightarrows N) = \text{Hom}(M, N)$ aus 1.4.12 ein Unterkomplex $(M \rightrightarrows_R N) = \text{Hom}_R(M, N)$. Die Nullzykel dieses Komplexes sind genau die Homomorphismen von dg-Moduln, in Verallgemeinerung von 1.4.12 gilt also

$$\text{dgMod}_R(M, N) = \mathcal{Z}^0 \text{Hom}_R(M, N)$$

Die Nullränder $\mathcal{B}^0 \text{Hom}_R(M, N)$ dieses Komplexes nennen wir analog **nullhomotope** Homomorphismen von differentiellen graduierten Moduln über R und führen die Homotopiekategorie

$$R\text{-dgHot} = \text{dgHot}_R$$

ein dadurch, daß ihre Objekte R -dg-Moduln sein sollen, die Morphismen jedoch gegeben sein sollen durch $\text{dgHot}_R(M, N) := \mathcal{H}^0 \text{Hom}_R(M, N)$.

Ergänzende Übung 6.4.18. Gegeben dg-Rechtsmoduln M, N über einem dg-Ring R ist $\text{Hom}_{-R}(M, N) \subset \text{Hom}(M, N)$ ein Unterkomplex des Hom-Komplexes. Ist S ein weiterer dg-Ring und ist M ein S - R -dg-Bimodul, so ist unser Unterkomplex ein S -dg-Unterrechtsmodul des Hom-Komplexes mit seiner offensichtlichen und in ?? formalisierten S -Operation von rechts. Analoges gilt, wenn man Links und Rechts vertauscht.

Ergänzende Übung 6.4.19. Gegeben ein dg-Ring R liefert die Multiplikation des Rings von links auf sich selber analog zum Fall gewöhnlicher Ringe [KAG] 2.3.14 einen Isomorphismus von dg-Ringen $R \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{-R}(R, R)$ zwischen R selbst und dem Endomorphismenkomplex von R als dg-Rechtsmodul.

Ergänzende Übung 6.4.20. Hinweis: Diese Übung verfeinert 5.3.18. Gegeben dg-Ringe A, B und ein A - B -dg-Bimodul X induziert für M beziehungsweise N beliebige dg-Rechtsmoduln über A beziehungsweise B die offensichtliche Abbildung Isomorphismen von Komplexen abelscher Gruppen

$$\text{Hom}_{-A}(M, \text{Hom}_{-B}(X, N)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{-B}(M \otimes_A X, N)$$

Insbesondere erhalten wir durch Übergang zur nullten Homologie natürliche Bijektionen $\text{dgHot}_{-A}(M, \text{Hom}_{-B}(X, N)) \xrightarrow{\sim} \text{dgHot}_{-B}(M \otimes_A X, N)$. Unsere Adjunktion 5.3.18 liefert als Koeinheit der Adjunktion [TF] 4.8.1 weiter natürliche Kettenabbildungen von B -Rechtsmoduln $\text{Hom}_{-B}(X, M) \otimes_A X \rightarrow M$, die auch explizit als das „Auswerten von Homomorphismen auf Elementen“ beschrieben werden können.

6.5 Erweiterungen von abelschen Gruppen

6.5.1. Um unsere Kohomologiegruppen aus den Homologiegruppen berechnen zu können, brauchen wir **Erweiterungen**. Unter einer Erweiterung einer abelschen Gruppe M durch eine abelsche Gruppe N versteht man zunächst einmal eine kurze exakte Sequenz $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$. Eine zweite solche Erweiterung $N \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow M$ heißt **isomorph** oder genauer **erweiterungsisomorph** zu unserer ersten Erweiterung, wenn es einen Isomorphismus $E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} N & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & M \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & N & \hookrightarrow & E' & \twoheadrightarrow & M \end{array}$$

zum Kommutieren bringt. Wir werden uns im folgenden überlegen, daß die Isomorphieklassen von derartigen Erweiterungen eine Menge, ja sogar in natürlicher Weise eine abelsche Gruppe bilden, und wie wir diese Gruppe zu gegebenen M und N effektiv berechnen können. Die eigentliche Arbeit beginnen wir mit einem

etwas künstlichen aber formal einfacheren Zugang zu besagter Gruppe. Das Ausarbeiten des Zusammenhangs zum hier nur skizzierten namensgebenden Zugang überlasse ich dem Leser als Übung 6.5.6.

Definition 6.5.2. Gegeben ein Homomorphismus $f : A \rightarrow B$ von abelschen Gruppen erklärt man seinen **Kokern** als die abelsche Gruppe

$$\text{cok } f := B/(\text{im } f)$$

Definition 6.5.3. Gegeben zwei abelsche Gruppen M und N erklären wir eine dritte abelsche Gruppe $\text{Ext}(M, N)$ durch die Vorschrift

$$\text{Ext}(M, N) := \text{cok} \left(\text{Hom}(\mathbb{Z}M, N) \rightarrow \text{Hom}(KM, N) \right)$$

für $KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$ die Standardauflösung von M aus 5.3.6. Sie heißt die Gruppe der **Erweiterungen von M durch N** . Die Notation rührt her von der englischen und französischen Bezeichnung **extension**.

6.5.4 (**Funktorialität von Ext**). Offensichtlich ist Ext ein kovarianter Funktor in der zweiten und ein kontravarianter Funktor in der ersten Variablen. Wir notieren das Anwenden von Morphismen auf Erweiterungen wie eine Verknüpfung von Morphismen, wobei wir eine Erweiterung als einen „Morphismus von höherem Grad“ auffassen. In Ist M frei, so spaltet die Sequenz $KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$ und wir folgern $\text{Ext}(M, N) = 0$ für alle N .

6.5.5. Wir können unsere Definition auch dahingehend umschreiben, daß wir den Komplex $\mathcal{P}M$ mit $\mathcal{P}_1M = KM$ und $\mathcal{P}_0M = \mathbb{Z}M$ und $\mathcal{P}_qM = 0$ für $q \neq 0, 1$ aus 5.3.6 betrachten und $N = N[0]$ als im Grad Null konzentrierten Komplex auffassen und im Sinne von 1.4.12 den Hom-Komplex $\mathcal{P}M \rightrightarrows N[0]$ bilden. Damit erhalten wir dann die Darstellung

$$\text{Ext}(M, N) = \mathcal{H}_{-1}(\mathcal{P}M \rightrightarrows N[0])$$

Andererseits definiert die Surjektion $\mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$ offensichtlich einen Isomorphismus

$$\text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0(\mathcal{P}M \rightrightarrows N[0])$$

Da nun nach 5.5.11 der Komplex $\mathcal{P}M$ aus freien abelschen Gruppen besteht, liefert jede kurze exakte Sequenz $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$ von abelschen Gruppen eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$(\mathcal{P}M \rightrightarrows N'[0]) \hookrightarrow (\mathcal{P}M \rightrightarrows N[0]) \twoheadrightarrow (\mathcal{P}M \rightrightarrows N''[0])$$

und die zugehörige lange exakte Homologiesequenz liefert mit den eben angegebenen Identifikationen eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}(M, N') & \hookrightarrow & \text{Hom}(M, N) & \rightarrow & \text{Hom}(M, N'') & \rightarrow \\ & & \rightarrow & & \text{Ext}(M, N') & \rightarrow & \text{Ext}(M, N) & \rightarrow & \text{Ext}(M, N'') & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Sie heißt die lange exakte **Ext-Sequenz im zweiten Eintrag**.

Übungen

Ergänzende Übung 6.5.6. Man zeige, daß wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Erweiterungen von } M \text{ durch } N \text{ im Sinne} \\ \text{von 6.5.1, bis auf Erweiterungsisomorphie} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \text{Ext}(M, N)$$

erhalten, indem wir jeder kurzen exakten Sequenz $N \hookrightarrow E \rightarrow M$ das Bild in $\text{Ext}(M, N)$ der Identität auf M unter dem Randoperator der zugehörigen Ext-Sequenz im zweiten Eintrag zuordnen. Hinweis: Gegeben $e \in \text{Ext}(M, N)$ wähle man einen Repräsentanten $\tilde{e} : KM \rightarrow N$ und bilde durch pushout in die Mitte im Sinne von 6.6.8 ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} KM & \hookrightarrow & \mathbb{Z}M & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ N & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & M \end{array}$$

Man zeige weiter, daß für $f : M' \rightarrow M$ eine kurze exakte Sequenz $N \hookrightarrow F \rightarrow M'$ genau dann der Erweiterung $e \circ f \in \text{Ext}(M', N)$ entspricht, wenn es einen vertikalen Isomorphismus in der Mitte gibt, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} N & \hookrightarrow & F & \twoheadrightarrow & M' \\ \parallel & & \downarrow & & f \\ N & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & M \end{array}$$

kommutativ macht. Daß wir für vorgegebenes f ein mögliches F als pull-back konstruieren können. Und daß entsprechendes dual für $g : N \rightarrow N'$ gilt.

6.6 Injektive abelsche Gruppen

Definition 6.6.1. Ein Modul I über einem Ring R heißt **injektiv**, wenn gegeben irgendein weiterer Modul M über unserem Ring und darin ein Untermodul $U \subset M$ sich jeder Modulhomomorphismus $U \rightarrow I$ zu einem Modulhomomorphismus $M \rightarrow I$ ausdehnen läßt. In Formeln heißt das also: Für jede Injektion $i : U \hookrightarrow M$ von R -Moduln liefert das Vorschalten von i eine Surjektion

$$(\circ i) : \text{Mod}_R(M, I) \twoheadrightarrow \text{Mod}_R(U, I)$$

Beispiele 6.6.2. Ist k ein Körper, so ist jeder k -Modul injektiv als k -Modul, aber natürlich nicht notwendig als abelsche Gruppe. Einen injektiven \mathbb{Z} -Modul nennen wir eine **injektive abelsche Gruppe**. Die abelsche Gruppe \mathbb{Q} ist injektiv, wie die gleich anschließende Proposition 6.6.5 zeigt. Alternativ können wir auch argumentieren, daß für $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt $\text{Ab}(M, \mathbb{Q}) = \text{Mod}_{\mathbb{Q}}(S^{-1}M, \mathbb{Q})$ nach der

universellen Eigenschaft der Lokalisierung [KAG] 4.3.3 und daß die rechte Seite ein exakter Funktor in M ist wegen der Exaktheit der Lokalisierung [KAG] 4.3.11. Wieder anders können wir auch argumentieren, daß gilt $\text{Ab}(M, \mathbb{Q}) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M, \mathbb{Q})$ nach [KAG] 2.8.7 und daß die rechte Seite ein exakter Funktor in M ist nach [KAG] 2.5.16.

Definition 6.6.3. Eine abelsche Gruppe heißt **divisibel**, wenn für jede von Null verschiedene ganze Zahl n der durch die Multiplikation mit dieser Zahl gegebene Endomorphismus unserer Gruppe surjektiv ist.

Beispiel 6.6.4. Sowohl \mathbb{Q} als auch \mathbb{Q}/\mathbb{Z} sind divisible abelsche Gruppen.

Proposition 6.6.5. 1. Eine abelsche Gruppe I ist injektiv genau dann, wenn gilt $\text{Ext}(M, I) = 0$ für alle M ;

2. Eine abelsche Gruppe ist injektiv genau dann, wenn sie divisibel ist;

3. Jeder Quotient einer injektiven abelschen Gruppe ist injektiv;

4. Jede abelsche Gruppe läßt sich in eine Injektive einbetten.

Ergänzung 6.6.6. Der Beweis zeigt genauer, daß jede abelsche Gruppe M in eine injektive abelsche Gruppe der Kardinalität $\leq \max(\text{card } M, \text{card } \mathbb{N})$ eingebettet werden kann.

6.6.7. Analoges gilt mit einem analogen Beweis auch für Moduln über beliebigen Hauptidealringen. So erhalten wir zum Beispiel, daß $\mathbb{C}[t, t^{-1}]/t\mathbb{C}[t]$ ein injektiver $\mathbb{C}[t]$ -Modul ist, denn die Multiplikation mit t ist offensichtlich surjektiv und die Multiplikationen mit $(t - \alpha)$ sind sogar bijektiv, ja induzieren Automorphismen der von t^0, \dots, t^{-n} erzeugten Teilräume für alle n , da sie dort den einzigen Eigenwert α haben. Allgemeiner und mit mehr Kenntnissen aus der kommutativen Algebra erkennt man in derselben Weise, daß gegeben ein Hauptidealring R mit einem Primelement p der R -Modul $R[p^{-1}]/pR$ injektiv ist.

6.6.8. Der folgende Beweis verwendet die Konstruktion des „push-out in der Kategorie der abelschen Gruppen“ : Gegeben Homomorphismen abelscher Gruppen $\phi : A \rightarrow B$ und $\psi : A \rightarrow C$ bildet man die abelsche Gruppe $P := (B \oplus C)/\{(\phi(a), -\psi(a)) \mid a \in A\}$ mit den durch die Einbettungen induzierten Morphismen $B \rightarrow P$ und $C \rightarrow P$ und erhält so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \rightarrow & P \end{array}$$

von abelschen Gruppen. Die Gruppe P oder genauer die „Hälfte dieses Diagramms unterhalb der Linie durch B und C “ heißt der **push-out** der Hälfte oberhalb besagter Linie. Im Rahmen der Kategorientheorie in [TF] 2.3.1 mag man

die universelle Eigenschaft kennenlernen, die push-outs in beliebigen Kategorien charakterisiert. In unserem speziellen Fall erkennt man leicht, daß die Injektivität eines Ausgangspfeils die Injektivität des dazu parallelen Pfeils in den push-out impliziert und daß die Surjektivität eines Ausgangspfeils gleichbedeutend ist zur Surjektivität des dazu parallelen Pfeils in den push-out, in Formeln $(A \hookrightarrow B) \Rightarrow (C \hookrightarrow P)$ und $(A \twoheadrightarrow B) \Leftrightarrow (C \twoheadrightarrow P)$. Man vergleiche hierzu auch Übung [TF] 2.3.6.

Beweis. 1. Für I injektiv folgt $\text{Ext}(M, I) = 0$ aus der Definition. Sei umgekehrt I eine abelsche Gruppe mit $\text{Ext}(M, I) = 0$ für alle M . Gegeben eine Injektion $B' \hookrightarrow B$ gilt es, jeden Morphismus $B' \rightarrow I$ zu einem Morphismus $B \rightarrow I$ auszudehnen. Dazu bilden wir den push-out

$$\begin{array}{ccc} B' & \hookrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

mit einer Injektion in der unteren Horizontalen nach 6.6.8. Vervollständigen wir diese untere Horizontale zu einer kurzen exakten Sequenz $I \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow K$ und bilden dazu die Ext-Sequenz im zweiten Eintrag 6.5.5 mit $M = K$, so folgt, daß die Surjektion $Y \twoheadrightarrow K$ spaltet alias ein Rechtsinverses besitzt. Mit 2.2.12 folgt, daß dann auch die Injektion $I \hookrightarrow Y$ spaltet, und ein Linksinverses $Y \rightarrow I$ dazu liefert die gewünschte Ausdehnung.

2. Ist I injektiv, so induziert für alle $n \neq 0$ die Injektion $(n \cdot) : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ eine Surjektion $\text{Hom}(\mathbb{Z}, I) \twoheadrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, I)$ alias $(n \cdot) : I \twoheadrightarrow I$. Jede injektive abelsche Gruppe ist also divisibel. Die Umkehrung zeigen wir mit dem Zorn'schen Lemma. Sei I divisibel, $A' \subset A$ eine Untergruppe und $\varphi' : A' \rightarrow I$ ein Homomorphismus. Es gilt, φ' auf ganz A auszudehnen. Wir betrachten dazu die Menge aller Paare (A_1, φ_1) mit A_1 einer Untergruppe von A oberhalb von A' und φ_1 einer Fortsetzung von φ' auf A_1 . Die Menge aller derartigen Paare ist in offensichtlicher Weise induktiv geordnet, wir finden also eine maximale Fortsetzung $(A_{\max}, \varphi_{\max})$. Wäre hier nicht $A_{\max} = A$, so könnten wir ein a in der Komplementmenge wählen und das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} m\mathbb{Z} & \hookrightarrow & n\mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & A_{\max} \cap \langle a \rangle & \twoheadrightarrow & A_{\max} \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ m\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot a} & \langle a \rangle & \twoheadrightarrow & A_{\max} + \langle a \rangle \end{array}$$

bilden. Hier steht rechts ein Pushout, $m\mathbb{Z}$ sei der Annulator von a , und $n\mathbb{Z}$ das Urbild von $A_{\max} \cap \langle a \rangle$ unter $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \langle a \rangle$, $r \mapsto ra$. Da I divisibel ist, können wir die Einschränkung von φ_{\max} längs der oberen Horizontale längs der Einbettung

$n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ fortsetzen, und da auch diese Fortsetzung auf $m\mathbb{Z}$ verschwinden muß, induziert sie $\varphi_a : \langle a \rangle \rightarrow I$. Dies φ_{\max} und φ_a zusammen liefern dann eine Fortsetzung von φ_{\max} auf den pushout. Das aber widerspräche der Maximalität unserer Fortsetzung.

3. Das folgt direkt aus 2, oder auch aus 1 mit der Ext-Sequenz 6.5.5.

4. Eine derartige Einbettung liefert nach 3 die rechte Vertikale des kokartesischen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}M & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}M & \twoheadrightarrow & I \end{array}$$

Daß die untere Horizontale eine Surjektion und die rechte Vertikale eine Injektion ist, folgt aus der expliziten Konstruktion des pushout nach 6.6.8. \square

Beweisvariante zur Injektivität divisibler abelscher Gruppen. Wir können die Injektivität divisibler abelscher Gruppen alternativ auch aus dem anschließenden Lemma folgern, das in unserer Terminologie zeigt $\text{Ext}(N, I) = 0$ für jede abelsche Gruppe N und jede divisible abelsche Gruppe I . Umgekehrt folgt dieses Lemma auch unmittelbar aus der Injektivität divisibler abelscher Gruppen. \square

Lemma 6.6.9. *Ist M eine abelsche Gruppe und $I \subset M$ eine divisible Untergruppe, so gibt es eine weitere Untergruppe $D \subset M$ mit $M = I \oplus D$.*

Beweis. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es unter allen Untergruppen von M , die I nur in der Null treffen, eine maximale Untergruppe D . Es reicht zu zeigen, daß gilt $I + D = M$. Zunächst beachten wir, daß

$$D' := \{v \in M \mid \exists n \in \mathbb{Z} \setminus 0 \text{ mit } nv \in D\}$$

auch eine Untergruppe von M ist. Dann beachten wir, daß aufgrund unserer Annahme an I auch gilt $D' \cap I = 0$. Wegen der Maximalität von D haben wir also $D' = D$. Wäre nun $I + D \neq M$, so könnten wir $c \in M$ mit $c \notin I + D$ finden. Ich behaupte, daß dann $I \cap (D + \mathbb{Z}c) = 0$ gälte im Widerspruch zur Maximalität von D . In der Tat folgt aus $q = d + nc$ mit $q \in I \setminus 0$ und $d \in D$ bereits $n \neq 0$. Es gibt also $p \in I$ mit $np = q$ und dann auch $n(p - c) = d$. Daraus aber folgt erst $p - c \in D' = D$ und dann $c \in I + D$ im Widerspruch zu unserer Annahme. \square

6.6.10. Ist $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen und ist M ein weitere abelsche Gruppe, so ist die induzierte Sequenz

$$\text{Hom}(M, N') \hookrightarrow \text{Hom}(M, N) \twoheadrightarrow \text{Hom}(M, N'')$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß keineswegs wieder eine Surjektion sein. Ist jedoch M frei, so ist auch der rechte Pfeil offensichtlich wieder

eine Surjektion und unsere Sequenz folglich exakt. Ist ähnlich $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen und ist N eine weitere abelsche Gruppe, so ist die induzierte Sequenz

$$\mathrm{Hom}(M'', N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(M, N) \rightarrow \mathrm{Hom}(M', N)$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß ebensowenig eine Surjektion sein. Unsere Erweiterungsgruppen sind in gewisser Weise Korrekturterme für diese Phänomene. Im ersten Fall ist das die Bedeutung von 6.5.5. Wir zeigen es nun als 6.6.11 zweiten Fall.

6.6.11 (Ext-Sequenz im ersten Eintrag). Gegeben eine abelsche Gruppe N betrachten wir die kurze exakte Sequenz $N \hookrightarrow I_N \twoheadrightarrow K_N$ mit der im letzten Schritt des Beweises von 6.6.5 als pushout konstruierten Einbettung von N in eine injektive Gruppe $I = I_N$ als erstem Pfeil und dem Kokern dieser Einbettung als zweitem Pfeil. Den Zweischnittkomplex $I_N \twoheadrightarrow K_N$ in Grad Null und (-1) notieren wir $\mathcal{I}N$. Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ erhält man nun wegen der Injektivität der Einträge $\mathcal{I}N$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$(M''[0] \rightrightarrows \mathcal{I}N) \hookrightarrow (M[0] \rightrightarrows \mathcal{I}N) \twoheadrightarrow (M'[0] \rightrightarrows \mathcal{I}N)$$

Die zugehörige lange exakte Homologiesequenz liefert mit den durch die Homologiesequenz im zweiten Eintrag gegebenen Identifikationen eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}(M'', N) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(M, N) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(M', N) & \rightarrow \\ & & \rightarrow & & \mathrm{Ext}(M'', N) & \rightarrow & \mathrm{Ext}(M, N) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Ext}(M', N) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Sie heißt die **lange exakte Ext-Sequenz im ersten Eintrag**.

6.6.12. Oliver Bräunling hat mir erklärt, warum für eine abelsche Gruppe A aus $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}) = 0 = \mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ folgt $A = 0$. Zunächst folgt $A/pA = 0$ für alle Primzahlen p aus der exakten Sequenz zu $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p$. Also ist die Multiplikation mit p eine Surjektion und wir erhalten eine weitere kurze exakte Sequenz $\ker(p \cdot) \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A$ und folgern $\mathrm{Ext}(\ker(p \cdot), \mathbb{Z}) = 0$ und dann $\ker(p \cdot) = 0$. Also ist die Multiplikation mit p eine Bijektion $A \xrightarrow{\sim} A$ für jede Primzahl p , also ist A ein \mathbb{Q} -Vektorraum, und dann folgt leicht $A = 0$ wegen $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \neq 0$ nach Übung 6.6.19. Zentral ist in dieser Argumentation der Basisexistenzsatz für die \mathbb{F}_p -Vektorräume A/pA und $\ker(p \cdot)$ sowie am Schluß für den \mathbb{Q} -Vektorraum A .

6.6.13. Eine berühmte **Vermutung von Whitehead** dahingehend, daß für abelsche Gruppen A gilt

$$\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow A \text{ frei}$$

ist von Shelah [She74] in ganz absonderlicher Weise „gelöst“ worden: Ob die Vermutung stimmt oder nicht, ist im üblichen Axiomensystem „Zermelo-Fraenkel mit Auswahlaxiom“ der Mengenlehre nicht entscheidbar!

Übungen

Übung 6.6.14. Ähnlich wie im Fall der Torsionsgruppen zeige man, daß gegeben abelsche Gruppen M, N die von $\mathcal{P}M \rightarrow M[0]$ und $N[0] \hookrightarrow \mathcal{I}N$ induzierten Kettenabbildungen

$$(M[0] \rightrightarrows \mathcal{I}N) \rightarrow (\mathcal{P}M \rightrightarrows \mathcal{I}N) \leftarrow (\mathcal{P}M \rightrightarrows N[0])$$

auf der Homologie Isomorphismen induzieren.

Übung 6.6.15. Für jede abelsche Gruppe N und jede natürliche Zahl $m \neq 0$ liefert der Randoperator der Ext-Sequenz im ersten Eintrag zur kurzen exakten Sequenz $\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$N/mN \xrightarrow{\sim} \text{Ext}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N)$$

Übung 6.6.16. Gegeben eine abelsche Gruppe M und eine Familie von abelschen Gruppen (N_i) ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$\text{Ext}\left(M, \prod N_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod \text{Ext}(M, N_i)$$

Übung 6.6.17. Gegeben eine Familie von abelschen Gruppen (M_i) und eine abelsche Gruppe N ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$\text{Ext}\left(\bigoplus M_i, N\right) \xrightarrow{\sim} \prod \text{Ext}(M_i, N)$$

Übung 6.6.18. Gilt $\text{Ext}(P, N) = 0$ für alle N , so ist P frei. Im allgemeinen kann $\text{Ext}(M, N)$ durchaus Elemente unendlicher Ordnung enthalten. Hinweis: 6.6.16.

Ergänzende Übung 6.6.19. Man zeige, daß die Gruppe $\text{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ überabzählbar ist. Hinweis: $\text{Ab}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ ist abzählbar, $\text{Ab}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ aber überabzählbar.

6.7 Koeffizientenwechsel

Satz 6.7.1. Sei C ein Komplex von freien abelschen Gruppen und G eine weitere abelsche Gruppe. So erhalten wir natürliche unkanonisch spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\text{Ext}(\mathcal{H}_{q-1}C, G) \hookrightarrow \mathcal{H}^q(C \rightrightarrows G[0]) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}_q C, G)$$

Korollar 6.7.2 (Universelles Koeffiziententheorem der Kohomologie). Ist X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe, so haben wir natürliche kurze exakte Sequenzen

$$\text{Ext}(H_{q-1}X, G) \hookrightarrow H^q(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_q X, G)$$

Diese Sequenzen spalten sogar für jedes X , aber es gibt keine Transformation, die so eine Spaltung für alle X liefert.

Beispiel 6.7.3. Für jeden topologischen Raum X haben wir $H_{-1}X = 0$ und H_0X ist eine freie abelsche Gruppe. Das universelle Koeffiziententheorem liefert folglich stets Isomorphismen

$$H^0(X; G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_0X, G) \quad \text{und} \quad H^1(X; G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_1X, G)$$

Den ersten kennen wir schon aus 6.1.5.

Beispiel 6.7.4 (Universelles Koeffiziententheorem, Anwendung). Seien X ein topologischer Raum und $q \in \mathbb{Z}$. Sind dann H_qX und $H_{q-1}X$ endlich erzeugte abelsche Gruppen, so ist auch H^qX eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, deren Rang mit dem Rang von H_qX übereinstimmt, wohingegen ihr Torsionsanteil unkanonisch isomorph ist zum Torsionsanteil von $H_{q-1}X$. In Formeln gilt also unter den gegebenen Endlichkeitsannahmen

$$\text{rang } H^qX = \text{rang } H_qX \quad \text{und} \quad (H^qX)_{\text{tor}} \cong (H_{q-1}X)_{\text{tor}}.$$

Das alles folgt unmittelbar aus dem universellen Koeffiziententheorem in Verbindung mit der Strukturtheorie endlich erzeugter abelscher Gruppen [LA2] 4.4.5 und der Beschreibung von Ext aus 6.6.15.

Ergänzung 6.7.5 (Verallgemeinerung auf erbliche Koeffizienten). Der Satz gilt allgemeiner nach 5.5.11 mit demselben Beweis für k ein Hauptidealring oder ganz allgemein für Komplexe C projektiver Moduln und alle Ringe derart, daß jeder Untermodul eines projektiven Moduls projektiv ist. Derartige Ringe heißen **erbliche Ringe**, da sich bei ihnen „die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt“. Kaplansky hat ein Beispiel für einen erblichen Ring gefunden, dessen opponierter Ring nicht erblich ist. Man müßte also eigentlich genauer von **links-erblichen** und **rechtserblichen Ringen** reden.

Vorschau 6.7.6 (Verallgemeinerung auf allgemeinere Koeffizienten). Will man aus der Homologie eines topologischen Raums X mit Koeffizienten in einem Ring k die Kohomologie von X mit Koeffizienten in einem k -Modul G berechnen, so leistet das eine „Spektralsequenz mit E_2 -Term $\text{Ext}_k^i(H_j(X; k), G)$ “. Hier ist stets $\text{Ext}_k^0 = \text{Hom}_k$, in unserem speziellen Fall $k = \mathbb{Z}$ verschwinden darüber hinaus alle $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^i$ für $i \geq 2$, wir notieren $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1 = \text{Ext}$, und besagte Spektralsequenz degeneriert zur Aussage des obigen Korollars.

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz $G \hookrightarrow I_G \rightarrow K_G$ mit injektiven I_G und K_G aus 6.6.11. Unsere Sequenz führt zu einer kurzen exakten Sequenz von Komplexen

$$(C \rightrightarrows G[0]) \hookrightarrow (C \rightrightarrows I_G[0]) \rightarrow (C \rightrightarrows K_G[0])$$

Da I_G und K_G injektiv sind, sind die Funktoren $\text{Hom}(_, I_G)$ und $\text{Hom}(_, K_G)$ exakt und „kommutieren“ folglich mit dem Bilden der Homologie in derselben Weise,

wie wir das in 5.4.1 für das Tensorieren mit torsionsfreien Moduln gesehen hatten. Von der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz ist also ein Ausschnitt

$$\begin{array}{ccccccc} & & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{H}_{q-1}C, I_G) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{H}_{q-1}C, K_G) & \rightarrow \\ \rightarrow & \mathcal{H}^q(C \rightrightarrows G[0]) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{H}_qC, I_G) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{H}_qC, K_G) & \rightarrow \end{array}$$

Die Ext-Sequenz im zweiten Eintrag liefert uns damit wie gewünscht kurze exakte Sequenzen

$$\text{Ext}(\mathcal{H}_{q-1}C, G) \hookrightarrow \mathcal{H}^q(C \rightrightarrows G[0]) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}_qC, G)$$

Es bleibt zu zeigen, daß unsere Sequenzen spalten. So eine Spaltung folgt aber wie zu Ende des Beweises von 5.5.2 aus der Existenz einer Spaltung der Einbettung $\mathcal{Z}_qC \hookrightarrow C_q$: Solch eine Spaltung $C_q \rightarrow \mathcal{Z}_qC$ induziert nämlich eine Abbildung $\text{Hom}(\mathcal{H}_qC, G) \hookrightarrow \text{Hom}(\mathcal{Z}_qC, G) \rightarrow (C \rightrightarrows G[0])^q$, die in $\mathcal{Z}^q(C \rightrightarrows G[0])$ landet. \square

Ergänzung 6.7.7. Bereits für einen unendlichen diskreten Raum X ist der natürliche Homomorphismus $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H^0(X) \rightarrow H^0(X; \mathbb{Q})$ kein Isomorphismus. In der Kohomologie ist insbesondere der Übergang von Koeffizienten \mathbb{Z} zu Koeffizienten \mathbb{Q} nicht so einfach wie in der Homologie, ja ich weiß noch nicht einmal, wie man ihn überhaupt bewerkstelligen sollte.

Übungen

Übung 6.7.8. Das universelle Koeffiziententheorem der Kohomologie gilt mit demselben Beweis auch in der relativen Kohomologie. Was besagt es im Fall der relativen Kohomologie des Möbiusbands relativ zu seinem Randkreis?

7 Poincaré-Dualität

7.1 Limites und Kolimites

7.1.1. Limites und Kolimites sind weitreichende Verallgemeinerungen von Produkten beziehungsweise Koprodukten, zu denen sie im Spezialfall eines „Köchers ohne Pfeile“ spezialisieren. Im Fall eines Winkeldiagramms als Köcher spezialisiert der Limes zum Faserprodukt alias pullback, im Fall eines Kowinkeldiagramms der Kolimes zum pushout.

Definition 7.1.2. Gegeben ein Köcher \mathcal{I} und eine Kategorie \mathcal{C} ist die Vorschrift, die jedem Objekt die entsprechende **konstante Darstellung** unseres Köchers zuordnet, ein Funktor

$$\text{konst} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$$

Wenn der partielle Linksadjungierte dieses Funktors auf einer Köcherdarstellung $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ definiert ist, so nennen wir seinen Wert den **Kolimes** unserer Köcherdarstellung. Ist unsere Köcherdarstellung D gegeben durch $D : i \mapsto D_i$ und $D : \mathcal{I}(i, j) \rightarrow \mathcal{C}(D_i, D_j)$, so notieren wir den Kolimes

$$\text{col}_{i \in \mathcal{I}} D_i$$

Er ist in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus wenn er existiert, weshalb wir dafür auch den bestimmten Artikel verwenden. Die Bilder der Pfeile unter einer Köcherdarstellung kürzen wir gerne mit demselben Symbol $D(p) = p$ ab wie die Pfeile selbst. Wenn analog der partielle Rechtsadjungierte unseres Funktors konst auf einer Köcherdarstellung definiert ist, so nennen wir seinen Wert den **Limes** unserer Köcherdarstellung und notieren ihn

$$\lim_{i \in \mathcal{I}} D_i$$

7.1.3. Ausgeschrieben besteht unser Kolimes aus einem Objekt $K = \text{col } D_i$ mitsamt Morphismen $\text{in}_i : D_i \rightarrow K$ derart, daß gilt $\text{in}_j \circ D(p) = \text{in}_i$ für alle Pfeile $p \in \mathcal{I}(i, j)$ und daß folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist: Gegeben ein Objekt $N \in \mathcal{C}$ mitsamt Morphismen $\psi_i : D_i \rightarrow N$ derart, daß gilt $\psi_j \circ D(p) = \psi_i$ für alle Pfeile $p \in \mathcal{I}(i, j)$, existiert genau einen Morphismus $\psi : K \rightarrow N$ mit $\psi \circ \text{in}_i = \psi_i$ für alle i .

7.1.4. Der Kolimes einer Darstellung $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ eines Köchers fällt zusammen mit dem Limes der Darstellung $F^{\text{opp}} : \mathcal{I}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{opp}}$ des opponierten Köchers in der opponierten Kategorie.

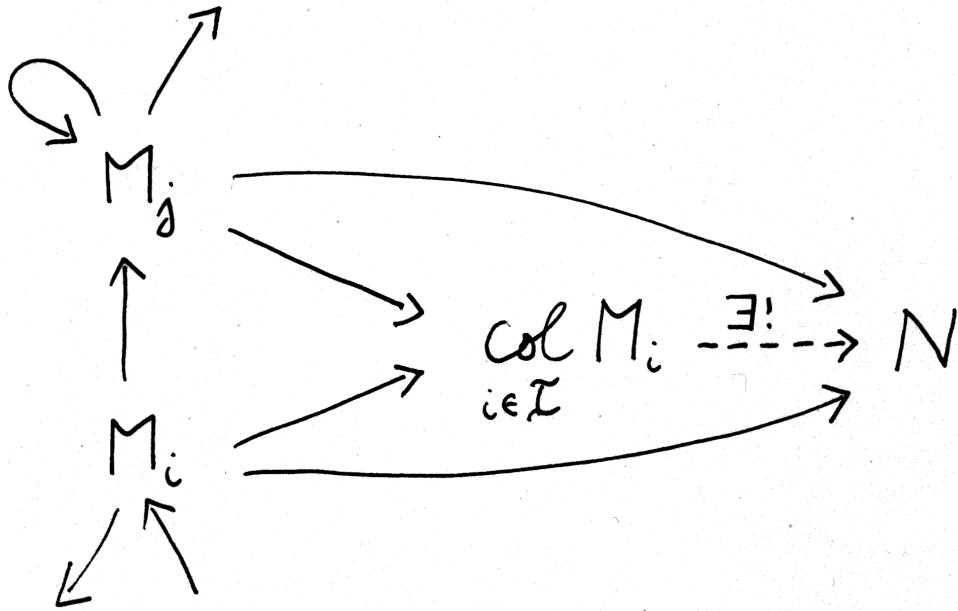


Illustration zum Kolimes

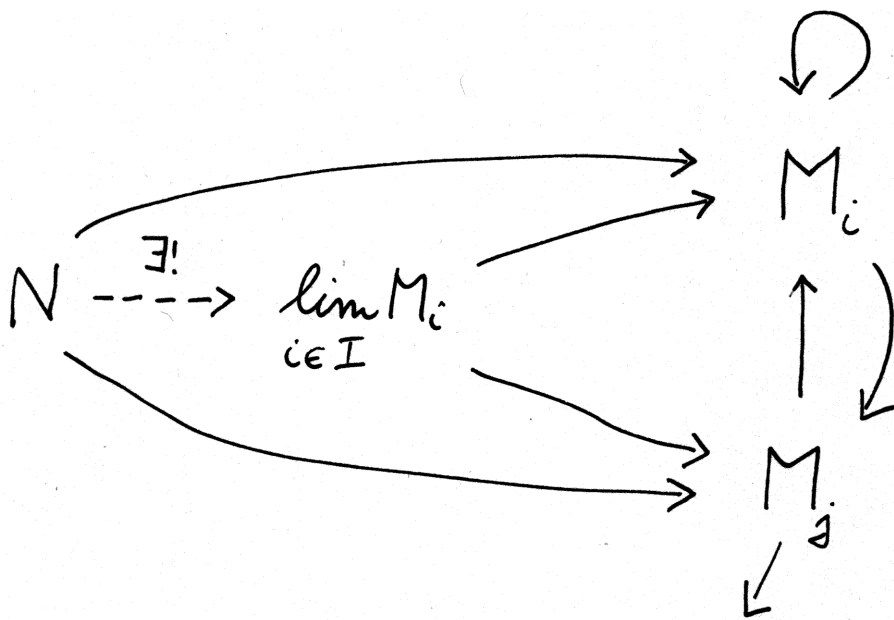


Illustration zum Limes

7.1.5. Ausgeschrieben besteht unser Limes aus einem Objekt $L = \lim D_i$ mitsamt Morphismen $\text{pr}_i : L \rightarrow D_i$ derart, daß gilt $D(p) \circ \text{pr}_i = \text{pr}_j$ für alle Pfeile $p \in \mathcal{I}(i, j)$, und daß folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist: Gegeben ein Objekt $M \in \mathcal{C}$ mitsamt Morphismen $\psi_i : M \rightarrow D_i$ derart, daß gilt $D(p) \circ \psi_i = \psi_j$ für alle Pfeile $p \in \mathcal{I}(i, j)$, existiert genau ein Morphismus $\psi : M \rightarrow L$ mit $\text{pr}_i \circ \psi = \psi_i$ für alle i .

7.1.6 (**Diskussion der Terminologie**). Meist geht man spezieller von einer Kategorie \mathcal{I} aus und betrachtet nur Kolimites von Funktoren $F \in \text{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \subset \text{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$. Die Einschränkung auf diesen Spezialfall schien mir jedoch wenig sinnvoll. Oft geht man auch noch spezieller von einer teilgeordneten Indexmenge \mathcal{I} aus, dann ist die Kategorie mit je einem Morphismus von kleineren zu größeren Elementen gemeint. Im allgemeinen nenne ich eine Darstellung eines Köchers in einer Kategorie \mathcal{C} ein **Diagramm in \mathcal{C}** und einen Funktor von einer Kategorie in eine Kategorie \mathcal{C} ein **System in \mathcal{C}** . Meist findet man für den Kolimes die ausführlichere Notation colim . Oft verwendet man auch statt col und lim die Notationen \varinjlim und \varprojlim . Ich verwende sie nur im Fall von Systemen, die durch eine angeordnete Menge indiziert werden. Für unseren Kolimes findet man in der Literatur auch die Bezeichnungen als **induktiver Limes** und **direkter Limes**. Für unseren Limes findet man in der Literatur auch die Bezeichnungen als **projektiver Limes** und **inverser Limes**. Ich erlaube mir das jedoch nur im Fall filtrierender beziehungsweise kofiltrierender Systeme, wie sie in 7.1.12 eingeführt werden.

Beispiele 7.1.7 (Kolimes spezialisiert zu Koproduct und Pushout). Im Fall eines Köchers ohne Pfeile spezialisiert unser Kolimes zum Koproduct. Im Fall eines Kowinkeldiagramms spezialisiert unser Kolimes zum Pushout.

Beispiele 7.1.8 (Limes spezialisiert zu Produkt, Pullback und Egalisator). Im Fall eines Köchers ohne Pfeile spezialisiert unser Limes zum Produkt. Im Fall eines Winkeldiagramms spezialisiert unser Limes zum Pullback. Bezeichne schließlich \rightrightarrows den Köcher mit zwei Punkten und zwei Pfeilen, von dem ich der Einfachheit halber nur die Pfeile angedeutet habe. Der Limes einer Darstellung dieses Köchers heißt, wenn er existiert, auch der **Egalisator** der beiden Morphismen, die den Pfeilen unseres Köchers zugordnet werden. Sind zum Beispiel $f, g : X \rightarrow Y$ zwei Abbildungen von Mengen, so ist ihr Egalisator die Menge $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ mit ihrer Einbettung nach X .

Beispiel 7.1.9 (Kolimites von Mengen). In der Kategorie der Mengen existieren alle Kolimites: Unser universelles Problem wird gelöst von der Menge der Äquivalenzklassen in der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} M_i$ unter der Äquivalenzrelation \sim , die erzeugt wird durch die Äquivalenzen

$$\text{in}_i(a_i) \sim \text{in}_j(p(a_i)) \text{ für alle } i, j \in \mathcal{I} \text{ und alle } p \in \mathcal{I}(i, j) \text{ und alle } a_i \in M_i.$$

Wählen wir etwas vorsichtiger ein Universum \mathfrak{U} mit $\mathcal{I} \in \mathfrak{U}$ und $M_i \in \mathfrak{U} \forall i \in \mathcal{I}$, so existiert unser Kolimes in $\mathfrak{U}\text{Ens}$. Existiert umgekehrt unser Kolimes in $\mathfrak{U}\text{Ens}$ für ein Mengensystem \mathfrak{U} , so erkennt man leicht, daß er auch für jedes größere Mengensystem existieren und derselbe bleiben muß.

Beispiel 7.1.10 (Kolimes als aufsteigende Vereinigung). Gegeben sei ein Diagramm von Mengen mit Injektionen $M_0 \hookrightarrow M_1 \hookrightarrow M_2 \hookrightarrow \dots$. Sind alle diese Mengen Teilmengen einer Menge M und sind unsere Injektionen Inklusionen von Teilmengen, so liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\text{col}_{i \in \mathbb{N}} M_i \xrightarrow{\sim} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$$

Beispiel 7.1.11. In der Kategorie der abelschen Gruppen existieren Kolimites: Der Quotient der direkten Summe $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nach der Untergruppe, die erzeugt wird von allen $\text{in}_i(m) - \text{in}_j(p(m))$ für $i, j \in \mathcal{I}$, $p \in \mathcal{I}(i, j)$ und $m \in M_i$, löst unser universelles Problem.

Definition 7.1.12. Eine Kategorie \mathcal{I} heißt **filtrierend**, wenn (1) ihre Objektmenge nicht leer ist, wenn es (2) für je zwei Objekte $i, j \in \mathcal{I}$ ein Objekt $k \in \mathcal{I}$ mit Morphismen $i \rightarrow k, j \rightarrow k$ gibt und wenn es (3) für je zwei Morphismen $\varphi, \psi : i \rightarrow j$ einen Morphismus $\zeta : j \rightarrow k$ gibt mit $\zeta \circ \varphi = \zeta \circ \psi$. Eine Kategorie \mathcal{I} heißt **kofiltrierend**, wenn die opponierte Kategorie filtrierend ist.

7.1.13 (**Diskussion des Begriffs einer filtrierenden Kategorie**). Man kann die ersten beiden Forderungen vielleicht natürlicher dahingehend zusammenfassen, daß es für jede endliche Menge von Objekten ein Objekt geben soll, zu dem sie alle mindestens einen Morphismus haben. Einen weiteren Grund, Kategorien mit leerer Objektmenge nicht filtrierend zu nennen, lernen wir in 7.1.16 kennen.

7.1.14. Ein Kolimes eines Funktors von einer filtrierenden Kategorie in eine weitere Kategorie heißt auch ein **filtrierender Kolimes** und wir notieren derartige Kolimites colf . Im Prinzip ist diese Notation unnötig, aber filtrierende Kolimites haben besonders gute Eigenschaften und unsere Notation ist eine effiziente Art, daran zu erinnern, daß wir in dieser Situation sind. Ein Limes über eine kofiltrierende Kategorie heißt dual ein **kofiltrierender Limes** und wir notieren derartige Limes limf . Schreiben wir $\text{colf}_{n \in \mathbb{N}} X_n$, so gehen wir stets implizit von einem System der Gestalt $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots$ aus, über das der Kolimes zu bilden ist. Schreiben wir $\text{limf}_{n \in \mathbb{N}} X_n$, so gehen wir stets implizit von einem System der Gestalt $\dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0$ aus, über das der Limes zu bilden ist.

7.1.15 (**Filtrierende Kolimites von Mengen**). Im Fall eines mengenwertigen Funktors $M \in \text{Cat}(\mathcal{I}, \text{Ens})$ auf einer filtrierenden Kategorie \mathcal{I} kann man die

Äquivalenzrelation \sim auf der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup M_i$ aus 7.1.9 mit

$$\text{colf } M = \left(\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} M_i \right) / \sim$$

sehr viel expliziter beschreiben: Genau dann gilt unter dieser Annahme $a_i \sim a_j$, wenn es Morphismen $\varphi : i \rightarrow k$ und $\psi : j \rightarrow k$ gibt mit $\varphi(a_i) = \psi(a_j)$ in M_k . In der Tat liefert für filtrierendes \mathcal{I} diese Vorschrift eine Äquivalenzrelation, von der man leicht zeigt, daß sie mit der in 7.1.9 beschriebenen Äquivalenzrelation übereinstimmen muß.

7.1.16. Gegeben ein Köcher \mathcal{I} und darüber ein System $M \in \text{Car}(\mathcal{I}, \text{Ens}^*)$ von bepunkteten Mengen liefern die universellen Eigenschaften eine natürliche Abbildung $\text{col}_{\mathcal{I} \rightarrow \text{Ens}} M \rightarrow \text{col}_{\mathcal{I} \rightarrow \text{Ens}^*} M$ von dem in der Kategorie der Mengen berechneten Kolimes zu dem in der Kategorie der punktierten Mengen berechneten Kolimes. Im Fall eines durch eine filtrierende Kategorie \mathcal{I} indizierten Systems $M \in \text{Cat}(\mathcal{I}, \text{Ens}^*)$ ist diese natürliche Abbildung nach der eben gegebenen Beschreibung filtrierender Kolimites eine Bijektion

$$\text{col}_{\mathcal{I} \rightarrow \text{Ens}} M \xrightarrow{\sim} \text{col}_{\mathcal{I} \rightarrow \text{Ens}^*} M$$

Auch dafür ist unsere Bedingung an eine filtrierende Kategorie wesentlich, daß ihre Objektmenge nicht leer sein darf.

Definition 7.1.17. Sei \mathcal{I} ein Köcher. Eine Sequenz $F \rightarrow G \rightarrow H$ in der Kategorie $\text{Car}(\mathcal{I}, \text{Ens}^*)$ der Darstellungen von \mathcal{I} durch bepunktete Mengen heißt **exakt**, wenn für jedes $i \in \mathcal{I}$ die Sequenz $F_i \rightarrow G_i \rightarrow H_i$ exakt ist.

Lemma 7.1.18 (Exaktheit filtrierender Kolimites von Mengen). Gegeben eine filtrierende Kategorie \mathcal{I} macht das Bilden des Kolimes von Mengen und nach 7.1.16 gleichbedeutend von punktierten Mengen $\text{colf} : \text{Cat}(\mathcal{I}, \text{Ens}^*) \rightarrow \text{Ens}^*$ aus exakten Sequenzen exakte Sequenzen.

7.1.19 (**Exaktheit filtrierender Kolimites von Gruppen**). Für ein filtrierendes System von Gruppen erhalten wir auf dem Mengenkolimes aus 7.1.15 in offensichtlicher Weise eine Struktur als Gruppe, und es ist auch klar, daß wir so den Kolimes in der Kategorie der Gruppen konstruieren können. Unser Lemma gilt also analog auch für Gruppen.

Beweis. Sei $F \rightarrow G \rightarrow H$ unsere Sequenz. Bezeichne $(\varphi_i), (\psi_i)$ die Morphismen unserer Sequenz und φ, ψ ihre Kolimites. Sicher ist die Verknüpfung auch im Kolimes konstant. Ist andererseits $\text{in}_i(g_i) \in \text{colf } G$ ein Element im Kolimes der Mitte, das auf $*$ in $\text{colf } H$ geht, so folgt $\text{in}_i \psi_i(g_i) = *$, nach 7.1.15 also $\zeta \psi_i(g_i) = *$ für geeignetes $\zeta : i \rightarrow j$, also $\psi_j \zeta(g_i) = *$ und folglich gilt $\zeta(g_i) = \varphi_j(f_j)$ und $\text{in}_i(g_i) = \varphi \text{in}_j(f_j)$. \square

Definition 7.1.20. Eine Unterkategorie $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ einer filtrierenden Kategorie heißt **konfinal**, wenn sie voll ist und wenn es für jedes $i \in \mathcal{I}$ einen Morphismus zu einem Objekt $k \in \mathcal{K}$ gibt.

7.1.21 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißt diese Eigenschaft meist „kofinal“. Da die Vorsilbe „ko“ aber in diesem Zusammenhang mit der Bedeutung „dasselbe für die opponierte Kategorie“ belastet ist, habe ich die Terminologie variiert.

Lemma 7.1.22 (Übergang zu konfinalen Teilsystem). Seien \mathcal{I} eine filtrierende Kategorie, $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ konfinal und $M : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Genau dann existiert der Kolimes von M über \mathcal{I} , wenn der Kolimes über \mathcal{K} existiert, und dann ist der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus

$$\operatorname{colim}_{k \in \mathcal{K}} M_k \xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} M_i$$

Beweis. Beide Seiten haben dieselbe universelle Eigenschaft. Man überzeuge sich davon zunächst im Spezialfall, daß \mathcal{I} ein finales Objekt besitzt und daß \mathcal{K} nur aus diesem einen finalen Objekt besteht. \square

Beispiel 7.1.23 (Limites von Mengen). In der Kategorie der Mengen existieren Limites: Die Teilmenge des Produkts $\prod_{i \in \mathcal{I}} M_i$, die besteht aus allen Tupeln $(m_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $p(m_i) = m_j$ für alle Pfeile $p : i \rightarrow j$, löst unser universelles Problem. Wählen wir etwas vorsichtiger ein Universum \mathcal{U} mit $\mathcal{I} \in \mathcal{U}$ und $M_i \in \mathcal{U} \forall i \in \mathcal{I}$, so existiert unser Limes in $\mathcal{U}\text{Ens}$. Existiert umgekehrt unser Limes in $\mathcal{U}\text{Ens}$ für ein Mengensystem \mathcal{U} , so erkennt man leicht, daß er auch für jedes größere Mengensystem existieren und derselbe bleiben muß.

Ergänzung 7.1.24 (Leere Limites nichtleerer Mengen). Der Limes eines kofiltrierenden Systems nichtleerer endlicher Mengen ist nicht leer: Das folgt aus dem Satz von Tychonoff [TM] 3.2.10 mit Übung [AN1] ?? zu nichtleeren Schnittmengen von Familien abgeschlossener Teilmengen in Kompakta. Im Fall unendlicher Mengen stimmt das nicht mehr. Die Mengen $\mathbb{Z}_{\leq n}$ mit den Inklusionen als Morphismen bilden etwa ein kofiltrierendes System nichtleerer unendlicher Mengen mit leerem Limes. Sogar bei einem kofiltrierenden System nichtleerer Mengen mit surjektiven Morphismen kann es verblüffenderweise vorkommen, daß der Limes leer ist. Mehr dazu findet man in der „Théorie des Ensembles“ von Bourbaki.

Beispiel 7.1.25 (Formale Potenzreihen als Limes). Wir können den Ring $k[[X]]$ der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in einem Ring k beschreiben als Limes des Systems aller „abgeschnittenen Polynomringe“. Genauer liefert die universelle Eigenschaft einen Isomorphismus $k[[X]] \xrightarrow{\sim} \operatorname{limf}_n k[X]/\langle X^n \rangle$.

7.1.26. Als Konsequenz unseres Resultats für Kolimites in 7.1.22 bleiben auch kofiltrierende Limes unverändert bei der Restriktion zu einer Unterkategorie, deren opponierte Kategorie konfinal ist in der Opponierten der Indexkategorie des ursprünglichen Systems.

Übungen

Übung 7.1.27 (Limes und volltreue Funktoren). Seien $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ eine Darstellung eines Köchers in einer Kategorie und $V : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}'$ ein volltreuer Funktor. Existiert dann der Limes von VD und liegt im essentiellen Bild von V , so existiert auch der Limes von D und der offensichtliche Morphismus ist ein Isomorphismus $V(\lim D) \xrightarrow{\sim} \lim(VD)$. Analoges gilt für Kolimites.

Ergänzende Übung 7.1.28. Gegeben ein CW-Komplex X ist seine Homologie der Kolimes der Homologie seiner Skelette, in Formeln

$$\operatorname{colim}_n H_q(X^{\leq n}) \xrightarrow{\sim} H_q(X)$$

für alle q . Hinweis: Man zeige zunächst die analoge Aussage für Ketten mit [TM] 1.7.36 und verwende dann die Exaktheit filtrierender Kolimites.

Übung 7.1.29. Gegeben ein Diagramm von Gruppen (oder abelschen Gruppen, oder Ringen, oder Moduln) trägt sein Limes als Diagramm von Mengen in natürlicher Weise die Struktur einer Gruppe (oder einer abelschen Gruppe, oder eines Rings, oder eines Moduls) und wird mit dieser Struktur ein Limes in der jeweiligen Kategorie.

Übung 7.1.30 (Linksadjungierte vertauschen mit Kolimites). Seien $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor und \mathcal{I} ein Köcher und $X : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$ eine Darstellung unseres Köchers. Existiert der Kolimes $\operatorname{col} X_i$ und besitzt L einen Rechtsadjungierten, so machen auch die offensichtlichen Morphismen $L(X_i) \rightarrow L(\operatorname{col} X_i)$ die rechte Seite zu einem Kolimes der Darstellung $LX : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$. Opponiert zeigt man, daß Rechtsadjungierte mit Limes vertauschen.

Übung 7.1.31 (Partielle Linksadjungierte vertauschen mit Kolimites). Seien genauer $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor und \mathcal{I} ein Köcher und $X : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$ eine Darstellung unseres Köchers. Existiert der Kolimes $\operatorname{col} X_i$ und ist der partielle Linksadjungierte $L : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{C}$ von R bei allen X_i sowie bei $\operatorname{col} X_i$ definiert, so machen auch die offensichtlichen Morphismen $L(X_i) \rightarrow L(\operatorname{col} X_i)$ die rechte Seite zu einem Kolimes der Darstellung $LX : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$. Opponiert zeigt man, daß partielle Rechtsadjungierte mit Limes vertauschen.

Übung 7.1.32. Ist (X_i) eine Darstellung eines Köchers in der Kategorie der topologischen Räume und Y lokal kompakt, so liefert die offensichtliche Abbildung

einen Homöomorphismus von Kolimites

$$\operatorname{col}(X_i \times Y) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{col} X_i) \times Y$$

Hinweis: 7.1.30 und Exponentialgesetz [TM] 1.9.9.

Übung 7.1.33. Die Realisierung des vollen Simplex über einer nichtleeren Menge E ist stets zusammenziehbar. Hinweis: Für die Teilmenge $\Delta(E) \subset \operatorname{Ens}(E, \mathbb{R})$ und ein Element $g \in \Delta(E)$ betrachte man die Abbildung $[0, 1] \times \Delta(E) \rightarrow \Delta(E)$ mit $(a, f) \mapsto ag + (1 - a)f$ und zeige mit 7.1.32, daß sie stetig ist. Weiter besitzt jeder Punkt sogar eine Umgebungsbasis aus offenen konvexen und mithin zusammenziehbaren Umgebungen.

Übung 7.1.34 (Transitivität von Limites und Kolimites). Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} Köcher und sei \mathcal{B} eine Kategorie und $X : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{B}$ eine Darstellung. So ist, immer unter der Voraussetzung der Existenz unserer Kolimites, der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus

$$\operatorname{col}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} X_{(i,j)} \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_{\mathcal{I}} \left(\operatorname{col}_{\mathcal{J}} X_{(i,j)} \right)$$

Analoges gilt für Limites.

Übung 7.1.35 (Transitivität von filtrierenden Limites und Kolimites). Sei eine Kategorie \mathcal{I} die Vereinigung einer in Bezug auf Inklusionen filtrierenden Familie von Unterkategorien $\mathcal{I} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{I}_\alpha$. So existiert für ein von \mathcal{I} indiziertes System, bei dem die Kolimites auf der linken Seite existieren, auch der Kolimes der rechten Seite und der natürliche Morphismus ist ein Isomorphismus

$$\operatorname{col}_{\alpha \in A} (\operatorname{col}_{i \in \mathcal{I}_\alpha} D_i) \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_{i \in \mathcal{I}} D_i$$

Übung 7.1.36 (Hinreichendes Kriterium für filtrierende Kolimites). Seien \mathcal{C} eine Kategorie und $X : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein filtrierendes System und $\psi = (\psi_i : X_i \rightarrow D)$ ein Morphismus in das konstante System zu einem Objekt $D \in \mathcal{C}$. Man zeige: Gibt es einen Index j und einen Morphismus $\varphi_j : D \rightarrow C_j$ mit $\psi_j \circ \varphi_j = \operatorname{id}_D$, so ist unser Morphismus ψ ein Kolimes.

Übung 7.1.37 (Tensorprodukte vertauschen mit Kolimites). In Formeln liefert also die kanonische Abbildung einen Isomorphismus

$$\operatorname{col}(M_i \otimes_R N) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{col} M_i) \otimes_R N$$

Hinweis: Man beachte, daß $\otimes_R N$ einen Rechtsadjungierten besitzt, und wende 7.1.30 an.

Ergänzende Übung 7.1.38. Gegeben eine abelsche Gruppe G und $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Kategorie mit $\text{Ab}(\mathbb{Z}^n, G)$ als Objektmenge und Morphismen $\zeta : \varphi \rightarrow \psi$ allen Gruppenhomomorphismen $\zeta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ mit $\psi \circ \zeta = \varphi$. Man zeige: Für $n \geq 2$ ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$\text{col}_\varphi \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} G$$

mit dem über die Kategorie $\text{Ab}(\mathbb{Z}^n, G)$ zu verstehenden Kolimes. Man zeige weiter, daß das für $n \leq 1$ nicht mehr stimmt.

Ergänzende Übung 7.1.39 (Kolimes eines Systems aus Surjektionen). Gegeben ein filtrierendes System (M_i) von Gruppen, dessen sämtliche Morphismen Surjektionen sind, kann man den Kolimes auch beschreiben, indem man ein i festhält und M_i teilt durch die Vereinigung der Kerne aller $p : i \rightarrow j$.

Ergänzende Übung 7.1.40 (Tensorprodukt über filtrierendem Kolimes). Mit Hilfe von 7.1.39 zeige man: Gegeben ein filtrierendes System von Ringen R_i mit Kolimes R und einen R -Rechtsmodul M sowie einen R -Linksmodul N induziert die kanonische Abbildung einen Isomorphismus

$$\text{colf}_i(M \otimes_{R_i} N) \xrightarrow{\sim} M \otimes_R N$$

Übung 7.1.41. Sei der topologische Raum X eine aufsteigende oder allgemeiner eine filtrierende Vereinigung offener Teilmengen. In Formeln gelte also $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und für je zwei Indizes $i, j \in I$ existiere ein Index $k \in I$ mit $U_i \subset U_k$ und $U_j \subset U_k$. So induzieren die offensichtlichen Abbildungen Isomorphismen

$$\text{colf } H_q(U_i) \xrightarrow{\sim} H_q(X) \quad \text{und} \quad \text{colf } \pi_1(U_i, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x),$$

wobei an zweiter Stelle der Kolimes über alle i mit $x \in U_i$ gemeint ist.

Ergänzende Übung 7.1.42. Algebraisch Gebildete mögen zeigen, daß in der Kategorie Kring der Kringe beliebige Kolimites existieren. Hinweis: Man beginne mit der Existenz filtrierender Kolimites in Anlehnung an 7.1.19. Man erinnere die Existenz endlicher Koproducte aus ???. Man folgere die Existenz beliebiger Koproducte als filtrierende Kolimites über alle endlichen Teilkoproducte. Schließlich gehe man noch zu geeignet zu Restklassenringen über.

Übung 7.1.43 (Exaktheitseigenschaften von Limites). Gegeben eine linksexakte Sequenz $M'_i \hookrightarrow M_i \rightarrow M''_i$ von Diagrammen abelscher Gruppen ist die Sequenz der Limites auch eine linksexakte Sequenz

$$\lim M'_i \hookrightarrow \lim M_i \rightarrow \lim M''_i$$

Sind unsere Diagramme indiziert durch $n \in \mathbb{N}$, aufgefaßt als Köcher mit Pfeilen $(n \rightarrow n - 1)$, und besteht die Sequenz aus kurzen exakten Sequenzen $M'_n \hookrightarrow$

$M_n \rightarrow M_n''$ und ist das linke System **surjektiv** in dem Sinne, daß alle seine Morphismen Surjektionen $M_n' \rightarrow M_{n-1}'$ sind, so bilden die inversen Limes sogar eine kurze exakte Sequenz

$$\limf_n M_n' \hookrightarrow \limf_n M_n \rightarrow \limf_n M_n''$$

Man kann das auch noch allgemeiner zeigen unter der noch schwächeren sogenannten **Mittag-Leffler-Bedingung**, daß in jedem M_n' die absteigende Folge der Bilder der M_j' mit $j > n$ nach endlich vielen Schritten konstant wird, etwa beim Bild von $M_{j(n)}'$. Hinweis: Wähle $j(n)$ jeweils kleinstmöglich. Gegeben ein Element des inversen Limes (m_n'') wähle man zunächst in der Mitte jeweils Urbilder m_n und davon ausgehend „bessere“ Urbilder als die Bilder $\tilde{m}_n \in M_n$ der $m_{j(n)}$, und ändere die $m_{j(n)}$ dann induktiv so ab, daß die \tilde{m}_n ein Element des inversen Limes werden.

Ergänzende Übung 7.1.44 (Exaktheitseigenschaften von Limes, Variante). Sei ein inverses System von kurzen exakten Sequenzen $M_\omega' \hookrightarrow M_\omega \rightarrow M_\omega''$ abelscher Gruppen über einer wohlgeordneten Menge Ω gegeben. Ist das linke System **transfinit surjektiv** in dem Sinne, daß für alle $\omega \in \Omega$ die offensichtlichen Abbildungen Surjektionen $M_\eta' \rightarrow \limf_{\omega < \eta} M_\omega'$ liefern, so bilden die inversen Limes eine kurze exakte Sequenz

$$\limf_\omega M_\omega' \hookrightarrow \limf_\omega M_\omega \rightarrow \limf_\omega M_\omega''$$

Hinweis: Man orientiere sich am Fall der wohlgeordneten Menge \mathbb{N} . Gäbe es für eine verträgliche Familie (m_ω'') kein Urbild, so gäbe es einen kleinsten Index η derart, daß wir zu einem vorgegebenen verträglichen System von Urbildern $(m_\omega)_{\omega < \eta}$ kein mögliches m_η finden könnten. Wieder reicht es auch aus, die **transfinite Mittag-Leffler-Bedingung** anzunehmen, daß es für jedes η ein $\alpha \geq \eta$ gibt derart, daß für $\beta \geq \alpha$ die Bilder von M_β' und M_α' in $\limf_{\omega < \eta} M_\omega'$ übereinstimmen.

Beispiel 7.1.45. Die kurzen exakten Sequenzen $p^n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ für $p \neq 0$ liefern im inversen Limes keine kurze exakte Sequenz: Die kanonische Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ von \mathbb{Z} in die p -adischen Zahlen ist nicht surjektiv.

Übung 7.1.46 (Übergang zu den Schnitten der Bilder beim Limes). Gegeben ein Diagramm M_i abelscher Gruppen über einem Köcher \mathcal{I} betrachten wir das Unterdiagramm der **Schnitte der Bilder** gegeben durch

$$S_i := \bigcap_{j \rightarrow i} \text{im}(M_j \rightarrow M_i)$$

Man zeige, daß die Einbettung dieses Unterdiagramms auf den Limes einen Isomorphismus $\lim S_i \xrightarrow{\sim} \lim M_i$ induziert.

Übung 7.1.47 (Übergang zum bidualen Diagramm beim Limes). Gegeben ein Diagramm M_i von Vektorräumen über einem Köcher \mathcal{I} zeige man: Besteht das Unterdiagramm der Schnitte aller Bilder aus endlichdimensionalen Untervektorräumen, gilt also in Formeln $\dim \bigcap_{j \rightarrow i} \text{im}(M_j \rightarrow M_i) < \infty$ für alle i , so induziert die Einbettung unseres Diagramms in das Diagramm der jeweiligen Bidualräume einen Isomorphismus $\lim M_i \xrightarrow{\sim} \lim M_i^{**}$. Hinweis: 7.1.46.

Übung 7.1.48 (Exakte Limites exakter Komplexe abelscher Gruppen). Sei ein durch die natürlichen Zahlen indiziertes inverses System von exakten Komplexen abelscher Gruppen gegeben. Sind alle Morphismen unseres Systems surjektiv, so ist auch der inverse Limes exakt. Sind genauer alle Komplexe unseres inversen Systems exakt in den Graden Null und Eins, so ist der inverse Limes exakt im Grad Eins. Wir denken hier an obere Indizes, das Differential erhöht also den Grad. Hinweis: Die Bilder fallen einerseits mit den Zykeln zusammen und bilden andererseits auch ein inverses System mit surjektiven Morphismen. Nun wende man das Mittag-Leffler-Kriterium 7.1.43 an.

Übung 7.1.49. Sei ein durch eine wohlgeordnete Menge indiziertes inverses System von exakten Komplexen abelscher Gruppen gegeben. Ist unser System an jeder Stelle transfinit surjektiv, so ist auch der inverse Limes exakt.

Übung 7.1.50. Sei ein durch eine wohlgeordnete Menge Ω indiziertes inverses System X_ω von Komplexen abelscher Gruppen gegeben. Ist unser System an jeder Stelle $\omega \in \Omega$ transfinit surjektiv und ist an jeder Stelle $\omega \in \Omega$ der Komplex der Kerne $\ker(X_\eta \twoheadrightarrow \lim_{\omega < \eta} X_\omega)$ exakt, so ist auch der Limes exakt. Hinweis: Wegen 7.1.49 reicht es zu zeigen, daß alle unsere Komplexe X_ω exakt sind. Andernfalls gibt es ein kleinstes η , für das der Komplex X_η nicht exakt ist, und mit 7.1.49 und der langen exakten Homologiesequenz landen wir bei einem Widerspruch.

Übung 7.1.51. Gegeben ein Morphismus von Systemen von Kettenkomplexen abelscher Gruppen ist der Limes der zugehörigen Abbildungskegel der Abbildungskegel des auf den Limites induzierten Morphismus.

Übung 7.1.52 (Inverser Limes erhält manchmal Quasiisomorphismen). Sei gegeben ein Morphismus $u : X \rightarrow Y$ von durch \mathbb{N} indizierten inversen Systemen von Komplexen abelscher Gruppen. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \cdots & X_1^n & \xrightarrow{\partial} & X_1^{n+1} & \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 \cdots & X_0^n & \xrightarrow{\partial} & X_0^{n+1} & \cdots
 \end{array}$$

deuten die vertikalen Pfeile die Morphismen des inversen Systems X an. Induziert $u_i : X_i \rightarrow Y_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ Isomorphismen auf der Kohomologie und sind alle Morphismen unserer inversen Systeme Surjektionen $X_i \twoheadrightarrow X_{i-1}$, $Y_i \twoheadrightarrow Y_{i-1}$, so induziert auch die im inversen Limes erhaltene Kettenabbildung

$$\limf X_i \rightarrow \limf Y_i$$

Isomorphismen auf der Kohomologie. Hinweis: Es reicht, die Exaktheit des Abbildungskegels zu zeigen. Das gelingt mit 7.1.51 und 7.1.48. Nehmen wir feiner nur an, daß u_i für alle i Isomorphismen auf \mathcal{H}^0 , \mathcal{H}^1 und \mathcal{H}^2 induziert, so folgt in derselben Weise, daß die im inversen Limes erhaltene Kettenabbildung einen Isomorphismus auf \mathcal{H}^1 induziert. Dasselbe gilt, wenn wir inverse Limes über eine allgemeinere wohlgeordnete Menge bilden und unsere inversen Systeme (X_i) und (Y_i) transfinit surjektiv annehmen.

Übung 7.1.53 (Vertauschen von inversem Limes und Kohomologie). Seien R ein Ring und X ein durch \mathbb{N} indiziertes inverses System $\dots \twoheadrightarrow X_1 \twoheadrightarrow X_0$ von Komplexen von R -Moduln mit surjektiven Systemmorphismen. Sei $q \in \mathbb{Z}$ fest gewählt. Sind die $(q-1)$ -ten Kohomologiegruppen unserer Komplexe alle artinsch, zum Beispiel endlichdimensionale Vektorräume oder endliche abelsche Gruppen, so liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^q(\limf X_i) \xrightarrow{\sim} \limf \mathcal{H}^q(X_i)$$

Allgemeiner reicht es hier sogar zu fordern, daß für jedes feste i die Bilder von $\mathcal{H}^{q-1}(X_{j+i}) \rightarrow \mathcal{H}^{q-1}(X_i)$ für große j stagnieren. Hinweis: Unter unserer Annahme erfüllen die inversen Systeme der $(q-1)$ -Kozykel die Mittag-Leffler-Bedingung.

Übung 7.1.54 (Quasiisomorphismus zum Limes der bidualen Komplexe). Seien k ein Körper und X ein durch \mathbb{N} indiziertes inverses System $\dots \twoheadrightarrow X_1 \twoheadrightarrow X_0$ von Komplexen von k -Vektorräumen mit surjektiven Systemmorphismen. Sind bei festem i die Bilder von $\mathcal{H}^q(X_{j+i}) \rightarrow \mathcal{H}^q(X_i)$ endlichdimensional für große j , so induziert die offensichtliche Kettenabbildung

$$\limf X_i \rightarrow \limf X_i^{**}$$

Isomorphismen auf der Kohomologie. Hinweis: 7.1.53 liefert schon einmal Isomorphismen $\mathcal{H}^q(\limf X_i) \xrightarrow{\sim} \limf(\mathcal{H}^q X_i)$. Dann liefert 7.1.47 uns weiter Isomorphismen $\limf(\mathcal{H}^q X_i) \xrightarrow{\sim} \limf((\mathcal{H}^q X_i)^{**})$. Andererseits liefert die Exaktheit des Dualisierens Isomorphismen $(\mathcal{H}^q X_i)^{**} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q(X_i^{**})$.

7.2 Kompakte Kohomologie

7.2.1. Wir wollen den Dualitätssatz von Poincaré 6.4.9 durch eine Art „Induktion über die offenen Teilmengen“ beweisen und müssen dazu eine Version dieses Satzes für nicht notwendig kompakte Mannigfaltigkeiten formulieren. Für jeden topologischen Raum X erklären wir seine **singuläre Kohomologie mit kompaktem Träger** oder kurz **kompakte Kohomologie** als den Kolimes

$$H_!^q X := \operatorname{colim}_K H^q(X, X \setminus K)$$

seiner relativen Kohomologiegruppen in Bezug auf die Komplemente kompakter Teilmengen. Dieser Kolimes ist also zu verstehen über alle Kompakta $K \subset X$.

7.2.2. Kompakte Kohomologie hat nur für lokal kompakte Hausdorffräume so gute Eigenschaften, daß sie zu etwas nützlich ist. Ich will dennoch versuchen, im folgenden die jeweils benötigten Eigenschaften der beteiligten Räume in jedem Fall explizit dazuschreiben.

7.2.3 (**Diskussion der Notation**). Üblich ist für kompakte Kohomologie die Notation $H_c^q X$. Bei ihrer Verallgemeinerung zum „Vorschub mit kompaktem Träger“ hat sich aber schon lange die $!$ -Notation durchgesetzt und beim unteren Index c liegt auch immer die Fehlinterpretation als c -te Homologie nahe, weshalb ich die $!$ -Notation bevorzuge. Natürlich kann kompakte Kohomologie auch mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe G definiert werden. Wir schreiben dann $H_!^q(X; G)$. Im weiteren Verlauf werden wir auch noch andere Kohomologietheorien wie de-Rham-Kohomologie und Garbenkohomologie einführen. Wenn wir dann besonders betonen wollen, daß singuläre Kohomologie gemeint ist, schreiben wir genauer $H_!^q(X; G)_{\text{sing}}$.

Beispiel 7.2.4. Für die kompakte Kohomologie des \mathbb{R}^n gilt

$$H_!^q(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat bilden immer größere Bälle um den Ursprung ein konfinales System im System aller kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n , und für dieses System wird der fragliche Kolimes aus 7.2.1 nach 6.3.6 über ein System aus Isomorphismen gebildet und ist damit leicht zu berechnen. Man beachte, daß die kompakte Kohomologie insbesondere keine Homotopieinvariante ist.

7.2.5. Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ eines Hausdorffraums oder allgemeiner jede offene Einbettung $i : U \hookrightarrow X$ von Hausdorffräumen erhalten wir eine Abbildung, die **Ausdehnung durch Null**

$$i_! : H_!^q U \rightarrow H_!^q X$$

als Kolimes der Abbildungen $H^q(U, U \setminus K) \xrightarrow{\sim} H^q(X, X \setminus K) \rightarrow H_1^q X$, wo die ersten Abbildungen die Inversen zu den Ausschneidungsisomorphismen meinen und der Limes über alle Kompakta aus U zu bilden ist. Die Hausdorff-Eigenschaft wird benötigt, um sicherzustellen, daß unser Kompaktum K abgeschlossen ist in X und wir somit die Ausschneidungsisomorphismen zur Verfügung haben.

7.2.6. Für jede eigentliche Abbildung $f : X \rightarrow Y$ erhalten wir das **eigentliche Zurückholen**

$$f^! : H_1^q Y \rightarrow H_1^q X$$

durch $\text{colf}_L H^q(Y, Y \setminus L) \rightarrow \text{colf}_L H^q(X, X \setminus f^{-1}(L)) \rightarrow \text{colf}_K H^q(X, X \setminus K)$ alias das Zurückholen in der relativen Kohomologie gefolgt von der Abbildung in den längeren Kolimes.

7.2.7. Seien X ein lokal kompakter Hausdorffraum und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Gegeben $K \subset X$ kompakt gibt es dann $U_1, \dots, U_r \in \mathcal{U}$ und Kompakta $K_i \subset U_i$ mit $K = K_1 \cup \dots \cup K_r$. In der Tat besitzt ja jeder Punkt von K eine Umgebung mit kompaktem und ganz in einem überdeckenden $U \in \mathcal{U}$ enthaltenem Abschluß. Endlich viele dieser Umgebungen überdecken K , und dann wird der Beweis mit etwas Basteln zu Ende gebracht.

7.2.8 (**Mayer-Vietoris-Sequenz für H_1^***). Ist ein Hausdorffraum X Vereinigung von zwei offenen Teilmengen $X = U \cup V$ und sind $K \subset U$ und $L \subset V$ kompakt, so haben wir in 6.3.3 eine lange exakte Sequenz

$H^q(X, X \setminus (K \cap L)) \rightarrow H^q(X, X \setminus K) \oplus H^q(X, X \setminus L) \rightarrow H^q(X, X \setminus (K \cup L)) \rightarrow$
konstruiert. Mit Ausschneidung und Übergang zum Kolimes über alle K und L ergibt sich daraus mit 7.2.7 für jeden lokal kompakten Hausdorffraum eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_1^q(U \cap V) \rightarrow H_1^q(U) \oplus H_1^q(V) \rightarrow H_1^q(X) \rightarrow H_1^{q+1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

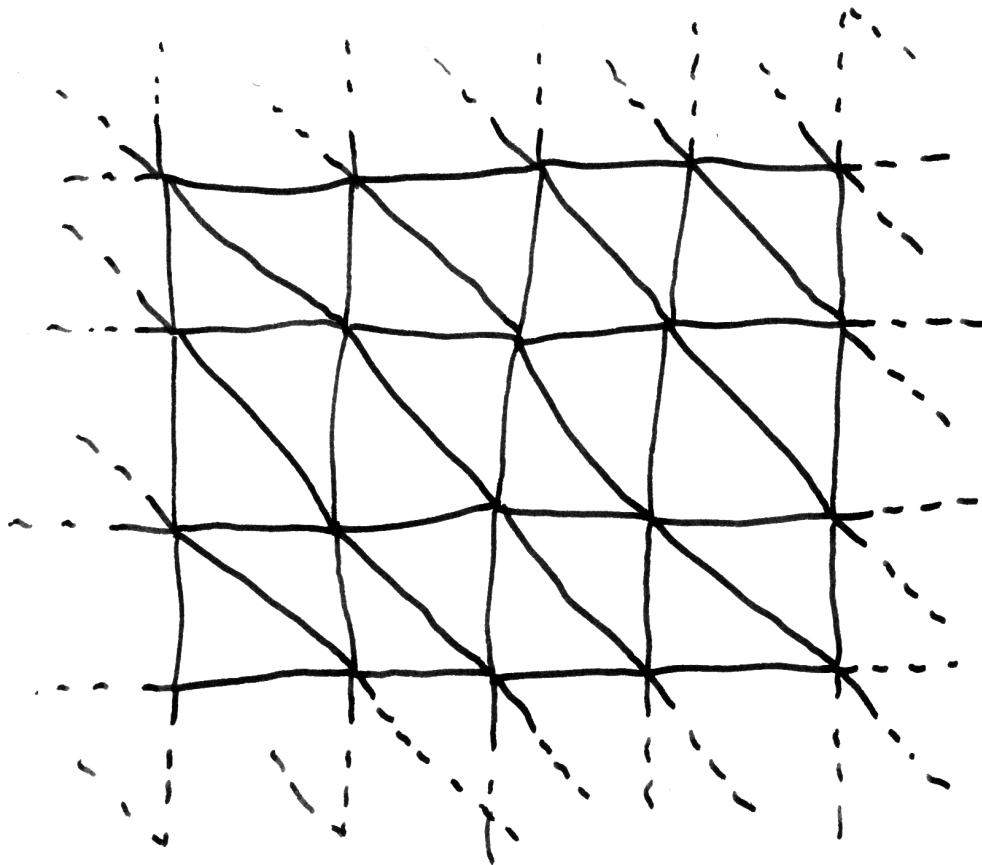
Sie heißt die **Mayer-Vietoris-Sequenz** der kompakten Kohomologie.

7.2.9. Gegeben ein topologischer Raum X erklären wir den Komplex der **singulären kompakten Koketten** als den filtrierenden Kolimes über alle Kompakta

$$S_1^* X := \text{colf}_K S^*(X, X \setminus K)$$

der relativen Koketten. Er kann auch beschrieben werden als der Komplex aller Koketten, für die es ein Kompaktum gibt derart, daß sie auf allen Simplizes verschwinden, die besagtes Kompaktum nicht treffen. Wegen der Exaktheit filtrierender Kolimites berechnet dieser Komplex die kompakte Kohomologie im Sinne von 7.2.1. Wir erhalten so in Formeln kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{H}^q S_1^* X \xrightarrow{\sim} H_1^q X$$



Dieses Bild soll anhand der simplizialen Interpretation veranschaulichen, daß nur die zweite kompakte Kohomologie der Ebene nicht verschwindet und daß sie frei ist vom Rang Eins über dem Koeffizientenring. Der Korand eines Punktes ist die formale Summe aller „orientierten aus ihm herauslaufenden Kanten“. Es ist damit klar, daß es außer der Null keinen Null-Simplizialkozykel gibt. Der Korand eines orientierten Segments ist die Summe aller 2-Simplizes, in deren Rand es liegt, mit einer durch die Orientierung unseres Segments bestimmten Orientierung. Man kann sich etwa mithilfe der dualen Zellenzerlegung klarmachen, daß alle Eins-Simplizialkozykel Ränder sind. Schließlich sind alle 2-Simplizialkorketten auch 2-Kozykel und zwei 2-Korketten sind kohomolog genau dann, wenn die „Zahl der darin vorkommenden orientierten 2-Simplizes gleich ist, wobei 2-Simplizes mit entgegengesetztem Drehsinn negativ zu zählen sind“.

7.2.10. Ich erinnere daran, daß ein Simplizialkomplex nach [TF] 2.7.18 **lokal endlich** heißt, wenn jede seiner Ecken nur zu endlich vielen Simplizes gehört, und daß die geometrische Realisierung jedes lokal endlichen Simplizialkomplexes lokal kompakt ist.

7.2.11 (**Kompakte simpliziale Kohomologie**). Um Anschauung für die kompakte Kohomologie bereitzustellen, erkläre ich auch noch die simpliziale Bedeutung dieses Konzepts. Gegeben ein lokal endlicher Simplizialkomplex \mathcal{K} können wir im Komplex der Simplizialkokerketten aus 6.3.4 einen Unterkomplex $S_1^* \mathcal{K} \subset S^* \mathcal{K}$ bilden, indem wir nur solche Abbildungen $f : \mathcal{K}_q^{\leq} \rightarrow \mathbb{Z}$ zulassen, die auf fast allen angeordneten q -Simplizes verschwinden. Wir nennen ihn den Komplex der **kompakten Simplizialkokerketten** und behaupten, daß er bereits die kompakte Kohomologie $H_1^* \Delta(\mathcal{K})$ berechnet. Nach 7.1.22 können wir ja bei der Definition der kompakten Kohomologie den Kolimes ebenso gut über alle Teilmengen K mit kompaktem Abschluß laufen lassen. Wieder nach 7.1.22 haben wir in unserem speziellen Fall auch

$$H_1^* \Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{\mathcal{L}} H^*(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$$

mit dem Kolimes über alle Unterkomplexe $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$, für die gilt $|\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}| < \infty$. Nach 6.3.4 in Verbindung mit dem Fünferlemma wird nun aber die relative Kohomologie $H^*(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$ berechnet durch den Komplex $S^*(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ der relativen Simplizialkokerketten, den wir erklären als den Kern der offensichtlichen Kettenabbildung $S^* \mathcal{K} \rightarrow S^* \mathcal{L}$. Bilden wir den Kolimes dieser Kerne, so erhalten wir gerade unseren Komplex $S_1^* \mathcal{K}$. Wegen der Exaktheit filtrierender Kolimites erhalten wir so Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^q S_1^* \mathcal{K} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \operatorname{colf}_{\mathcal{L}} S^*(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{\mathcal{L}} \mathcal{H}^q S^*(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{\mathcal{L}} H^q(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L})) \\ &\xrightarrow{\sim} H_1^q \Delta(\mathcal{K}) \end{aligned}$$

7.2.12 (**Kompakte Kohomologie als Modul**). Nach 6.4.15 ist für jedes Raumpaars seine relative Kohomologie in natürlicher Weise ein Modul über dem Kohomologiering des großen Raums. Durch Übergang zum Kolimes wird damit auch die kompakte Kohomologie jedes Raums ein Modul über seinem Kohomologiering.

Übungen

Übung 7.2.13. Ist ein Hausdorffraum X Vereinigung eines Systems offener Teilmengen \mathcal{U} derart, daß es für je zwei Mengen aus \mathcal{U} eine weitere Menge aus \mathcal{U} gibt, die sie beide umfaßt, so induzieren die eben erklärten Abbildungen einen Isomorphismus $\operatorname{colf}_{U \in \mathcal{U}} H_1^q(U) \xrightarrow{\sim} H_1^q(X)$.

7.3 Lokalendliche Homologie*

7.3.1. Um zusätzliche Anschauung für die kompakte Kohomologie bereitzustellen, will ich nun erklären, in welcher Weise ihr Dualraum in vielen Fällen als „lokalendliche Homologie“ alias „Borel-Moore-Homologie“ interpretiert werden kann. Ich selbst kann mir Homologie besser vorstellen, deshalb hilft mir das. Man beachte, daß es sich in diesem Fall andersherum verhält als bei gewöhnlicher Homologie und Kohomologie: Die lokalendliche Homologie ist zwar für lokal kompakte Simplizialkomplexe und Körperkoeffizienten der Dualraum der kompakten Kohomologie, die kompakte Kohomologie ist jedoch nur dann auch umgekehrt der Dualraum der lokalendlichen Homologie, wenn sie endlichdimensional ist. In diesem Sinne scheint mir die kompakte Kohomologie ähnlich grundlegend zu sein wie die Homologie.

Definition 7.3.2. Gegeben ein topologischer Raum X erklären wir die Gruppe $S_q^!X$ der **lokalendlichen singulären q -Ketten** als die Gruppe aller Abbildungen $\text{Top}(\Delta_q, X) \rightarrow \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt derart, daß nur endlich vielen singulären Simplizes $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ mit $\sigma(\Delta_q) \cap U \neq \emptyset$ eine von Null verschiedene Zahl zugeordnet wird. Der Zusatz „lokalendlich“ wirkt in diesem Fall also begriffserweiternd. Man überlegt sich leicht, daß wir wie bei der Definition der Homologie Randoperatoren

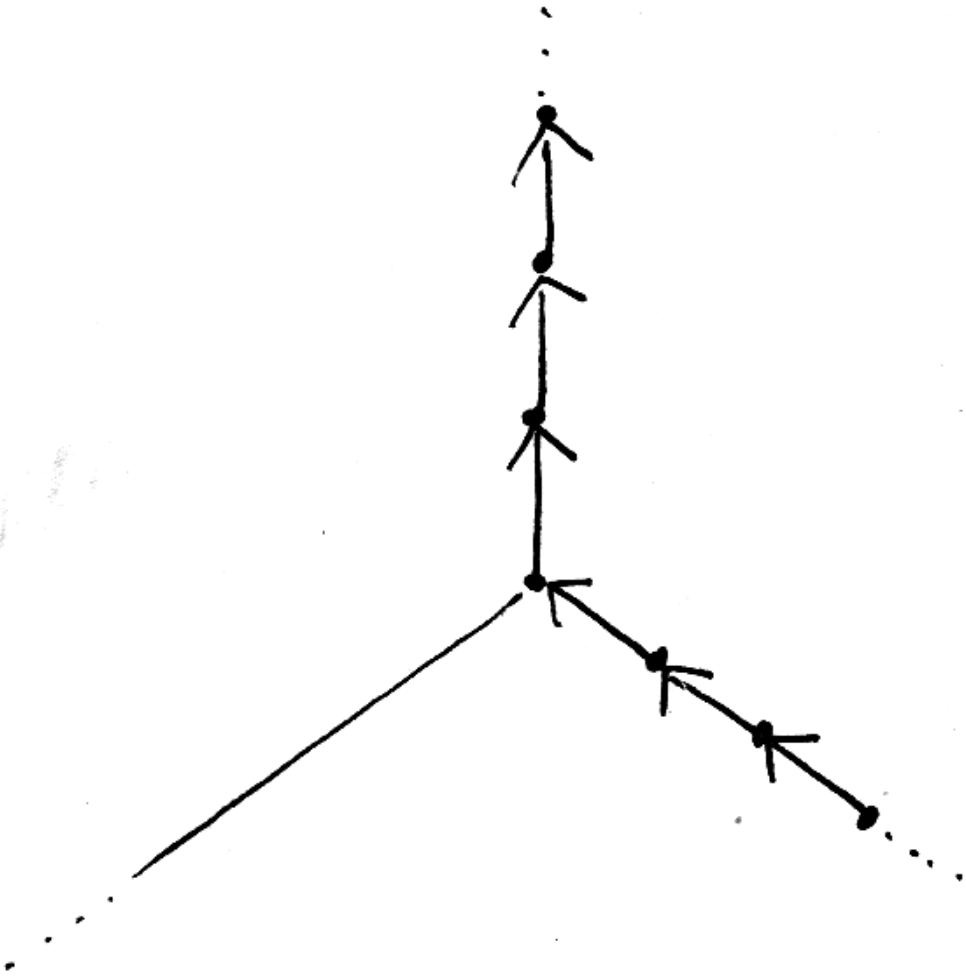
$$\partial : S_q^!X \rightarrow S_{q-1}^!X$$

erklären können: Die lokale Endlichkeit unserer Ketten sorgt dafür, daß beim Bilden der Ränder keine unendlichen Summen von Koeffizienten auftreten. Die Homologiegruppen des Komplexes $S^!X$ der lokalendlichen singulären Ketten nennen wir die **lokalendliche Homologie** und genauer die **singuläre lokalendliche Homologie** oder auch die **Borel-Moore-Homologie von X** und notieren sie

$$H_q^!X = H_q^!(X)_{\text{sing}} := \mathcal{H}_q S^!X$$

Natürlich können wir diese Konstruktionen auch analog mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe G durchführen. Wir erhalten so Kettenkomplexe $S^!(X; G)$, notieren deren Homologie $H_q^!(X; G) := \mathcal{H}_q S^!(X; G)$ und nennen sie die **lokalendliche Homologie von X mit Koeffizienten in G** .

7.3.3 (**Diskussion der Terminologie und Notation**). In der Literatur findet man meist andere Definitionen, vergleiche etwa [BM60], die zwar nicht immer, aber doch in allen mir bekannten Anwendungsfällen dieselben Gruppen liefern. Die Bezeichnung als Borel-Moore-Homologie ist zwar üblich, schien mir aber weniger aussagekräftig, weshalb ich die Terminologie „lokalendliche Homologie“ vorziehe. Die Notation $H_q^!X$ ist unüblich, sie scheint mir jedoch praktisch und



Ein lokalendlicher Eins-Zykel im topologischen Raum, der aus drei ins Unendliche laufenden von demselben Punkt ausgehenden Halbgeraden besteht. Die erste lokalendliche Homologie ist frei vom Rang Zwei und wird erzeugt von dem hier gezeichneten Zykel zusammen mit seinen beiden gedrehten Varianten. Die einzige Relation ist, daß die Summe dieser drei Erzeuger verschwindet.

ich kenne auch keine allgemein übliche Notation. Die obige Definition liefert im allgemeinen eine Theorie mit ziemlich schlechten formalen Eigenschaften. Sie ist jedoch zumindest meiner Anschauung gut zugänglich und kann in interessanten Anwendungsfällen mit anderen Theorien identifiziert werden, die vielleicht weniger anschaulich sind, dafür aber bessere formale Eigenschaften haben.

7.3.4 (Simpliziale Interpretation der lokalendlichen Homologie). Gegeben ein lokal endlicher Simplizialkomplex \mathcal{K} können wir den **Komplex der lokalendlichen Simplizialketten** $S^! \mathcal{K}$ ganz analog bilden wie den Komplex der Simplizialketten $S\mathcal{K}$ aus 1.1.5, indem wir eben auch unendliche formale Linearkombinationen von angeordneten Simplizes zulassen. Die Homologie dieses Komplexes nennen wir die **simpliziale lokal endliche Homologie** unseres lokal endlichen Simplizialkomplexes und notieren sie

$$H_q^! \mathcal{K} := \mathcal{H}_q S^! \mathcal{K}$$

Analog wie in 3.1.3 definieren wir auch den Komplex der lokalendlichen simplizialsingulären Ketten $S^{!s} \Delta(\mathcal{K}) \subset S^! \Delta(\mathcal{K})$ und analog wie in 3.1.6 die Kettenabbildung $S^{!s} \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S^! \mathcal{K}$ von den lokalendlichen simplizialsingulären Ketten in die lokalendlichen Simplizialketten.

Satz 7.3.5 (Simpliziale als singuläre lokalendliche Homologie). Für jeden lokalendlichen Simplizialkomplex \mathcal{K} induzieren die in 7.3.4 eingeführten Kettenabbildungen $S^! \mathcal{K} \leftarrow S^{!s} \Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S^! \Delta(\mathcal{K})$ Isomorphismen auf der Homologie

$$H_q^! \mathcal{K} \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}_q S^{!s} \Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} H_q^! \Delta(\mathcal{K})$$

Beweis. Alle in diesem Satz auftauchenden Gruppen, Komplexe et cetera zerfallen in ein Produkt über die Zusammenhangskomponenten unseres Simplizialkomplexes, den wir deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusammenhängend und damit abzählbar annehmen dürfen. Wir können unseren Simplizialkomplex dann als Vereinigung einer aufsteigenden Folge $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \dots$ endlicher Teilkomplexe schreiben derart, daß \mathcal{K}_{n+1} jeweils alle Simplizes umfaßt, die Simplizes aus \mathcal{K}_n treffen. Wir betrachten nun die Unterkomplexe \mathcal{L}_n aller Simplizes von \mathcal{K} , die keinen Simplex von \mathcal{K}_n treffen, und bilden das kommutative Diagramm mit exakten Spalten

$$\begin{array}{ccccc} S\mathcal{L}_n & \longleftarrow & S^s \Delta(\mathcal{L}_n) \subset & \longrightarrow & S\Delta(\mathcal{L}_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S\mathcal{K} & \longleftarrow & S^s \Delta(\mathcal{K}) \subset & \longrightarrow & S\Delta(\mathcal{K}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S\mathcal{K}/S\mathcal{L}_n & \longleftarrow & S^s \Delta(\mathcal{K})/S^s \Delta(\mathcal{L}_n) & \longrightarrow & S(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}_n)) \end{array}$$

Nach 3.1.7 induzieren die Horizontalen oben und in der Mitte Isomorphismen auf der Homologie, nach dem Fünferlemma und der langen exakten Homologiesequenz gilt das also auch für die Horizontalen unten. Gehen wir in der unteren Horizontale zum inversen Limes über, so erhalten wir gerade die Morphismen von Komplexen

$$S^! \mathcal{K} \leftarrow S^{!s} \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S^! \Delta(\mathcal{K})$$

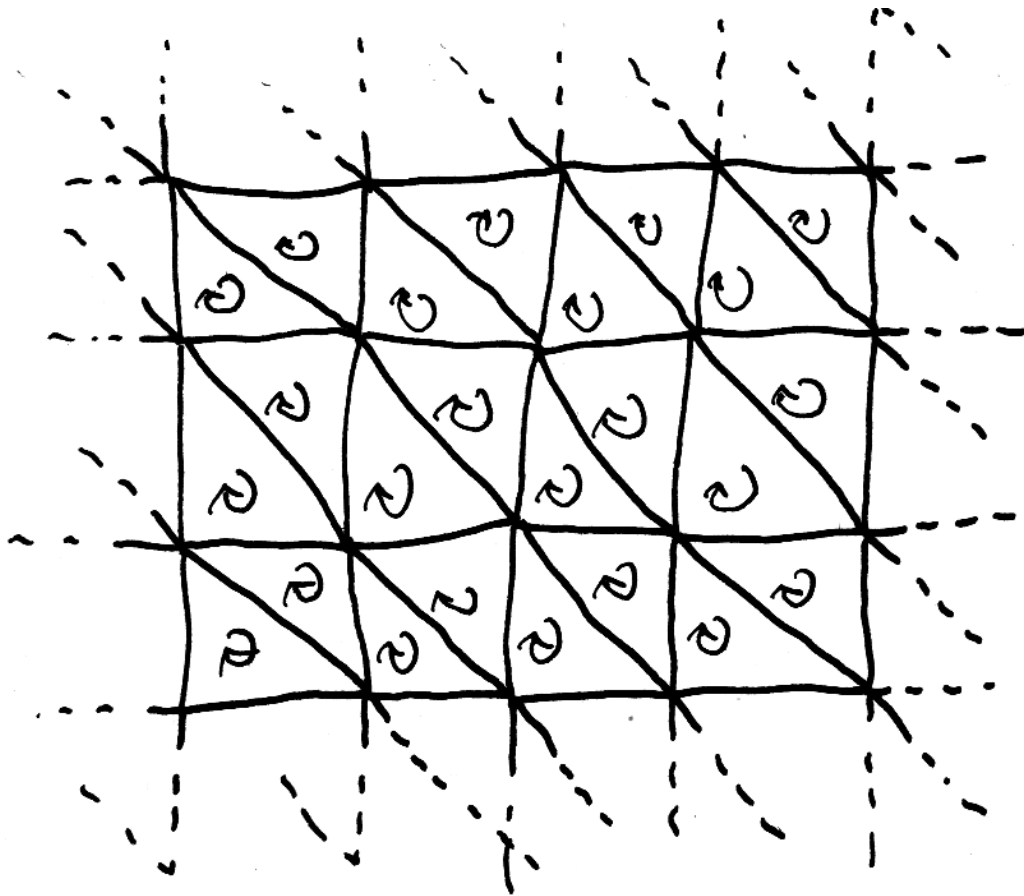
aus unserem Satz, denn die Komplemente der $\Delta(\mathcal{L}_n)$ sind final im System aller Teilmengen von $\Delta(\mathcal{K})$ mit kompaktem Abschluß. Da alle System-Morphismen der fraglichen inversen Systeme Surjektionen sind, folgt die Behauptung nun aus Übung 7.1.52, nach der gewisse inverse Limites von Quasiisomorphismen von Kettenkomplexen wieder Quasiisomorphismen sind. \square

Proposition 7.3.6 (Verschwinden der nullten lokalendlichen Homologie). *Sei X ein lokal kompakter lokal wegzusammenhängender abzählbar basierter zusammenhängender Hausdorffraum. Ist X nicht kompakt, so gilt $H_0^!(X; G) = 0$ für jede abelsche Gruppe G .*

Beweis. Salopp gesprochen gilt es, jedem Punkt einen Weg aufzuzeigen, auf dem er ins Unendliche fliehen kann, ja für jede lokalendliche Familie von Punkten einen Fluchtplan aufzustellen, bei dem sie sich nicht gegenseitig zu Tode trampeln. Diese Grundidee wird nun ausgeführt. Ich erinnere daran, daß jede Zusammenhangskomponente eines lokal wegzusammenhängenden Raums offen und wegzusammenhängend ist. Wir gehen in Schritten vor.

1. Gegeben ein Kompaktum $K \subset X$ finden wir eine nichtleere offene Menge $U \Subset X$ mit kompaktem Abschluß \bar{U} und mit $K \subset U$. Alle Komponenten von $X \setminus K$ treffen U , sonst wäre X nicht zusammenhängend, da wir $U \neq \emptyset$ angenommen hatten. Alle Komponenten liegen entweder in U oder treffen ∂U , sonst wären sie selbst nicht zusammenhängend, da auch $X \setminus \bar{U}$ nicht leer ist, da wir ja X nichtkompakt angenommen hatten. Von den Komponenten, die nicht in U liegen, überdecken endlich viele das Kompaktum ∂U . Das müssen dann auch bereits alle Komponenten gewesen sein, die dieses Kompaktum treffen alias die nicht in U enthalten sind. Vereinigen wir \bar{U} mit den Abschlüssen aller nicht in U enthaltenen Komponenten mit kompaktem Abschluß, erhalten wir also wieder ein Kompaktum L und finden eine offene Menge $V \Subset X$ mit \bar{V} kompakt und $V \supset L$. Gegeben ein Kompaktum in einer offenen Menge $K \subset U \Subset X$ mit \bar{U} kompakt haben wir so eine offene Menge $V \Subset X$ gefunden mit \bar{V} kompakt, $V \supset U$ und $V \supset \bar{Z}$ für jede Komponente Z von $X \setminus K$ mit kompaktem Abschluß.

2. Da X abzählbar basiert ist, finden wir mit dem ersten Schritt des Beweises induktiv eine Überdeckung von X durch eine aufsteigende Folge $V_0 \subset V_1 \subset \dots$



Graphische Darstellung derjenigen Simplicialkette, die für die ebenfalls dargestellte Triangulierung der Ebene den Fundamentalzykel in Bezug auf eine geeignete Orientierung repräsentiert. Man mache sich auch anschaulich klar, daß die lokalendliche Homologie der Ebene in allen von Zwei verschiedenen Graden verschwindet.

offener Teilmengen mit \bar{V}_i kompakt und $\bar{V}_i \subset V_{i+1}$ und derart, daß für alle Komponenten Z von $X \setminus \bar{V}_i$ mit kompaktem Abschluß gilt $\bar{Z} \subset V_{i+1}$. Um Sonderfälle der Notation zu vermeiden, setzen wir $V_{-1} = V_{-2} = \dots = \emptyset$.

3. Jeder Punkt $p \in X \setminus \bar{V}_i$ liegt in einer Komponente Z von $X \setminus \bar{V}_{i-1}$ mit \bar{Z} nicht-kompakt. Er kann folglich durch einen Weg in $X \setminus \bar{V}_{i-1}$ mit einem Punkt aus $X \setminus \bar{V}_{i+1}$ verbunden werden. Damit ist klar, daß für jede Gruppe von Koeffizienten jede lokalendliche Nullkette der Rand einer lokalendlichen Einskette ist. \square

7.3.7 (Simpliziale lokalendliche Homologie als Dualraum). Gegeben ein lokal endlicher Simplizialkomplex \mathcal{K} erhalten wir unmittelbar einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$S^! \mathcal{K} \xrightarrow{\sim} (S_* \mathcal{K} \Rightarrow \mathbb{Z}[0])$$

des Komplexes der lokalendlichen Simplizialketten aus 7.3.4 mit dem Dualen des Komplexes der Simplizialkocetten mit kompaktem Träger, der also in gewisser Weise das fundamentalere Objekt ist. Das zeigt insbesondere, daß im Fall von Körperkoeffizienten die lokalendliche Homologie lokal endlicher Simplizialkomplexe der Dualraum der Kohomologie mit kompaktem Träger ist. In 7.3.28 zeigen wir eine analoge Aussage für etwas allgemeinere Räume.

7.3.8 (Beziehung zwischen lokalendlicher und gewöhnlicher Homologie). Wir haben stets kanonische Kettenabbildungen $SX \rightarrow S^!X$ und davon induzierte Gruppenhomomorphismen $H_q X \rightarrow H_q^! X$. Für X kompakt sind diese Abbildungen offensichtlich Isomorphismen. Für jedes Kompaktum $K \subset X$ haben wir weiter eine offensichtliche Kettenabbildung $S^!X \rightarrow S(X, X \setminus K)$ und damit kanonische Abbildungen

$$H_q^! X \rightarrow H_q(X, X \setminus K)$$

auf der Homologie. Schalten wir unsere kanonischen Abbildungen $H_q X \rightarrow H_q^! X$ davor, so ergeben sich die üblichen Abbildungen $H_q X \rightarrow H_q(X, X \setminus K)$, die demnach für kompaktes K über die lokalendliche Homologie faktorisieren.

7.3.9. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X liefern die Abbildungen $S^!X \rightarrow S(X, X \setminus K)$ aus 7.3.8 Isomorphismen

$$S_q^! X \xrightarrow{\sim} \varinjlim_K S_q(X, X \setminus K)$$

Der inverse Limes ist dabei über alle Kompakta $K \subset X$ zu verstehen. In der Tat können in diesem Fall die lokalendlichen Ketten auch beschrieben werden als Abbildungen $\text{Top}(\Delta_q, X) \rightarrow \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes Kompaktum $K \subset X$ nur endlich vielen der $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ mit $\sigma(\Delta_q) \cap K \neq \emptyset$ eine von Null verschiedene Zahl zugeordnet wird.

7.3.10 (**Funktorialitäten der lokalendlichen Homologie**). Die lokalendliche Homologie ist keineswegs homotopieinvariant, ja nicht einmal in dem von der Homologie gewohnten Sinne funktoriell. Vielmehr erhält man nur für eigentliche Abbildungen von lokal kompakten Hausdorffräumen, nach [TM] 2.4.13 also den stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, bei denen das Urbild jedes Kompaktums kompakt ist, auch Abbildungen $f_! : S^1 X \rightarrow S^1 Y$ auf den lokalendlichen Ketten und Abbildungen

$$f_! : H_q^1 X \rightarrow H_q^1 Y$$

auf der lokalendlichen Homologie, den **eigentlichen Vorschub**. Mit etwas mehr Mühe kann man für die lokalendliche Homologie von abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen auch noch einen offenen Rückzug konstruieren, vergleiche [TSF] 6.7.16. Im Rahmen der Garbenkohomologie konstruieren wir in [TSF] ?? für die lokalendliche Homologie sogar einen mannigfaltigen Rückzug.

Vorschau 7.3.11. Die wesentliche Bedeutung der lokalendlichen Homologie liegt darin, daß in ihr auch für orientierte Mannigfaltigkeiten, die abzählbar basiert aber nicht notwendig kompakt sind, ein „Fundamentalzykel“ erklärt werden kann, vergleiche 7.3.13. Noch stärker gelingt das sogar für „Pseudomannigfaltigkeiten, bei denen die Singularitäten erst in Kodimension Zwei beginnen“, und damit insbesondere für mit ihrer analytischen Topologie versehene komplexe algebraische Varietäten. Das besprechen wir aber hier nicht weiter.

Proposition 7.3.12 (Lokalendliche Homologie und Orientierungsgarbe). Gegeben eine abzählbar basierte n -Mannigfaltigkeit M liefern die Abbildungen aus 7.3.8 einen Isomorphismus

$$H_n^1 M \xrightarrow{\sim} \Gamma M$$

zwischen ihrer n -ten lokalendlichen Homologie und dem Raum der globalen Schnitte ihrer Orientierungsgarbe aus 4.3.4.

Definition 7.3.13. Ist (M, ω) eine abzählbar basierte orientierte Mannigfaltigkeit, so gibt es nach Proposition 7.3.12 genau ein $[M]^! \in H_n^1 M$ mit $[M]^! \mapsto \omega_x$ für alle $x \in M$. Dies Element $[M]^!$ heißt der **Fundamentalzykel** der orientierten Mannigfaltigkeit M , obwohl es genau genommen eigentlich gar kein Zykel ist sondern vielmehr eine Homologiekategorie in der lokalendlichen Homologie.

7.3.14 (**Diskussion der Notation**). Ist M sogar kompakt, so haben wir $H_q M = H_q^1 M$ und $[M] = [M]^!$. Ich will begründen, warum wir dennoch die neue Notation $[M]^!$ einführen. Gegeben X ein lokal kompakter Hausdorffraum und $M \subset X$ eine Teilmenge, die mit der induzierten Topologie eine kompakte q -Mannigfaltigkeit ist, und ist eine Orientierung auf M gegeben, so wollen wir unterscheiden zwischen $i_! [M]^! \in H_q^1 X$ und $i_* [M] \in H_q X$ und wollen für diese Klassen die abkürzenden Notationen $[M]^! \in H_q^1 X$ und $[M] \in H_q X$ verwenden. Wir verwenden

die Abkürzung

$$[M]^! = i_! [M]^! \in H_q^! X$$

auch allgemeiner, wenn $M \not\subset X$ eine abzählbar basierte nicht notwendig kompakte q -Mannigfaltigkeit ist.

Ergänzung 7.3.15 (Bedeutung der Annahme abzählbar basiert). Die Annahme der Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie in 7.3.12 ist wesentlich. Um das zu sehen, betrachte man die Alexandroff'sche Halbgerade A mit ihrer Anordnung nach [AL] 5.4.2 und nehme als M das Komplement ihres kleinsten Elements. Ich will kurz skizzieren, wie die Annahme der Existenz eines lokalendlichen Fundamentalzykels in diesem Fall einer nicht abzählbar basierten Mannigfaltigkeit zum Widerspruch führt. In der Tat ist A nach [AL] 5.4.7 folgenkompakt, als da heißt, jede unendliche Teilmenge hat einen Häufungspunkt. Die Endpunkte aller 1-Simplizes, die mit von Null verschiedenem Koeffizienten in einem lokalendlichen Fundamentalzykel vorkommen, bilden nun sicher eine Teilmenge von M ohne obere Schranke in M . Es gibt also zu einem festen Punkt $x \in M$ unendliche viele solcher Endpunkte, die größer sind. Diese müssen dann einen Häufungspunkt in M haben und das steht im Widerspruch zur lokalen Endlichkeit unseres Zyklus.

Beweis von Proposition 7.3.12. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X erinnern wir aus 7.3.9 die Isomorphismen $S_q^! X \xrightarrow{\sim} \limf_K S_q(X, X \setminus K)$. Der Limes ist dabei über alle Kompakta $K \subset X$ zu verstehen. Nehmen wir zusätzlich X abzählbar basiert an, so existiert sogar eine Überdeckung von X durch eine aufsteigende Folge von offenen Teilmengen mit kompaktem Abschluß $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset X$, und da die \bar{U}_i final sind im System aller Kompakta von X , haben wir ebenso

$$S_q^! X \xrightarrow{\sim} \limf_i S_q(X, X \setminus \bar{U}_i)$$

Dieses inverse System besteht offensichtlich aus Surjektionen und dasselbe gilt a fortiori für das System von Rändern $B_{q-1}(X, X \setminus \bar{U}_i)$. Ist nun zusätzlich $X = M$ eine n -Mannigfaltigkeit, so liefert Satz 4.3.5 über die hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten $H_{n+1}(M, M \setminus \bar{U}_i) = 0$, folglich haben wir $B_{n+1}(M, M \setminus \bar{U}_i) = Z_{n+1}(M, M \setminus \bar{U}_i)$ und die $(n+1)$ -Zykel bilden auch ein inverses System aus Surjektionen. Mit dem Mittag-Leffler-Kriterium 7.1.43 für die Exaktheit inverser Limes folgt sowohl die Surjektivität der offensichtlichen Abbildung

$$\limf_i S_{n+1}(M, M \setminus \bar{U}_i) \rightarrow \limf_i B_n(M, M \setminus \bar{U}_i)$$

als auch die Exaktheit von

$$\limf_i B_n(M, M \setminus \bar{U}_i) \hookrightarrow \limf_i Z_n(M, M \setminus \bar{U}_i) \rightarrow \limf_i H_n(M, M \setminus \bar{U}_i)$$

Unsere erste Surjektivität erlaubt uns die Identifikation der ersten Gruppe dieser kurzen exakten Sequenz mit $\mathcal{B}_n S^1 M$ und die Linksexaktheit inverser Limites erlaubt die Identifikation der Mitte unserer Sequenz mit $\mathcal{Z}_n S^1 M$, so daß wir schließlich für jede abzählbar basierte n -Mannigfaltigkeit einen Isomorphismus

$$H_n^1 M \xrightarrow{\sim} \limf_i H_n(M, M \setminus \bar{U}_i)$$

erhalten. Bis hierher war das im wesentlichen die Lösung von Übung 7.1.53 in unserem Spezialfall. Beachten wir nun die Isomorphismen $H_n(M, M \setminus A) \xrightarrow{\sim} \Gamma A$ für $A \subset M$ kompakt aus dem Satz 4.3.5 über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten, so erhalten wir den gewünschten Isomorphismus $H_n^1 M \xrightarrow{\sim} \Gamma M$ wegen $\Gamma M \xrightarrow{\sim} \limf_i \Gamma \bar{U}_i$. Diese letzte Identität sieht man zum Beispiel ein, indem man sich überlegt, daß sowohl die \bar{U}_i als auch die U_i final sind im System aller Teilmengen von X mit kompaktem Abschluß. \square

7.3.16 (Simpliziale Interpretation des Fundamentalzykels). Sei ein Simplizialkomplex \mathcal{K} eine Triangulierung einer nicht notwendig kompakten abzählbar basierten orientierten n -Mannigfaltigkeit. Der Fundamentalzykel von $\Delta(\mathcal{K})$ im Sinne von 7.3.13 hat wegen 7.3.5 genau einen Repräsentanten in der Gruppe der lokalendlichen n -Simplizialketten. Für $n \geq 1$ kann dieser Repräsentant beschrieben werden als die formale Summe über alle n -Simplizes, jeweils mit einer Anordnung versehen, die mit der gewählten Orientierung in der Weise verträglich ist, daß eben $\omega|_x \in H_n(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{K}) \setminus x)$ an jeder Stelle x die vorgegebene Orientierung liefert. Im Fall $n = 0$ einer nulldimensionalen Mannigfaltigkeit ist dieser Repräsentant dahingegen die formale Summe aller ihrer Punkte mit den durch die Orientierung gegebenen Vorzeichen.

Definition 7.3.17. Ein Raum X heiße **kompaktrelativ homologisch q -endlich** für eine natürliche Zahl $q \geq 0$, wenn für jedes Paar $K \subset W \Subset X$ von Teilmengen mit K kompakt und W offen in X die offensichtliche Abbildung

$$H_q(X, X \setminus W) \rightarrow H_q(X, X \setminus K)$$

endlich erzeugtes Bild hat. Er heiße **kompaktrelativ homologisch endlich**, wenn er homologisch kompaktrelativ q -endlich ist für alle q .

7.3.18. Es gibt auch offensichtliche Varianten dieses Begriffs für allgemeinere Koeffizientenringe, die wir in diesem Zusammenhang stets kommutativ und noethersch voraussetzen wollen.

Beispiele 7.3.19. Für alle n ist der \mathbb{R}^n nach 3.1.24 kompaktrelativ homologisch endlich. Allgemeiner ist nach 3.1.25 die geometrische Realisierung eines lokal endlichen Simplizialkomplexes stets kompaktrelativ homologisch endlich. Jede offene Teilmenge eines kompaktrelativ homologisch q -endlichen Raums ist auch selbst wieder kompaktrelativ homologisch q -endlich.

Proposition 7.3.20. *Jeder lokal kompakte Hausdorffraum, der eine Überdeckung durch offene kompaktrelativ homologisch endliche Teilmengen besitzt, ist bereits selbst kompaktrelativ homologisch endlich.*

Beweis. Jedes Kompaktum kann durch endlich viele offene Teilmengen überdeckt werden. Die Proposition folgt so aus dem anschließenden Lemma 7.3.21. \square

Lemma 7.3.21. *Sei $q \geq 0$ gegeben. Ist ein lokal kompakter Hausdorffraum überdeckt von zwei offenen kompaktrelativ homologisch q -endlichen Teilmengen mit kompaktrelativ homologisch $(q + 1)$ -endlichem Schnitt, so ist bereits der ganze Raum kompaktrelativ homologisch q -endlich.*

Beweis. Sei X unser Raum und seien $V_1, V_2 \Subset X$ zwei kompaktrelativ homologisch q -endliche offene Teilmengen mit Vereinigung $V_1 \cup V_2 = X$. Seien $K \subset W \Subset X$ gegeben mit K kompakt. Es gilt zu zeigen, daß das Bild von

$$H_q(X, X \setminus W) \rightarrow H_q(X, X \setminus K)$$

endlich erzeugt ist. Jeder Punkt von K besitzt eine kompakte Umgebung, die entweder ganz in $V_1 \cap W$ oder ganz in $V_2 \cap W$ liegt. Wir finden also Kompakta $K_i \subset V_i \cap W$ mit $K = K_1 \cup K_2$. Offensichtlich finden wir weiter $U_i \Subset X$ mit

$$K_i \subset U_i \subset \bar{U}_i \subset V_i \cap W$$

und \bar{U}_i kompakt. Mit der Abkürzung $H_q(\setminus Y) := H_q(X, X \setminus Y)$ für Teilmengen $Y \subset X$ erhalten wir nun ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & H_q(\setminus K_1 \cup K_2) & \longleftarrow & H_{q+1}(\setminus K_1 \cap K_2) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ H_q(\setminus \bar{U}_1) \oplus H_q(\setminus \bar{U}_2) & \longleftarrow & H_q(\setminus \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2) & \longleftarrow & H_{q+1}(\setminus \bar{U}_1 \cap \bar{U}_2) \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ H_q(\setminus W \cap V_1) \oplus H_q(\setminus W \cap V_2) & \longleftarrow & H_q(\setminus W) & & \end{array}$$

Da V_1 und V_2 als kompaktrelativ homologisch q -endlich angenommen waren, ist das Bild der linken Vertikale endlich erzeugt. Da $V_1 \cap V_2$ kompaktrelativ homologisch $(q + 1)$ -endlich angenommen war, ist auch das Bild der rechten Vertikale endlich erzeugt. Als Teil einer Mayer-Vietoris-Sequenz ist die mittlere Horizontale exakt. Mit 4.4.5 folgt dann, daß auch die Verknüpfung in der mittleren Vertikale endlich erzeugtes Bild hat. \square

Korollar 7.3.22 (Variante zum Satz von Wilder). *Jede Mannigfaltigkeit ist kompaktrelativ homologisch endlich. Allgemeiner ist ein Hausdorffraum, in dem jeder*

Punkt eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge der geometrischen Realisierung eines lokal endlichen Simplicialkomplexes, stets kompaktrelativ homologisch endlich.

Ergänzung 7.3.23. Nach [Hir75] sind damit insbesondere separierte komplexe algebraische Varietäten die Mengen der abgeschlossenen Punkte mit ihrer analytische Topologie kompaktrelativ homologisch endlich.

7.3.24 (Kronecker-Paarung für lokalendliche Ketten). Das Auswerten von Koketten auf Ketten induziert für jeden topologischen Raum X eine Kettenabbildung

$$S^*_! X \otimes S^! X \rightarrow \mathbb{Z}[0]$$

In der Tat, gegeben eine kompakte Kokette gibt es ein Kompaktum $K \subset X$ derart, daß unsere Kokette nur auf solchen singulären Simplizes von Null verschieden ist, die K treffen. Gegeben eine lokalendliche Kette besitzt aber jeder Punkt von K eine Umgebung derart, daß nur endlich viele singuläre Simplizes, die diese Umgebung treffen, in unserer Kette mit Null verschiedenem Koeffizienten auftauchen. Endlich viele dieser Umgebungen überdecken K , weshalb unser Auswerten oben nur zu endlichen Summen führt. Unsere Paarung führt wie in 6.1.5 zu Paarungen

$$H^q_!(X) \times H^!_q(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

der kompakten Kohomologie mit der lokalendlichen Homologie. Analoges gilt mit Koeffizienten in einem beliebigen Ring.

Satz 7.3.25 (Lokalendliche Homologie als Dualraum). *Gegeben k ein Körper und X eine abzählbar basierte Mannigfaltigkeit liefern die in 7.3.24 konstruierten Abbildungen Isomorphismen*

$$H^!_q(X; k) \xrightarrow{\sim} H^q_!(X; k)^*$$

zwischen der lokalendlichen Homologie und dem Dualraum der kompakten Kohomologie.

7.3.26. Der Satz gilt mit demselben Beweis für jeden abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum, der kompaktrelativ homologisch endlich ist im Sinne von 7.3.17. Insbesondere gilt er nach 7.3.23 für separierte komplexe Varietäten.

7.3.27. Der sogenannte Kreisraum aus [TF] 3.6.4 zeigt, daß der Dualraum der singulären Kohomologie mit kompaktem Träger im allgemeinen nicht durch den Komplex der lokal endlichen singulären Koketten berechnet werden kann.

Beweis. In diesem Beweis meinen wir stets Körperkoeffizienten, ohne das in den Notationen nochmals besonders hervorzuheben. Für jeden lokal kompakten Hausdorffraum X sind nach 7.3.9 unsere natürlichen Abbildungen Isomorphismen

$S^!X \xrightarrow{\sim} \limf S(X, X \setminus K)$, wobei der inverse Limes über alle Kompakta $K \subset X$ zu bilden ist. Wie beim Beweis von 7.3.12 finden wir eine Überdeckung von X durch eine aufsteigende Folge von offenen Teilmengen mit kompaktem Abschluß $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset X$, und da die \bar{U}_i final sind im System aller Kompakta von X , ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$S^!X \xrightarrow{\sim} \limf_i S(X, X \setminus \bar{U}_i)$$

von Komplexen. Nun hat das inverse System von Komplexen rechts surjektive Systemmorphisme. Unsere Variante zum Satz von Wilder 7.3.22 zeigt, daß die von $S_q(X, X \setminus \bar{U}_{i+1}) \rightarrow S_q(X, X \setminus \bar{U}_i)$ auf der Homologie induzierten Abbildungen endlich erzeugte Bilder haben. Da wir hier mit Koeffizienten in einem Körper arbeiten, zeigt dann Übung 7.1.53 zum Vertauschen von Homologie und inversem Limes, daß die offensichtlichen Abbildungen Isomorphismen

$$H_q^!X \xrightarrow{\sim} \limf_i H_q(X, X \setminus \bar{U}_i)$$

induzieren. Nun sind die Bilder von $H_q(X, X \setminus \bar{U}_{i+1}) \rightarrow H_q(X, X \setminus \bar{U}_i)$ wie bereits erwähnt endlichdimensional. Wir nennen sie $I_{q,i}$ und haben also in Formeln $\dim I_{q,i} < \infty$ für alle i, q . Es ist klar, daß die offensichtlichen Abbildungen Isomorphismen

$$\limf_i I_{q,i} \xrightarrow{\sim} \limf_i H_q(X, X \setminus \bar{U}_i)$$

liefern. Man identifiziert die Bilder von $H^q(X, X \setminus \bar{U}_i) \rightarrow H^q(X, X \setminus \bar{U}_{i+1})$ leicht mit den Dualräumen $I_{q,i}^*$ und folgert unschwer, daß die offensichtlichen Abbildungen auch Isomorphismen

$$\operatorname{colf}_i I_{q,i}^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_i H^q(X, X \setminus \bar{U}_i)$$

liefern. Die rechte Seite kann nun in natürlicher Weise mit der kompakten Kohomologie $H_!^q X$ identifiziert werden. So erhalten wir schließlich natürliche Isomorphismen

$$(H_!^q X)^* \xrightarrow{\sim} (\operatorname{colf}_i I_{q,i}^*)^* \xrightarrow{\sim} \limf_i I_{q,i}^{**} \xrightarrow{\sim} \limf_i I_{q,i} \xrightarrow{\sim} H_q^!X$$

Das etwas unangenehme Prüfen der Tatsache, daß diese Verknüpfung von Isomorphismen genau die Abbildung aus dem Satz ist, bleibe dem Leser überlassen. \square

Proposition 7.3.28 (Nullte lokalendliche Homologie als Dualraum). *Gegeben ein Kring k und ein k -Modul M und ein lokal kompakter lokal wegzusammenhängender abzählbar basierter Hausdorffraum X liefern die in 7.3.24 konstruierten Abbildungen Isomorphismen*

$$H_0^!(X; M^*) \xrightarrow{\sim} H_!^0(X; M)^*$$

Beweis. Nach Annahme sind alle Zusammenhangskomponenten von X offen. Es reicht also, die Behauptung für X zusammenhängend zu zeigen. Ist X kompakt, so stimmt die lokalendliche Homologie mit der gewöhnlichen Homologie überein und die kompakte Kohomologie mit der gewöhnlichen Kohomologie und beide Seiten lassen sich für X zusammenhängend in verträglicher Weise mit M^* identifizieren. Ist X nichtkompakt und zusammenhängend, so verschwindet die linke Seite nach 7.3.6 und die rechte Seite aus offensichtlichen Gründen. Die Proposition folgt. \square

Satz 7.3.29 (Kompakte Kohomologie und Orientierung). *Gegeben eine n -Mannigfaltigkeit X liefert die gleich im Beweis konstruierte Abbildung einen Isomorphismus zwischen dem Dualraum ihrer n -ten kompakten Kohomologie mit rationalen Koeffizienten und dem Raum der globalen Schnitte ihrer rationalen Orientierungsgarbe*

$$H_!^n(X; \mathbb{Q})^* \xrightarrow{\sim} \Gamma(X; \text{or}_X(\mathbb{Q}))$$

7.3.30. Ist unsere Mannigfaltigkeit X sogar abzählbar basiert, so können wir unseren Isomorphismus aus dem Satz mit 7.3.28 verlängern zu einem Isomorphismus $H_n^!(X; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X; \text{or}_X(\mathbb{Q}))$. In dieser Gestalt scheint er mir besonders anschaulich und wir finden ihn sogar mit \mathbb{Z} -Koeffizienten in [TSF] 6.4.2 als einen speziellen „dualisierten Poincaré-Isomorphismus“ wieder. Wenn wir unsere lokalendliche Homologie als „garbentheoretische lokalendliche Homologie“ interpretieren, gilt dasselbe auch ohne die Annahme, X sei abzählbar basiert.

Beweis. Per definitionem gilt $H_!^n(X; \mathbb{Q}) = \text{colf}_K H^n(X, X \setminus K; \mathbb{Q})$ mit dem über alle Kompakta $K \subset X$ gebildeten Kolimes. Wir folgern Isomorphismen

$$\begin{aligned} H_!^n(X; \mathbb{Q})^* &\xrightarrow{\sim} \limf_K H^n(X, X \setminus K; \mathbb{Q})^* \\ &\xrightarrow{\sim} \limf_K H_n(X, X \setminus K; \mathbb{Q}) \text{ nach 7.1.47 und 7.3.22} \\ &\xrightarrow{\sim} \limf_K \Gamma(K; \text{or}_X(\mathbb{Q})) \text{ nach 5.1.5} \\ &\xrightarrow{\sim} \Gamma(X; \text{or}_X(\mathbb{Q})) \end{aligned} \quad \square$$

7.4 Poincaré-Dualität

7.4.1 (Erinnerungen an das relative cap-Produkt). Wir hatten in 6.4.15 die relativen cap-Produkte $H^p(X, A) \times H_q(X, A) \rightarrow H_{q-p}X$ eingeführt und kennen aus dieser Übung im Fall $p = q$ und X wegzusammenhängend die Beschreibung $b \cap c = \langle b, c \rangle \delta$ durch die Kroneckerpaarung sowie für jeden Morphismus $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Raumpaaren die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, A) \times H(X, A) & \longleftarrow H^*(Y, B) \times H(X, A) & \longrightarrow H^*(Y, B) \times H(Y, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ HX & \longrightarrow & HY \end{array}$$

7.4.2. Gegeben M eine n -Mannigfaltigkeit liefert jede Orientierung ω auf M nach Satz 4.3.5 über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten für alle kompakten Teilmengen $K \subset M$ ein Element $\omega_K = \omega_{K \subset M} \in H_n(M, M \setminus K)$. Das cap-Produkt mit ω_K liefert dann nach 7.4.1 Abbildungen $\cap \omega_K : H^q(M, M \setminus K) \rightarrow H_{n-q}M$ und durch Übergang zum Kolimes mithilfe von 7.4.1 erhalten wir Abbildungen

$$Q = Q_{(M, \omega)}^q : H_!^q M \rightarrow H_{n-q}M$$

Sie sind wieder nach den Verträglichkeiten 7.4.1 verträglich mit dem Ausdehnen von offenen Teilmengen von M .

Satz 7.4.3 (Allgemeine Poincaré-Dualität). *Gegeben eine orientierte n -Mannigfaltigkeit M ist die Abbildung Q aus 7.4.2 für alle q ein Isomorphismus*

$$Q : H_!^q M \xrightarrow{\sim} H_{n-q}M$$

7.4.4. Dieser Satz gilt mit demselben Beweis für Koeffizienten in einem beliebigen Kring k . Statt einer Orientierung brauchen wir dafür in dieser Allgemeinheit nur eine k -Orientierung. Betrachten wir den Fall rationaler Koeffizienten und nehmen $q = n$ und gehen auf beiden Seiten zum Dualraum über, so erhalten wir einen Spezialfall unseres Isomorphismus 7.3.29 zwischen dem Dualraum der kompakten Kohomologie und dem Raum der globalen Schnitte der Orientierungsgarbe.

7.4.5. Die Umkehrabbildung zu Q notiere ich $P = P_M = P_{\vec{M}} : H_{n-q}M \xrightarrow{\sim} H_!^q M$ und nenne sie den **Poincaré-Isomorphismus**. Den Pfeil schreibe ich dazu, wenn ich besonders betonen will, daß wir mit orientierten Mannigfaltigkeiten arbeiten.

7.4.6. Ist M eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit, so ist per definitionem $Q = \cap[M]$ das cap-Produkt mit dem Fundamentalzykel von M . Allerdings kann ich in diesem Rahmen keinen vernünftigen Beweis dafür geben, daß er die in 7.4.3 behaupteten Isomorphismen liefert. Ist M eine abzählbar basierte orientierte Mannigfaltigkeit, so könnte Q auch als das cap-Produkt mit dem Fundamentalzykel $Q = \cap[M]^!$ eingeführt werden. Dafür müßten wir jedoch das cap-Produkt in der entsprechenden Allgemeinheit entwickeln und das will ich hier vermeiden.

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit einem Lemma.

Lemma 7.4.7. *Sind $U, V \subseteq M$ offene Teilmengen und gilt der Satz für die n -Mannigfaltigkeiten U, V und $U \cap V$, so gilt er auch für $U \cup V$.*

Beweis. Das folgt mit dem Fünferlemma aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_!^q(U \cap V) & \rightarrow & H_!^q U \oplus H_!^q V & \rightarrow & H_!^q(U \cup V) & \rightarrow & H_!^{q+1}(U \cap V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n-q}(U \cap V) & \rightarrow & H_{n-q}U \oplus H_{n-q}V & \rightarrow & H_{n-q}(U \cup V) & \rightarrow & H_{n-q-1}(U \cap V) \end{array}$$

mit ins Unendliche gedachten Zeilen aus Mayer-Vietoris-Sequenzen 7.2.8 und 2.4.11, sobald wir zeigen können, daß dies Diagramm kommutativ ist. Das stimmt nun zwar nicht, aber wir zeigen die Kommutativität für das leicht variierte Diagramm, bei dem wir beim vertikalen Pfeil aus den direkten Summen jeweils beim zweiten Summanden das Negative von Q nehmen, und das reicht uns auch für den Beweis. Es reicht uns weiter, für beliebige kompakte $K \subset U$ und $L \subset V$ die Kommutativität des Diagramms zu zeigen, das man erhält, wenn man die obere Zeile durch die entsprechende relative Mayer-Vietoris-Sequenz ersetzt. Dazu diskutieren wir zunächst einmal die Konstruktion dieser Sequenz, die in 6.3.3 nur angedeutet worden war. Wir kürzen $U \cup V = X$ ab und bezeichnen die offene Überdeckung $X \setminus (K \cap L) = (X \setminus K) \cup (X \setminus L)$ mit \mathcal{V} . Weiter kürzen wir $X \setminus (K \cap L) = X \setminus \cap$ ab und $X \setminus (K \cup L) = X \setminus \cup$. Die kurze exakte Sequenz auf den singulären Ketten

$$S(X \setminus \cup) \hookrightarrow S(X \setminus K) \oplus S(X \setminus L) \rightarrow S^{\mathcal{V}}(X \setminus \cap)$$

aus der Konstruktion der Mayer-Vietoris-Sequenz 2.4.11 mit der Summe der Vorschübe vorne und dem ersten Vorschub minus dem zweiten Vorschub hinten liefert durch Dualisieren die obere Horizontale eines kommutativen Diagramms mit dem ersten Rückzug minus dem zweiten Rückzug vorne und der Summe der Rückzüge hinten

$$\begin{array}{ccccc} S_{\mathcal{V}}^*(X \setminus \cap) & \hookrightarrow & S^*(X \setminus K) \oplus S^*(X \setminus L) & \twoheadrightarrow & S^*(X \setminus \cup) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ S^*(X) & \hookrightarrow & S^*X \oplus S^*X & \twoheadrightarrow & S^*X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ S_{\mathcal{V}}^*(X, X \setminus \cap) & \hookrightarrow & S^*(X, X \setminus K) \oplus S^*(X, X \setminus L) & \twoheadrightarrow & S^*(X, X \setminus \cup) \end{array}$$

Die untere linke Ecke sei darin durch die Exaktheit der linken Vertikale definiert. Dann sind alle Vertikalen kurze exakte Sequenzen und die untere Zeile ist exakt nach dem Neunerlemma. Die lange exakte Kohomologiesequenz dieser untersten Zeile liefert die **Mayer-Vietoris-Sequenz der relativen Kohomologie**, wenn wir darin $\mathcal{H}(S_{\mathcal{V}}^*(X, X \setminus \cap))$ ersetzen durch $\mathcal{H}(S^*(X, X \setminus \cap))$ mittels des Isomorphismus, den die Einschränkung auf feine Ketten auf der Kohomologie der jeweiligen Komplexe induziert. Jetzt gilt es, ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen anzugeben, das bei Übergang zur Homologie unsere Mayer-Vietoris-Sequenzen in den Horizontalen und die fraglichen cap-Produkte in den Vertikalen induziert. Um die cap-Produkte aus der Definition von Q zu beschreiben, wählen wir einen beliebigen Repräsentanten $\dot{\omega}_{K \cup L} \in Z_n(X, X \setminus \cup)$ der Homologiekategorie $\omega_{K \cup L} \in H_n(X, X \setminus \cup)$ zu unserer Orientierung ω . Sein Vorschub unter der Diagonale ist ein Zykel $\Delta_* \dot{\omega}_{K \cup L} \in Z_n(X \times X, (X \setminus \cup) \times X)$ und wird unter dem Vorschub mit einer Alexander-Whitney-Transformation η ein n -Zykel $\eta \Delta_* \dot{\omega}_{K \cup L}$

des Tensorkomplexes $S(X, X \setminus U) \otimes SX$. Das Darantensorieren dieses Zyklus von rechts ist die erste Kettenabbildung einer Sequenz

$$S^*(X, X \setminus U) \rightarrow S^*(X, X \setminus U) \otimes S(X, X \setminus U) \otimes SX \rightarrow SX$$

mit dem Auswerten des ersten Faktor auf dem zweiten Faktor als zweiter Abbildung. Die Verknüpfung ist dann eine Kettenabbildung, die auf der Homologie das cap-Produkt mit $\omega_{K \cup L}$ induziert. Wir notieren sie $\cap \dot{\omega}_{K \cup L}$. Nun wählen wir die relative Kette $\dot{\omega}_{K \cup L} \in Z_n(X, X \setminus U)$ so, daß sie einen Repräsentanten $\ddot{\omega}_{K \cup L} \in S_n X$ hat, der bezüglich der offenen Überdeckung $X = (U \setminus L) \cup (V \setminus K) \cup (U \cap V)$ fein ist, also $\ddot{\omega}_{K \cup L} = \ddot{\omega}_1 + \ddot{\omega}_2 + \ddot{\omega}_3$ mit den Summanden in den jeweiligen Räumen von n -Ketten. Dann landet zunächst einmal $\cap \dot{\omega}_{K \cup L}$ in $S^{\mathcal{W}} X$ für \mathcal{W} die Überdeckung $X = U \cup V$ von X , dafür hätte auch die Feinheit unseres Repräsentanten in Bezug auf diese Überdeckung bereits ausgereicht. Weiter wird $\omega_{K \subset U} \in H_n(U, U \setminus K)$ repräsentiert durch $\ddot{\omega}_1 + \ddot{\omega}_3$, vergleiche den Beweis des Ausschneidungssatzes 2.4.10, und $\omega_{L \subset V} \in H_n(V, V \setminus L)$ ähnlich durch $\ddot{\omega}_2 + \ddot{\omega}_3$. Durch Verwendung dieser Repräsentanten in der mittleren Vertikale erhalten wir ein kommutatives rechtes Quadrat im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^*(X, X \setminus U) & \hookrightarrow & S^*(X, X \setminus K) \oplus S^*(X, X \setminus L) & \rightarrow & S^*(X, X \setminus U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(U \cap V) & \hookrightarrow & SU \oplus SV & \rightarrow & S^{\mathcal{W}}(U \cup V) \end{array}$$

Die mittleren Vertikalen liefern darin auf der Homologie die Komposition von Ausschneidung $H^*(X, X \setminus K) \xrightarrow{\sim} H^*(U, U \setminus K) \rightarrow HU$ und $\cap \omega_{K \subset U}$ und ebenso für $L \subset V$. Ähnlich erklären wir die linke Vertikale durch Verwendung des Repräsentanten $\ddot{\omega}_3$ von $\omega_{(K \cap L) \subset (U \cap V)} \in H_n(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cap L))$. So erhalten wir das gesuchte kommutative Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Sequenzen in den Horizontalen, das beim Übergang zur Homologie das Diagramm liefert, dessen Kommutativität wir zu zeigen hatten. \square

Jetzt gehen wir in mehreren Schritten von Spezialfällen bis zur allgemeinen Situation.

1. Der Satz gilt für $M = \mathbb{R}^n$. Dann bilden ja die abgeschlossenen Bälle D_r schon ein konfinales System unter allen kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^n und die Abbildung $\cap \omega_{D_r} : H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D_r) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}\delta$ ist nach 7.4.1 in diesem Fall das Auswerten einer Kohomologiekategorie auf der Homologiekategorie $\omega_{D_r} \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D_r)$ gefolgt von der Multiplikation mit dem kanonischen Erzeuger δ der nullten Homologie, also ein Isomorphismus für $0 < r < \infty$.

2. Der Satz gilt für jede offene konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n , denn so eine Teilmenge ist schon homöomorph zu \mathbb{R}^n .

3. Der Satz gilt für jede endliche Vereinigung offener konvexer Mengen in \mathbb{R}^n mit Induktion, Schritt 2 und Lemma 7.4.7.

4. Ist M eine aufsteigende Vereinigung von offenen Teilmengen U_i und gilt der Satz für alle U_i , so gilt er auch für M . In der Tat gilt $H_q(M) = \text{colf } H_q(U_i)$ und $H_1^p M = \text{colf } H_1^p(U_i)$ nach den Übungen 7.1.41 und 7.2.13.

5. Der Satz gilt für jede offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . In der Tat läßt sie sich als aufsteigende Vereinigung von endlichen Vereinigungen offener Bälle schreiben.

6. Der Satz gilt für jede Mannigfaltigkeit. In der Tat finden wir nach Schritt 4 und dem Zorn'schen Lemma eine maximale offene Teilmenge, für die der Satz gilt. Wäre sie nicht schon die ganze Mannigfaltigkeit, so könnten wir sie nach Lemma 7.4.7 und Schritt 5 noch durch eine Karte vergrößern, im Widerspruch zur Maximalität. \square

Korollar 7.4.8. *Ist t ein Erzeuger der zweiten Kohomologiegruppe $H^2\mathbb{P}^n\mathbb{C}$, so liefert der offensichtliche Ringhomomorphismus einen Isomorphismus*

$$\mathbb{Z}[t]/\langle t^{n+1} \rangle \xrightarrow{\sim} H^*\mathbb{P}^n\mathbb{C}$$

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß das Produkt eines Erzeugers von H^{2p} mit einem Erzeuger von H^{2q} stets ein Erzeuger von H^{2p+2q} ist. Im Fall $p + q = n$ folgt das aus 6.4.11. Im Fall $p + q > n$ ist eh nichts zu zeigen. Im Fall $p + q = m < n$ verwendet man den nach 3.4.10 und 6.2.7 surjektiven Ringhomomorphismus $H^*\mathbb{P}^n\mathbb{C} \rightarrow H^*\mathbb{P}^m\mathbb{C}$. \square

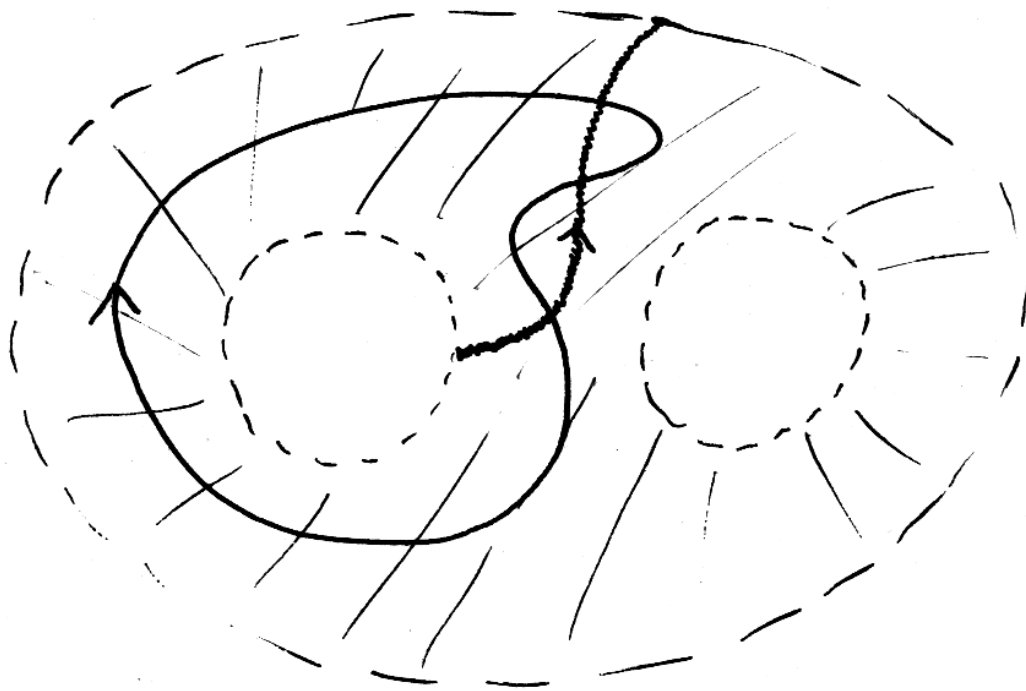
Vorschau 7.4.9 (Schnittprodukt und Poincaré-Dualität). Sei im folgenden k ein Hauptidealring oder allgemeiner ein beliebiger noetherscher Krings endlicher homologischer Dimension und sei M eine abzählbar basierte n -Mannigfaltigkeit. Ich will kurz skizzieren, wie sich der in 6.4.10 und 6.4.11 erklärte Zusammenhang zwischen Poincaré-Dualität und Schnittpaarung auf diesen Fall verallgemeinert. Sobald uns garbenkohomologische Begriffsbildungen zur Verfügung stehen, gelingt das ohne die Beschränkung auf abzählbar basierte Mannigfaltigkeiten. In jedem Fall konstruieren wir in [TSF] 9.10.10 zusätzlich zu den Poincaré-Isomorphismen

$$P : H_{n-p}(M; k) \xrightarrow{\sim} H_1^p(M; k)$$

auch noch natürliche Isomorphismen zwischen der Kohomologie und der lokal-endlichen Homologie, die wir die **dualisierten Poincaré-Isomorphismen**

$$P^! : H_{n-p}^1(M; k) \xrightarrow{\sim} H^p(M; k)$$

nennen. Im Fall eines Koeffizientenkörpers k entstehen sie unter Beachtung von 7.3.28 schlicht durch Dualisieren aus den Poincaré-Isomorphismen, daher habe



Ein Zykel und ein lokalendlicher Zykel in einer offenen Teilmenge der Ebene. Je nach Wahl der Orientierung der Ebene ist in diesem Fall die Schnittzahl ± 1 .

ich sie so genannt. Im Fall einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit fallen die beiden oben diskutierten Isomorphismen zusammen. Im allgemeinen ist die Konstruktion der dualisierten Poincaré-Isomorphismen komplizierter und soll an dieser Stelle nicht ausgeführt werden. Unter den dualisierten Poincaré-Isomorphismen entspricht das cup-Produkt $\cup : H^p(M; k) \times H^q(M; k) \rightarrow H^{p+q}(M; k)$ auf der Kohomologie bilinearen Abbildungen

$$H_{n-p}^!(M; k) \times H_{n-q}^!(M; k) \rightarrow H_{n-p-q}^!(M; k)$$

Sie heißen **Schnittprodukte** und wir nennen sie genauer **cup-Schnittprodukte**. Um ihre anschauliche Bedeutung präzise zu formulieren, muß ich etwas ausholen. Gegeben eine orientierte abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $X \looparrowright M$ der Dimension a erinnern wir aus 7.3.14 ihren Fundamentalzykel $[X]^! \in H_a^!(M; k)$. Das geht, da wir M in diesem Unterabschnitt abzählbar basiert angenommen hatten und da folglich auch X abzählbar basiert ist. Seien nun $X \looparrowright M$ und $Y \looparrowright M$ abgeschlossene orientierte Untermannigfaltigkeiten, die sich „transversal schneiden“. Damit ist gemeint, daß es um jeden Punkt ihres Schnitts $X \cap Y$ eine offene Umgebung $U \Subset M$ und einen Homöomorphismus $U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ gibt, der Homöomorphismen $X \cap U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^a \times 0$ sowie $Y \cap U \xrightarrow{\sim} 0 \times \mathbb{R}^b$ induziert und unter dem die von M auf U induzierte Orientierung der Standardorientierung des \mathbb{R}^n entspricht. Seien dann $\varepsilon_X, \varepsilon_Y$ die Vorzeichen, die angeben, ob unsere letzten beiden Homöomorphismen die vorgegebenen Orientierungen auf X, Y mit den Standardorientierungen auf $\mathbb{R}^a, \mathbb{R}^b$ identifizieren oder nicht. Versehen wir dann $X \cap Y$ mit der **Schnittorientierung**, die unter dem induzierten Homöomorphismus $X \cap Y \cap U \xrightarrow{\sim} 0 \times \mathbb{R}^c \times 0$ mit $c := a + b - n$ dem $\varepsilon_X \varepsilon_Y$ -fachen der Standardorientierung auf \mathbb{R}^c entspricht, so gilt für unsere cup-Schnittprodukte

$$[X]^! \cdot [Y]^! = [X \cap Y]^!$$

Des weiteren entspricht unter den dualisierten Poincaré-Isomorphismen die durch das cap-Produkt gegebene Struktur auf der Homologie als Modul über dem Kohomologiering $\cap : H^p(M; k) \times H_{p+q}(M; k) \rightarrow H_q(M; k)$ bilinearen Abbildungen

$$H_{n-p}^!(M; k) \times H_{p+q}(M; k) \rightarrow H_q(M; k)$$

Auch sie heißen **Schnittprodukte** und wir nennen sie **cap-Schnittprodukte**. Sie haben die analoge Eigenschaft, daß für sich transversal schneidende abgeschlossene orientierte Untermannigfaltigkeiten $X, Y \looparrowright M$ mit Y kompakt und der Notation $[Y] \in H_b(M; k)$ für den Fundamentalzykel einer kompakten Untermannigfaltigkeit der Dimension b als Element der Homologie von M gilt

$$[X]^! \cdot [Y] = [X \cap Y]$$

Im Fall $q = 0$ erhalten wir durch Nachschalten der Augmentation $H_0(M; k) \rightarrow k$ aus dem cap-Schnittprodukt die **Schnittpaarung**

$$H_{n-p}^!(M; k) \times H_p(M; k) \rightarrow k$$

Im Fall von kompaktem M hatten wir sie bereits in 4.3.19 angekündigt und dafür die Notation \odot vereinbart, die wir auch in diesem allgemeineren Fall verwenden werden. Daß diese bilineare Abbildung für M kompakt in der Tat die in 4.3.19 von einer Schnittpaarung geforderten Eigenschaften hat, ist eine offensichtliche Konsequenz unserer feineren Behauptungen für die Schnittprodukte. Daß jedoch unsere Schnittprodukte hinwiederum tatsächlich die oben behaupteten Eigenschaften haben, wird erst in [TSF] 6.4.31 bewiesen werden. Unter unseren Poincaré-Isomorphismen und dualisierten Poincaré-Isomorphismen entsprechen sich dann unsere Schnittpaarung, die vom cup-Produkt induzierte Paarung und die beiden Kroneckerpaarungen wie in folgender Übersicht dargestellt, die unsere in 6.4.11 im kompakten Fall gegebenen Formeln verallgemeinert.

$$\begin{aligned} H_{n-p}^!(M; k) \times H_p(M; k) &\rightarrow k, & (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \odot \beta \\ H^p(M; k) \times H_1^{n-p}(M; k) &\rightarrow k, & (a, b) &\mapsto \langle a \cup b, \omega_M \rangle \\ H_{n-p}^!(M; k) \times H_1^{n-p}(M; k) &\rightarrow k, & (a, \beta) &\mapsto \langle a, \beta \rangle \\ H^p(M; k) \times H_p(M; k) &\rightarrow k, & (\alpha, b) &\mapsto \pm \langle b, \alpha \rangle \end{aligned}$$

Falls eine dieser Paarungen eine Bijektion des linken Raums auf den Dualraum des rechten Raumes oder das Umgekehrte induziert, so folgt insbesondere dasselbe für die drei anderen Paarungen. Im Fall eines Koeffizientenkörpers wissen wir bereits aus 6.1.6, daß das stets der Fall ist.

Beispiel 7.4.10 (Erzwungene Schnitte geschlossener Wege in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$). Für die Homologie der reell projektiven Ebene $H_q(\mathbb{P}^2\mathbb{R}; \mathbb{F}_2)$ mit Koeffizienten im zweielementigen Körper wissen wir nach 5.1.6, daß sie eindimensional ist für $q = 0, 1, 2$ und Null sonst. Für das nichttriviale Element $z \in H_1(\mathbb{P}^2\mathbb{R}; \mathbb{F}_2)$ gilt also $z \odot z \neq 0$. Wir können so aus der erst in [TSF] 6.4.31 bewiesenen Interpretation von $z \odot z$ als Schnittzahl folgern, daß zwei geschlossene nicht zusammenziehbare Wege in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, die mithin beide unter dem Hurewicz-Isomorphismus diese Homologieklassen darstellen, nie disjunkt sein können. Äquivalent dazu ist die Aussage, daß zwei ungerade stetige Abbildungen $S^1 \rightarrow S^2$ nie disjunktes Bild haben können. Das scheint mir auch anschaulich recht klar, so eine ungerade stetig Abbildung muß ja einen Halbkreis auf einen stetigen Weg von einem Punkt zum gegenüberliegenden Punkt der Kugelschale abbilden und den gegenüberliegenden Halbkreis auf den gegenüberliegenden Weg zurück zum Ausgangspunkt.

Übungen

Übung 7.4.11. Man definiere für jeden Hausdorffraum ein cup-Produkt auf seiner Kohomologie mit kompaktem Träger. Für eine Mannigfaltigkeit entspricht es nebenbei bemerkt unter dem Poincaré-Isomorphismus dem anschaulichen Schnittprodukt auf der Homologie.

Übung 7.4.12 (Cup mit dem Dual von Fundamentalzykeln). Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung von orientierten kompakten Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n , so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H^\nu X & \xleftarrow{f^*} & H^\nu Y & \xrightarrow{\cup_{P_Y f_*[X]}} & H^{\nu+n-m} Y \\ \downarrow \cap [X] & & & & \downarrow \cap [Y] \\ H_{m-\nu} X & \xrightarrow{f_*} & & & H_{m-\nu} Y \end{array}$$

Hinweis: Projektionsformel 6.4.4. Ist speziell $f = i$ eine Einbettung, so finden wir mit unserer abkürzenden Notation $[X] = i_*[X]$ die Beschreibung

$$P_Y \circ i_* \circ P_X^{-1} \circ i^* = (\cup_{P_Y} [X])$$

für das cup-Produkt mit dem Poincarédualen des Fundamentalzykels von X .

7.5 Schnittzahlen im Simplicialen*

7.5.1. Im folgenden zeigen wir nach einigen Vorbereitungen Satz 7.5.7 zur simplicialen Interpretation der Schnittzahlen. Er hat das Verdienst, eine erste bewiesene anschauliche Interpretation bereitzustellen, zeigt aber nicht die in 4.3.19 behaupteten Eigenschaften. Das gelingt erst im Rahmen der Garbenkohomologie. Allerdings benötigt das einen großen Apparat, so daß die hier gegebene elementarere Argumentation auch ihre Berechtigung haben mag.

7.5.2. Sei M eine kompakte orientierte n -Mannigfaltigkeit. Für zwei Homologieklassen komplementärer Dimension $\alpha \in H_q M$ und $\beta \in H_{n-q} M$ ist hoffentlich anschaulich in etwa klar, was ihre „Schnittzahl“ sein sollte, die die Schnittpunkte von repräsentierenden Zykeln „in generischer Lage“ mit geeigneten, von der Orientierung abhängigen Vorzeichen zählt. Mit dem Isomorphismus der Poincarédualität 7.4.3 können wir unseren Homologieklassen sicher formal korrekt eine Zahl $\alpha \odot \beta \in \mathbb{Z}$ zuordnen wie folgt: Wir suchen $a \in H^{n-q} M$ und $b \in H^q M$ mit $\alpha = a \cap \omega_M$ und $\beta = b \cap \omega_M$ und setzen

$$\alpha \odot \beta := \langle a \cup b, \omega_M \rangle$$

Dies sei unsere Definition der **Schnittzahl** der beiden Homologieklassen. Der bald folgende Satz 7.5.7 soll plausibel machen, daß die so definierte Zahl die oben beschriebene geometrische Bedeutung hat. Dazu braucht es jedoch einige Vorbereitungen. Daß unsere Zahl tatsächlich die in unserer Vorschau 4.3.19 versprochenen Eigenschaften hat, zeigen wir erst in [TSF] 6.4.31.

7.5.3. Seien \mathcal{K} ein Simplizialkomplex und $\check{\mathcal{K}}$ seine baryzentrische Unterteilung 3.2.8 mit ihrer natürlichen simplizialen Teilordnung. Die hoffentlich offensichtlichen Kettenabbildungen liefern wie im Beweis von 3.1.7 einen Isomorphismus von Kettenkomplexen und eine Homotopieäquivalenz

$$S\check{\mathcal{K}} \xleftarrow{\sim} S^{\text{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\sim} S\Delta(\mathcal{K})$$

7.5.4. Sei nun unser Simplizialkomplex \mathcal{K} eine Triangulierung einer kompakten orientierten n -Mannigfaltigkeit. Wir wählen eine Anordnung \leq auf der Menge E der Ecken von \mathcal{K} . Der Fundamentalzykel von $\Delta(\mathcal{K})$ hat genau einen Repräsentanten in den n -Simplizialketten und damit auch genau einen Repräsentanten $\omega \in S_n^{\text{os}}\Delta(\mathcal{K})$ in der Gruppe der ordnungsverträglichen simplizialsingulären n -Ketten. Nach 7.3.16 hat unser Fundamentalzykel die Gestalt

$$\omega = \sum_{s \in \mathcal{K}_n} \varepsilon(s) \langle s \rangle$$

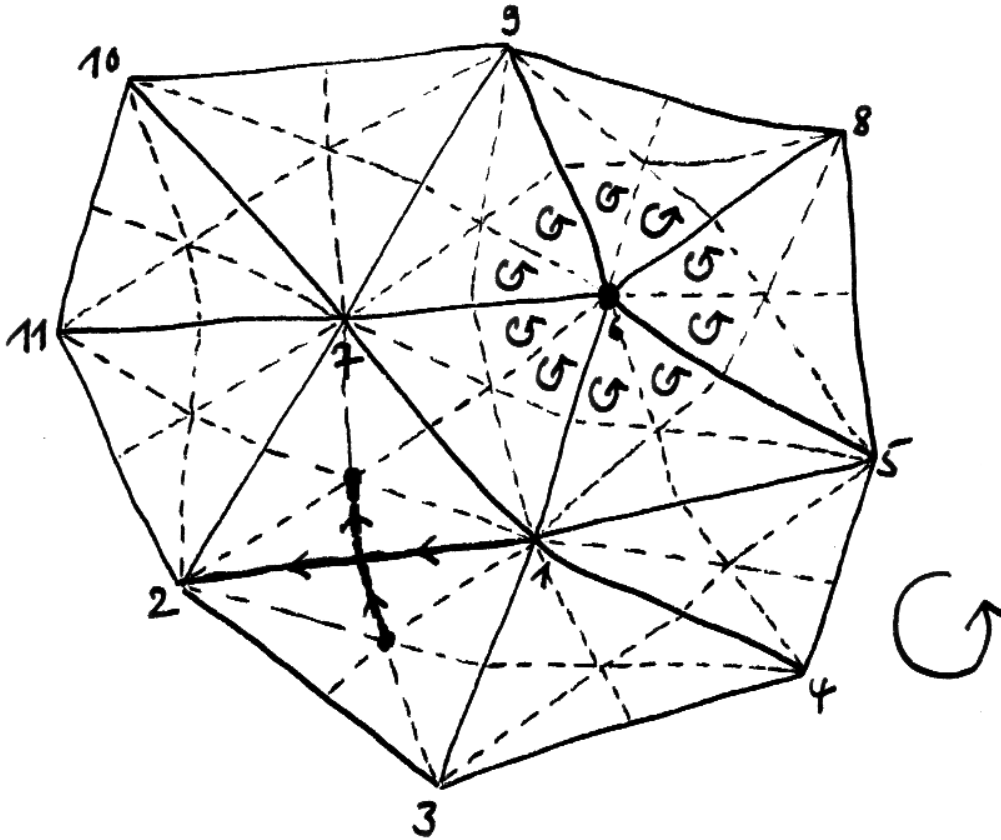
für wohlbestimmtes $\varepsilon : \mathcal{K}_n \rightarrow \{\pm 1\}$, wobei $\langle s \rangle$ wie im Beweis von 3.1.7 den zum n -Simplex s gehörigen angeordneten simplizialsingulären n -Simplex bezeichnet.

7.5.5. Gegeben ein $(n - q)$ -Simplex $t \in \mathcal{K}_{n-q}$ erklären wir die zugehörige **duale Zelle** $c(t) \in S_q^{\text{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}})$ als die Summe

$$c(t) = \sum \eta(\check{u}) \langle \check{u} \rangle$$

über alle q -Simplizes $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$ mit $\check{u}_0 = t$. Einen q -Simplex $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$ schreiben wir dazu als echt aufsteigende Kette $\check{u}_0 \subsetneq \check{u}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$ von nichtleeren Simplizes von \mathcal{K} , und summieren über alle Ketten, die mit dem $(n - q)$ -Simplex t beginnen. Die $\eta(\check{u}) = \pm 1$ seien gegeben wie folgt: Man betrachte die Ecken $u_1, \dots, u_q \in E$ des ursprünglichen Komplexes mit $\check{u}_i = \check{u}_{i-1} \cup \{u_i\}$, so daß also gilt $\check{u}_q = \check{u}_0 \cup \{u_1, \dots, u_q\}$. Sei (s_0, s_1, \dots, s_n) die angeordnete Darstellung des n -Simplex \check{u}_q und (t_0, \dots, t_{n-q}) die angeordnete Darstellung des $(n - q)$ -Simplex $t = \check{u}_0$ und $\tau \in \mathcal{S}_{n+1}$ die Permutation mit

$$\begin{array}{rcl} s_{\tau(0)} & = & t_0 \\ \vdots & & \vdots \\ s_{\tau(n-q)} & = & t_{n-q} \\ s_{\tau(n-q+1)} & = & u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ s_{\tau(n)} & = & u_q \end{array}$$



Ein Ausschnitt einer triangulierten 2-Mannigfaltigkeit. Die Nummerierung der Ecken legt ihre Anordnung fest. Der Kreispeil daneben deutet die Orientierung an, der Fundamentalzykel hat also die Gestalt

$$\omega = \dots + \langle \{1, 2, 3\} \rangle - \langle \{1, 2, 7\} \rangle + \dots$$

Die duale Zelle zum 1-Simplex $t = \{1, 2\}$ besteht aus den beiden Summanden $\tilde{u} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ und $\tilde{v} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 7\}\}$ und deren Vorzeichen sind $\eta(\tilde{u}) = -1$ und $\eta(\tilde{v}) = 1$, so daß sich die duale Zelle zu $c(t) = \tilde{v} - \tilde{u}$ ergibt. Im

Bild habe ich die den ordnungsverträglichen 1-Ketten $\langle t \rangle$ und $c(t)$ entsprechenden Simplicialketten fett eingezeichnet.

Weiter besteht die duale Zelle zum 0-Simplex $\{6\}$ aus 10 Summanden, und ich habe im Bild auch die der dualen Zelle zu dieser Ecke alias der ordnungsverträglichen 2-Kette $c(\{6\})$ entsprechende Simplicialkette durch Kreispeile eingezeichnet.

So sei das fragliche Vorzeichen gegeben als $\eta(\tilde{u}) = (-1)^{q(n-q)} \varepsilon(s) \operatorname{sgn}(\tau)$.

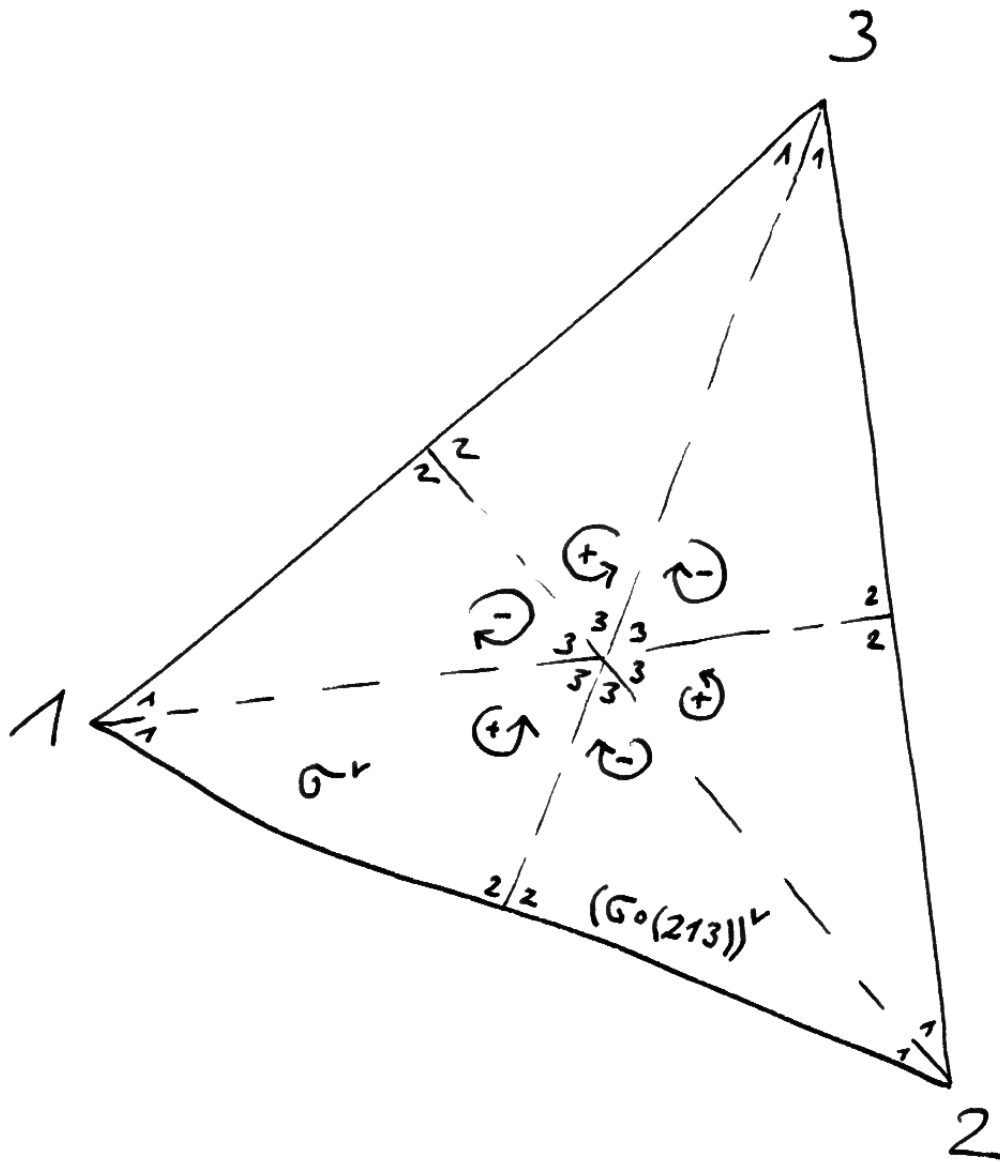
7.5.6. Diese dualen Zellen mögen mit ihren ganzen Vorzeichen unanschaulich wirken. Der erste Teil des folgenden Satzes mag der Anschauung helfen, zeigt er doch, daß die Vorzeichen stets so zusammenpassen, daß der Rand einer dualen Zelle eine Linearkombination dualer Zellen ist. Das hat im Bild der Simplicialketten unter anderem die anschauliche Bedeutung, daß „die einzelnen Simplizes einer dualen Zelle gerade so orientiert sind, daß sich die internen Ränder gegenseitig wegheben“.

Satz 7.5.7 (Simpliziale Interpretation der Schnittzahlen). *Sei \mathcal{K} ein Simplicialkomplex, der eine kompakte orientierte n -Mannigfaltigkeit M trianguliert. Sei auf der Menge E der Ecken von \mathcal{K} eine Anordnung gewählt. So gilt:*

1. *Die von den dualen Zellen im Sinne von 7.5.5 erzeugten Untergruppen $C_q \subset S_q^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$ bilden einen Unterkomplex $C \subset S^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$ im Komplex der ordnungsverträglichen simplicialsingulären Ketten der baryzentrischen Unterteilung $\check{\mathcal{K}}$ von \mathcal{K} und die Einbettung dieses Unterkomplexes induziert auf allen Homologiegruppen Isomorphismen $\mathcal{H}_q C \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_q M$;*
2. *Wird $\alpha \in \mathbb{H}_q M$ repräsentiert durch einen simplicialsingulären Zykel der Gestalt $\sum_{t \in \mathcal{K}_q} \alpha_t \langle t \rangle \in S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K})$ und $\beta \in \mathbb{H}_{n-q} M$ durch einen „zellulären“ Zykel der Gestalt $\sum_{t \in \mathcal{K}_q} \beta_t c(t) \in C_{n-q}$, so gilt für ihre Schnittzahl*

$$\alpha \odot \beta = \sum_t \alpha_t \beta_t$$

Beweis. Zunächst einmal erinnern wir die Definition der Schnittzahl: Wir hatten dazu ja das $a \in \mathbb{H}^{n-q} M$ beziehungsweise $b \in \mathbb{H}^q M$ genommen mit $a \cap \omega_M = \alpha$ beziehungsweise $b \cap \omega_M = \beta$ und dann unsere Schnittzahl als Kronecker-Paarung des cup-Produkts dieser Kohomologieklassen mit dem Fundamentalzykel definiert, in Formeln $\alpha \odot \beta = \langle a \cup b, \omega_M \rangle$. Mit der Adjunktionsformel 6.4.6 erhalten wir daraus auch die alternative Darstellung $\alpha \odot \beta = \langle a, \beta \rangle$. Es reicht also, das Urbild a von α unter dem Poincaré-Isomorphismus hinreichend explizit zu beschreiben. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen. Gegeben ein Simplicialkomplex \mathcal{K} liefert das baryzentrische Unterteilen ganz allgemein eine Homotopieäquivalenz $S\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} S\check{\mathcal{K}}$ zwischen den entsprechenden Komplexen von Simplicialketten. Genauer erhält man eine Injektion von der Menge \mathcal{K}_q^{\leq} aller angeordneten q -Simplizes von \mathcal{K} in die Menge $\check{\mathcal{K}}_q^{\leq}$ aller angeordneten q -Simplizes von $\check{\mathcal{K}}$, indem man $\sigma : \{0, \dots, q\} \hookrightarrow E$ abbildet auf $\sigma^\vee : \{0, \dots, q\} \hookrightarrow \check{E}$ gegeben durch $\sigma^\vee(i) = \{\sigma(0), \dots, \sigma(i)\}$. Anschaulich gesprochen erhalten wir so „alle q -Simplizes von $\check{\mathcal{K}}$, die in q -Simplizes von \mathcal{K} liegen“, und die Abbildung $\mathcal{K}_q^{\leq} \rightarrow S_q \check{\mathcal{K}}$ gegeben durch



Ein angeordneter 3-Simplex σ und die sechs angeordneten 3-Simplizes $\sigma \circ \pi$ mit Vorzeichen, deren Summe seine baryzentrische Unterteilung $b(\sigma)$ im Sinne des Beweises von 7.5.7 repräsentiert. Die Kreispile sind eigentlich überflüssig und betonen nur die Reihenfolge der Ecken in den angeordneten 3-Simplizes $\sigma \circ \pi$ und die Beziehung zum Signum der zugehörigen Permutationen π .

$$\sigma \mapsto \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{q+1}} \text{sgn}(\pi) (\sigma \circ \pi)^\vee$$

induziert eine Homotopieäquivalenz $b : S\mathcal{K} \xrightarrow{\simeq} S\check{\mathcal{K}}$, die wir wieder die **baryzentrische Unterteilung** nennen. Wenden wir auf unseren Fundamentalzykel aus 7.5.4 die baryzentrische Unterteilung an, so erhalten wir den Repräsentanten

$$\check{\omega} = \sum_{s \in \mathcal{K}_n, \pi \in \mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(s) \text{sgn}(\pi) (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee$$

des Fundamentalzykels in $S_n^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$. Die weitere Argumentation wird ausgehen von einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} C^*[n] & \overset{\text{---}}{\longrightarrow} & S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) \\ \uparrow & \nearrow & \downarrow b \\ S_{\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})[n] & \xrightarrow{\cap \check{\omega}} & S^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}}) \end{array}$$

Der Komplex $S_{\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$ der ordnungsverträgliche simplizialen Koketten mitsamt einem Isomorphismus von Komplexen $S_{\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\simeq} S^* \check{\mathcal{K}}$ ist in derselben Weise erklärt wie der Komplex der ordnungsverträgliche simplizialen Ketten in 3.2.8. Die durchgezogenen Pfeile sind uns bereits bekannt, die rechte Vertikale ist modulo unserer Identifikation von Simplizialketten mit ordnungsverträglichen simplizialen Ketten das baryzentrische Unterteilen, die untere Horizontale die Restriktion auf ordnungsverträgliche simpliziale Ketten unserer Poincaré-Dualität aus 7.4.3. Unser Ziel ist die Ergänzung durch Kettenabbildungen wie durch die gestrichelten Pfeile angedeutet zu einem kommutativen Diagramm von Homotopieäquivalenzen, dessen obere Horizontale dann die geometrische Bedeutung des Poincaré-Isomorphismus klar macht. Als ersten Schritt in diese Richtung behaupte ich, daß die durch $\cap \check{\omega}$ gegebene Kettenabbildung wie durch den schrägen gestrichelten Pfeil angedeutet über unsere baryzentrische Unterteilung b faktorisiert. Ein q -Simplex $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$ ist ja per definitionem eine echt aufsteigende Kette $\check{u}_0 \subsetneq \check{u}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$ von Simplexes von \mathcal{K} . Die zugehörigen $\langle \check{u} \rangle$ bilden eine \mathbb{Z} -Basis von $S_q^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$ und die zugehörigen Linearformen bilden eine \mathbb{Z} -Basis $\langle \check{u} \rangle^*$ von $S_{\text{os}}^q \Delta(\check{\mathcal{K}})$. Für das cap-Produkt $\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega}$ mit dem Fundamentalzykel erhalten wir nach 6.4.14 die Darstellung

$$\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega} = (-1)^{q(n-q)} \sum_{s \in \mathcal{K}_n, \pi \in \mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(s) \text{sgn}(\pi) \langle \langle \check{u} \rangle^*, (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee \rho^q \rangle (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee \lambda^{n-q}$$

Insbesondere ist die rechte Seite nur dann nicht Null, wenn \check{u} die Gestalt $\check{u}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$ hat mit $\check{u}_0 \in \mathcal{K}_{n-q}$ und dann natürlich auch $\check{u}_i \in \mathcal{K}_{n-q+i}$ für alle i .

Seien nun $u_1, \dots, u_q \in E$ die Ecken des ursprünglichen Komplexes mit $\check{u}_i = \check{u}_{i-1} \cup \{u_i\}$, so daß also gilt $\check{u}_q = \check{u}_0 \cup \{u_1, \dots, u_q\}$. Sei $s = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ die angeordnete Darstellung des n -Simplex s . Auf der rechten Seite liefert nur $s = \check{u}_q \in \mathcal{K}_n$ von Null verschiedene Beiträge, und zwar nur für $\pi \in \mathcal{S}_{n+1}$ mit $s_{\pi(n-q+1)} = u_1, \dots, s_{\pi(n)} = u_q$, und für diese ist der Gesamtbeitrag bis auf ein Vorzeichen gerade

$$b(\check{u}_0) = \sum_{\kappa \in \mathcal{S}_{n-q+1}} \text{sgn}(\kappa) (\langle \check{u}_0 \rangle \circ \kappa)^\vee$$

Das zeigt schon einmal, dass $\cap \check{\omega}$ wie behauptet über b faktorisiert und liefert den Pfeil schräg nach oben. Um auch das Vorzeichen anzugeben, betrachten wir die angeordnete Darstellung $\check{u}_0 = (v_0, \dots, v_{n-q})$ und die Permutation $\tau \in \mathcal{S}_{n+1}$ mit $s_{\tau(0)} = v_0, \dots, s_{\tau(n-q)} = v_{n-q}, s_{\tau(n-q+1)} = u_1, \dots, s_{\tau(n)} = u_q$, finden für das fragliche Vorzeichen die Darstellung $\eta(\check{u}) = (-1)^{q(n-q)} \varepsilon(s) \text{sgn}(\tau)$ und erhalten für $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$ die Formel

$$\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega} = \begin{cases} \eta(\check{u}) b(\check{u}_0) & \text{falls } \check{u}_0 \in \mathcal{K}_{n-q}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bilden wir den Quotienten C^* von $S_{\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$ nach den $\langle \check{u} \rangle^*$ mit $\check{u}_0 \notin \mathcal{K}_{n-q}$ sowie den $\eta(\check{u}) \langle \check{u} \rangle^* - \eta(\check{v}) \langle \check{v} \rangle^*$ mit $\check{u}_0 = \check{v}_0$, so faktorisiert unser $\cap \check{\omega}$ weiter und liefert, wie man leicht sieht, einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$C^*[n] \xrightarrow{\sim} S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K})$$

Man kann in dieser Weise sogar einen Beweis der Poincaré-Dualität im triangulierbaren Fall geben, wofür dann allerdings noch gezeigt werden muß, daß die linke Vertikale unseres Diagramms Isomorphismen auf der Homologie induziert. Da wir aber vielmehr an der anschaulichen Bedeutung der Poincaré-Dualität interessiert sind, drehen wir den Spieß um und folgern aus der Poincaré-Dualität 7.4.3, daß die linke Vertikale unseres Diagramms $S_{\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}}) \rightarrow C^*$ Isomorphismen auf der Kohomologie induziert. Nach 6.2.4 ist sie also eine Homotopieäquivalenz und unser ganzes Diagramm besteht aus Homotopieäquivalenzen. Gehen wir nun in dieser linken Vertikale zu den dualen Komplexen über, so erhalten wir offensichtlich genau den Unterkomplex $C \subset S^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$ aus dem ersten Teil unseres Satzes 7.5.7, und damit ist auch dieser erste Teil bereits bewiesen. Des weiteren sehen wir, daß für $t \in \mathcal{K}_{n-q}$ und $\langle t \rangle$ der zugehörige angeordnete Simplex seine baryzentrische Unterteilung $b(\langle t \rangle)$ genau ein Urbild hat unter $\cap \check{\omega}$, und daß dieses Urbild auf der dualen Zelle $c(t)$ den Wert Eins annimmt und auf allen anderen dualen Zellen den Wert Null. Daraus folgt dann auch der zweite Teil des Satzes. \square

8 Danksagung

Als Quellen für singuläre Homologietheorie habe ich besonders die Darstellungen von Greenberg-Harper [GH81], Ossa [Oss09] und Stöcker-Zieschang [SZ94] genutzt. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Olaf Schnürer, . . .

9 Die Vorlesung Algebraische Topologie im SS 17

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 25.4 Ziele der Algebraischen Topologie, Voller Simplex, Simplizialkomplexe und Polyeder, simpliziale Abbildungen, kombinatorische Flächen.
- 28.4 Triangulierung, Definition der Fundamentalgruppe, Zerschneidungen, Vierecke, Flächenworte, Klassifikation von Flächen (nur mündlich angesprochen).
- 2.5 Simplizialketten und simpliziale Homologie eines Simplizialkomplexes. Nicht: Homologie eines vollen Simplex, Azyklizität von Simplizes, persistente Homologie.
- 4.5 Singuläre Homologie. Berechnung für Punkte und konvexe Teilmengen eines \mathbb{R}^n . Zerlegung nach Wegzusammenhangskomponenten. Nullte Homologie. Noch nicht Funktorialität.
- 9.5 Funktorialität und Homotopie-Invarianz. Kategorien und Funktoren. Homotopiekategorie von Räumen und Komplexen.
- 11.5 Relative Homologie, lange exakte Homologiesequenz, Ausschneidung noch ohne Beweis, erste Anwendung auf relative Homologie des Standardsimplex zu seinem Rand, Beweis unfertig.
- 16.5 Homologie von Simplizes relativ zu ihrem Rand mit explizitem Erzeuger, Homologie von Sphären, Brouwer'scher Fixpunktsatz, lange exakte Homologiesequenz eines Tripels. Transformationen, Yoneda-Lemma ohne Beweis.
- 18.5 Unterteilungsoperatoren, Satz über feine Ketten, Beweis des Ausschneidungssatzes, Mayer-Vietoris-Sequenz, auch für relative Homologie, Anwendungen.
- 23.5 Simpliziale Ketten, Abbildung in die Simplizialketten, ordnungsverträgliche simpliziale q -Ketten und Vergleich zwischen deren Homologie und der singulären Homologie. Noch nicht Vergleich der Homologie zwischen ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten und allen simplizialsingulären Ketten.
- 30.5 Vergleich der Homologie zwischen ordnungsverträglichen simplizialsingulären Ketten und allen simplizialsingulären Ketten. Endlichkeitsaussagen.

- Eulercharakteristik. Simplizialer Fixpunktsatz. Satz über simpliziale Approximation ohne Beweis. Erste Annäherung an den Lefschetz'schen Fixpunktsatz ohne Beweis.
- 1.6. Formulierung Jordan-Brouwer, Definition augmentierter Komplex und reduzierte Homologie, Eigenschaften und Beziehung zur gewöhnlichen Homologie, Homologie des Komplements von Sphären in Sphären mit Beweis, noch nicht Beweis von Jordan-Brouwer.
 - 13.6. Beweis von Jordan-Brouwer, Invarianz von Gebieten.
 - 15.6. Anklebesequenz und ihre Konsequenzen, Homologie der komplex projektiven Räume, Eulercharakteristik von Zellkomplexen.
 - 20.6. Homologie und Orientierung von Vektorräumen, topologische Mannigfaltigkeiten und Orientierung dieser, Lemma über die Gleichheit von Orientierung zusammenhängender Mannigfaltigkeiten, die auf einem Punkt übereinstimmen.
 - 22.6. Orientierungsgarbe, Trivialisierung dieser für den reellen Raum, kartesisches Diagramm für die Einbettung einer offenen Teilmenge, Schnitte über Teilmengen, Hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten: Formulierung des allgemeinen Satzes und Beweis bis zu Schritt 2.
 - 27.6. Hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten, zu Ende.
 - 29.6. Homologie mit Koeffizienten. Tensorprodukt über Ringen. Vertauschbarkeit mit direkten Summen formuliert, aber noch nicht gezeigt.
 - 4.7. Vertauschbarkeit des Tensorprodukts mit direkten Summen. Rechtsexaktheit des Tensorprodukts. Tensorieren über \mathbb{Z} mit torsionsfreien Gruppen ist exakt. Universelles Koeffiziententheorem für Homologie mit torsionsfreien Koeffizienten. Tensorprodukt von Komplexen. Torsionsprodukt $*_{\mathbb{Z}}$ und lange exakte Torsionssequenz. Berechnung von $A * (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
 - 6.7. Universelles Koeffiziententheorem der Homologie. Beispiel der reell projektiven Räume. Hauptlemma der homologischen Algebra. Künneth-Formel und Eilenberg-Zilber noch ohne Beweis. Basis eines Funktors. Noch nicht Satz über azyklische Modelle.
 - 11.7. Beweis des Satzes über azyklische Modelle. Eilenberg-Zilber und Künneth-Formel.
 - 13.7. Verschmelzungskategorien. Universelle und stark universelle Verschmelzungen. Beispiele. Superfall vermurkst.

- 18.7. Superfall repariert. Verschmelzungskategorien der Komplexe und der Homotopiekomplexe. Kohomologie und Cup-Produkt. Noch nicht dessen Assoziativität etc gezeigt. Erst recht noch kein universelles Koeffiziententheorem der Kohomologie. Ebenso wenig Verschmelzung und Kreuzprodukt.
- 20.7 Kreuzprodukt von Homologie und Kohomologie, deren Eigenschaften. Darstellbare Verschmelzungskategorien und internes Hom. Der Kohomologiering.
- 25.7 Cap-Produkt und Poincaré-Dualität. Limites und Kolimites. Kohomologie mit kompaktem Träger.
- 27.7 Beweis der Poincaré-Dualität. Turcholsky's „Zur soziologischen Psychologie der Löcher“ verlesen. Meine Klein'sche Flasche mitbringen.

Literatur

- [AAG] [Skriptum Affine Algebraische Gruppen](#). Wolfgang Soergel.
- [AL] [Skriptum Algebra und Zahlentheorie](#). Wolfgang Soergel.
- [AN1] [Skriptum Analysis 1](#). Wolfgang Soergel.
- [AN2] [Skriptum Analysis 2](#). Wolfgang Soergel.
- [AN3] [Skriptum Analysis 3](#). Wolfgang Soergel.
- [BM60] A. Borel and J. C. Moore. Homology theory for locally compact spaces. *Michigan Math. J.*, 7:137–159, 1960.
- [FT1] [Skriptum Funktionentheorie 1](#). Wolfgang Soergel.
- [GH81] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic topology*, volume 58 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981. A first course.
- [GR] [Skriptum Grundlagen](#). Wolfgang Soergel.
- [Hir75] Heisuke Hironaka. Triangulations of algebraic sets. In *Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974)*, pages 165–185. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.
- [KAG] [Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie](#). Wolfgang Soergel.
- [LA1] [Skriptum Lineare Algebra 1](#). Wolfgang Soergel.
- [LA2] [Skriptum Lineare Algebra 2](#). Wolfgang Soergel.
- [Oss09] Erich Ossa. *Topologie*. Vieweg+Teubner, 2009. zweite überarbeitete Auflage.
- [She74] S. Shelah. Infinite abelian groups. *Israel Journal of Mathematics*, 18:243–256, 1974.
- [SZ94] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang. *Algebraische Topologie*. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, second edition, 1994.
- [TD] [Skriptum Derivierte Kategorien und Funktoren](#). Wolfgang Soergel.
- [TF] [Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie](#). Wolfgang Soergel.

- [TG] **Skriptum Garbenkohomologie.** Wolfgang Soergel.
- [TM] **Skriptum Topologie und kompakte Gruppen.** Wolfgang Soergel.
- [TS] **Skriptum Singuläre Homologie.** Wolfgang Soergel.
- [TSF] **Skriptum Grothendieck's sechs Funktoren.** Wolfgang Soergel.
- [TSK] **Skriptum Kategorielle Produktstrukturen.** Wolfgang Soergel.
- [Vic94] James W. Vick. *Homology theory*, volume 145 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1994. An introduction to algebraic topology.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das \cup dem Buchstaben u oder das \subset dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index

- $[M]^!$ Fundamentalzykel, 208
- X/Z bei topologischen Räumen, 70
- \Rightarrow Hom-Komplex
 - bei Kettenkomplexen, 33
- $\xrightarrow{\sim}$ Homotopieäquivalenz, 32
- \rightarrow_{Hot} Morphismen in Hot, 32
- $\xrightarrow{\sim}_{\text{Hot}}$ Isomorphismen in Hot, 32
- $[1]$ verschobener Komplex, 148
- f^* Eigrückzug
 - der Homologie, 26
- f_* Vorschub
 - singuläre Homologie, 22
- $f^!$ eigentliches Zurückholen
 - in der singulären Theorie, 199
- $f_!$
 - eigentlicher Vorschub, 208
- $f_!$ Ausdehnung durch Null
 - in der singulären Theorie, 198
- * Torsionsprodukt, 132
- \odot Schnittpaarung, 117, 221
- \cap cap-Produkt, 169
- \times Kreuzprodukt
 - der Homologie, 145
 - der Kohomologie, 159
- Abbildungsgrad
 - allgemein, 115
 - lokaler, 115
- Abbildungskegel
 - simultaner, 97
 - von Kettenabbildung, 163
 - von stetiger Abbildung, 91
- additiv
 - Funktor, 123
- additive Struktur
 - auf Kategorie, 123
- Adjunktionsformel
 - für cup und cap, 170
- Alexander
 - gehörnte Sphäre, 90
- Alexander-Whitney
 - Transformation, 140
- Alexander-Whitney-Abbildung, 154
- Alexander-Whitney-Äquivalenz, 140
- Ankleben einer Zelle, 91
- Anklebesequenz, 91
 - Variante, 97
- Augmentation, 85
 - bei singulären Ketten, 18
- augmentiert
 - Komplex, 85
- Ausdehnung durch Null
 - in der singulären Theorie, 198
- Ausschneidung, 59, 66
 - Kohomologie, 166
- azyklisch
 - für singuläre Homologie, 143
- azyklische Modelle, 143
- $B_q\mathcal{K}$ Simplicialränder, 7
- B_qX singuläre Ränder, 17
- baryzentrische Unterteilung, 81
- Basis eines Funktors, 143
- beschränkt in Richtung der Differentiale, 163
- Betti-Zahl, 77
- biadditiv
 - Abbildung, 127
- Bockstein-Homomorphismen, 127, 162
- Borel-Moore-Homologie
 - singuläre, 202
- Brouwer, Fixpunktsatz
 - allgemeiner, 63
- cap-Produkt, 169
 - in der Homotopiekategorie, 169

Cauchy'scher Integralsatz
 Umlaufzahlversion, 41
 $\chi(X)$ Eulercharakteristik von X , 77
 $\chi(X; k)$ Eulercharakteristik, 77
 cok Kokern
 bei abelschen Gruppen, 177
 col Kolimes, 186
 colf filtrierender Kolimes, 189
 colim Kolimes, 188
 cup-Produkt, 161

 $\delta \in H_0(\text{top})$, 18
 $\delta_w \in H_0 X$, 18
 dg-Gruppe, 23
 dgHot, 175
 dgMod, 23
 Diagramm
 in Kategorie, 188
 differentiell
 abelsche Gruppe, 23
 graduierte abelsche Gruppe, 23
 divisibel
 abelsche Gruppe, 179
 duale Zelle, 223

 Egalisator, 188
 eigentlich
 Vorschub, 208
 Eilenberg-Zilber, 140
 Transformation, 140
 Eilenberg-Zilber-Äquivalenz, 140
 erblicher Ring, 184
 Erweiterung
 von abelschen Gruppen
 abstrakte, 177
 konkrete, 176
 erweiterungsisomorph, 176
 Euler'scher Polyedersatz, 78
 Eulercharakteristik
 eines Kettenkomplexes, 78
 eines topologischen Raums, 77

 exakt Sequenz
 von Köcherdarstellungen, 190
 Ext-Sequenz
 im ersten Eintrag, 182
 im zweiten Eintrag, 177
 extension, 177

 feine Ketten, 65
 filtrierend
 Kategorie, 189
 Kolimes, 189
 Fixpunktsatz
 simplizialer, 80
 Fixpunktsatz von Brouwer
 allgemeiner, 63
 frei
 abelsche Gruppe, 58
 Funktorkategorie, 143
 Untergruppe, 138
 Fünferlemma, 56
 Fundamentalklasse, 109
 Fundamentalzykel, 109
 in der lokalendliche Homologie, 208
 k -Fundamentalzykel, 124
 Funktor
 additiver, 123

 Γ Schnitt
 der Orientierungsgarbe, 109
 Γ_1 Schnitte mit kompaktem Träger
 der Orientierungsgarbe, 109
 gehörnte Sphäre, 90
 graduiert
 abelsche Gruppe, 23

 \mathcal{H} Homologie
 von differentieller abelscher Gruppe, 24
 \mathcal{H}_q Homologie eines Komplexes, 24
 \tilde{H}_q reduzierte Homologiegruppen, 86
 H_q^{sing} singuläre Homologie, 17

$H_1^q(X; G)_{\text{sing}}$ kompakte Kohomologie, 198
 H_1^q Kohomologie mit kompaktem Träger, 198
 H_c^q kompakte Kohomologie, 198
 H_q simpliziale Homologie, 7
 H_q singuläre Homologie, 17
 Hauptlemma
 der homologischen Algebra für Moduln, 141
 Hinterseite eines Simplex, 154
 Hom_R Hom-Komplex, 139
 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}$ Hom-Komplex, 139
 Hom-Komplex, 33
 Homologie
 eines Kettenkomplexes, 24
 eines Punktes, 18
 konvexer Mengen, 19
 lokale, 62
 mit Koeffizienten, 123
 reduzierte
 mit Koeffizienten, 123
 singuläre, 17
 von $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$, 126
 von differentieller abelscher Gruppe, 24
 zelluläre, 99
 Homologiegruppe
 der Sphären, 60
 relative, 50
 simpliziale, 7
 singuläre, 17
 Homologiekategorie, 17
 in Kettenkomplex, 24
 Homologiesequenz
 abstrakte, 53
 eines Raumpaars, 55
 eines Raumtripels, 57
 homotop, 32
 frei homotop, 38
 Homotopie
 bei Raumpaaren, 52
 Homotopie-Invarianz
 der Homologie, 26
 Homotopieäquivalenz
 algebraische, 32
 Homotopiekategorie
 algebraische, 32
 Hopf-Invariante, 164
 Hot
 Hot_R , 32
 Homotopiekategorie, 32
 Hurewicz-Isomorphismus, 34
 injektiv
 abelsche Gruppe, 178
 Modul, 178
 Integralsatzes von Cauchy
 Umlaufzahlversion, 41
 Invarianz von Gebieten, 90
 Jordan'scher Kurvensatz, 90
 Jordan-Brouwer
 Satz von, 85
 $\mathcal{K}_q^<$ angeordnete q -Simplizes, 5
 $K(f)$ Abbildungskegel von f , 91
 k -Skelett, 75
 kanonischer Erzeuger
 der nullten Homologie des Punktraums, 18
 Kantenabbildung, 14
 $\text{Keg}(f)$ Abbildungskegel von f , 163
 $\text{Keg}(f)$ Abbildungskegel von f , 91
 Ket Kettenkomplexe, 23
 Kette
 Simplizialkette, 5
 simplizialsinguläre, 72
 ordnungsverträgliche, 74
 singuläre, 14
 Kettenabbildung, 23
 kettenhomotop, 32
 Kettenkomplex, 23

kofiltrierend
 Kategorie, 189
 Limes, 189
kofinal
 in filtrierender Kategorie, 191
 Kohomologie
 eines Punktes, 156
 kompakte, 198
 mit Koeffizienten, 156
 relative, 166
 simpliciale, 167
 singuläre
 mit kompaktem Träger, 198
 Kohomologiegruppen, 156
 Kohomologiering, 161
 Kokern
 bei abelschen Gruppen, 177
 Kokette vom Grad q , 157
 Koketten
 relative, 166
 singuläre kompakte, 199
 Kolimes, 186
 filtrierender, 189
 kompaktrelativ homologisch q -endlich,
 210
 Komplex, 23
 konfinal
 in filtrierender Kategorie, 191
 Korand, 156
 Korandoperator, 157
 Kozykel, 156
 Kreuzprodukt
 der Homologie, 145
 der Kohomologie, 159
 der relativen Homologie, 149
 Kronecker-Paarung, 157
 Kroneckerpaarungen
 relative, 168
 Künneth-Formel, 148
 mit Körperkoeffizienten, 147
 λ_p Vorderseite eines Simplex, 154
 lange exakte Sequenz
 der Homologie, abstrakte, 53
 der Kohomologie, 166
 Limes, 186
 direkter, 188
 in Kategorie, 186
 induktiver, 188
 inverser, 188
 kofiltrierender, 189
 projektiver, 188
 \lim_f kofiltrierender Limes, 189
 lineare Fortsetzung, 4
 lokal
 Homologie, 62
 lokal endlich
 Simplizialkomplex, 201
 lokal endliche Homologie
 simpliciale, 204
 lokalendlich
 singuläre Kette, 202
 lokalendliche Homologie
 singuläre, 202
 Mannigfaltigkeit
 topologische, 102
 Mayer-Vietoris-Sequenz
 der Homologie, 68
 der Kohomologie, 167
 der kompakten Kohomologie, 199
 für H_1^* , 199
 relative, 70
 relative, der Kohomologie, 167
 Mittag-Leffler
 Bedingung von, 195
 Morphismus
 von Raumpaaren, 50
 multiadditiv
 Abbildung, 127
 Multiverknüpfung

von multiadditiven Abbildungen, 130
 Neunerlemma, 57
 nullhomolog, 34
 nullhomotop
 Kettenabbildung, 32
 Komplex, 32
 nullhomotope, 175
 Nullkomplex, 23
 Nullschnitt, 107
 $or_M(G)$ Orientierungsgarbe mit Koeffizienten, 124
 orientierbar
 Mannigfaltigkeit, topologische, 105
 k -orientierbar, 124
 orientiert
 Mannigfaltigkeit, topologische, 105
 Orientierung
 analytische, 103
 lokale, 103
 tautologische, 107
 von topologischer Mannigfaltigkeit, 103
 k -Orientierung, 124
 Orientierungsdarstellung, 107
 Orientierungsgarbe, 105
 mit Koeffizienten, 124
 Orientierungsüberlagerung, 107
 Poincaré-Isomorphismus, 215
 dualisierter, 218
 Poincaré-Dualität
 allgemeine, 215
 für kompakte Mannigfaltigkeiten, 172
 Prismen-Operator, 19
 Produktorientierung, 151
 Projektionsformel
 der singulären Homologie, 170
 projektiv
 Modul, 140
 Quasiisomorphismus, 163
 ρ_q Hinterseite eines Simplex, 154
 Rand
 in Kettenkomplex, 24
 simplicialer, 7
 singulärer, 17
 Randoperator, 6
 der langen exakten Homologiesequenz, 53
 Raumpaar, 49
 reduzierte Homologiegruppen, 86
 relative q -Ränder, 50
 relative Homologiegruppen, 50
 relative Ketten, 49
 relative Kohomologie, 166
 relative Koketten, 166
 Rückzüge, 24
 $S_! \mathcal{K}$ kompakte Simplicialkoketten, 201
 $S_* X$ singuläre Ketten, 24
 $S_q \mathcal{K}$ Simplicialkette, 5
 $S_q X$ singuläre q -Ketten, 14
 Schnitt
 der Orientierungsgarbe, 109
 Schnittprodukt
 cap-Schnittprodukt, 220
 cup-Schnittprodukt, 220
 Schnittzahl, 119, 223
 Schönflies
 Satz von, 90
 Simplex
 angeordneter kombinatorischer, 5
 singulärer, 14
 simplicial
 Homologiegruppe, 7
 Kohomologie, 167
 Teilordnung, 74
 simpliciale Approximation, 83
 simpliciale Teilordnung

natürliche, 81
 Simplizialkette, 5
 lokalendliche, 204
 Simplizialkokette, 167
 kompakte, 201
 Simplizialrand, 7
 simplizialsingulär
 Kette, 72
 ordnungsverträgliche, 74
 simplizialstetig, 22
 Simplizialzykel, 7
 singulär
 q -Kette, 14
 q -Simplex, 14
 Homologie, 17
 Kokette mit Koeffizienten, 157
 kompakte Koketten, 199
 singuläre Kette
 lokalendliche, 202
 singulären Homologie
 mit Koeffizienten, 17
 Skelett von Simplizialkomplex, 75
 spaltend
 injektiver Gruppenhomomorphismus, 57
 surjektiver Gruppenhomomorphismus, 57
 Standardauflösung, 132
 Standarderzeuger
 in der Homologietheorie, 62
 von $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$, 103
 Standardsimplex, 14
 Standardtransformation, 101
 Stern, offener, 81
 str Superspur, 80
 Superspur, 80
 surjektiv
 transfinit surjektives System, 195
 Suspension, 95
 System
 in Kategorie, 188

 $\tau_q \in S_q(\Delta_q)$ tautologischer Simplex, 30
 tautologischer Simplex, 30
 Teilordnung
 simpliziale, 74
 Tensorkomplex, 131
 Tensorprodukt
 graduierter Moduln, 175
 von Gruppenhomomorphismen, 130
 von Komplexen, 131
 von Vektorräumen, 128
 Top^c Raumpaare, 52
 Top^Δ , 22
 topologisch
 Mannigfaltigkeit, 102
 torsionsfrei
 abelsche Gruppe, 133
 Torsionsprodukt, 132
 Torsionssequenz, 133
 Träger
 bei Simplizialkomplex, 80
 von Schnitt
 der Orientierungsgarbe, 109

 Umlaufzahl
 eines Zyklus, 40
 universell
 multiadditive Abbildung, 128
 Universelles Koeffiziententheorem
 der Homologie, 136
 der Kohomologie, 183
 Unterteilungsoperator, 63

 Verschlingungszahl, 90
 Vorderseite eines Simplex, 154
 Verschieben
 in singulärer Homologie, 22
 Vorschub
 eigentlicher, 208

 Whitehead
 Vermutung von, 182

Wilder, Satz von, 121
lokale Variante, 211

$Z_q X$ singuläre Zykel, 17
 $Z_q \mathcal{K}$ Simplizialzykel, 7

Zykel
in Kettenkomplex, 24
simplizialer, 7
singulärer, 17