II Modelltheoretische Hilfsmittel

Satz 1

Seien (S_i, K_i) $i=1,2$ zweisortige Strukturen und seien S_1 und S_2 elementaräquivalent.

Dann existieren elementare Erweiterungen

$(S_i, K_i) \prec (\hat{S}_i, \hat{K}_i)$ $i=1,2$, sodaß

$\hat{S}_1 \cong \hat{S}_2$.

Beweis:

Nach [8] existieren Ultralimites $\lim\limits_{\alpha \to} S_i^{I_\alpha^i} / U_\alpha^i$,sodaß

$$\lim_{\alpha \to} S_1^{I_\alpha^1} / U_\alpha^1 \cong \lim_{\alpha \to} S_2^{I_\alpha^2} / U_\alpha^2 .$$

Setze dann $(\hat{S}_i, \hat{K}_i) = \lim\limits_{\alpha \to} (S_i, K_i)^{I_\alpha^i} / U_\alpha^i$.

Satz 2

$L_1 \subseteq L_2$ sei eine Spracherweiterung.

$K_1 \subseteq K_2$ seien zwei Theorien , $K_i \subseteq L_i$,i=1,2.

A sei eine Aussage aus L_2.

Dann sind äquivalent:

a) Es gibt ein B aus L_1 mit $K_2 \vdash A \leftrightarrow B$.

b) Für alle Mengen von Aussagen T aus L_1 ,für die $T \cup K_1$ in L_1 vollständig ist,ist A bzgl. $T \cup K_2$ entscheidbar.

Beweis:

a) $\to$ b):

Sei a) erfüllt und $T \cup K_1$ in L_1 vollständig.Dann ist entweder $T \cup K_1 \vdash B$ oder $T \cup K_1 \vdash \sim B$.

Aus $T \cup K_2 \vdash B \leftrightarrow A$ und $K_1 \subseteq K_2$ folgt dann

$T \cup K_2 \vdash A$ oder $T \cup K_2 \vdash \sim A$.

b) $\to$ a):

Sei $S = \{ B \in L_1 \mid K_2 \vdash A \to B \}$.

Sei M ein Modell von S und S(M) die Menge der L_1-Aussagen,die in M gelten.Dann ist $S(M) = S(M) \cup K_1$ vollständig in L_1.

Nach b) ist also A entscheidbar bzgl. $S(M) \cup K_2$.

Annahme : $S(M) \cup K_2 \cup A$ ist inkonsistent.

Dann gibt es ein $C \in S(M)$ mit

$K_2 \vdash A \to \sim C$, also ist $\sim C \in S(M)$ .Wid.

Also ist $S(M) \vdash A$.Also gilt $M \Vdash A$. A gilt also in allen Modellen von S.Daher $S \vdash A$ .Es gibt also ein $B \in S$ mit

$B \to A$ und $K_2 \vdash A \to B$.

Also ist $K_2 \vdash A \leftrightarrow B$.

Folgerung:

Es sind äquivalent:

a) Für alle $A \in L_2$ gibt es ein $B \in L_1$ mit $K_2 \vdash A \leftrightarrow B$.

b) Für alle Mengen von Aussagen,für die $T \cup K_1$ vollständig ist, ist $T \cup K_2$ vollständig.

Def:

Sei G eine Menge von Formeln einer Sprache L,

$M \subseteq N$ seien L-Strukturen.

N heißt G-Erweiterung von M,falls für alle $a_1, \ldots, a_n \in M$ und alle $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in G$

$M \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow N \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$

Satz 3

Seien K_i (i=1,2,3) L-Strukturen ,$K_1 \prec K_3$,

K_2 sei G-Erweiterung von von K_1.

Dann gibt es eine G-Erweiterung K_4 von K_3 mit $K_2 \prec K_4$.

Beweis:

Man kann ohne Einschränkung $K_2 \cap K_3 = K_1$ annehmen.

$D(K_3)$ sei die Menge aller in K_3 gültigen $G[K_3]$-Aussagen,

$S(K_2)$ die Menge aller in K_2 gültigen $L[K_2]$ Aussagen.

Zu zeigen ist die Konsistenz von $D(K_3) \cup S(K_2)$.

Sei andernfalls $D(K_3) \cup S(K_2)$ inkonsistent,dann gibt es ein

$A = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, $A_i \in D(K_3)$ mit

$S(K_2) \vdash \sim A$.

A ist von der Form $B(a_1, \ldots, a_n)$,wo die a_i aus $K_3 \setminus K_1$ und B eine Konjunktion von Formeln aus $G[K_1]$ ist.

Da die a_i in $S(K_2)$ nicht vorkommen ,gilt

$S(K_2) \vdash \bigwedge\limits_{x_1} \ldots \bigwedge\limits_{x_n} \sim B(x_1, \ldots, x_n)$ (:=C) .

Seien $b_1, \ldots, b_n$ beliebig aus K_1.

K_2 ist Modell von $S(K_2)$ und man schließt

$K_2 \vdash \sim B(b_1, \ldots, b_n)$.

K_2 ist G - Erweiterung und $B(b_1,..,b_n)$ Konjunktion von $G[K_1]$ - Aussagen , also gilt auch

$K_1 \vdash \sim B(b_1,..,b_n)$.

Die b_i waren beliebig , d.h. $K_1 \Vdash C$.

Aus $K_1 \prec K_3$ folgt

$K_3 \Vdash C$ im Widerspruch zu $K_3 \Vdash B(a_1,..,a_n)$.

<u>Satz 4</u>

Sei $k \in \mathbb{N}$ und G eine Menge von Formeln einer Sprache L mit der folgenden Eigenschaft:

Ist $k \geq 1$, so enthält G $x_1 = x_1$ und $x_1 \neq x_2$.

Ist k = o , so enthält G a = a und $b \neq b$ für zwei Konstanten a,b aus L .

Sind A und B aus G , so sind auch $A \vee B$ und $A \wedge B$ aus G .

Seien $\varphi_i(x_1,..,x_k)$ Formeln , T_i Theorien aus L , i=1,2 .

Dann sind äquivalent:

i) Es gibt eine Formel A aus G mit

$$T_1 \vdash \varphi_1 \rightarrow A \quad \text{und} \quad T_2 \vdash A \rightarrow \varphi_2 \; .$$

ii) Für je zwei T_i-Modelle M_i und Elemente $a_1^i,..,a_k^i$ aus M_i (i=1,2) derart, daß für jede Formel $A(x_1,..,x_k)$ aus G

$$M_1 \Vdash A(a_1^1,..,a_k^1) \longrightarrow M_2 \Vdash A(a_1^2,..,a_k^2) \; ,$$

gilt $M_1 \Vdash \varphi_1(a_1^1,..,a_k^1) \longrightarrow M_2 \Vdash \varphi_2(a_1^2,..,a_k^2)$.

<u>Beweis</u>:

i) – ii): ist klar

ii) – i):

Wir erweitern L zu L' durch Hinzunahme neuer Konstanten $e_1,..,e_k$. Definiere

$$S := \{ B(e_1,..,e_k) \mid T_1 \vdash \varphi_1(e_1,..,e_k) \rightarrow B(e_1,..) \; , B(x_1,..,x_k) \in G$$

Beh.: $T_2 \cup S \vdash \varphi_2(e_1,..,e_k)$.

Sei andernfalls M_2 ein Modell von $T_2 \cup S \cup \{\neg\varphi_2(e_1,..,e_k)\}$, und seien in M_2 $e_1,..,e_k$ durch $a_1^2,..a_k^2$ interpretiert. Sei

$\hat{T} := \{ C(e_1,..) \mid M_2 \Vdash \neg C(a_1^2,..) \; , \; C(x_1,..) \in G \}$ und

$\neg\hat{T} := \{ X \mid \neg X \in \hat{T} \}$ .Dann ist

$\hat{T} \cap S = \emptyset$, $T \neq o$ und $S \neq o$.

Sei $(M_1,a_1^1,..,a_2^1)$ ein Modell von $T_1 \cup \neg\hat{T}$,falls vorhanden.

Dann gilt für das Paar $(M_1,a_1^1,..)$, $(M_2,a_1^2,..)$

die Bedingung ii) .Denn sei $A(x_1,..)$ aus G und sei

$M_1 \Vdash A(a_1^1,..)$ und $M_2 \vdash \neg A(a_1^2,..)$.

Dann ist also $A(e_1,..) \in \hat{T}$ und $\neg A(e_1,..) \in \neg\hat{T}$ .d.h.

$M_1 \Vdash \neg A(a_1^1,..)$. Wid.

Wegen ii) können wir also aus $M_2 \Vdash \neg\varphi_2(a_1^2,..)$

$M_1 \Vdash \neg\varphi_1(a_1^1,..)$ schließen.

M_1 war aber ein beliebiges Modell von $T_1 \cup \neg\hat{T}$. Also ist

$T_1 \cup \neg\hat{T} \vdash \neg\varphi_1(e_1,..)$.

Folglich existieren $T_1,..,T_n$ aus $\hat{T}$,sodaß

$T_1 \vdash (\neg T_1 \wedge \neg T_2 \wedge ... \wedge \neg T_n) \longmapsto \neg\varphi_1(e_1,..)$ oder

$T_1 \vdash \varphi_1(e_1,..) \rightarrow (T_1 \vee ... \vee T_n)$

$(T_1 \vee .. \vee T_n)$ gilt nicht in M_2 , ist aber andererseits von der Form $D(e_1,..)$ für $D(x_1,..) \in G$ und gehört also zu S, was nicht geht.

Wir haben also

$T_2 \cup S \vdash \varphi_2(e_1,\ldots,e_k)$. Also gibt es $S_1,\ldots,S_t \in S$ mit

$T_2 \vdash (S_1 \wedge \ldots \wedge S_t) \longrightarrow \varphi_2(e_1,\ldots)$. Wegen der Abgeschlossenheitseigenschaft von G ist $(S_1 \wedge \ldots \wedge S_t)$ wiederaus S .Sei also

$S_1 \wedge \ldots \wedge S_t = B(e_1,\ldots)$ mit $B(x_1,\ldots) \in G$. Dann ist

$T_2 \vdash B(e_1,\ldots) \longrightarrow \varphi_2(e_1,\ldots)$ und $T_1 \vdash \varphi_1(e_1,\ldots) \longrightarrow B(e_1,\ldots)$ d.h.

$T_2 \vdash B(x_1,\ldots) \longrightarrow \varphi_2(x_1,\ldots)$, $T_1 \vdash \varphi_1(x_1,\ldots) \longrightarrow B(x_1,\ldots)$ qed.

Aus Satz 4 folgt leicht

Satz 4'

Sei L eine elementare Sprache , L' eine Erweiterung von L und $T \subset L'$ eine Theorie. L enthalte mindestens eine Konstante.

Weiter sei G eine Menge von L'-Formeln mit den folgenden Eigenschaften:

i) Jede quantorfreie Formel aus L gehört zu G

ii) Sind A und B aus G , so sind auch $A \wedge B$ und $A \vee B$ aus G .

iii) Ist $A(x_1 \ldots,x_n)$ aus G und sind $t_1,\ldots,t_n$ L-Terme ,dann ist auch $A(t_1,\ldots,t_n)$ aus G .

$\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ sei eine Formel aus L'.

Dann sind äquivalent:

a) φ ist bzgl. T zu einer Formel aus G äquivalent.

b) Sei M_o eine gemeinsame L-Unterstruktur der T-Modelle M_1 und M_2 . Weiter sei für jede Formel $A(x_1,\ldots,x_n) \in G$ und $a_1,\ldots,a_n$ aus M_o

$M_1 \Vdash A(a_1,\ldots,a_n) \longrightarrow M_2 \Vdash A(a_1,\ldots)$.

Dann ist auch

$M_1 \Vdash \varphi(a_1,\ldots,a_n) \longrightarrow M_2 \Vdash \varphi(a_1,\ldots)$.

Folgerung:

Es sind äquivalent: (L enthalte mindestens eine Konstante)

a) K gestattet Quantorenelimination

b) Seien M_1 und M_2 K-Modelle mit gemeinsamer Unterstruktur M_o . Dann sind M_1 und M_2 bzgl. $L[M_o]$ elementaräquivalent.

c) Seien M_1 und M_2 K-Modelle und M_o eine gemeinsame Unterstruktur. Dann gelten alle einfachen Existenzaussagen aus $L[M_o]$,die in M_1 gelten auch in M_2.

d) K ist Modellvervollständigung einer offenen Theorie.(siehe [13])

e) Seien M_1 und M_2 K-Modelle mit gemeinsamer Unterstruktur M_o . Dann läßt sich M_1 über M_o isomorph in eine Ultrapotenz von M_2 einbetten.

Beweis:

a) $\longrightarrow$ b):

folgt sofort aus Satz 4 ,wenn man als G die Menge der quantorfreien L-Formeln wählt.

b) $\longrightarrow$ e):

Wenn M_1 und M_2 bzgl. $L[M_o]$ elementaräquivalent sind, läßt sich nach [8] M_1 über M_o sogar elementar in eine Ultrapotenz von M_2 einbetten.

e) $\longrightarrow$ c):

Sei M_1 über M_o in die Ultrapotenz M_2^* von M_2 eingebettet. Dann gilt jede Existenzaussage aus $L[M_o]$,die in M_1 gilt , in M_2^* und also auch in M_2 .

c) $\longrightarrow$ a):

Aus c) folgt mit Satz 4 ,daß jede einfache Existenzformel einer quantorfreien Formel äquivalent ist.Daraus folgt sodie Möglichkeit einer Quantorenelimination.

d) $\longrightarrow$ b)

Sei K^* eine offene Theorie und K Modellvervollständigung von K^*, d.h.

i) Jedes K^*-Modell besitzt eine Oberstruktur, die K-Modell ist.

ii) Sei K_o ein K^*-Modell und K_1, K_2 zwei darüberliegende K-Modelle. Dann sind K_1 und K_2 bzgl. $L[K_o]$ elementaräquivalent.

iii) Jedes K-Modell ist auch K^*-Modell, d.h.

$$\bigwedge_{X \in K^*} K \vdash X \quad .$$

Seien M_i, $i=o,1,2$ wie in b). Dann sind wegen iii) M_1 und M_2 auch K^*-Modelle. Also ist auch M_o K^*-Modell. Aus ii) folgt dann die Behauptung.

b) $\longrightarrow$ d):

Setze $K^* := \{ X \in A_1(L) | K \vdash X \}$. ($A_1(L)$ sei die Menge aller Allaussagen von L).

Zu zeigen sind i) - iii)

ii) ist klar wegen b)

iii) ist klar

i): Sei M ein Modell von K^* und D(M) die Menge aller quantorfreien Aussagen aus $L[M]$, die in M gelten. Wir müssen die Konsistenz von

$D(M) \cup K$ zeigen.

Sei andernfalls

$K \vdash A(m_1,\dots,m_n)$ mit $\sim A(m_1,..,m_n) \in D(M)$, $m_i \in M$

und $A(x_1,..,x_n) \in L$.

Dann ist

$$K \vdash \bigwedge_{x_1} \dots \bigwedge_{x_n} A(x_1,\dots,x_n) \quad . \qquad \text{Also}$$

$$K^* \vdash \bigwedge_{x_1} \dots \bigwedge_{x_n} A(x_1,\dots,x_n) \quad . \qquad M \text{ ist } K^*\text{-Modell:}$$

$$M \Vdash \bigwedge_{x_1} \dots \bigwedge_{x_n} A(x_1,\dots,x_n) \quad .$$

Das steht im Widerspruch zu

$M \Vdash \sim A(m_1,..,m_n)$.

qed.

Im Folgenden werden bei der Behandlung der mehrsortigen Modelltheorie Verallgemeinerungen von Sätzen der üblichen - einsortigen - Modelltheorie stillschweigend vorgenommen. Diese Verallgemeinerungen lassen sich immer zeigen durch unmittelbare Übertragungen der 'einsortigen' Beweise.

Def.: Sei L eine zweisortige Sprache mit den Sorten S und K

i) Eine Funktion heißt reine S-Funktion, wenn sie S^n in S wirft. Eine Relation heißt reine S-Relation, wenn sie nur S-Argumentstellen besitzt. Eine Formel, die sich aus diesen Funktionen und Relationen aufbaut, heißt reine S-Formel.

ii) Wir sagen, eine S-Variable s kommt in der Formel A rein vor, wenn in A keine Terme der Form $f(t_1,\dots,t_n)$ vorkommen, wo s in einem der t_i vorkommt und f keine reine S-Funktion ist; und wenn in A Primformeln der Form $R(t_1,..,t_n)$ nicht vorkommen, wo s in einem der Terme vorkommt, und R keine reine S-Relation ist.

iii) Eine Formel heißt K^*-Existenzformel, wenn die pränexe Normalform folgende Form hat:

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n Q_{n+1} \dots Q_r x_r A(x_1,\dots,x_r)$$

Dabei sind die Quantoren Q_1 bis Q_n Existenzquantoren und Q_{n+1} bis Q_r S-Quantoren, und die S-Variablen x_{n+1} bis x_r kommen in A rein vor.

Satz 5

Sei T eine Theorie. $A(x_1,..,x_n)$ eine Formel. Dann sind äquivalent:

i) A ist bzgl. T einer K^*-Existenzformel äquivalent.

ii) Für alle T-Modelle $(S_1,K_1) \subseteq (S_2,K_2)$ mit $S_1 \prec S_2$ und $(S_1,K_1) \Vdash A(a_1,..,a_n)$ für a_i aus (S_1,K_1) gilt $(S_2,K_2) \Vdash A(a_1,..,a_n)$.

Beweis:

i) $\longrightarrow$ ii):

Wir können A als K^*-Ex.formel annehmen.

I) A sei von der Form

$Q_1 s_1 \dots Q_r . B(s_1,..,s_r)$, wo B eine quantorfreie Formel aus $L[(S_1,K_1)]$ ist, und die s_i rein in B vorkommen.

Sei $D(S_1,K_1)$ die Menge aller quantorfreien Aussagen aus $L[(S_1,K_1)]$, die in (S_1,K_1) gelten. Indem man konstante Terme aus B durch ihre Werte in (S_1,K_1) und Relationen zwischen konstanten Termen durch ihre Wahrheitswerte in (S_1,K_1) ersetzt, folgt aus der Reinheit der s_i in B, daß B bzgl. $D(S_1,K_1)$ einer reinen S-Formel äquivalent ist.

Nun sind (S_1,K_1) und (S_2,K_2) Modelle von $D(S_1,K_1)$, und so folgt aus der Gültigkeit der Aussage A in (S_1,K_1) die Gültigkeit in (S_2,K_2) - denn $S_1 \prec S_2$.

II) Sei A von der Form

$Q_1x_1 \dots Q_n \cdot Q_{n+1} \dots Q_r x_r B(x_1,\dots x_n, s_{n+1},\dots,s_r)$

$(Q_1 \dots Q_n$ Ex.quantoren) und sei in (S_1,K_1) gültig.

Dann existieren $a_1,\dots,a_n$ aus (S_1,K_1), sodaß

$(S_1,K_1) \Vdash Q_{n+1} \dots Q_r x_r B(a_1,\dots,a_n,s_{n+1},\dots,s_r)$.

Nach I) ist dann auch

$(S_2,K_2) \Vdash Q_{n+1} \dots Q_r x_r B(a_1,\dots,a_n,s_{n+1},\dots,s_r)$.

Also gilt A auch in (S_2,K_2).

ii) $\rightarrow$ i):

Wir erweitern L durch Einführen der neuen Konstanten $e_1,\dots e_n$ und neuer Relationszeichen R_φ für jede reine S-Formel φ zur Sprache L^*. T wird durch Hinzunahme der Axiome

$R_\varphi \leftrightarrow \varphi$ (für alle reinen φ) zu T^* erweitert.

T^* ist eine konservative Erweiterung von T.

Sei $A(e_1,\dots,e_n)$ gültig in dem T^*-Modell (S_1,K_1), und sei (S_2,K_2) eine Oberstruktur, die T^*-Modell ist. Bezeichne $(S_i,K_i)^+$ die Strukturen, die man durch Weglassen der neuen Relationen erhält. Dann gilt $A(e_1,\dots,e_n)$ in $(S_1,K_1)^+$ und $S_1^+ \prec S_2^+$. Denn zu zeigen ist: Alle reinen S-Aussagen aus $L[S_1^+]$, die in S_1^+ gelten, gelten auch in S_2^+. Wegen der hinzugekommenen Axiome ist das gleichbedeutend damit, daß alle Relationen R_φ, die in S_1 für $a_1,\dots,a_n$ gelten auch in S_2 für $a_1,\dots,a_n$ gelten. Das ist aber klar, weil (S_2,K_2) L-Oberstruktur von (S_1,K_1) ist. Es ist also tatsächlich $S_1^+ \prec S_2^+$. Aus ii) folgt dann

$(S_2,K_2) \Vdash A(e_1,\dots,e_n)$.

Mit dem bekannten Satz [14,S.76] kann man also schließen, daß $A(e_1,\dots,e_n)$ bzgl. T^* einer Existenzaussage aus L^* äquivalent ist. Ersetzt man in dieser Formel mit Hilfe der Axiome die Relationen R_φ durch die Formeln φ, erhält man eine äquivalente K^*-Existenzaussage aus $L[e_1,\dots,e_n]$.

T^* ist konservative Erweiterung von T, die Äquivalenz gilt also auch bzgl. T. $e_1,\dots,e_n$ kommen in T nicht vor und man kann zu Variablen übergehen. qed.

Def.: T heißt K^*-modellvollständig, wenn für alle T-Modelle $(S_1,K_1) \subseteq (S_2,K_2)$ mit $S_1 \prec S_2$ sogar $(S_1,K_1) \prec (S_2,K_2)$ gilt.

Satz 6

Es sind äquivalent:

i) T ist K^*-modellvollständig

ii) Für alle T-Modelle $(S_1,K_1) \subseteq (S_2,K_2)$ mit $S_1 \prec S_2$ und alle K-Existenzaussagen A aus $L[(S_1,K_1)]$ gilt:

$(S_2,K_2) \Vdash A \Rightarrow (S_1,K_1) \Vdash A$

Beweis:

i) $\rightarrow$ ii):

ist klar

ii) $\rightarrow$ i):

Mit Satz 5 folgt aus Voraussetzung ii), daß jede K^*-Existenzaussage aus $L[(S_1,K_1)]$ einer K^*-Allaussage äquivalent ist. Daraus folgt sehr leicht, daß jede Formel einer K-Existenzformel äquivalent ist (bzgl. T). Daraus folgt wieder mit Satz 5 die Modellvollständigkeit.

Def.: T^* heißt K^*-Modellvervollständigung von T, wenn

i) $T \subseteq T^*$

ii) Zu jedem T-Modell (S_1,K_1) gibt es ein T^*-Modell (S_2,K_2) mit $(S_1,K_1) \subseteq (S_2,K_2)$ und $S_1 \prec S_2$.

iii) T^* ist K^*-modellvollständig.

Diese Definition ist eine Verallgemeinerung der Definition des model-companion aus [17].

Satz 7

Die K^*-Modell-vervollständigung ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

Seien T_1, T_2 zwei Modellvervollständigungen von T.Zu zeigen ist, daß jedes T_1-Modell auch Modell von T_2 ist.

Sei (S_1,K_1) T_1-Modell.Wir definieren rekursiv:

$$(S_1,K_1) \subseteq (S_2,K_2) \subseteq \;....\; \subseteq (S_n,K_n) \subseteq \;...$$

mit

$$S_1 \prec S_2 \prec \;....\; \prec S_n \prec \;....$$

(S_{2n+i},K_{2n+i}) ist T_i-Modell für $n=o,1,..$ $\quad i=1,2$,sodaß

$$(S_1,K_1) \prec (S_3,K_3) \prec (S_5,K_5) \quad ....$$

$$(S_2,K_2) \prec (S_4,K_4) \prec (S_6,K_6) \quad .... .$$

Dann würde folgen

$(S_1,K_1) \prec \bigcup_{i=o}^{\infty}(S_i,K_i)$ und $(S_2,K_2) \prec \bigcup_{i=o}^{\infty}(S_i,K_i)$.

(S_2,K_2) ist daher elementare Erweiterung von (S_1,K_1) und T_2-Modell. Also ist auch (S_1,K_1) T_2-Modell.

Definition:

$2n-1 \rightarrow 2n$: (S_{2n-1},K_{2n-1}) ist nach Voraussetzung T_1- also auch T-Modell.Nimm für (S_{2n},K_{2n}) das T_2-Modell,das nach ii) der Definition existiert.

$2n \rightarrow 2n+1$: analog . qed.

Definition:

Sei A eine Formel einer zweisortigen Sprache mit den Sorten S und K .

A heißt dann K-Existenzformel (K-Allformel) ,wenn aus der pränexen Normalform von A durch Streichen der S-Quantoren eine Existenzformel (Allformel)entsteht .

Satz 8 (Fefermann)

Sei L eine Sprache mit den Sorten S und K , $T \subset L$ eine Theorie und $A(x_1,..,x_n)$ eine Formel aus L .Dann sind äquivalent:

i) $A(x_1,..,x_n)$ ist bzgl. T zu einer K-Existenzformel äquivalent.

ii) Seien $(S,K_1) \subset (S,K_2)$ T-Modelle , $a_1,..,a_n \in (S,K_1)$ und $(S,K_1) \Vdash A(a_1,..,a_n)$. Dann ist auch $(S,K_2) \Vdash A(a_1,..,a_n)$.

Beweis: (Der Beweis unterscheidet sich wesentlich von [16])

i) $\rightarrow$ ii) :

Man kann A als K-Existenzformel annehmen.Wir zeigen ii) durch Induktion nach der Zahl der Quantoren in der pränexen Normalform.

1. ii) ist klar für quantorfreie Formeln .

2. Sei $A = \bigwedge_x B(x,a_1,..,a_n)$. Aus $(S,K_1) \Vdash A$ folgt für ein $b \in (S,K_1)$ $\;(S,K_1) \Vdash B(b,a_1,..)$ .Nach Induktionsvoraussetzung ist dann

   $(S,K_2) \Vdash B(b,a_1,..,a_n)$ d.h. $(S,K_2) \Vdash A$

3. $A = \bigwedge_{x \in S} B(x,a_1,..,a_n)$.

   Aus $(S,K_1) \Vdash A$ folgt,daß für alle $s \in S$ $\;(S,K_1) \Vdash B(s,a_1,,a_n)$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt dann,daß für alle $s \in S$

   $(S,K_2) \Vdash B(s,a_1,..,a_n)$. d.h. (S,K_2) A .

Zum Beweis von ii) $\rightarrow$ i) ein Hilfssatz:

Vor: $(S_o,K_o) \subseteq (S_i,K_i)$ $\quad i=1,2$.

Für alle K-Ex.formeln A und alle $a_1,..,a_n \in (S_o,K_o)$ mit $(S_2,K_2) \Vdash B(a_1,..,a_n)$ gilt auch $(S_1,K_1) \Vdash B(a_1,..,a_n)$.

Beh: Es gibt elementare Erweiterungen

$(S_i,K_i) \prec (S,K_i)$ $\quad i=1,2$ $\quad$ mit $(S,K_2) \subseteq (S,K_1)$

Bem: Voraussetzung und Behauptung sind äquivalent.

Zum Beweis des Hilfssatzes:

I) Es gibt eine elementare Erweiterung $(\bar{S},\bar{K})$ von (S_1,K_1) derart, daß $(S_2,K_2) \subseteq (\bar{S},\bar{K})$ und alle K-Ex.Aussagen aus $L[(S_2,K_2)]$, die in (S_2,K_2) gelten ,auch in $(\bar{S},\bar{K})$ gelten.

Beweis:

Sei $\mathcal{S}(S_1,K_1)$ die Menge aller Aussagen aus $L[(S_1,K_1)]$,die in

(S_1,K_1) gelten , $\mathcal{S}_{K-E}(S_2,K_2)$ die Menge aller K-Ex.aussagen aus $L[(S_2,K_2)]$,die in (S_2,K_2) gelten.

Zu zeigen ist offenbar die Konsistenz von $\mathcal{S}(S_1,K_1) \cup \mathcal{S}_{K-E}(S_2,K_2)$.

Sei andernfalls $A(a_1,..,a_n) \in \mathcal{S}_{K-E}(S_2,K_2)$ und $a_1,..,a_n \in (S_2,K_2) \setminus (S_o,K_o)$ mit $\mathcal{S}(S_1,K_1) \vdash \sim A(a_1,..,a_n)$.

Dann ist

$$\mathcal{S}(S_1,K_1) \vdash \sim \bigvee_{x_1} \ldots \bigvee_{x_n} A(x_1,..,x_n) \ . \quad \text{Also}$$

$$(S_1,K_1) \Vdash \sim \bigvee_{x_1} \ldots \bigvee_{x_n} A(x_1,..,x_n) \ .$$

Rechts steht eine K-Ex.Formel,also nach Voraussetzung:

$$(S_2,K_2) \Vdash \sim \bigvee_{x_1} \ldots \bigvee_{x_n} A(x_1,..,x_n) \ .$$

Im Widerspruch zu

$$(S_2,K_2) \Vdash A(a_1,..,a_n) \ .$$

II) Sei $(S_2,K_2) \subseteq (\bar{S},\bar{K})$ eine K-Ex-Erweiterung,d.h. alle K-Ex-Aussagen aus $L[(S_2,K_2)]$,die in (S_2,K_2) gelten,gelten auch in $(\bar{S},\bar{K})$.

Dann gibt es eine elementare Erweiterung (S_3,K_3) von (S_2,K_2) derart,daß $\bar{S} \subseteq S_3$ und für alle K-Exformeln $f(x_1,..,x_n)$ aus $L[(S_2,K_2)]$ und $b_1,..,b_n \in \bar{S}$ gilt:

$$(S_3,K_3) \Vdash f(b_1,..,b_n) \Rightarrow (\bar{S},\bar{K}) \Vdash f(b_1,..,b_n)$$

Beweis:

Äquivalent ist zu fordern:

Für alle f aus $L[(S_2,K_2)]$, f K-Allformel, $b_1,..b_n$ aus $\bar{S}$ gilt:

$$(\bar{S},\bar{K}) \Vdash f(b_1,..,b_n) \Rightarrow (S_3,K_3) \Vdash f(b_1,..,b_n)$$

Sei $\mathcal{S}^*_{K-A}(\bar{S},\bar{K})$ die Menge aller solcher Aussagen,die in $(\bar{S},\bar{K})$ gelten.Zu prüfen ist dann die Konsistenz von $\mathcal{S}(S_2,K_2) \cup \mathcal{S}^*_{K-A}(S,K)$.

Sei andernfalls $A(x_1,..,x_n)$ eine K-Allformel aus $L[(S_2,K_2)]$ $b_1,..,b_n$ aus $\bar{S} \setminus S$,sodaß $\mathcal{S}(S_2,K_2) \vdash \sim A(b_1,..,b_n)$ und $A(b_1,..,b_n)$ aus $\mathcal{S}^*_{K-A}(S,K)$.

Dann ist

$$\mathcal{S}(S_2,K_2) \vdash \sim \bigvee_{x_1 \in S} \cdots \bigvee_{x_n \in S} A(x_1,..,x_n) \ . \quad \text{Also}$$

$$(S_2,K_2) \Vdash \sim \bigvee_{x_1 \in S} \cdots \bigvee_{x_n \in S} A(x_1,..,x_n) \ .$$

Rechts steht aber eine K-Ex-Aussage aus $L[(S_2,K_2)]$, nach Voraussetzung folgt dann

$$(\bar{S},\bar{K}) \Vdash \sim \bigvee_{x_1} \ldots \bigvee_{x_n} A(x_1,..,x_n)$$

Im Widerspruch zu

$$(\bar{S},\bar{K}) \Vdash A(b_1,..,b_n)$$

III) Sei $(S_2,K_2) \subseteq (\bar{S},\bar{K}), (S_2,K_2) \prec (S_3,K_3)$, $\bar{S} \subseteq S_3$ derart, dass für alle K-Ex-Formeln $f(x_1,..,x_n)$ aus $L[(S_2,K_2)]$ und $b_1,..,b_n$ S gilt:

$$(S_3,K_3) \Vdash f(b_1,..,b_n) \Rightarrow (\bar{S},\bar{K}) \Vdash f(b_1,..,b_n) \ .$$

Dann gibt es ein (S_4,K_4) mit

$$(\bar{S},\bar{K}) \prec (S_4,K_4) \ , \quad (S_3,K_3) \subseteq (S_4,K_4) \text{ ist K-Ex-Erweiterung.}$$

<u>Beweis :</u>

Zu zeigen ist die Konsistenz von $\mathcal{S}(\bar{S},\bar{K}) \cup \mathcal{S}_{K-E}(S_3,K_3)$:

Sei andernfalls $A(x_1,..,x_n) \in L_{K-E}(S_2,K_2)$
$b_1,..,b_r \in \bar{S} \setminus S_2$, $a_{r+1},..,a_n \in (S_3,K_3) \setminus (\bar{S},K_2)$
$A(b_1,..,b_r,a_{r+1},..,a_n) \in \mathcal{S}_{K-E}(S_3,K_3)$ mit

$$\mathcal{S}(\bar{S},\bar{K}) \vdash \sim A(b_1,..,a_n) \ . \quad \text{Also}$$

$$\mathcal{S}(\bar{S},\bar{K}) \vdash \sim \bigvee_{x_{r+1}} \ldots \bigvee_{x_n} A(b_1,..,b_r,x_{r+1},..,x_n) \quad \text{und}$$

$$(\bar{S},\bar{K}) \Vdash \sim \bigvee_{x_{r+1}} \ldots \bigvee_{x_n} A(b_1,..,b_r,x_{r+1},..,x_n)$$

Rechts steht die Negation einer K-Ex-Formel aus $L[(S_2,K_2)]$ mit eingesetzten Konstanten aus $\bar{S}$. Also ist nach Voraussetzung

$$(S_3,K_3) \Vdash \sim \bigvee_{x_{r+1}} \ldots \bigvee_{x_n} A(b_1,..,b_n,x_{r+1},..,x_n) \ .$$

Im Widerspruch zu

$$(S_3,K_3) \Vdash A(b_1,..,a_n) \ .$$

<u>Beweis</u> des Hilfssatzes:

Seien $(S_o,K_o) \subseteq (S_i,K_i)$ $i=1,2$ wie oben . Nach I gibt es dann $(S_1,K_1) \prec (\bar{S},\bar{K})$, $(S_2,K_2) \subseteq (\bar{S},\bar{K})$ K-Ex-Erweiterung.

Setze $(\check{S}_o,\check{K}_o) = (\bar{S},\bar{K})$ und $(\tilde{S}_o,\tilde{K}_o) = (S_2,K_2)$

und definiere rekursiv:

$(\check{S}_o,\check{K}_o) \prec (\check{S}_1,\check{K}_1) \prec \ldots \prec (\check{S}_n,\check{K}_n) \prec \ldots$

$(\tilde{S}_o,\tilde{K}_o) \prec (\tilde{S}_1,\tilde{K}_1) \prec \ldots \prec (\tilde{S}_n,\tilde{K}_n) \prec \ldots$ mit

$(\tilde{S}_n,\tilde{K}_n) \subseteq (\check{S}_n,\check{K}_n)$ K-Ex-erweiterung , $\check{S}_n \subseteq \tilde{S}_{n+1}$

für n=o,1,2... .

Seien $(\check{S}_i,\check{K}_i),(\tilde{S}_i,\tilde{K}_i)$ für i=o,...,n bereits definiert.
Dann ist $(\tilde{S}_n,\tilde{K}_n) \subseteq (\check{S}_n,\check{K}_n)$ K-Ex-erweiterung.
Nach II) gibt es ein $(\tilde{S}_{n+1},\tilde{K}_{n+1})$ mit
$(\tilde{S}_n,\tilde{K}_n) \prec (\tilde{S}_{n+1},\tilde{K}_{n+1})$ und $\check{S}_n \subseteq \tilde{S}_{n+1}$. Außerdem gilt
die Zusatzeigenschaft,die es ermöglicht mit III) auf die
Existenz von $(\check{S}_{n+1},\check{K}_{n+1})$ zu schließen,mit
$(\check{S}_n,\check{K}_n) \prec (\check{S}_{n+1},\check{K}_{n+1})$, $(\tilde{S}_{n+1},\tilde{K}_{n+1}) \subseteq (\check{S}_{n+1},\check{K}_{n+1})$ K-Ex-Erw.
Damit ist die rekursive Definition beendet,und die
gewünschten Eigenschaften sind vorhanden.

Setze nun $(\hat{S},\hat{K}_1) = \bigcup^{\infty}(\check{S}_i,\check{K}_i)$ und $(\hat{S},\hat{K}_2) = \bigcup(\tilde{S}_i,\tilde{K}_i)$.

(Beachte $\bigcup\check{S}_i = \bigcup\tilde{S}_i$!)

Wie gewünscht ist nach Tarskis Lemma

$(S_1,K_1) \prec (\bar{S},\bar{K}) \prec (\hat{S},\hat{K}_1)$

$(S_2,K_2) \prec (\hat{S},\hat{K}_2)$

$(\hat{S},\hat{K}_2) \subseteq (\hat{S},\hat{K}_1)$ qed.

Beweis von Satz 8

Nach Satz II 4 genügt es zu zeigen:

$(S_o,K_o) \subseteq (S_i,K_i)$ i=1,2 mögen den Voraussetzungen des Hilfsatzes genügen.

(S_i,K_i) i=1,2 seien T-Modelle.

Sei weiter A wie im Satz, $a_1,..,a_n$ aus (S_o,K_o) und

$(S_2,K_2) \Vdash A(a_1,..,a_n)$.

Dann gilt auch $(S_1,K_1) \Vdash A(a_1,..,a_n)$.

Beweis:

Der Hilfssatz liefert $(\hat{S},\hat{K}_i)$ i=1,2 ,sodaß gilt:

$(\hat{S},\hat{K}_2) \Vdash A(a_1,..,a_n)$ (el.Erweiterung !)

Da die (S,K_i) i=1,2 T-Modelle sind,gilt nach Voraussetzung

$(\hat{S},\hat{K}_1) \Vdash A(a_1,..,a_n)$. Also auch

$(S_1,K_1) \Vdash A(a_1,..,a_n)$. (el. Erweiterung !) qed.

Definition:

Eine Theorie T einer zweisortigen Sprache heißt K-modellvollständig,wenn für alle T-Modelle gilt:

$(S,K_1) \subseteq (S,K_2) \Rightarrow (S,K_1) \prec (S,K_2)$.

Satz 9

Es sind äquivalent

i) T ist K-modellvollständig

ii) Für zwei T-Modelle $(S,K_2) \subseteq (S,K_2)$ gilt:

$(S,K_1) \subseteq (S,K_2)$ ist K-All-Erweiterung.

iii) Jede Formel ist bzgl. T einer K-Ex.formel äquivalent .

Beweis: Der Beweis geht analog zum Beweis von II 6 .

Definition:

T^* heißt K-Modellvervollständigung von T wenn

i) $T \subseteq T^*$

ii) Zu jedem T-Modell (S_1,K_1) gibt es ein T^*-Modell (S_2,K_2) mit

$S_1 = S_2$ und $(S_1,K_1) \prec (S_2,K_2)$.

iii) T^* ist K-modellvollständig .

Satz 9'

Die K-Modellvervollständigung ist eindeutig bestimmt .

Beweis: Wie der Beweis von Satz 7 .

Für spätere Anwendung brauchen wir noch die

<u>Definition:</u> Sei A eine Formel und R ein Relationssymbol. Wir sagen, daß R in A positiv vorkommt, wenn jedes Vorkommen von R in A im Bereich gerade vieler Negationszeichen liegt. R kommt in A negativ vor, wenn jedes Vorkommen von R in A im Bereich ungerade vieler Negationszeichen liegt.

und den Satz

<u>Satz 10</u>

Sei L eine Sprache , P und N zwei disjunkte Mengen von neuen Relationszeichen und L′ die Sprache, die aus L durch Hinzunehmen der Zeichen aus $P \cup N$ entsteht. Dann gilt:

i) Sei $\varphi : M \longrightarrow K$ eine L-isomorphe Einbettung der L′-Strukturen M und K , sodaß

für jedes $R \in P$, $a_i \in M$ $\quad M \Vdash R(a_1, .. a_n) \to K \Vdash R(\varphi(a_1), ..$

und für jedes $R \in N$, $a_i \in M$ $\quad K \Vdash R(\varphi(a_1), ..) \to M \Vdash R(a_1, ..)$

(Wir sagen φ ist (L,P,N)-Einbettung).

Dann ist für jede Existenzformel $A \in L'$, in der die Zeichen aus P nur positiv und die Zeichen aus N nur negativ vorkommen und alle $a_1, a_2, ..$ aus M

falls $M \Vdash A(a_1, .., a_n)$ auch $K \Vdash A(\varphi(a_1), .., \varphi(a_n))$.

ii) Seien M und K zwei L′-Strukturen derart, daß jede Existenzaussage, in der die Zeichen aus P nur positiv und die Zeichen aus N nur negativ vorkommen, in K gilt, wenn sie in M gilt.

Dann gibt es eine (L,P,N)-Einbettung von M in eine Ultrapotenz von K.

<u>Beweis:</u>

i) Denn sei o.E. A von der Form

$$\bigvee_{x_1} \bigvee_{x_2} .. \{ P_1(t_1^1(x_1, ..., y_1, .. y_n), t_2^1(x_1 ..), ...) \wedge P_2(t_2^1(..), ...) \wedge$$
$$\wedge \; ... \wedge \neg S_1(s_1^1(x_1, ...), ...) \wedge \neg S_2(..) \wedge ..(\neg) T_1(r_1^1(..), ...) \wedge .. \}$$

mit Termen t_j^i , s_j^i , r_j^i , Relationszeichen T_i aus L ,

S_i aus N und P_i aus P.

Da $A(a_1, ..)$ in M gilt , gibt es $b_1, ..$ aus M mit

$M \Vdash P_i(t_1^i(b_1, .., a_1, .., a_n), t_2^i(b_1, ..), ..)$ für i=1,2...

$M \Vdash \neg S_i(s_1^i(b_1, ..), ..)$ für i=1,2...

$M \Vdash (\neg) T_i(r_1^i(b_1, ..), ..)$ für i=1,2... .

Also gilt in K - da $\varphi(t_1^i(b_1, .., a_1, ..) = t_1^i(\varphi(b_1), ..)$.... -

$K \Vdash P_i(t_1^i(\varphi(b_1), .., \varphi(a_1), .., \varphi(a_n)), t_2^i(\varphi(b_1), ..), ..)$

$K \Vdash \neg S_i(s_1^i(\varphi(b_1), ..), ..)$

$K \Vdash (\neg) T_i(r_1^i(\varphi(b_1), ..), ..)$ für i=1,2,... .

Also gilt $A(\varphi(a_1), .., \varphi(a_n))$ in K.

ii) Sei F die Menge aller quantorfreien Formeln aus L′, in denen die Zeichen aus P nur positiv und die Zeichen aus N nur negativ vorkommen. Setze $G := F \dot\cup M$.
Aus der Voraussetzung schließt man, daß für jede endliche Teilmenge $T \subset G$, ($T = F_T \dot\cup M_T$, $F_T \subset F$, $M_T \subset M$) es Elemente $\varphi_T(a)$ aus K für $a \in M_T$ gibt, sodaß für alle $A \in F_T$, $a_1, a_2 ..$ M_T aus

$M \Vdash A(a_1, ..., a_n)$

$K \Vdash A(\varphi(a_1), .., \varphi(a_n))$ folgt .

Sei I die Menge aller endlichen Teilmengen von G und $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter auf I , der die Mengen $U_T := \{ S \in I \mid T \subset S \}$ für alle $T \in I$ enthält.

Man hat nun eine Abbildung

$$\prod_{T \in I} \varphi_T /_{\mathfrak{U}} : \prod_{T \in I} M_T /_{\mathfrak{U}} \longrightarrow K^I /_{\mathfrak{U}} .$$

Man sieht nun leicht, daß M kanonisch in $\prod_{T \in I} M_T /_{\mathfrak{U}}$ enthalten ist, und $\varphi := \prod_{T \in I} \varphi_T /_{\mathfrak{U}} \Big| M$ die gesuchte Einbettung ist. qed.

III Die Theorie der S-henselschen Körper mit Schnitt

$T_R(\pi)$ bezeichne im Folgenden die elementare Theorie der bewerteten Körper der Charakteristik o mit Schnitt. Die Modelle von $T_R(\pi)$ sind unendlichsortige Strukturen

$(K,\Gamma,R_1,R_2,..)$, wobei K der Körper, Γ die Wertgruppe mit ∞

und die R_i die Restklassenringe sind, versehen mit den ausgezeichneten Konstanten $o_K, 1_K$ in K , ∞, o_Γ in Γ , $o_{R_i}, 1_{R_i}$ in den R_i , mit den Funktionen

$v: K \longrightarrow \Gamma$,

$\pi: \Gamma \longrightarrow K$,

$res_i: K \longrightarrow R_i$, $v_i: R_i \longrightarrow \Gamma$,

$res_n^m: R_m \longrightarrow R_n$ falls $n \mid m$, $\pi_i: \Gamma \longrightarrow R_i$,

der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf K,
der Addition und Subtraktion auf Γ, (setze $x-\infty = \infty$) ,
der Addition, Subtraktion und Multiplikation auf den R_i,
und mit den Relationen $=_K$ auf K , $=_\Gamma$ und $\leq$ auf Γ
und $=_{R_i}$ auf den R_i .

$L_R(\pi)$ sei die Sprache, die zu diesen Strukturen gehört,
$\hat{L}_R(\pi)$ die Sprache der Restriktionen $(\Gamma,R_1,R_2,..)$.

Sei $P:=\{x \in \mathbb{N} \mid (x \geq 2$ und x prim) oder $x=o\}$.

Für $p \in P$ sei

$T_R^p(\pi)$ die Theorie der Modelle von $T_R(\pi)$, deren Restklassenkörper die Charakteristik p hat, und

$T_S^p(\pi)$ die Theorie der S-henselschen Modelle von $T_R^p(\pi)$

Man überlegt leicht, daß die Klasse der S-henselschen Körper nicht elementar im verallgemeinerten Sinn ist .

Satz 1

Seien $(K^o,\Gamma^o,R_1^o,R_2^o,..) \subset (K^i,\Gamma^i,R_1^i,R_2^i,..)$ (i=1,2) Modelle von $T_R(\pi)$. $(K^1,..)$ und $(K^2,..)$ seien S-henselsch.

Weiter sei

$\varphi: (\Gamma^1,R^1,R^1,..) \longrightarrow (\Gamma^2,R_1^2,R_2^2,..)$

eine $S(\pi)$-isomorphe Einbettung, die auf $(\Gamma^o,R_1^o,R_2^o,..)$ identisch operiert.

Dann existiert ein Ultralimessystem $(I_\alpha, U_\alpha)_{\alpha<\beta}$ und eine isomorphe Einbettung

$\psi: (K^1,..)^* \longrightarrow (K^2,..)^*$ mit

$\psi|_{(K^o,..)} = id_{(K^o,..)}$ und

$\psi|_{(\Gamma^1,R_1^1,..)^*} = \varphi^*$.

($\lim\limits_{\alpha\to\beta} M^{I_\alpha}/_{U_\alpha}$ sei durch M^* abgekürzt) .

Zusatz: Ist φ surjektiv, so kann man auch die Surjektivität von ψ erreichen .

Beweis:

i) Wir zeigen zunächst, daß ein Ultralimessystem " $*$ " existiert und eine isomorphe Einbettung

$\psi: (K^1,..) \longrightarrow (K^2,..)^*$ mit

$\psi|_{(K^o,..)} = id_{(K^o,..)}$ und

$\psi|_{(\Gamma^1,R_1^1,..)} = \varphi$.

Beweis: Sei $\kappa := \max(\operatorname{card}\Gamma^1, \omega)$. Wir wählen als " $*$ " nach Satz I 12 so, daß $(K^2,..)^*$ κ-vollständig ist.
Wir wenden nun nacheinander Satz I 1o und Satz I 7 an und erhalten so S-henselsche Zwischenkörper

$(K^o,..) \subset (\hat{K}^1,..) \subset (K^1,..)$,

$(K^o,..) \subset (\hat{K}^2,..) \subset (K^2,..)^*$, und einen

$(K^o,..)$-Isomorphismus

$\hat{\Psi} : (\hat{K}^1,..) \longrightarrow (\hat{K}^2,..)$,derart,daß

$(K^1,..)$ - S-unmittelbar über $(\hat{K}^1,..)$ ist und

$\hat{\Psi}|(\Gamma^1,R^1_1,..) = \varphi$.

Sei nun $(K^3,..)$ ein S-unmittelbarer ,in $(K^2,..)^*$ relativ S-maximaler Oberkörper von $(\hat{K}^2,..)$ .Dann ist $(K^3,..)$ S-maximal.Denn nach Satz I 3 müssen wir zeigen, daß jede S-PCF aus $(K^3,..)$ in $(K^3,..)$ konvergiert. Da aber $(K^2,..)^*$ S-henselsch ist,ist wegen der relativen Maximalität nach Satz I 5 auch $(K^3,..)$ S-henselsch.Nach Satz I 4 konvergieren also in $(K^3,..)$ alle S-PCF vom algebraischen Typ.Sei $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ eine S-PCF aus $(K^3,..)$ vom transzendenten Typ . Da $(K^2,..)^*$ κ-vollständig ist und $\operatorname{card}\Gamma^3 = \operatorname{card}\Gamma^1 \leq \kappa$, konvergiert $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ in $(K^2,..)^*$ sagen wir gegen b. Nach Satz 3 iii und ist dann $(K^3(b),..)$ S-unmittelbare Erweiterung von $(K^3,..)$,d.h. $b \in K^3$. $(K^3,..)$ ist also S-maximal .

Satz I 13 liefert eine S-unmittelbare ,S-maximale Erweiterung von $(K^1,..)$: $(K^4,..)$.$(K^4,..)$ ist auch S-unmittelbare Erweiterung von $(\hat{K}^1,..)$.Nach Satz I 6 setzt sich $\hat{\Psi}$ fort zu einem Isomorphismus

$\tilde{\Psi} : (K^4,\Gamma^1,R^1_1,..) \longrightarrow (K^3,..)$.

Setze also $\Psi := \tilde{\Psi}|_{(K^1,..)}$.

ii) Wir definieren eine Folge von S-henselschen Körpern

$(K^o,..) \subset (K^{i,1},..) \subset (K^{i,2},..) \subset (K^{i,3},..) \subset \ldots$ (i=1,2),

von isomorphen Einbettungen über $(K^o,..)$

$\Psi_j : (K^{1,j},..) \longrightarrow (K^{2,j+1},..)$ j=1,2..

von $S(\Pi)$-isomorphen Einbettungen

$\varphi_j : (\Gamma^{1,j},R^{1,j}_1,..) \longrightarrow (\Gamma^{2,j},R^{2,j}_1,..)$ j=1,2..

und von Ultralimessystemen $(I^j_\alpha,U^j_\alpha)_{\alpha<\beta_j}$ mit

$(K^{i,j+1},..) = \lim\limits_{\alpha\to\beta_j} (K^{i,j},..)^{I^j_\alpha}/U^j_\alpha$, $(K^{i,1},..) = (K^i,..)$,

$\varphi_{j+1} = \lim\limits_{\alpha\to\beta_j} (\varphi_j)^{I^j_\alpha}/U^j_\alpha$, $\varphi_1 = \varphi$,

$\Psi_j \subset \Psi_{j+1}$. und

$\Psi_j|(\Gamma^{1,j},R^{1,j}_1,..) = \varphi_j$, i=1,2 , j=1,2,.. .

Wir definieren Ψ_1 , $(I^1_\alpha,U^1_\alpha)_{\alpha<\beta_1}$ wie in i) .

Um $(I^{j+1}_\alpha,U^j_\alpha)_{\alpha<\beta_j}$ und Ψ_j zu definieren , identifizieren wir vermöge Ψ_{j-1} $(K^{1,j-1},..)$ und $(K^{2,j-1},..)$ und lassen sie in i) die Rolle von $(K^o,..)$, $(K^{i,j},..)$ die Rolle von $(K^i,..)$ (i=1,2) und Ψ_j die Rolle von φ spielen.

Um Satz 1 zu beweisen setzen wir nur

$(K^i,..)^* := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (K^{i,j},..)$,(i=1,2),

$\varphi^* := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j$ und $\Psi := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Psi_j$. qed.

iii) Beweis des Zusatzes:

Wenn φ bijektiv ist konstruieren wir uns wie in ii) eine Folge von S-henselschen Körpern

$(K^o,..) \subset (K^{i,1},..) \subset (K^{i,2},..)$ ... (i=1,2)

von isomorphen Einbettungen über K^o

$\Psi_j : (K^{1,j},..) \longrightarrow (K^{2,j+1},..)$ j=1,3,5,7... ,

$\Psi_j : (K^{2,j},..) \longrightarrow (K^{1,j+1},..)$ j=2,4,6,8,.. ,

von $S(\Pi)$-isomorphen Einbettungen (surjektiv)

$\varphi_j : (\Gamma^{1,j},R^{1,j}_1,..) \longrightarrow (\Gamma^{2,j},..)$ j=1,3,5,.. ,

$\varphi_j : (\Gamma^{2,j},..) \longrightarrow (\Gamma^{1,j},..)$ j=2,4,6...

und von Ultralimessystemen $(I_\alpha^j, U_\alpha^j)_{\alpha<\beta_j}$, $j=1,2,..$ mit

$$(K^{i,j+1},..) = \lim_{\alpha\to\beta_j} (K^{i,j},..)^{I_\alpha^j}/_{U_\alpha^j} , (K^{i,1},..) = (K^i,..) ,$$

$$\varphi_{j+1}^{-1} = \lim_{\alpha\to\beta_j} (\varphi_j)^{I_\alpha^j}/_{U_\alpha^j} \quad , \quad \varphi_1 = \varphi \quad ,$$

$$\psi_{j+1}^{-1} \supset \psi_j \quad \text{und}$$

$$\psi_j \mid (\Gamma^{r,j},..) = \varphi_j \quad , i=1,2 \; , \; j=1,2,.. \; , \; \begin{matrix} r=1 \text{ falls } 2 \nmid j \\ r=2 \text{ falls } 2 \mid j \; . \end{matrix}$$

Um den Zusatz zu beweisen setzen wir

$$(K^i,..)^* := \bigcup_{j=o}^{\infty} (K^{i,2j+1},..) \quad (i=1,2) \quad ,$$

$$\varphi^* := \bigcup_{j=o}^{\infty} \varphi_{2j+1} \quad \text{und} \quad \psi := \bigcup_{j=o}^{\infty} \psi_{2j+1} \quad .\text{qed.}$$

Satz 2

Sei $p \in P$ und L eine Spracherweiterung von $L_R(\pi)$, in der die Sorte K nicht vorkommt. $T \subset L$ sei eine Theorie. Dann gilt:

i) $T_S^p(\pi) \cup T$ ist die K-Modellvervollständigung von $T_R^p(\pi) \cup T$.

ii) $T_S^p(\pi) \cup T$ ist die K^*-Modellvervollständigung von $T_R^p(\pi) \cup T$.

iii) Ist T modellvollständig, so ist auch $T_S^p(\pi) \cup T$ modell - vollständig.

iv) Seien $(K^o,..) \subset (K^i,..)$ $i=1,2$ Strukturen für $L \cup L_R(\pi)$ und Modelle von $T_R(\pi)$. $(K^1,..)$ und $(K^2,..)$ seien S-henselsch. Weiter sei

$$(\Gamma^1,..) \equiv (\Gamma^2,..) \quad \text{bzgl. } L(\Gamma^o,..) \quad .$$

Dann ist auch

$$(K^1,..) \equiv (K^2,..) \quad \text{bzgl. } L \cup L_R(\pi) \; (K^o,..) \quad .$$

Beweis:

iv): Seien $(K^i,..)$ $i=o,1,2$ wie in iv) . Nach Satz II 1 gibt es elementare Erweiterungen

$$(K^i,..) \prec (\hat{K}^i,..) \quad (i=1,2)$$

und einen $S(\pi)$-Isomorphismus der L-Strukturen

$\varphi : (\hat{\Gamma}^1,..) \longrightarrow (\hat{\Gamma}^2,..)$, der $(\Gamma^o,..)$ festläßt .

Nach Satz 1 gibt es Ultralimites

$(\hat{K}^i,..) \prec (\hat{K}^i,..)^*$, die über $(K^o,..)$ isomorph sind.

Also ist bzgl. $L \cup L_R(\pi)(K^o,..)$

$$(\hat{K}^1,..)^* \equiv (\hat{K}^2,..)^* \quad \text{also auch}$$

$$(\hat{K}^1,..) \equiv (\hat{K}^2,..) \quad \text{und}$$

$$(K^1,..) \equiv (K^2,..) \quad . \quad \text{qed.}$$

i),ii) : Sei $(K,\Gamma,R_1,..)$ ein Modell von $T_R(\pi) \cup T$. Dann ist die S-henselsche Hülle $(\hat{K},\Gamma,R_1,..)$ Modell von $T_S(\pi) \cup T$.

Seien weiter $(K^1,\Gamma^1,R_1^1,..) \subset (K^2,\Gamma^2,R_1^2,..)$ zwei Modelle von $T_S^p(\pi) \cup T$ mit

$$(\Gamma^1,R_1^1,..) \prec (\Gamma^2,R_1^2,..) \quad (\text{bzgl. } L \;) \text{ ,d.h.}$$

$$(\Gamma^1,..) \equiv (\Gamma^2,..) \quad \text{bzgl. } L(\Gamma^1,..) \quad .$$

Daraus folgt mit iv) , daß

$$(K^1,..) \equiv (K^2,..) \quad \text{bzgl. } L \cup L_R(\pi) \; (K^1,..) \quad \text{d.h.}$$

$$(K^1,..) \prec (K^2,...) \quad . \text{ qed.}$$

iii) folgt sofort aus ii) .

Bemerkung:

Folgende Überlegung zeigt, daß $T_R(\pi)$ weder eine K- noch eine K^*-Modellvervollständigung besitzt: Da die Klasse der S-henselschen Körper abgeschlossen ist bzgl. elementaren Unter- und Oberstrukturen , folgt aus Satz 2 wie beim Beweis von Satz II 7 , daß die Modellklasse einer K- bzw. K^*- Modellvervollständigung von $T_R(\pi)$ gerade die Klasse der S-henselschen Körper wäre . Diese Klasse ist aber nicht elementar.

Satz 3

Sei $p \in P$ und L eine Spracherweiterung von $\hat{L}_R(\pi)$, in der die Sorte K nicht vorkommt. Dann gibt es zu jeder Formel A aus $L \cup L_R(\pi)$ Terme $t_1,..,t_n$ und eine reine L-Formel B vom gleichen Präfixtyp wie A, in der alle neuen Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) auftreten, positiv (negativ) vorkommen, mit

$$T_S^p(\pi) \vdash A \leftrightarrow B(t_1,..,t_n) .$$

Weiter können dabei, wenn A nicht quantorfrei ist, die Terme $t_1,..,t_n$ als $L_R(\pi)$ - Terme gewählt werden.

Folgerung: Erlaubt eine Theorie $T \subset L$ Quantorenelimination, so erlaubt auch $T_S^p(\pi) \cup T$ Quantorenelimination.

Beweis:

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über die Anzahl der Quantorenwechsel in der pränexen Normalform von A. Für quantorfreie A ist die Behauptung klar, weil in $T_R(\pi)$

$$T_R(\pi) \vdash x_1 =_K x_2 \leftrightarrow v(x_1 - x_2) = \infty .$$

i) Sei A von der Form (pränexe Normalform)

$$\bigvee_{x_1} \bigvee_{x_2} .. \bigvee_{x_k} A'(x_1,..x_k,y_1,..y_m) \quad \text{,wobei}$$

A' den Präfixtyp A_n hat (siehe[12] S. 65) und die Behauptung bereits erfüllt. Also gibt es Terme $t_1,..,t_{k+m}$ und eine reine L-Formel B' - in der alle neuen Relationszeichen, die in A positiv (negativ) auftreten, positiv bzw. negativ vorkommen - vom Präfixtyp A_n mit

$$T_S(\pi) \vdash A' \leftrightarrow B'(t_1,..,t_{k+m}) .$$

Sei nun R ein k+m-stelliges Relationszeichen, das in L nicht vorkommt, und L' entstehe aus L dadurch, daß man alle neuen Relationszeichen aus L streicht und R hinzunimmt.

Wir betrachten die folgende Formel aus $L_R(\pi) \cup L'$:

$$A'' :\leftrightarrow \bigvee_{x_1} \bigvee_{x_2} .. \bigvee_{x_k} R(t_1,..,t_{k+m}) .$$

G sei die Menge aller Formeln aus $L_R(\pi) \cup L'$ der Form

$C(s_1,..,s_t)$, wobei die s_i $L_R(\pi)$-Terme sind und C eine reine L'-Formel ist, in der R positiv vorkommt und die vom Präfixtyp E_1 ist. Wir lassen $L_R(\pi)$, $L_R(\pi) \cup L'$ und G die Rollen von L,L' und G in Satz II 4' spielen. Mit diesem Satz wollen wir zeigen, daß bzgl. $T_S^p(\pi)$ A'' zu einer Formel aus G äquivalent ist.
(L'' entstehe aus L' durch Streichen von R)

Sei also $(K^o,\Gamma^o,..)$ gemeinsame $L_R(\pi)$ -Unterstruktur der $L' \cup L_R(\pi)$ -Strukturen $(K^i,\Gamma^i,..)$, i=1, 2. $(K^1,..)$ und $(K^2,..)$ seien Modelle von $T_S(\pi)$, und für alle Formeln $D \in G$ und $a_1,a_2,..$ aus $(K^o,..)$ möge aus $(K^1,..) \Vdash D(a_1,..)$ $(K^2,..) \Vdash D(a_1,..)$ folgen. Weiter gelte $A''(a_1,..)$ in $(K^1,..)$.

Aus Satz II 1o folgt nun die Existenz einer Ultrapotenz "$*$" und einer L''-isomorphen Einbettung

$$\varphi:(\Gamma^1,R_1^1,..) \longrightarrow (\Gamma^2,R_1^2,..)^* ,$$

die auf $(\Gamma^o,R_1^o,..)$ identisch operiert und für alle $b_1,b_2,..$ aus $(\Gamma^1,..)$

$$(\Gamma^1,..) \Vdash R(b_1,..) \longrightarrow (\Gamma^2,..)^* \Vdash R(\varphi(b_1),..) \text{ erfüllt.}$$

Seien $R_1^3,..$ die Restklassenringe zu dem bewerteten Körper (K^o,Γ^o). Dann ist $(K^o,\Gamma^o,R_1^3,..)$ Modell von $T_R(\pi)$, und es ist

$$(K^o,\Gamma^o,R_1^3,..) \subset (K^o,\Gamma^o,R_1^o,..) .$$

Satz 1 liefert nun ein Ultralimesystem "+" und eine isomorphe Einbettung (bzgl. $L_R(\pi)$!)

$$\psi:(K^1,..)^+ \longrightarrow (K^2,..)^{*+} ,$$

die auf $(K^o,\Gamma^o,R_1^3,..)$ identisch operiert und

$$\psi|(\Gamma^1,..)^+ = \varphi^+ \quad \text{erfüllt.}$$

Da φ^+ wieder L''-isomorphe Einbettung ist, ist ψ $L' \cup L_R(\pi)$ -isomorphe Einbettung. Weiter gilt für φ^+

und für alle $b_1,..$ aus $(\Gamma^1,..)^+$

$(\Gamma^2,..)^{*+} \Vdash R(\varphi^+(b_1),..)$, wenn $(\Gamma^1,..)^+ \Vdash R(b_1,..)$.

Da $A''(a_1,..)$ in $(K^1,..)^+$ gilt, gibt es $b_1,.. \in (K^1,..)^+$, sodaß

$(K^1,..)^+ \Vdash R(t_1(a_1,..,b_1,..),t_2,..)$.

Also folgt

$(K^2,..)^{*+} \Vdash R(\varphi^+(t_1(a_1,..)),\varphi^+(t_2),..)$.

Da $\varphi^+(t_i(a_1,..) = t_i(a_1,..,\psi(b_1),..)$ folgt also

$(K^2,..)^{*+} \Vdash A''(a_1,..)$, und daraus

$(K^2,..) \Vdash A''(a_1,..)$.

Die Bedingungen von Satz II 4' sind also erfüllt, und wir wir finden Terme $s_1,..,s_t$ und eine reine L'-Formel C, in der R positiv vorkommt, und die eine Existenzformel ist, mit

$C(s_1,..,s_t) \leftrightarrow \bigvee_{x_1} \bigvee_{x_2} .. \bigvee_{x_k} R(t_1,..,t_{k+m})$ vermöge $T_S(\pi)$.

Ersetzen wir nun in C das Relationszeichen R durch die Formel B' , erhalten wir eine reine L-Formel, die, weil R in C positiv vorkommt , vom Präfixtyp E_{n+1} ist, und in der alle neuen Relationszeichen aus L, die in B' positiv (negativ) vorkommen, positiv (negativ) vorkommen.

Also ist wie gewünscht

$T_S(\pi) \vdash A \leftrightarrow C(s_1,..)$.

ii) Sei A vom Präfixtyp A_{n+1} . Dann ist $\neg A$ vom Präfixtyp E_{n+1} , und alle neuen Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) vorkommen, kommen in $\neg A$ negativ (positiv) vor. Nach i) existiert eine reine L-Formel C vom Präfixtyp E_{n+1} , in der alle neuen Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) auftreten , negativ (positiv) vorkommen, und Terme aus $L_R(\pi)$ $s_1,..$, sodaß

$T_S(\pi) \vdash \neg A \leftrightarrow C(s_1,..)$.. Dann ist wie gewünscht

$T_S(\pi) \vdash A \leftrightarrow \neg C(s_1,..)$. qed.

Satz 4

Sei $p \in P$ und $\hat{T}^p_S(\pi) := T^p_S(\pi) \cup \{\pi(v(p)) = p\}$,

L eine Erweiterung von $\hat{L}_R(\pi)$, in der die Sorte K nicht vorkommt, $T \subset L$ eine Theorie. Dann gilt:

i) Jede Aussage aus $L \cup L_R(\pi)$ ist bzgl. $\hat{T}^p_S(\pi)$ zu einer Aussage aus L äquivalent.

ii) Wenn T vollständig ist, ist auch $\hat{T}^p_S(\pi) \cup T$ vollständig.

iii) Wenn T entscheidbar ist, ist auch $\hat{T}^p_S(\pi) \cup T$ entscheidbar.

iv) Seien $(K^i,..)$ (i=1,2) Modelle von $\hat{T}^p_S(\pi) \cup T$ und $(\Gamma^1,..) \equiv (\Gamma^2,..)$ bzgl. L . Dann ist auch $(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L \cup L_R(\pi)$.

Bemerkung:

Man kann darüberhinaus, analog zu Satz 3, beweisen:

i)' Zu jeder Aussage A aus $L \cup L_R(\pi)$ gibt es eine äquivalente L-Aussage B, vom gleichen Präfixtyp, in der alle neuen Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) vorkommen, positiv (negativ) vorkommen.

Beweis:

iv) Seien die $(K^i,..)$ i=1,2 wie in iv) . Seien $(\bar{K}^i,..)$ die von den konstanten Termen erzeugten Unterstrukturen der $(K^i,..)$ (i=1,2) . Man sieht, daß die $(\bar{K}^i,..)$ die folgende Gestalt haben:

$(\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{F}_p,..)$, $\pi(n)=p^n$, falls v die p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$ ist.

$(\{0\},\mathbb{Q},\mathbb{Q},\mathbb{Q},..)$, falls v die triviale Bewertung auf $\mathbb{Q}$ ist.

Da $(\Gamma^1,..) \equiv (\Gamma^2,..)$ folgt also

$(\bar{K}^1,..) \cong (\bar{K}^2,..)$. Da die $(\bar{K}^i,..)$ von den konstanten Termen erzeugt sind, folgt weiter

$(\Gamma^1,..) \equiv (\Gamma^2,..)$ bzgl. $L(\bar{\Gamma}^1,..)$ bzw. $L(\bar{\Gamma}^2,..)$.

Also ist nach Satz 2 iv auch

$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L \cup L_R(\pi)$.

ii) folgt sofort aus iv)

i) folgt aus ii) mit Satz II 2 .

iii) Sei ein Entscheidungsverfahren von T gegeben.Um die Ableitbarkeit einer Aussage aus $L \cup L_R(\pi)$ bzgl. $\hat{T}^p_S(\pi) \cup T$ zu prüfen gehen wir wie folgt vor:
Sei A diese Aussage.Da $\hat{T}^p_S(\pi)$ axiomatisierbar ist,leiten wir der Reihe nach alle in der um die Zeichen von A erweiterten Sprache $L_R(\pi)$ aus $\hat{T}^p_S(\pi)$ ableitbaren Aussagen ab.Sobald eine Aussage der Form $A \leftrightarrow B$,wobei B eine reine L-Aussage ist,auftritt -das muß nach i) geschehen -,untersuchen wir die Ableitbarkeit von B bzgl. T mit dem gegeben Entscheidungsverfahren.

Definition:

$T_o(\pi)$ sei die Theorie der bewerteten Körper mit Schnitt, deren Restklassenkörper die Charakteristik o haben. Die Modelle von $T_o(\pi)$ sind dreisortige Strukturen (K,Γ,k) ,wobei K der Körper , Γ die Wertgruppe und k der Restklassenkörper ist.
$L_o(\pi)$ sei die Sprache von $T_o(\pi)$, $\hat{L}$ die Sprache von den Restriktionen (Γ,k).
$T^H_o(\pi)$ sei die Theorie der henselschen Modelle von $T_o(\pi)$.

Satz 5

Sei L eine Erweiterung von $\hat{L}$,in der die Sorte K nicht vorkommt.$T \subset L$ sei eine Theorie.Dann gilt:

i) Sei $(K^o,..)$ gemeinsame $L_o(\pi)$ -Unterstruktur der $T^H_o(\pi) \cup T$ - Modelle $(K^i,..)$ $i=1,2$.
Aus $(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. $L(\Gamma^o,k^o)$ folgt dann
$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L \cup L_o(\pi)\ (K^o,..)$.

ii) $T^H_o(\pi) \cup T$ ist die K-Modellvervollständigung von $T_o(\pi) \cup T$.

iii) $T^H_o(\pi) \cup T$ ist die K^* -Modellvervollständigung von $T_o(\pi) \cup T$.

iv) Ist T modellvollständig,so ist auch $T^H_o(\pi) \cup T$ modellvollständig

v) Zu jeder Formel A aus $L \cup L_o(\pi)$ gibt es $L_o(\pi)$-Terme $t_1,..,t_n$ und eine reine L-Formel B vom gleichen Präfixtyp wie A,in der alle neuen Relationszeichen aus L,die in A positiv (negativ) vorkommen , positiv (negativ) vorkommen , mit
$T^H_o(\pi) \vdash A \leftrightarrow B(t_1,..,t_n)$.

vi) Erlaubt T Quantorenelimination so erlaubt auch $T^H_o(\pi) \cup T$ Quantorenelimination.

vii) Jede Aussage aus $L \cup L_o(\pi)$ ist bzgl. $T^H_o(\pi)$ zu einer Aussage aus L äquivalent, die vom selben Präfixtyp ist, und in der alle neuen Relationszeichen aus L , die vorher negativ (positiv) vorkamen, negativ (positiv) vorkommen

viii) Ist T vollständig,so ist auch $T^H_o(\pi) \cup T$ vollständig.

ix) Ist T entscheidbar,so ist auch $T^H_o(\pi) \cup T$ entscheidbar.

x) Seien $(K^i,..)$ $i=1,2$ Modelle von $T^H_o(\pi) \cup T$ mit
$(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. L .Dann ist auch
$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L \cup L_o(\pi)$.

Beweis:

Nach Satz I 2 sind , wenn der Restklassenkörper die Charakteristik o hat,die Begriffe henselsch und S-henselsch äquivalent.Wenn man weiter bedenkt,daß in diesem Fall alle Restklassenringe mit dem Restklassenkörper identisch sind, folgt Satz 5 sofort aus den Sätzen 2-4 . Die Verschärfungen in v) und vii) erhält man wie beim Beweis von Satz III lo .

Definition:

$K,v,<$ heißt angeordneter, bewerteter Körper mit Schnitt, wenn K,v ein bewerteter Körper mit Schnitt ist, $K,<$ ein angeordneter Körper ist und darüberhinaus gilt:

i) Für alle x aus der Wertgruppe Γ von K,v ist $\pi(x) > o$.

ii) $\bigwedge_{x,y\in K} \; o < y \leq x \longrightarrow v(x) \leq v(y)$.

Satz 6

i) Sei $K,v,<$ ein angeordneter bewerteter Körper mit Schnitt. Dann wird vermöge

$$res(x) >' o \quad :\longleftrightarrow \quad x > o \wedge v(x) = o$$

auf dem Restklassenkörper eine Anordnung definiert, die den Restklassenkörper zu einem angeordneten Körper macht.

ii) Sei K,v ein bewerteter Körper mit Schnitt und $<$ eine Anordnung des Restklassenkörpers. Dann macht die Anordnung

$$x >' o \; : \longleftrightarrow \; res(x\cdot\pi(-v(x))) > o \wedge x \neq o$$

$K,v,<'$ zu einem angeordneten, bewerteten Körper mit Schnitt.

iii) Die in i) und ii) beschriebenen Prozesse sind die Umkehrungen voneinander.

Beweis:

i) Wohldefiniertheit:

Sei $x > o$ und $res(x) = res\,(y) \neq o$. Dann ist $v(x-y) > v(x) > o$. Daraus folgt $x - y < x$ d.h. $y > o$, $res(y) >' o$.

Vergleichbarkeit und Antisymmetrie:

Für $v(x)=o$ müssen wir zeigen

$res(x) >' o \longleftrightarrow - res(x) \not>' o$. Es ist aber

$res(x) >' o \longleftrightarrow x > o \longleftrightarrow -x \not> o \longleftrightarrow -res(x) \not>' o$.

Verträglichkeit mit Addition und Multiplikation:

Sei $res(x) >' o$ und $res(y) >' o$. Dann ist $x,y > o$. Also $xy > o$ d.h. $res(x)res(y) = res(xy) >' o$, da $v(xy)=o$. Weiter ist

wegen $o < x < x+y$ $\quad v(x+y) \leq v(x) = o$.

Andererseits folgt aus $v(x) = v(y)$

$v(x+y) \geq o$. Also folgt

$res(x) + res(y) = res(x+y) >' o$.

ii):

Verträglichkeit mit der Multiplikation:

$$x,y >' o \longrightarrow res(x\pi(-v(x))) > o \wedge res(x\pi(-v(x))) > o \wedge xy \neq o$$

$$\longrightarrow res(xy\pi(-v(x))\pi(-v(y))) > o \wedge xy \neq o$$

$$\longrightarrow res(xy\pi(-v(xy))) > o \wedge xy \neq o$$

$$\longrightarrow xy >' o \; .$$

Verträglichkeit mit der Addition:

Sei $x,y > o$ und 1.Fall : $v(x) > v(y)$. Dann folgt

$v(x+y) = v(y)$, $x+y \neq o$,

$(x+y)\cdot\pi(-v(x+y)) = x\cdot\pi(-v(y)) + y\cdot\pi(-v(y))$ und

$v(x\pi(-v(y))) > o$. Also folgt

$res((x+y)\pi(-v(x+y))) = res(y\pi(-v(y))) > o$ d.h.

$x+y >' o$.

Sei $x,y >' o$ und 2.Fall : $v(x) = v(y)$.

Dann ist $res(x\pi(-v(x))) + res(y\pi(-v(x))) > o$, daraus folgt

$res(x+y)\pi(-v(x))) \neq o$ d.h. $v(x+y) = v(x) = v(y)$.

Wir haben also $x+y \neq o$ und

$res((x+y)\pi(-v(x+y))) = res(x\pi(-v(x))) + res(y\pi(-v(y))) > o$,

d.h. $x+y >' o$.

Vergleichbarkeit und Antisymmetrie:

$$x >' o \longleftrightarrow res(x\pi(-v(x))) > o \wedge x \neq o$$

$$\longleftrightarrow -res(x\pi(-v(x))) \not> o \wedge x \neq o$$

$$\longleftrightarrow res(-x\pi(-v(-x))) \not> o \wedge x \neq o$$

$$\longleftrightarrow -x \not>' o \wedge x \neq o \; .$$

Verträglichkeit mit dem Schnitt:

Sei x aus der Wertgruppe . Dann ist

$res((\pi(x))\cdot\pi(-v(\pi(x)))) = 1 > o$ d.h. $\pi(x) >' o$.

Verträglichkeit mit der Bewertung:

Sei $o <' y \not\leq' x$ und o.E. $y <' x$ .Dann ist

$\mathrm{res}(y\pi(-v(y))) > o$ und $\mathrm{res}((x-y)\pi(-v(x-y))) > o$.

Aus $v(y) < v(x)$ würde nun folgen $v(x-y) = v(y)$ und

$\mathrm{res}((x-y)\pi(-v(y))) > o$ und daraus

$\mathrm{res}(x\pi(-v(y))) > o$. D.h. $v(x) = v(y)$.

Es ist also $v(x) \not\leq v(y)$.

iii)

1. Sei $<$ eine Anordnung des Restklassenkörpers und $x \in k$.
   Dann ist , falls $\mathrm{res}(y) = x$ und $v(y) \geq o$,

   $x >'' o \leftrightarrow y >' o \wedge v(y) = o$

   $\leftrightarrow \mathrm{res}(y\pi(-v(y))) > o \wedge y \neq o \wedge \pi(-v(y)) = 1$

   $\leftrightarrow \mathrm{res}(y) > o \leftrightarrow x > o$.

2. Sei $K,v,<$ ein angeordneter, bewerteter Körper und $x \in K$.
   Dann ist

   $x >'' o \leftrightarrow \mathrm{res}(x\pi(-v(x))) >' o \wedge x \neq o$

   $\leftrightarrow x\pi(-v(x)) > o \wedge v(x\pi(-v(x))) = o \wedge x \neq o \leftrightarrow$

   (Da $\pi(-v(x)) > o$ für $x \neq o$)

   $\leftrightarrow x > o$.

Wir haben folgenden Zusammenhang zwischen henselschen Körpern und reellabgeschlossenen Körpern :

<u>Satz 7</u>

Ein angeordneter, bewerter Körper ist genau dann reellabgeschlossen, wenn er henselsch ist, die Wertgruppe divisibel und der Restklassenkörper reellabgeschlossen ist.

<u>Beweis:</u>

"$\rightarrow$ " :

Sei K reell abgeschlossen.
Die Wertgruppe Γ ist divisibel, denn sei $\alpha \in \Gamma$ und $n \neq o$.
Sei $x \in K$ mit $v(x) = \alpha$ .Dann ist auch $v(-x) = \alpha$. Da K reell abgeschlossen ist gibt es ein ein $y \in K$, sodaß

$y^n = x$ oder $y^n = -x$.
Also ist $nv(y) = \alpha$.
Der Restklassenkörper ist reell abgeschlossen.
Denn zunächst ist nach Satz 6 i) der Restklassenkörper k anordbar also formal reell. Sei weiter $\mathrm{res}(x) >' o$,dann ist $x > o$,und es gibt ein $y \in K$ mit $y^2 = x$ .Also ist $(\mathrm{res}(y))^2 = \mathrm{res}(x)$ .Sei nun f ein Polynom von ungeraden Grad aus $k[X]$, und $g \in K[X]$ mit f,g normiert

$\mathrm{res}(g) = f$ und $\mathrm{grad}\, f = \mathrm{grad}\, g$, $\underline{v}(g) = o$.

Da K reell abgeschlossen ist besitzt g eine Nullstelle $x \in K$. Da g normiert ist , ist $v(x) \geq o$. Also folgt

$f(\mathrm{res}(x)) = o$.

Damit sind alle Bedingungen für die reelle Abgeschlossenheit von k nachgewiesen.

Angenommen K sei nicht henselsch.
Dann gibt nach Satz I 2 und I 4 einen echten, algebraischen, unmittelbaren Oberkörper von K .Dieser Körper F ist dann ,weil K reell abgeschlossen ist , nicht formal reell. Sei also in F

$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = o$, nicht alle $x_i = o$.

O.E. kann man $\min\{v(x_1),\ldots,v(x_n)\} = o$ annehmen.Dann steht aber

$\mathrm{res}(x_1)^2 + \ldots + \mathrm{res}(x_n)^2 = o$

im Widerspruch zur formalen Realität von k .

" $\leftarrow$":

Sei (K,Γ,k) henselsch , Γ divisibel und k reell abgeschlossen. Angenommen K sei nicht reell abgeschlossen und F sei ein algebraischer, echter, formal reeller Oberkörper von K . Da K henselsch ist, ist F nicht unmittelbar über K .Da sich die divisible Wertgruppe nicht vergrößern kann, hat F also den algebraischen Abschluß von k als Restklassenkörper. F hat also als henselscher Körper keine echten algebraischen Erweiterungen mehr und ist somit algebraisch abgeschlossen und nicht formal reell.
Wid.

Definition:

$T_<(\pi)$ bezeichne die Theorie der bewerteten angeordneten Körper mit Schnitt. Die Modelle von $T_<(\pi)$ sind dreisortige Strukturen (K,Γ,k), wobei K der angeordnete Körper, Γ die Wertgruppe, und k der Restklassenkörper mit der Anordnung nach Satz 6 ist. Die Sprache $L_<(\pi)$ dieser Theorie entsteht aus $L_o(\pi)$ durch Hinzunahme von zwei Relationzeichen für die Anordnungen in K und k.

$\hat{L}_<$ sei die Sprache der Restriktionen (Γ,k).

$T^H_<(\pi)$ sei die Theorie der henselschen Modelle von $T_<(\pi)$.

Satz 8

Sei L eine Erweiterung von $\hat{L}_<$, in der die Sorte K nicht vorkommt. $T \subset L$ sei eine Theorie. Dann gilt:

i) Sei $(K^o,..)$ gemeinsame $L_<(\pi)$ - Unterstruktur der $T^H_<(\pi)\cup T$ - Modelle $(K^i,..)$ $i=1,2$.
Aus $(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. $L(\Gamma^o,k^o)$
folgt dann
$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L\cup L_<(\pi)(K^o,..)$.

ii) $T^H_<(\pi)\cup T$ ist <u>die</u> K-Modellvervollständigung von $T_<(\pi)\cup T$.

iii) $T^H_<(\pi)\cup T$ ist <u>die</u> K^*-Modellvervollständigung von $T_<(\pi)\cup T$.

iv) Ist T modellvollständig, so ist auch $T^H_<(\pi)\cup T$ modellvollständig.

v) Zu jeder Formel A aus $L\cup L_<(\pi)$ gibt es $L_o(\pi)$-Terme $t_1,..,t_n$ und eine reine L-Formel B vom gleichen Präfixtyp wie A, in der alle Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) vorkommen und nicht zu $\hat{L}_<$ gehören, positiv (negativ) vorkommen, mit

$$T^H_<(\pi) \vdash A \leftrightarrow B(t_1,..,t_n) .$$

vi) Erlaubt T Quantorenelimination, so erlaubt auch $T^H_<(\pi)\cup T$ Quantorenelimination.

vii) Jede Aussage aus $L\cup L_<(\pi)$ ist bzgl. $T^H_<(\pi)$ zu einer Aussage aus L äquivalent.

viii) Ist T vollständig, so ist auch $T^H_<(\pi)\cup T$ vollständig.

ix) Ist T entscheidbar, so ist auch $T^H_<(\pi)\cup T$ entscheidbar.

x) Seien $(K^i,..)$ $i=1,2$ Modelle von $T^H_<(\pi)\cup T$ mit
$(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. L. Dann ist auch
$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L\cup L_<(\pi)$.

Beweis:

Nach Satz 6 ist die Anordnung auf K durch die Anordnung auf k definierbar:

$$T_<(\pi) \vdash x<y \leftrightarrow x\neq y \wedge \operatorname{res}((y-x)\pi(-v(y-x))) > o .$$

Damit folgt Satz 8 sofort aus Satz 5.
Bei ii) beachte man, daß man die Anordnung eines angeordneten bewerteten Körpers mit Schnitt nach Satz 6 auf Oberkörper fortsetzen kann, die denselben Restklassenkörper haben.
Bei v) nützt man aus, daß die obige Definition quantorfrei ist.

Definition:

$T_{q,m}(\pi)$ bezeichnet die Theorie der bewerteten Körper der Charakteristik o mit Schnitt, deren Restklassenkörper $q=p^n$ Elemente hat und deren Wertgruppe ein kleinstes positives Element α mit $v(p) = m\cdot\alpha$ enthält. Die Modelle von $T_{q,m}(\pi)$ sind zweisortige Strukturen (K,Γ). Dabei ist K der Körper und Γ die Wertgruppe. Die Sprache von $T_{q,m}(\pi)$ sei $L_e(\pi)$. L_Γ sei die Sprache von Γ. Weiter sei $T^H_{q,m}(\pi)$ die Theorie der henselschen Modelle von $T_{q,m}(\pi)$.

$$\hat{T}^H_{q,m}(\pi) := T^H_{q,m}(\pi)\cup\{\pi(v(p)) = p\} .$$

Satz 9

Seien $(K^o,\Gamma^o) \subset (K^i,\Gamma^i)$ $(i=1,2)$

Modelle von $T_{q_i,m_i}(\pi)$. $(K^1,..)$ und $(K^2,..)$ seien henselsch.

Weiter sei $q_1=q_2$ und

$$\varphi:\Gamma^1 \longrightarrow \Gamma^2$$

eine isomorphe Einbettung, die Γ^o festläßt.

Dann existiert ein Ultralimessystem "$*$" und eine isomorphe Einbettung

$$\psi:(K^1,..)^* \longrightarrow (K^2,..)^* \quad \text{mit}$$

$$\psi|(K^o,..) = id_{(K^o,..)} \quad \text{und}$$

$$\psi|_{\Gamma^{1*}} = \varphi^* \quad .$$

Ist φ surjektiv, kann man ψ surjektiv erreichen.

Beweis:

Die Restklassenkörper von K^1 und K^2 haben beide q_1 Elemente und sind also über dem Restklassenkörper von K^o isomorph und separabel algebraisch . Nach Satz I 8 und Satz I 9 gibt es also henselsche Zwischenkörper (schnittabgeschlossen)

$$(K^o,..) \subset (\hat{K}^i,..) \subset (K^i,..) \qquad i=1,2$$

und einen $(K^o,..)$-Isomorphismus (schnittverträglich)

$$\hat{\varphi}:(\hat{K}^1,..) \longrightarrow (\hat{K}^2,..) \quad \text{derart, daß}$$

$$\hat{\varphi}|_{\hat{\Gamma}^1} = \varphi \quad \text{und}$$

$(K^1,..)$ unmittelbare Erweiterung von $(K^1,..)$ ist.

Nach Satz I 2 ii ist $(K^1,..)$ sogar S-unmittelbare Erweiterung von $(K^1,..)$.

Seien $R^i_1,R^i_2,..\hat{R}^i_j$ die Restklassenringe von $(K^i,.)$ und $(\hat{K}^i,..)$.

Dann wird durch $\hat{\varphi}$ eine $S(\pi)$-isomorphe Einbettung

$$\hat{\varphi}:(\Gamma^1,R^1_1,..) \longrightarrow (\Gamma^2,R^2_1,..)$$

induziert, die $(\Gamma^o,R^o_1,..)$ festläßt . Wenn φ surjektiv ist, ist auch $\hat{\varphi}$ surjektiv. Da nach Satz I 2 $(K^1,..)$ und $(K^2,..)$ S-henselsch sind, gibt es also nach Satz 1 ein Ultralimessystem "$*$" und eine isomorphe Einbettung

$$\tilde{\psi}:(K^1,\Gamma^1,R^1_1,..)^* \longrightarrow (K^2,\Gamma^2,R^2_1,..)^* \quad ,$$

die $(K^o,\Gamma^o,R^o_1,..)$ festläßt, mit

$$\tilde{\psi}|_{(\Gamma^1,..)^*} = \hat{\varphi}^* \quad .$$

Setze also $\psi := \tilde{\psi}|_{(K^1,\Gamma^1)}$. qed.

Satz 10

Sei L eine Erweiterung von L_Γ , in der die Sorte K nicht vorkommt. $T \subset L$ sei eine Theorie. Dann gilt:

i) Sei (K^o,Γ^o) gemeinsame $L_e(\pi)$-Unterstruktur der $T^H_{q,m}(\pi) \cup T$ - Modelle (K^i,Γ^i) $i=1,2$.
Aus $\Gamma^1 \equiv \Gamma^2$ bzgl. L (Γ^o)
folgt dann
$(K^1,\Gamma^1) \equiv (K^2,\Gamma^2)$ bzgl. $L \cup L_e(\pi)(K^o,..)$.

ii) $T^H_{q,m}(\pi) \cup T$ ist <u>die</u> K-Modellvervollständigung von $T_{q,m}(\pi) \cup T$.

iii) $T^H_{q,m}(\pi) \cup T$ ist <u>die</u> K^*-Modellvervollständigung von $T_{q,m}(\pi) \cup T$.

iv) Ist T modellvollständig, so ist auch $T^H_{q,m}(\pi) \cup T$ modellvollständig.

v) Zu jeder Formel A aus $L \cup L_e(\pi)$ gibt es $L_e(\pi)$-Terme $t_1,..,t_n$ und eine reine L-Formel B vom gleichen Präfixtyp wie A , in der alle neuen Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) vorkommen , positiv (negativ) vorkommen , mit
$T^H_{q,m}(\pi) \vdash A \leftrightarrow B(t_1,..,t_n)$.

vi) Erlaubt T Quantorenelimination, so erlaubt auch $T \cup T^H_{q,m}(\pi)$ Quantorenelimination.

vii) Sei 1 eine Konstante aus L . Dann ist jede Aussage A aus $L \cup L_e(\pi)$ bzgl. $\hat{T}^H_{q,m}(\pi) \cup \{v(p)=1 \vee v(p)=0 \mid p \text{ prim}\}$ zu einer reinen L-Aussage äquivalent, die vom gleichen Präfixtyp wie A ist, und in der alle neuen Relationszeichen, die in A positiv (negativ) vorkommen, positiv (negativ) vorkommen. Wenn A nicht den Präfixtyp B_1 hat, kann man erreichen , daß diese reine L-Aussage bereits bzgl. $\hat{T}^H_{q,m}(\pi)$ zu A äquivalent ist.

viii) Ist T vollständig, so ist auch $\hat{T}^H_{q,m}(\pi) \cup T$ vollständig.

ix) Ist T entscheidbar, so ist auch $\hat{T}^H_{q,m}(\pi) \cup T$ entscheidbar.

x) Seien (K^i,Γ^i) $i=1,2$ Modelle von $\hat{T}^H_{q,m}(\pi) \cup T$ mit
$\Gamma^1 \equiv \Gamma^2$ bzgl. L .Dann ist auch
$(K^1,\Gamma^1) \equiv (K^2,\Gamma^2)$ bzgl. $L \cup L_e(\pi)$.

<u>Beweis</u>:

i) folgt mit Hilfe von Satz II 1 aus Satz 9 - analog zum Beweis von Satz 2 iv) .

ii),iii),iv) folgen - wie beim Beweis von Satz 2 - sofort aus i)

v) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über die Zahl der Quantorenwechsel in der pränexen Normalform von A .

1. Sei A quantorfrei.
G sei die Menge aller quantorfreien Formeln von der Form wie in v). G erfüllt die Bedingungen von Satz II 4′ für die Sprachen $L_e(\pi)$ und $L_e(\pi) \cup L$. Um zu zeigen, daß A zu einer Formel aus G äquivalent ist, weisen wir das Kriterium von Satz II 4′ nach .
Sei also
$(K^o,\Gamma^o) \subset (K^i,\Gamma^i)$

gemeinsame $L_e(\pi)$-Unterstruktur der $T^H_{q,m}(\pi)$-Modelle und $L_e(\pi) \cup L$ Strukturen (K^i,Γ^i) $i=1,2$ .Weiter mögen alle Aussagen aus $G(K^o,\Gamma^o)$,die in (K^1,Γ^1) gelten ,auch in (K^2,Γ^2) gelten.
Wenn nun P bzw. N die Menge der neuen Relationszeichen aus L bezeichnet, die in A positiv bzw. negativ vorkommen, und L′ die Sprache ist, die aus L durch Streichen der Relationszeichen aus $P \cup N$ entsteht, erhalten wir also einen (L′,P,N)-Isomorphismus (siehe Satz II lo)

$$\varphi : \hat{\Gamma}^1 \longrightarrow \hat{\Gamma}^2$$

der von Γ^o in Γ^1 bzw. Γ^2 erzeugten L-Strukturen $\hat{\Gamma}^1$ und $\hat{\Gamma}^2$, der Γ^o festläßt.

Satz I 9 liefert nun $L_e(\pi)$-Strukturen
$(\hat{K}^1,\hat{\Gamma}^1)$ und $(\hat{K}^2,\hat{\Gamma}^2)$ und einen Isomorphismus
$\Psi : (\hat{K}^1,\hat{\Gamma}^1) \longrightarrow (\hat{K}^2,\hat{\Gamma}^2)$ mit
$\Psi|_{\Gamma^1} = \varphi$,der (K^o,Γ^o) festläßt.
Die (K^i,Γ^i) sind sogar $L_e(\pi) \cup L$ -Strukturen.
Seien also $a_1,a_2,..$ Elemente aus (K^o,Γ^o) mit
$(K^1,\Gamma^1) \Vdash A(a_1,..)$ .Dann ist auch
$(\hat{K}^1,\hat{\Gamma}^1) \Vdash A(a_1,..)$ und wegen Satz II lo i)
$(\hat{K}^2,\hat{\Gamma}^2) \Vdash A(a_1,..)$,also auch
$(K^2,\Gamma^2) \Vdash A(a_1,..)$.
Damit sind die Bedingungen von Satz II 4′ nachgewiesen.

2. Sei A von der Form $\bigvee_{x_1} \dots \bigvee_{x_n} R(t_1,..,t_n)$. Dabei seien die t_i $L_e(\pi)$ -Terme, R ein neues Relationszeichen. Wir nehmen weiter an, daß L aus L_Γ durch Hinzunehmen von R entsteht. Wie beim Beweis von Satz 3 sieht man, daß es für den Induktionsschritt genügt, diesen Fall zu betrachten.

G sei die Menge aller Formeln der Form $B(s_1,..,s_k)$, wobei die s_i $L_e(\Pi)$-Terme und B eine reine L-Existenzformel ist, in der R positiv vorkommt. G erfüllt die Bedingungen von Satz II 4′ für $L_e(\Pi)$ und $L \cup L_e(\Pi)$. Wir benutzen Satz II 4′, um zu zeigen, daß A bzgl. $T^H_{q,m}(\Pi)$ zu einer Formel aus G äquivalent ist.

Sei also (K^o,Γ^o) gemeinsame $L_e(\Pi)$-Unterstruktur der $L \cup L_e(\Pi)$ - Strukturen (K^i,Γ^i) $i=1,2$. (K^1,Γ^1) und (K^2,Γ^2) seien Modelle von $T^H_{q,m}(\Pi)$. Weiter mögen alle Aussagen aus $G(K^o,\Gamma^o)$, die in (K^1,Γ^1) gelten, auch in (K^2,Γ^2) gelten.

Mit Satz II lo finden wir eine Ultrapotenz " $*$ " und eine $(L,R,\emptyset)$-isomorphe Einbettung

$\varphi : \Gamma^1 \longrightarrow \Gamma^{2*}$,die Γ^o festläßt.

Satz 9 liefert nun ein Ultralimessystem " + " und eine isomorphe Einbettung

$\psi : (K^1,\Gamma^1)^+ \longrightarrow (K^2,\Gamma^2)^{*+}$,

die (K^o,Γ^o) festläßt und

$\psi|_{\Gamma^{1+}} = \varphi^+$ erfüllt.

ψ ist also eine $(L_e(\Pi),R,\emptyset)$-isomorphe Einbettung. Wenn also für $a_1,..$ aus (K^o,Γ^o) $A(a_1,..,a_k)$ in (K^1,Γ^1) gilt,gilt $A(a_1,..)$ auch in $(K^1,\Gamma^1)^+$. Also gilt nach Satz II lo $A(a_1,..)$ in $(K^2,\Gamma^2)^{*+}$ und daher auch in (K^2,Γ^2).

Die Bedingungen von Satz II 4′ sind also erfüllt . qed.

vi): folgt sofort aus v)

vii) Sei L′ die um $\mathbf{1}$ erweitertete Sprache L_Γ.Man beweist nun sehr leicht durch Induktion über den Termaufbau, daß jeder konstante L'-Term aus $L_e(\Pi) \cup L'$ bzgl. $\hat{T}^H_{q,m}(\Pi)$ gleich einem konstanten Term aus L' ist.Da nach v) jede Aussage zu einer Aussage der Form $B(t_1,..)$ usw. äquivalent ist, ist also jede Aussage zu einer Aussage $B(s_1,..)$ äquivalent, wo B eine reine L-Formel ist - mit den gewünschten Eigenschaften- und die s_i konstante L'-Terme aus L' sind.

Den zweiten Teil von vii) erhalten wir, wenn wir bedenken, daß das kleinste positive Element der Wertgruppe durch eine A_1-Formel E definierbar ist. Sei nun A vom Präfixtyp A_n (E_n) $n \geq 2$, und sei A bzgl. der in vii) genannten Theorie zu der reinen L-Aussage $B(\mathbf{1})$ vom Präfixtyp A_n (E_n) usw. äquivalent (B ohne $\mathbf{1}$) . Dann ist wie gewünscht

$$T^H_{q,m} \vdash A \leftrightarrow (\bigwedge_x E(x) \rightarrow B(mx))$$

$$(T^H_{q,m} \vdash A \leftrightarrow (\bigvee_x E(x) \wedge B(mx))).$$

x) folgt sofort aus vii)

viii)folgt sofort aus x)

ix) folgt - wie im Beweis von Satz 4 - aus vii) .

IV Henselsche Körper mit beliebigen Restklassenkörpern

Das Ziel dieses Abschnitts ist die teilweise Übertragung der Sätze III 5,9,lo auf allgemeinere Theorien henselscher Körper, die nicht die Endlichkeit oder Charakteristik o des Restklassenkörpers fordern.
Zunächst behandeln wir den Fall perfekter Restklassenkörper.

Satz 1

Seien $(K^o,\Gamma^o,k^o)\subset(K^i,\Gamma^i,k^i)$ i=1,2 bewertete Körper mit Restklassenkörpern k^i und Wertgruppen Γ^i.
$(K^1,\dots)$ und $(K^2,\dots)$ seien henselsch, k^o,k^3 perfekt, $k^o\subset k^3\subset k^1$.
Weiter sei eine isomorphe Einbettung

$$\varphi : k^3 \longrightarrow k^2$$

gegeben, die k^o festläßt.

Dann gibt es ein Ultralimessystem "$*$", henselsche Zwischenkörper

$$(K^o,\dots)\subset(\hat K^i,\hat\Gamma^i,\hat k^i)\subset(K^i,\dots)^* \qquad i=1,2$$

und einen $(K^o,\dots)$-Isomorphismus

$$\psi:(\hat K^1,\dots)\longrightarrow(\hat K^2,\dots) \qquad \text{mit}$$

$$\Gamma^o=\hat\Gamma^1=\hat\Gamma^2, \quad \hat k^1 = k^{3*} \quad \text{und} \quad \psi|_{k^{3*}}=\varphi^* .$$

Beweis:

Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz:

Seien $(K^i,\Gamma^i,k^i),k^3,\varphi$ i=o,1,2 wie in Satz 1.
Dann existiert ein Ultrafilter $\mathbb{U}$ auf einer Menge I, henselsche Zwischenkörper

$$(K^o,\dots)\subset(\hat K^i,\hat\Gamma^i,\hat k^i)\subset(K^i,\dots)^I/_{\mathbb{U}} \qquad i=1,2$$

und ein $(K^o,\dots)$-Isomorphismus

$$\psi:(\hat K^1,\dots)\longrightarrow(\hat K^2,\dots) \qquad \text{mit}$$

$$\Gamma^o=\hat\Gamma^1=\hat\Gamma^2, \quad \hat k^1 = k^3 \quad \text{und} \quad \psi|_{\hat k^1}=\varphi .$$

Beweis:

Sei E_o eine Transzendenzbasis von k^3 über k^o. Ist die

Charakteristik von k^o =o, ist nichts mehr zu zeigen, weil dann k^3 über k^o separabel erzeugt ist und dann Satz I 8 Anwendung findet. Wir nehmen also im Folgenden p als Charakteristik von k^o an und setzen

$$E_n := \{ x^{\frac{1}{p^n}} \mid x\in E_o \} .$$

Die E_i sind wieder Transzendenzbasen von k^3 über k^o.
Weiter ist jedes Element von E_n separabel algebraisch über $k^o(E_{n+1})$, und für jedes Element $x\in k^3$ gibt es ein n, sodaß x separabel algebraisch über $k^o(E_n)$ ist.
Wir beweisen die letzte Behauptung:

Sei f das Minimalpolynom von x über $k^o(E_o)$. Dann ist f von der Form

$$f = g(x^{p^n}) \qquad \text{mit separablem, irreduziblem } g\in k^o(E_o)[X] .$$

Sei $g = \sum_{i=o}^{k} a_i X^i$ und $h = \sum_{i=o}^{k} a_i^{\frac{1}{p^n}} X^i \in k^o(E_n)[X]$. Dann ist

$$h(x)^{p^n} = g(x^{p^n}) = o , \quad \text{also} \quad h(x) = o .$$

h hat im algebraischen Abschluß k verschiedene Nullstellen, denn wenn $y_1,\dots,y_k$ die k verschiedenen Nullstellen von g sind, sind die Nullstellen von h $y_1^{\frac{1}{p^n}},\dots,y_k^{\frac{1}{p^n}}$.
x ist also separabel algebraisch über $k^o(E_n)$.

Sei k_n der separable algebraische Abschluß von $k^o(E_n)$ in k^3.
Dann ist k_n über k^o über separabel erzeugt.
Nach Satz I 8 gibt es also henselsche Zwischenkörper

$$(K^o,\Gamma^o,k^o)\subset(K^i_n,\Gamma^o,\hat k^i)\subset(K^i,\Gamma^i,k^i)$$

mit $\hat k^1 = k_n$ und einen $(K^o,\dots)$-Isomorphismus

$$\psi_n:(K^1_n,\dots)\longrightarrow(K^2_n,\dots) \qquad \text{mit}$$

$$\psi_n|_{k^1_n} = \varphi|_{k^1_n} .$$

Setze I := $\mathbb{N}$ und nehme als $\mathbb{U}$ einen Nichthauptultrafilter auf I. Definiere für i=1,2

$$\tilde K^i := K^{iI}/_{\mathbb{U}} , \quad \check K^i := \prod_{n\in I} K^i_n/_{\mathbb{U}} \quad \text{und} \quad \check\psi := \prod_{n\in I}\psi_n/_{\mathbb{U}} .$$

Die $\check{K}^i$ sind dann henselsche Zwischenkörper

$$(K^o,..) \subset (\check{K}^i,..) \subset (\check{\tilde{K}}^i,..) \qquad \text{mit}$$

$$\check{\Gamma}^1 = \check{\Gamma}^2 = \Gamma^{o\,I}/_U \ , \qquad \check{k}^1 = \prod_{n\in I} k_n/_U \ .$$

$$\check{\Psi} : (\check{K}^1,..) \longrightarrow (\check{K}^2,..)$$

ist ein $(K^o,..)$-Isomorphismus mit

$$\check{\Psi}|\check{\Gamma}^1 = id_{\check{\Gamma}^1} \qquad \text{und}$$

$$\check{\Psi}|\check{k}^1 = \varphi^I/_U|\check{k}^1 \ .$$

Darüberhinaus gilt $k^3 \subset \check{k}^1$.

Denn sei $x \in k^3$ und x separabel algebraisch über $k^o(E_n)$. Dann ist x auch separabel algebraisch über $k^o(E_j)$ für alle $j \geq n$. Also ist $x \in k_j$ für alle $j \geq n$.
Daraus folgt

$$\{i \in I \mid x \in k_i\} \in U \ , \qquad \text{d.h. } x \in \check{k}^1 \ .$$

Um den Hilfssatz zu beweisen, genügt es einen Zwischenkörper

$$(K^o,..) \subset (\hat{K}^1, \Gamma^o, k^3) \subset (\check{K}^1, \check{\Gamma}^1, \check{k}^1)$$

zu finden. Um die Behauptung zu zeigen, setzen wir dann

$$\Psi := \check{\Psi}|\text{henselsche Hülle } (\hat{K}^1,..) \ .$$

Dazu definieren wir wie folgt eine Abbildung für jedes n

$$f^n : k_n \longrightarrow K^1_n \ .$$

Sei zunächst $f : k^o \longrightarrow K^o$ irgendeine Abbildung mit

$$res^o \circ f = id_{k^o} \ .$$

Sei für jedes $x \in k^3$ $n(x)$ das kleinste n, sodaß x separabel algebraisch über $k^o(E_n)$ ist.
Und es sei dabei

$$p_x(e_1(x),\dots,e_k(x),x) = o \qquad \text{mit}$$

$$e_1(x),..,e_k(x) \in E_{n(x)} \quad \text{und} \quad p_x \in k^o[X_1,..,X_k] \ \text{irreduzibel},$$

$(k = k(x))$.

Setze nun $f_n(x) :=$

1.Fall. Wenn $x \in E_n$, setze $f_n(x)$ beliebig mit $res \circ f_n(x) = x$, $f_n(x) \in K^1_n$.

2.Fall $x \in E_k$, $k < n$. Es ist dann also $x = y^{p^{n-k}}$ für ein $y \in E_n$. Setze $f_n(x) := f_n(y)^{p^{n-k}}$.
Es ist wieder $res \circ f_n(x) = x$.

3.Fall $x \in k_n \setminus \bigcup_{i=o}^{n} E_i$. Dann ist $n(x) \leq n$.
Sei $f(p_x)$ das Polynom, das aus p_x dadurch entsteht, daß man f auf alle Koeffizienten von p_x anwendet.
Definiere

$$g(X) := f(p_x)(f_n(e_1(x)),..,f_n(e_k(x)),X) \in K^1_n[X] \ .$$

Es ist dann $\underline{v}^1(g) \geq o$ und

$$res^1(g) = p_x(e_1(x),..,e_n(x),X) \ .$$

Sei a beliebig aus K^1_n mit $res^1(a) = x$. Dann folgt

$$res^1(g(a)) = p_x(e_1(x),..,x) = o \qquad \text{und}$$

$$res^1(g'(a)) = p'_x(e_1(x),..,x) \neq o$$

wegen der Separabilität von x über $k^o(E_{n(x)})$.
Da K^1_n henselsch ist, gibt es genau eine Nullstelle b von g in K^1_n mit $res(b) = res(a) = x$. b hängt offenbar nicht von der Wahl von a ab.

Setze $f_n(x) = b$.

Damit ist die Definition der f_n beendet.

Setze nun

$$\prod_{n\in I} f_n/_U =: \check{f} : \check{k}^1 \longrightarrow \check{K}^1 \qquad \text{und}$$

$$\hat{K}^1 := K^o(\check{f}(k^3)) \ .$$

Um den Hilfssatz zu beweisen, zeigen wir $\hat{\Gamma}^1 = \Gamma^o$ und $\hat{k}^1 = k^3$.
Nun ist aber für alle n

$$res^1 \circ f_n = id_{k_n} \qquad \text{d.h.}$$

$$res^1 \circ \check{f} = id_{\check{k}^1} \ .$$

Daraus folgt also $k^3 \subset \hat{k}^1$. Weiter ist klar, daß

$$\Gamma^o \subset \hat{\Gamma}^1 \subset \check{\Gamma}^1 = \Gamma^{o\,I}/_U \ .$$

Da für alle $n \leq m$ $k_n \subset k_m$ und $k^3 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}}^{\infty} k_i$ ist , genügt es für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen

Wertgruppe$(K^o(\check{f}(k_n))) = \Gamma^o$ und

Restklassenkörper$(K^o(\check{f}(k_n))) = k^3$.

Zunächst haben wir

Wertgruppe$(K^o(\check{f}(E_n))) = \Gamma^o$ und

Restklassenkörper$(K^o(\check{f}(E_n))) = k^o(E_n)$.

Denn da E_n über k^o algebraisch unabhängig ist und $\widetilde{res}^{1} \circ \check{f} = id_{k^1}$,folgt wie im Fall a) des Beweises von Satz I 8 für $a_{v_1,\dots,v_k} \in K^o$ und $e_1,\dots,e_k \in E_n$

$$v^1\Big(\sum_{v_1,\dots,v_k} a_{v_1,\dots} f(e_1)^{v_1} \cdots f(e_k)^{v_k}\Big) = \min_{v_1 \dots}\big(v^1(a_{v_1,\dots})\big) .$$

Wie an der angegebenen Stelle folgt daraus die Behauptung.
Wir zeigen nun , daß für jedes $x \in k_n$ $f(x)$ algebraisch über $K^o(f(E_n))$ ist.Denn

1.Fall: Sei $x \in E_r$ für $r \leq n$. Dann ist für alle $j \geq n$

$f_j(x) \in (f_j(E_n))^{p^{n-r}}$ d.h.

$\check{f}(x) \in (\check{f}(E_n))^{p^{n-r}}$.

2.Fall: Sei $x \in k_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n} E_i$. Dann ist $n(x) \leq n$ und für $j \geq n(x)$

$f \circ p_x(f_j(d_1(x))^{p^r}, \dots, f_j(d_k(x))^{p^r}, f_j(x)) = o$

mit $d_i(x)^{p^r} := e_i(x)$ und $r := n - n(x)$.

Also ist

$f \circ p_x(f(d_1(x))^{p^r}, \dots, f(d_k(x))^{p^r}, f(x)) = o$

$K^o(f(k_n))$ ist also algebraische Erweiterung von $K^o(f(E_n))$.
Die Wertgruppe liegt also in der relativen divisiblen Hülle von Γ^o in $\Gamma^{o\,I}/_{\mathfrak{U}}$ und ist also gleich Γ^o .

Der Restklassenkörper von $K^o(\check{f}(k_n))$ ist algebraisch über $k^o(E_n)$ also erst recht algebraisch über k^3 .
Der Restklassenkörper liegt andererseits in $\prod_{i \in I} k_i/_{\mathfrak{U}}$ und also in $k^{3I}/_{\mathfrak{U}}$. Da aber k^3 in $k^{3\,I}/_{\mathfrak{U}}$ relativ algebraisch abgeschlossen ist, ist unser Hilfssatz bewiesen.

Beweis von Satz 1 :

Seien (K^i,Γ^i,k^i) , k^3, φ $i=o,1,2$ wie in der Voraussetzung.
Mit dem Hilfssatz konstruieren wir uns henselsche Körper

$$\begin{array}{ccccccc} (K^i,\Gamma^i,k^i) = (K^{o,i},\Gamma^{o,i},\dots) & \subset & (K^{1,i},\dots) & \subset & (K^{2,i},\dots) & \subset & \dots \quad i=1,2 \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ (K^o,\Gamma^o,k^o) & \subset & (\hat{K}^{1,i},\dots) & \subset & (\hat{K}^{2,i},\dots) & \subset & \dots \end{array}$$

$(K^o,\dots)$ - Isomorphismen

$$\Psi_j : (\hat{K}^{j,1},\hat{\Gamma}^{j,1},\hat{k}^{j,1}) \longrightarrow (\hat{K}^{j,2},\hat{\Gamma}^{j,2},\hat{k}^{j,2}) \qquad j=1,2,\dots$$

und Ultrafilter $\mathfrak{U}_j$ auf Indexmengen I_j $j=o,1,2,\dots$ mit

a) $(K^{j+1,i},\dots) = (K^{j,i},\dots)^{I_j}/_{\mathfrak{U}_j}$ $i=1,2$, $j=o,1,\dots$

b) $k^3 = \hat{k}^{1,1}$

c) $\hat{k}^{j+1,1} = \hat{k}^{j,1\,I_{j-1}}/_{\mathfrak{U}_{j-1}}$ $j=1,2,\dots$

d) $\hat{\Gamma}^{j,i} = \Gamma^o$ $j=1,\dots$ $i=1,2$

e) $\Psi_1 \subset \Psi_2 \subset \Psi_3 \dots$

f) $\Psi_1|_{\hat{k}^{1,1}} = \varphi$

g) $\Psi_{j+1}|_{\hat{k}^{j+1,1}} = (\Psi_j|_{\hat{k}^{j,1}})^{I_{j-1}}/_{\mathfrak{U}_{j-1}}$ $j=1,\dots$

Mit dieser Konstruktion erhalten wir die Behauptung des Satzes ,wenn wir setzen für $i=1,2$

$(K^i,\dots)^* := \bigcup_{j=o}^{\infty}(K^{j,i},\dots)$, $(\hat{K}^i,\dots) := \bigcup_{j=1}^{\infty}(\hat{K}^{j,i},\dots)$ und

$\Psi := \bigcup_{j=1}^{\infty} \Psi_j$.

Und nun zur Konstruktion: $\mathfrak{U}_o, I_o$,

$(K^{1,1},..)$, $(K^{1,2},..)$ und Ψ_1 erhalten wir aus dem Hilfsatz.

Seien also $(K^{j,i},..)$, $(\hat{K}^{j,i},..)$, Ψ_j , I_{j-1} , $\mathfrak{U}_{j-1}$ für

i=1,2 j= 1,2,..,n mit a) – g) bereits konstruiert.

Wir identifizieren nun vermöge Ψ_n $(\hat{K}^{n,1},..)$ und $(\hat{K}^{n,2},..)$

und lassen sie in unserem Hilfssatz die Rolle von $(K^o,..)$,

$(K^{n,i},..)$ die Rolle von $(K^i,..)$ i=1,2 ,

$\hat{k}^{n,1\,I_{n-1}}/_{\mathfrak{U}_{n-1}}$ die Rolle von k^3 und

$(\Psi_n|_{\hat{k}^{n,1}})^{I_{n-1}}/_{\mathfrak{U}_{n-1}}$ die Rolle von φ spielen.

Da $\hat{k}^{n,1}$ und $(\hat{k}^{n,1})^{I_{n-1}}/_{\mathfrak{U}_{n-1}}$ als elementare Erweiterung von k^3 wieder perfekt sind , liefert der Hilfssatz

$I_n, \mathfrak{U}_n$, $(\hat{K}^{n+1,i},..) \subset (K^{n+1,i},..) := (K^{n,i},..)^{I_n}/_{\mathfrak{U}_n}$ und Ψ_{n+1}.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

<u>Definition:</u>

$T_A(\Pi)$ sei die Theorie der bewerteten Körper mit Schnitt, die die Bedingung A erfüllen. Die Sprache von $T_A(\Pi)$ ist $L_o(\Pi)$.

$T^M(\Pi)$ sei die Theorie der algebraisch maximalen Modelle von $T_A(\Pi)$. Wir setzen

$T_o^M(\Pi) := T^M(\Pi) \cup \{\chi(K)=o\} \cup \{\Pi(v(p))=p \vee v(p)=o \mid p \text{ prim}\}$

$T_g^M(\Pi) := T^M(\Pi) \cup \{\chi(K)=\chi(k)\}$.

<u>Satz 2</u>

Sei (K^o, Γ^o, k^o) gemeinsamer Unterkörper mit Schnitt der $T^M(\Pi)$-Modelle (K^i, Γ^i, k^i) i=1,2 . k^o sei perfekt.

Weiter sei

$$\varphi : (\Gamma^1, k^1) \longrightarrow (\Gamma^2, k^2)$$

eine isomorphe Einbettung , die (Γ^o, k^o) festläßt .
Dann existiert ein Ultralimessystem "$*$" und eine isomorphe Einbettung

$\Psi : (K^1,..)^* \longrightarrow (K^2,..)^*$ mit

$\Psi|(K^o,..) = id_{(K^o,..)}$ und

$\Psi|(\Gamma^1,k^1)^* = \varphi^*$.

Ist φ surjektiv , kann man Ψ surjektiv erreichen.

<u>Beweis:</u>

Wie beim Beweis von Satz III 1 sieht man , daß es genügt, zwei Ultralimessysteme "+", "$*$" und eine isomorphe Einbettung über $(K^o,..)$

$\Psi : (K^1,..)^* \longrightarrow (K^2,..)^{*+}$ mit

$\Psi|(\Gamma^1,k^1)^* = \varphi^*$ zu finden.

Die Behauptung folgt dann wie beim Beweis von Satz III1 durch mehrmalige Anwendung.

Wir wenden nun Satz 1 an und erhalten, weil aus der Bedingung A die Perfektheit von k^1 folgt, ein Ultralimessystem "$*$" , henselsche Zwischenkörper

$(K^o, \Gamma^o, k^o) \subset (\hat{K}^i, \Gamma^o, \hat{k}^i) \subset (K^i, \Gamma^i, k^i)^*$ i=1,2

mit $\hat{k}^1 = k^{1*}$ und einen $(K^o,..)$-Isomorphismus

$\hat{\varphi} : (\hat{K}^1,..) \longrightarrow (\hat{K}^2,..)$ mit

$\hat{\varphi}|(\Gamma^o, k^{1*}) = \varphi^*|(\Gamma^o, k^{1*})$.

Satz I 9 liefert eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ von $\hat{\varphi}$ auf henselsche Zwischenkörper

$(\hat{K}^i, \Gamma^o, \hat{k}^i) \subset (\tilde{K}^i, \tilde{\Gamma}^i, \tilde{k}^i) \subset (K^i, \Gamma^i, k^i)^*$ i=1,2

$\tilde{\varphi} : (\tilde{K}^1,..) \longrightarrow (\tilde{K}^2,..)$ mit

$\tilde{\Gamma}^1 = \Gamma^{1*}$, $\hat{\varphi} \subset \tilde{\varphi}$ und

$$\tilde{\Psi}|_{(\Gamma^{1*},k^{1*})} = \varphi^* .$$

Sei $\kappa = \operatorname{card}\Gamma^{1*}$ und "+" ein Ultralimessystem derart, daß $(K^2,..)^{*+}$ κ-vollständig ist, nach Satz I 12 .

Sei $(K^3,\tilde{\Gamma}^2,\tilde{k}^2)$ ein unmittelbarer in $(K^2,..)^{*+}$ relativ maximaler Oberkörper von $(K^2,..)$. Dann ist $(K^3,..)$ nach Satz I 11 maximal .

Sei (K^4,Γ^{1*},k^{1*}) ein unmittelbarer maximaler Oberörper von $(K^1,\Gamma^1,k^1)^*$.Nach [6] läßt sich dann

$$\tilde{\Psi}:(\tilde{K}^1,\Gamma^{1*},k^{1*}) \longrightarrow (\tilde{K}^2,\tilde{\Gamma}^2,\tilde{k}^2)$$

zu einem Isomorphismus

$$\check{\Psi}:(K^4,\Gamma^{1*},k^{1*}) \longrightarrow (K^3,\tilde{\Gamma}^2,\tilde{k}^2)$$

fortsetzen.Zum Beweis von Satz 2 setzen wir also

$$\Psi := \check{\Psi}|_{(K^1,..)^*} .$$

<u>Satz 3</u>

I) Sei L eine Erweiterung von $\hat{L}$, in der die Sorte von K nicht vorkommt. $T \subset L$ sei eine Theorie . Dann ist

i) Sei $(K^0,..)$ gemeinsame $L_0(\pi)$-Unterstruktur der $T^M(\pi)\cup T$ - Modelle $(K^i,..)$ $i=1,2$.

Der Restklassenkörper von K^0 sei perfekt und

$(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. $L(\Gamma^0,k^0)$.

Dann ist auch

$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L\cup L_0(\pi)(K^0,..)$.

ii) $T^M(\pi)\cup T$ ist <u>die</u> K-Modellvervollständigung von $T_A(\pi)\cup T$.

iii) $T^M(\pi)\cup T$ ist <u>die</u> K^*-Modellvervollständigung von $T_A(\pi)\cup T$.

iv) Ist T modellvollständig, so ist auch $T^M(\pi)\cup T$ modellvollständig.

v) Zu jeder Formel A aus $L_0(\pi)\cup L$,in der die K-Variablen $y_1,y_2,..$ nicht vorkommen, gibt es $L_0(\pi)$-Terme $t_1,..,t_n$, $s_1,..,s_k$, eine reine L-Formel B und Primzahlen $p_1,..,p_k$ mit

a) Es kommen in den s_j von den Variablen $y_1,y_2,..$ höchstens $y_1,..,y_{j-1}$ vor , $(j=1,..,k)$.

b) B ist vom gleichen Präfixtyp wie A . In B kommen alle neuen Relationszeichen aus L , die in A positiv (negativ) vorkommen , positiv (negativ) vor .

c) $T^M(\pi) \vdash$

$$\bigwedge_{j=1}^{k}(v(p_j) > 0 \to \operatorname{res}(y_j^{p_j}) = s_j(y_1,..,y_{j-1})) \longrightarrow$$

$$(A \leftrightarrow B(t_1(y_1,..,y_k),..,t_n))$$

vi) Jede Aussage aus $L\cup L_0(\pi)$ ist bzgl. $T_g^M(\pi)$ zu einer Aussage aus L äquivalent, die vom selben Präfixtyp ist und in der alle neuen Relationszeichen aus L, die positiv (negativ) auftraten,positiv (negativ) vorkommen.

vii) Ist T vollständig , so ist auch $T_g^M(\pi)\cup T$ vollständig.

viii) Ist T entscheidbar, so ist auch $T_g^M(\pi)\cup T$ entscheidbar.

ix) Seien $(K^i,..)$ $i=1,2$ Modelle von $T_g^M(\pi)$ T und

$(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. L . Dann ist auch

$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L\cup L_0(\pi)$.

II) Sei $\hat{T}_0^M(\pi) := T_0^M(\pi)\cup\{v(p) = \mathbb{1} \vee 0=v(p) \mid p \text{ prim}\}$ in der um die Konstante $\mathbb{1}$ erweiterterten Sprache $\hat{L}_0(\pi)$. Sei L eine Spracherweiterung von $\hat{L}$, in der die Konstante $\mathbb{1}$ die Sorte K aber nicht vorkommt. $T\subset L$ sei eine Theorie.Dann gilt:

i) Ist T vollständig, so ist auch $T\cup\hat{T}_0^M(\pi)$ vollständig.

ii) Ist T entscheidbar, so ist auch $T\cup\hat{T}_0^M(\pi)$ entscheidbar.

iii) Jede Aussage aus $L \cup \hat{L}_o(\pi)$ ist bzgl. $\hat{T}_o^M(\pi)$ zu einer Aussage aus L äquivalent, die vom selben Präfixtyp ist und in der alle neuen Relationszeichen aus L , die positiv (negativ) auftraten, positiv (negativ) vorkommen.

iv) Seien $(K^i,..)$ $i=1,2$ Modelle von $\hat{T}_o^M(\pi) \cup T$ und
$(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. L . Dann ist auch
$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L \cup \hat{L}_o(\pi)$.

<u>Beweis</u>:

i) folgt mit Hilfe von Satz II 1 aus Satz 2 - analog zum Beweis von Satz III 2 iv

ii), iii), iv) folgen wie beim Beweis von Satz III 2 sofort aus i)

v) In $T_A(\pi)$ ist für jede Primzahl p ableitbar

$$\bigvee_x v(p) > o \longrightarrow res(x^p) = y \quad .$$

Wir führen für jede Primzahl p_i eine Folge von Funktionen

$$\psi_i^j : k \longrightarrow K$$

ein, und vergrößern so $L_o(\pi)$ zu L_s . Die Theorie $T^M(\pi)$ erweitern wir durch Hinzunehmen der Axiome

$$\left\{ v(p^i) > o \longrightarrow res((\psi_i^j(y))^{p_i}) = y \;\middle|\; i,j = 1,2,.. \right\}$$

zur Theorie T_s . Wir nehmen an, daß keine der neuen Funktionen zu L gehört. T_s ist eine konservative Erweiterung von $T^M(\pi)$.

Wir behaupten zunächst, daß jede Formel A aus $L \cup L_o(\pi)$ bzgl. T_s zu einer Formel der folgenden Gestalt äquivalent ist.:

$B(t_1,..,t_n)$, wobei B eine reine L-Formel vom gleichen Präfixtyp usw. wie A ist, und die t_i L_s-Terme

sind , mit folgender Eigenschaft: Tritt ein ψ_i^j in $t_1,..,t_n$ zweimal auf, so stimmen die Argumente überein. Eine solche Menge von Termen wollen wir normal nennen.

Zuerst zeigen wir, daß hieraus v) folgt:

Hilfssatz: (Setze σ ='o=o')

Seien A,B,C $L \cup L_o(\pi)$ - Formeln, $t_1,..,t_n$ eine normale Menge von L_s-Termen, sodaß $T_s \vdash C \rightarrow (A \leftrightarrow B)$. Dann gibt es $L_o(\pi)$ - Terme $s_1,..,s_k$, $r_1,..,r_n$ und Primzahlen $p_1,..,p_k$, sodaß

$$T_s \vdash C \rightarrow \Big[({}_{j=1}^{k} (v(p_j) > o \rightarrow res(y_j^{p_j}) = s_j(y_1,..,y_{j-1})) \longrightarrow$$
$$(B(t_1,..,t_n) \leftrightarrow B(r_1,..,r_n)) \Big].$$

Beweis durch Induktion nach der Anzahl der ψ_j^i , die in den $t_1,..,t_n$ vorkommen. Wenn keine der Funktionen ψ_j^i in den t_i vorkommt, sind die t_i $L_o(\pi)$-Terme, und es ist nichts mehr zu zeigen.

Sei nun o.E. ψ_1^1 so in den t_i enthalten, daß ψ_1^1 im Argument keine der Funktionen ψ_j^i mehr enthält. Es gibt also eine Menge von Termen aus Ls , $f_1,..,f_n$, in denen ψ_1^1 nicht mehr vorkommt und einen $L_o(\pi)$-Term s_1, mit $t_i = f_i(\psi_1^1(s_1))$ für $i=1,..,n$.

Weil nun $B(t_1,..)$ bzgl. $T_s \cup C$ einer Formel ohne ψ_1^1 äquivalent ist, und $T_s \cup C$ von ψ_1^1 nur

$$v(p_1) > o \rightarrow res(\psi_1^1(x)^{p_1}) = x$$

fordert, gilt,

$$T_s \vdash C \rightarrow (v(p_1) > o \rightarrow res(y_1^{p_1}) = s_1) \longrightarrow$$
$$(A \leftrightarrow B(f_1(y_1),..,f_n(y_1))) \quad .$$

Nach Induktionsvoraussetzung (setze $\sigma' = C \wedge (v(p_1) > o \ldots)$) gibt es o.E. Terme $s_2,\ldots,s_k$, $r_1,\ldots,r_n$ und Primzahlen $p_2,\ldots,p_k$ mit

$$T_s \vdash C \to (v(p_1) > o \ldots) \to \bigwedge_{j=2}^{k} (v(p_j) > o \ldots) \longrightarrow$$
$$(B(f_1(y_1),\ldots) \leftrightarrow B(r_1,\ldots,r_n)) \quad \text{also auch}$$
$$T_s \vdash C \to (\bigwedge_{j=1}^{k} v(p_j) > o \ \ldots) \longrightarrow (B(t_1,\ldots) \leftrightarrow B(r_1,\ldots)) .$$

Und nun zum Beweis der eingangs aufgestellten Behauptung.

Wir führen den Beweis durch Induktion über die Zahl der Quantorenwechsel in A .

<u>1.Fall</u> Sei A quantorfrei und G die Menge der Formeln der Form $B(t_1,\ldots,t_n)$,wobei $t_1,\ldots,t_n$ eine normale Menge von L_s-Termen und B eine quantorfreie Formel ist,in der alle neuen Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) vorkommen , positiv (negativ) vorkommen.

Wir wollen Satz II 4 anwenden.Sei also k die Zahl der freien Variablen von A , (K^i,Γ^i,k^i) $i=1,2$ Modelle von T_s und $a_1^i,\ldots,a_k^i$ aus (K^i,Γ^i,k^i) derart,daß für alle $C(x_1,\ldots,x_n)$ aus G

$$(K^1,\ldots) \Vdash C(a_1^1,\ldots) \to (K^2,\ldots) \Vdash C(a_1^2,\ldots) .$$

Wir zeigen zunächst den Hilfssatz:

Hilfssatz:

Für jedes k gibt es eine normale Menge T von L_s-Termen derart,daß für jedes T_s-Modell (K,Γ,k) und $a_1,\ldots,a_k \in (K,\ldots)$

$$\{t(a_1,\ldots,a_k) \mid t(x_1,\ldots,x_k) \in T\}$$

ein schnittabgeschlossener Unterkörper von $(K,\ldots)$ mit perfekten Restklassenkörper ist ,der $a_1,\ldots,a_k$ enthält.

Beweis:

Sei $\varphi_j^i := \Psi_{m_j}^{n_i,j}$ eine Umindizierung der Funktionen Ψ_t^r ,sodaß es für jedes n und r ein $j \geq n$ mit $m_j = r$ gibt.Wir definieren rekursiv normale Mengen T_i von L_s-Termen vermöge

$T_o := \{x_1,\ldots,x\}$

Sei $t_1,t_2,\ldots$ eine Aufzählung von T_i .Setze

$$T_{i+1} := \{t(\varphi_i^1(t_1),\ldots,\varphi_i^r(t_r),t_1,\ldots,t_s) \mid t \ L_o(\pi)\text{-Term}, r,s=o,1\ldots\}$$

Offenbar ist $T_1 \subset T_2 \subset \ldots$,und

$T := \bigcup_{i=o}^{\infty} T_i$ ist normal.

Sei $(K^o,\Gamma^o,k^o) := \{t(a_1,\ldots,a_k) \mid t(x_1,\ldots) \in T\}$.

Nach Konstruktion von T ist klar,daß $(K^o,\ldots)$ eine $L_o(\pi)$-Unterstruktur von $(K,\ldots)$ ist.Wir zeigen,daß k^o der volle,perfekte Restklassenkörper von K^o ist, wenn wir - falls p_s die Charakteristik von k^o ist - zu jedem Element $x \in k^o$ ein $y \in K^o$ mit $res(y^{p_s})=x$ finden.

Sei aber $x = t(a_1,\ldots)$ mit $t \in T_i$,und sei $j \geq i$ mit $m_j = s$. Setze dann,wenn r die Nummer von t in der Aufzählung von T_j ist ,

$y := \varphi_j^r(t(a_1,\ldots))$ .Es ist aber $\varphi_j^r(t(x_1,\ldots)) \in T_{s+1}$.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Sei also T wie im Hilfssatz und seien $(\check{K}^i,\check{\Gamma}^i,\check{k}^i)$ die wie im Hilfssatz von T gelieferten schnittabgeschlossenen Unterkörper mit perfekten Restklassenkörpern.Nach Wahl von G haben wir einen $L_o(\pi)$ -Isomorphismus

$$\check{\Psi} : (\check{K}^1,\ldots) \longrightarrow (\check{K}^2,\ldots) \qquad \text{vermöge}$$
$$\check{\Psi}(t(a_1^1,\ldots)) := t(a_1^2,\ldots) \qquad \text{für } t \in T .$$

Darüberhinaus bekommen wir,falls P bzw. N die Menge der neuen Relationszeichen aus L ist,die in A positiv bzw. negativ vorkommen,und L′ aus L durch Streichen der Zeichen aus $P \cup N$ entsteht,einen (L′,P,N)-Isomorphismus

$\hat{\varphi} : (\hat{\Gamma}^1, \hat{k}^1) \to (\hat{\Gamma}^2, \hat{k}^2)$

der von $(\check{\Gamma}^i, \check{k}^i)$ in (Γ^i, k^i) $i=1,2$ erzeugten L-Strukturen, der auf $(\check{\Gamma}^1, \check{k}^1)$ mit $\check{\psi}$ übereinstimmt.

$\tilde{k}^i$, $i=1,2$ seien die perfekten Hüllen von $\hat{k}^i$ in k^i.
Wir können dann $\hat{\varphi}$ zu einem Isomorphismus

$\tilde{\varphi} : (\hat{\Gamma}^1, \tilde{k}^1) \to (\hat{\Gamma}^2, \tilde{k}^2)$ fortsetzen.

Wir wenden Satz I 9 und Satz IV 1 nacheinander an und erhalten ein Ultralimessystem "$*$", Zwischenkörper

$(\check{K}^i, \check{\Gamma}^i, \check{k}^i) \subset (\hat{K}^i, \hat{\Gamma}^{i*}, \tilde{k}^{i*}) \subset (K^i, \Gamma^i, k^i)^*$

und einen Isomorphismus über

$\hat{\psi} : (\hat{K}^1, \hat{\Gamma}^{1*}, \tilde{k}^{1*}) \to (\hat{K}^2, \hat{\Gamma}^{2*}, \tilde{k}^{2*})$ mit

$\hat{\psi} \mid (\hat{\Gamma}^{1*}, \tilde{k}^{1*}) = \tilde{\varphi}^*$.

$\hat{\psi}$ ist offenbar auf der von den a^1_i erzeugten $L \cup L_o(\pi)$-Struktur ein $(L' \cup L_o(\pi), P, N)$-Isomorphismus. Also folgt

$(K^1,..) \Vdash A(a^1_1,..) \to (\hat{K}^1,..) \Vdash A(a^1_1,..) \to$ (Satz II lo)

$(\hat{K}^2,..) \Vdash A(a^2_1,..) \to (\hat{K}^2,..) \Vdash A(a^2_1,..)$.

Nach Satz II 4 ist A zu einer Formel aus G äquivalent.

2.Fall

Sei L aus $\hat{L}$ durch Hinzunahme von R entstanden, seien $t_1,..,t_n$ $L_o(\pi)$-Terme und sei

$A = \bigvee_{x_1} .. \bigvee_{x_m} R(t_1,..,t_n)$.

G sei die Menge der Formeln der Form $B(s_1,..,s_h)$, wobei $s_1,..,s_h$ eine normale Menge von L_s-Termen und B eine Existenzformel aus L ist, in der R positiv vor-

kommt. Wir wenden Satz II 4 an, um zu zeigen, daß A bzgl. T_s zu einer Formel aus G äquivalent ist.
Sei also k die Zahl der freien Variablen von A, (K^i, Γ^i, k^i) Modelle von T_s, $a^i_1,..,a^i_k \in (K^i,..)$ $i=1,2$ derart, daß für jedes C aus G

$(K^1,..) \Vdash C(a^1_1,..) \to (K^2,..) \Vdash C(a^2_1,..)$.

Sei T wie im letzten Hilfsatz. Wie im ersten Fall erhalten wir vermöge

$\check{\psi}(t(a^1_1,..)) := t(a^2_1,..)$ für $t \in T$

einen $L_o(\pi)$-Isomorphismus, der von T erzeugten schnittabgeschlossenen Unterkörper

$a^i_1,..,a^i_k \in (\check{K}^i, \check{\Gamma}^i, \check{k}^i) \subset (K^i, \Gamma^i, k^i)$ mit

perfekten Restklassenkörpern k^i, $i=1,2$.
Aus der Wahl von G folgt, daß für jede L-Existenzformel C, in der R positiv vorkommt, und alle $c_1,..,c_h$ aus $(\check{\Gamma}^1, \check{k}^1)$

$(\Gamma^1, k^1) \Vdash C(c_1,..) \to (\Gamma^2, k^2) \Vdash C(\check{\psi}(c_1),..)$

Mit Satz II lo finden wir eine Ultrapotenz "$*$" und eine $(\hat{L}, R, \emptyset)$-isomorphe Einbettung

$\varphi : (\Gamma^1, k^1) \to (\Gamma^2, k^2)^*$,

die auf $(\check{\Gamma}^1, \check{k}^1)$ mit $\check{\psi}$ übereinstimmt.
Da die Restklassenkörper k^i $i=1,2$ perfekt sind, findet Satz 2 Anwendung, und wir erhalten ein Ultralimessystem "$+$" und eine $L_o(\pi)$-isomorphe Einbettung

$\psi : (K^1,..)^+ \to (K^2,..)^{*+}$,

die $\check{\psi}$ fortsetzt und auf $(\Gamma^1, k^1)^+$ mit φ^+ übereinstimmt.
Da φ^+ wieder eine $(\hat{L}, R, \emptyset)$-isomorphe Einbettung ist, ist auch ψ $(\hat{L} \cup L_o(\pi), R, \emptyset)$-isomorphe Einbettung.
Wenn also
$A(a^1_1,..)$ in $(K^1,..)$ gilt, gilt $A(a^1_1,..)$ auch in $(K^1,..)^+$, und wegen Satz II lo gilt dann $A(a^2_1,..)$

in $(K^2,..)^{*+}$ und daher in $(K^2,..)$.
Damit sind die Bedingungen von Satz II 4 verifiziert.

3.Fall

A ist von der Form $\bigvee_{x_1}..\bigvee_{x_m} C$, wobei C eine A_n -Formel aus $L \cup L_o(\pi)$ ist.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine reine L-Formel vom Präfixtyp A_n B , in der jedes Relationszeichen aus L , das nicht in L liegt und in C - d.h. in A - positiv (negativ) vorkommt , positiv (negativ) vorkommt, $L_o(\pi)$-Terme $t_1,..,t_n$,$s_1,..,s_k$ und Primzahlen $p_1,..,p_k$,sodaß ,wenn man setzt

$$D:=[\bigwedge_{j=1}^{k} v(p_k)>o \longrightarrow x_k^{p_k} = s_k] \wedge B(z_1,..,z_n)$$

gilt

$$T_s \vdash C \leftrightarrow \bigvee_{y_1}..\bigvee_{y_k} D(res(y_1),..,res(y_k),t_1,..,t_n)$$

Also ist

$$T_s \vdash A \leftrightarrow \bigvee_{x_1}..\bigvee_{x_m}\bigvee_{y_1}..\bigvee_{y_k} D(res(y_1),..,t_n)$$

Wir führen nun für D ein neues Zeichen R ein und erhalten L_s-Terme $f_1,..,f_h$ und eine reine L-Formel nach dem 2. Fall vom Präfixtyp E_1 , in der das einzige neue Relationszeichen R positiv auftritt , F mit $f_1,..$ normal,

$$T_s \vdash \bigvee_{x_1}..\bigvee_{x_m}\bigvee_{y_1}..\bigvee_{y_k} R(res(y_1),..,t_n) \leftrightarrow F(f_1,..,f_h) .$$

Wenn man in F R durch D ersetzt ,erhält man das gewünschte Resultat.

(Beachte : $v(p_k)>o$ ist äquivalent zur L-Aussage $p_k \cdot 1_k = o_k$)

4.Fall

A ist vom Präfixtyp A_{n+1} .

Dann ist $\neg A$ vom Präfixtyp E_{n+1} .Aus dem dritten Fall erhalten wir eine reine L-Formel C, in der alle neuen Relationszeichen aus L,die in A positiv (negativ) , negativ (positiv) vorkommen, und eine normale Menge $f_1,..$ von L_s-Termen , sodaß

$$T_S \vdash \neg A \leftrightarrow C(f_1,..) .$$

Dann ist also wie gewünscht

$$T_s \vdash A \vdash \neg C(f_1,..) .$$

Damit ist v) bewiesen.

vi) Seien $p_1,..,p_k$ Primzahlen und $s_1,..,s_k$ $L_o(\pi)$-Terme, sodaß s_i höchstens die freien Variablen $y_1,..,y_{i-1}$ enthält. Sei $C(y_1,..,y_k)$ Abkürzung für

$$\bigwedge_{j=1}^{k} (v(p_j)>o \rightarrow res(y_j^{p_j})=s_j) .$$

Dann gibt es konstante $L_o(\pi)$-Terme r_j^i $i=1,..,n$, $j=1,..,k$, sodaß

$$T_g^M(\pi) \vdash \bigvee_{i=1}^{n} (C(r_1^i,..,r_k^i)) .$$

Denn andernfalls wäre

$$T_g^M(\pi) \cup \{\neg C(t_1,..,t_k) \mid t_1,..,t_k \text{ konstante } L_o(\pi)\text{-Terme}\}$$

widerspruchsfrei.Das widerspricht der Tatsache , daß in jedem Modell von $T_g^M(\pi)$ die von den konstanten Termen erzeugte Unterstruktur ein Unterkörper mit perfektem Restklassenkörper ist.
Ebenso schließt man, daß es zu jedem konstanten (Γ,k)-Term aus $L_o(\pi)$ t konstante L-Terme $t_1,..,t_m$ gibt,mit

$$T_g^M(\pi) \vdash t=t_1 \vee t=t_2 \vee .. \vee t=t_m .$$

Wertgruppe und Restklassenkörper der 'Primkörper' der Modelle von $T_g^M(\pi)$ werden nämlich von den konstanten (Γ,k)-Termen erzeugt.

Sei also A eine Aussage aus $L \cup L_o(\pi)$. Wir wenden v) an und erhalten

$$T_g^M(\pi) \vdash C(y_1,..) \rightarrow (A \leftrightarrow B(t_1(y_1,..),..)) .$$

Wenn wir die r_j^i wie oben wählen,erhalten wir

$$T_g^M(\pi) \vdash A \leftrightarrow (\bigvee_{i=1}^{n} C(r_1^i,..)\wedge B(t_1(r_1^i,..),..)) .$$

Die rechte Seite ist von der Form

$D(k_1,..,k_r)$, wobei D eine reine L-Formel vom gleichen Präfixtyp wie A usw. ist und die k_i konstante (Γ,k)-Terme aus $L_o(\Pi)$ sind . Wir wenden die eben gemachte Bemerkung an und erhalten konstante $\hat{L}$-Terme

t^i_j , $i=1,..,r$, $j=1,..,n$ mit

$$T^M_g(\Pi) \vdash \bigvee_{j=1}^{n} k_i = t^i_j \quad \text{für} \quad i=1,..,r .$$

Also ist

$$T^M_g(\Pi) \vdash \bigvee_{\varphi:\{1,..,r\}\to\{1,..,n\}} D(t^1_{\varphi(1)},..,t^r_{\varphi(r)}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{r} k_i = t^i_{\varphi(i)}$$

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, daß jede Aussage $k_i=t^i_j$ einer quantorfreien $\hat{L}$-Aussage äquivalent ist. Das ist aber nach Satz II 4 klar, weil zwei Modelle von $T^M_g(\Pi)$, in denen dieselben quantorfreien L-Aussagen gelten, isomorphe 'Primkörper' haben (es kommt ja nur auf die Charakteristik des Restklassenkörpers an!) .

ix) folgt sofort aus vi)

vii) folgt sofort aus ix)

viii) folgt - wie beim Beweis von Satz III 4 - aus vi)

II iii) Der Beweis geht wie der Beweis von I vi)

iv) folgt sofort aus iii)

i) folgt sofort aus iv)

ii) folgt - wie beim Beweis von Satz III 4 - aus iii)

Definition:

Seien F,K,L,M Körper .

i) Sei $F \subset K$. Dann heißt K separabel über F , wenn jeder über F endlich erzeugte Zwischenkörper über F separabel erzeugt ist

ii) Sei $F \subset L \subset M$ und $F \subset K \subset M$. Dann heißen L und K über F (in M) linear disjunkt, wenn für alle $a_1,..,a_n$ aus L , für die es $e_1,..,e_n$ - nicht alle $=o$ - mit $a_1e_1+..+a_ne_n = o$ aus K gibt , $f_1,..,f_n$ - nicht alle $=o$ - aus F existieren mit $f_1a_1+..+f_na_n = o$.

Bemerkung: (s.[9])

i) Lineare Disjunktheit ist eine symmetrische Relation.

ii) K ist separabel über F genau dann, wenn die Charakteristik von F null ist oder - wenn p die Charakteristik von F ist - wenn K und $F^{\frac{1}{p}}$ über F linear disjunkt sind .

Wir brauchen den

Satz 4

i) Sei G - in der Körpersprache - die Menge der Formeln

$$\bigwedge_{y_1}..\bigwedge_{y_n} x_1 \cdot y_1^p + .. + x_n \cdot y_n^p \neq 1 \quad p=o$$

für alle n und prime p .Dann ist für Körper $F \subset K$ K separabel über F genau dann, wenn K G-Erweiterung von F ist .

ii) Seien $F \subset E \subset K$ Körper , K über F separabel und E algebraisch über F . Dann ist K separabel über E .

iii) Seien $E \subset L \subset K$, $E \subset F \subset K$ Körper und $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter auf I .Dann gilt

a) $E^I/_{\mathfrak{U}}$ und F über E in $F^I/_{\mathfrak{U}}$ linear disjunkt.

b) Ist F über E separabel,dann ist $F^I/_{\mathfrak{U}}$ über

$E^I/_U \cdot F$ separabel .

c) Sind L und F über E linear disjunkt, so sind in $K^I/_U$ $L^I/_U$ und $F^I/_U \cdot K$ über $E^I/_U \cdot L$ linear disjunkt.

Beweis:

i) "$\rightarrow$" : Seien K und $F^{\frac{1}{p}}$ über F linear disjunkt, und seien $a_1,..,a_n$ aus F . Wenn p die Charakteristik von F ist, müssen wir zeigen:

$$F \Vdash \bigwedge_{y_1} .. \, a_1\cdot y_1^p+..+a_n\cdot y_n^p \neq 1 \longrightarrow K \Vdash \bigwedge_{y_1} .. \, a_1 y_1^p+..+a_n y_n^p \neq 1 .$$

Setze $b_i := a_i^{p^{-1}}$. Dann folgt aus der linken Seite

$$\bigwedge_{y_1} .. \bigwedge_{y_n \in F} b_1y_1+..+b_ny_n \neq 1 .$$

Sei o.E. $b_1,..,b_k$ ein maximales über F linear unabhängiges Teilsystem. Dann folgt ,daß auch $1,b_1,..,b_k$ über F linear unabhängig sind. Wegen der linearen Disjunktheit ist also auch

$$\bigwedge_{y_1} .. \bigwedge_{y_n \in K} b_1y_1+..+b_ky_1 \neq 1 .$$

Seien $f_{i,j}$ aus F, sodaß $b_i = \sum_{j=1}^{k} f_{i,j}b_j$ für $i > k$.

Wenn es nun $y_1,..,y_n$ aus K mit

$b_1y_1+..+b_ny_n = 1$ geben würde, wäre

$$b_1(y_1+f_{k+1,1}y_{k+1}+..+f_{n,1}y_n)+..+b_k(y_k+f_{k+1,k}y_{k+1}+..) = 1$$

was wegen $y_i+f_{k+1,i}y_{k+1}+..+f_{n,i}y_n \in K$ nicht geht.

Also ist

$$\bigwedge_{y_1} .. \bigwedge_{y_n \in K} b_1y_1+..+b_ny_n \neq 1 \qquad \text{d.h.}$$

$$K \Vdash \bigwedge_{y_1} .. \bigwedge_{y_n} a_1y_1^p + .. + a_ny_n^p \neq 1 ,$$

weil $x \mapsto x^p$ ein Automorphismus des gemeinsamen Oberkörpers ist.

"$\leftarrow$" :Seien K und $F^{p^{-1}}$ über F nicht linear disjunkt. Dann gibt es $b_1,..,b_n$,die über F linear unabhängig sind, aus $F^{p^{-1}}$ und $y_1,..,y_n$ – o.E. $y_1 \neq o$ – aus K mit $b_1y_1+..+b_ny_n = o$. Also ist auch

$$-(b_2b_1^{-1})(y_2y_1^{-1}) + .. + -(b_nb_1^{-1})(y_ny_1^{-1}) = 1 .$$

Da $x \mapsto x^p$ ein Automorphismus des gemeinsamen Oberkörpers ist,folgt – wenn wir annehmen,daß K G-Erweiterung F ist – die Existenz von $z_1,..,z_n$ aus F mit

$$(b_2b_1^{-1})z_1 + .. +(b_nb_1^{-1})z_n = 1 .$$

Das kann aber nicht sein , weil mit $b_1,..,b_n$ auch $1=b_1b_1^{-1},b_2b_1^{-1},..,b_nb_1^{-1}$ über F linear unabhängig sind.

K ist also nicht G-Erweiterung von F .

ii) Wir müssen zeigen,daß jeder endlich erzeugt Zwischenkörper über E eine separierende Transzendenzbasis besitzt. Sei also $L = E(x_1,..,x_n) \subset K$. Nach Voraussetzung hat dann $F(x_1,..,x_n)$ eine separierende Transzendenzbasis über F . Sei also o.E. $x_1,..,x_k$ algebraisch unabhängig über F und $x_{k+1},..,x_n$ separabel algebraisch über $F(x_1..,x_k)$.

Da E algebraisch über F ist und $F(x_1,..,x_k)$ rein transzendent über F, sind E und $F(x_1,..,x_k)$ linear disjunkt.Also sind $x_1,..,x_k$ auch über E algebraisch unabhängig.Da die $x_{k+1},..,x_n$ erst recht über $E(x_1,..,x_k)$ separabel algebraisch sind , ist also $x_1,..,x_k$ separierende Transzendenzbasis von L über K .

iii)

a) Seien $(a_i^1)^*_{i \in I},..,(a_i^n)^*_{i \in I} \in E^I/_U$ Äquivalenzklassen von Folgen $(a_i^j)_{i\in I} : I \longrightarrow E$.

Weiter seien $b_1,..,b_n \in F$ – o.E. $b_1 \neq o$ – mit

$\sum_{j=1}^{n} b_j(a_i^j)^*_{i\in I} = o$. Also ist

$U_o := \{ i \mid \sum_{j=1}^{n} b_j a_i^j = o \} \in \mathfrak{U}$.

Sei nun

$M := \{ (c_1,..,c_n) \in E^n \mid \sum_{j=1}^{n} b_j c_j = o \}$.

M ist offenbar – wegen $b_1 \neq o$ – echter E-Untervektorraum von E^n . Also gibt es eine Hyperebene

$H = \{ (d_1,..,d_n) \in E^n \mid \sum_{j=1}^{n} f_j d_j = o \}$, $(f_1,..) \in E^n \setminus \{0\}$,

in der M enthalten ist. Also folgt für alle $i \in U_o$

$\sum_{j=1}^{n} f_j a_i^j = o$ d.h. $\sum_{j=1}^{n} f_j (a_i^j)^*_{i \in I} = o$

c) Seien $(a_i^1)^*_{i\in I}, (a_i^2)^*_{i\in I}, ..., (a_i^n)^*_{i\in I} \in L^I/\mathfrak{U}$ und

$x_1,..,x_n \in K\cdot F^I/\mathfrak{U}$ – nicht alle o – mit

$\sum_{j=1}^{n} x_j (a_i^j)^*_{i\in I} = o$.

O.E. kann man die x_i in der Form

$x_i = \sum_{j=1}^{r} k_j f_{ji}$ mit $k_j \in K$ und $f_{ji} \in F^I/\mathfrak{U}$ annehmen.

Sei nun $d_1,..,d_s$ eine Basis des $L\cdot F$ – Vektorraums $L\cdot F + \langle k_1,..,k_r \rangle$ und

$k_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ij} d_j$ mit $c_{ij} \in L\cdot F$.

Seien $l_1,..,l_t$ E-linear unabhängig aus L, sodaß wir schreiben können:

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} l_k e_{ijk}$ mit $e_{ijk} \in F$.

Also ist

$x_j = \sum_{i,m,k=1}^{r,s,t} d_m l_k e_{imk} f_{ij} := \sum_{m,k=1}^{s,t} d_m l_k g_{mkj}$

mit $g_{mkj} \in F^I/\mathfrak{U}$.

Sei

$g_{mkj} =: (g^i_{mkj})^*_{i\,I}$. Dann ist

$U_o := \{ i \in I \mid \sum_{j,m,k=1}^{n,s,t} d_m l_k g^i_{mkj} a_i^j = o \} \in \mathfrak{U}$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $g_{111} \neq o$ und für alle $i \in U_o$ $g^i_{111} \neq o$ an.

Da die $l_k g^i_{mkj} a_i^j$ aus $L\cdot F$ sind, folgt wegen der Wahl der d_m für alle $i \in U_o$ und alle m

$\sum_{j,k=1}^{n,t} l_k a_i^j \cdot g^i_{mkj} = o$. Betrachte m=1 .

Wegen der linearen Disjunktheit von L und F über E gibt es also für jedes $i \in U_o$ Elemente $e^i_{k,j} \in E$ – nicht alle o – mit

$\sum_{j,k=1}^{n,t} l_k a_i^j \cdot e^i_{kj} = o$.

Da $\mathfrak{U}$ Ultrafilter ist, gibt es ein $V \subset U_o$, $V \in \mathfrak{U}$ und k_o , j_o mit $e^i_{k_o j_o} \neq o$ für alle $i \in V$.

Wegen der Wahl der l_i ist also für alle $i \in V$

$\sum_{k=1}^{t} l_k e^i_{kj_o} \neq o$.

Setzt man

$y_j := (\sum_{k=1}^{t} l_k e^i_{kj})^*_{i \in I} \in L\cdot E^I/\mathfrak{U}$,

so folgt wie gewünscht $y_{j_o} \neq o$ und

$\sum_{j=1}^{n} y_j (a_i^j)_{i\,I} = o$.

b) Man sieht leicht, daß allgemein $(K^{p^{-1}})^I/\mathfrak{U} = (K^I/\mathfrak{U})^{p^{-1}}$.

Setzt man nun in c)

$L := E^{p^{-1}}$ und $K := F^{p^{-1}}$

so folgt, daß

$F^I/\mathfrak{U}$ und $F^{p^{-1}} \cdot (E^{p^{-1}})^I/\mathfrak{U}$ über $F\cdot E^I/\mathfrak{U}$ linear disjunkt sind . Wegen

$$F^{p^{-1}} \cdot (E^{p^{-1}})^I/_{\mathfrak{U}} = F^{p^{-1}} (E^I/_{\mathfrak{U}})^{p^{-1}} = (F \cdot E^I/_{\mathfrak{U}})^{p^{-1}}$$

folgt daraus die Behauptung .

Definition:

Sei M ein Relationalsystem , D ein Ultrafilter auf einer Menge I und G ein Filter auf $I \times I$ .Dann nennen wir (I,D,G) ein limit-ultrapower-System - l.u.S. - und bezeichnen mit $M^I/_D|G$ die " limit ultrapower " von M vermöge (I,D,G) . (siehe [7]) .

Ist $u = (I,D,G)$ ein l.u.S. , kürzen wir $M^I/_D|G$ mit M^u ab .Ist f eine Funktion auf M , so sei f^u die entsprechende Funktion in M^u .

Wir zitieren folgendes Resultat aus [7] :

i) Sei u ein l.u.S. , dann ist M^u - vermöge der kanonischen Einbettung von M in M^u - elementare Erweiterung von M .

ii) Sei $M \subset N$ eine Erweiterung von Relationalstrukturen . Dann ist N genau dann zu einer limit ultrapower von M (über M) isomorph , wenn sich zu jeder Vergrößerung M^* von M durch neue Relationen und Funktionen eine entsprechende Vergrößerung N^* von N finden läßt,die elementare Erweiterung von M^* ist .

Wir beweisen nun ein Analogon zu Satz 1 ohne die Voraussetzung von perfekten Restklassenkörpern.

Satz 5

Seien $(K^o,\Gamma^o,k^o) \subset (K^i,\Gamma^i,k^i)$ i=1,2 bewertete Körper . $(K^1,..)$ und $(K^2,..)$ seien henselsch, k^3 sei ein über k^o separabler Zwischenkörper $k^o \subset k^3 \subset k^1$. Weiter sei

$\varphi : k^3 \longrightarrow k^2$

eine isomorphe Einbettung über k^o .

Dann gibt es ein l.u.S. "$*$" , henselsche Zwischenkörper

$$(K^o,..)^* \subset (\hat{K}^i,\hat{\Gamma}^i,\hat{k}^i) \subset (K^i,..)^* \qquad i=1,2$$

und einen $(K^o,..)^*$-Isomorphismus

$$\psi : (\hat{K}^1,..) \longrightarrow (\hat{K}^2,..) \qquad \text{mit}$$

$$\hat{\Gamma}^1 = \hat{\Gamma}^2 = \Gamma^{o*} , \quad \hat{k}^1 = k^{3*} \quad \text{und} \quad \psi_{|\hat{k}^1} = \varphi^* .$$

Beweis:

Zum Beweis zuerst den

Hilfssatz 1 :

Seien $(K^1,\Gamma^1,k^1) \subset (K^2,\Gamma^2,k^2)$ bewertete Körper . $(K^2,..)$ sei henselsch , $k^1 \subset k \subset k^2$ ein Zwischenkörper, der über k^1 separabel ist . k sei höchstens abzählbar.

Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathfrak{U}$ auf I und einen henselschen Zwischenkörper

$$(K^1,..)^I/_{\mathfrak{U}} \subset (\hat{K}^1,\hat{\Gamma}^1,\hat{k}^1) \subset (K^2,..)^I/_{\mathfrak{U}} \qquad \text{mit}$$

$k \subset \hat{k} \subset k^I/_{\mathfrak{U}}$, $\hat{\Gamma}^1 = \Gamma^{1\,I}/_{\mathfrak{U}}$ und

$k^I/_{\mathfrak{U}}$ separabel über $\hat{k}$.

Beweis:

Wir zeigen zunächst,daß eine Folge von Transzendenzbasen E_i von k über k^1 existiert, mit folgenden Eigenschaften:

i) Jedes Element aus E_n ist separabel algebraisch über $k^1(E_{n+1})$.

ii) Für jedes Element $x \in k$ gibt es ein n ,sodaß x separabel algebraisch über $k^1(E_n)$ ist .

iii) Aus $x \in E_i \setminus E_{i+1}$ folgt $x \notin E_j$ für alle $j > i$.

Denn wähle als E_o irgend eine Transzendenzbasis von k über k^1. Sei $x_1, x_2, ..$ eine Aufzählung von $k \setminus E_o$, und seien $E_o, .., E_{n-1}$ bereits so konstruiert, daß

i) erfüllt ist,

für alle $j < n$ x_j separabel algebraisch über $k^1(E_j)$ ist

und für alle $j < n$ $E_j \subset E_{j-1} \cup \{x_j\}$.

Wenn nun x_n separabel algebraisch über $k^1(E_{n-1})$ ist, setzen wir $E_n := E_{n-1}$.

Sei x_n inseparabel algebraisch über $k^1(E_{n-1})$ und L eine endliche Teilmenge von E_{n-1}, sodaß x_n algebraisch über $k^1(L)$ ist. Sei $L = \{y_1, .., y_k\}$. Da k über k^1 separabel ist, können wir annehmen, daß y_k separabel algebraisch über $k^1(y_1, .., y_{k-1}, x_n)$ ist und $y_1, .., y_{k-1}, x_n$ über k^1 algebraisch unabhängig sind.

Wir setzen $E_n := E_{n-1} \setminus L \, \{ y_1, .., y_{k-1}, x_n \}$.

Zunächst ist i) erfüllt, denn y_k ist separabel algebraisch über E_n .

Es bleibt zu zeigen, daß E_n Transzendenzbasis ist. Da E_{n-1} algebraisch über $k^1(E_n)$ ist, ist klar, daß E_n algebraisches Erzeugendensystem von k über k^1 ist. Sei andererseits M eine endliche, über k^1 algebraisch ab- Teilmenge von E_n. Wir können annehmen, daß

$$\{ y_1, .., y_{k-1}, x_n \} \subset M \quad .$$

Dann ist $M \cup L \setminus \{x_n\}$ algebraisch abhängig über k^1 von M. Da $\operatorname{card} M = \operatorname{card} (M \cup L \setminus \{x_n\})$, würde also die algebraische Abhängigkeit von $M \cup L \setminus \{x_n\}$ über k^1 folgen. $M \cup L \setminus \{x_n\}$ ist aber Teilmenge von E_{n-1} .

Aus $E_j \subset E_{j-1} \cup \{x_j\}$ folgt nun leicht die Eigenschaft iii). Damit ist die Existenz der E_i mit den Eigenschaften i) - iii) nachgewiesen.

Sei nun k_n der separable algebraische Abschluß von $k^1(E_n)$ in k. Dann ist für alle $i \leq n$ $E_i \subset k_n$.

Für jedes $x \in k$ sei $n(x)$ das kleinste n, sodaß x separabel algebraisch über $k^1(E_n)$ - d.h. $x \in k_n$ - ist.

Wie beim Beweis von Satz 1 findet man für jedes $x \in k$ Elemente $e_1(x), .., e_{k(x)}(x)$ aus $E_{n(x)}$ und ein irreduzibles Polynom

$$p_x \in k^1[X_1, .., X_{k(x)+1}] \quad \text{, sodaß}$$

$$p_x(e_1(x), .., e_{k(x)}(x), x) = o \quad .$$

Für $x \in E_i \setminus E_{i+1}$

- i ist durch x eindeutig bestimmt ! -

finden wir Elemente $d_1(x), .., d_{l(x)}(x)$ aus E_{i+1} und ein irreduzibles Polynom

$$r_x \in k^1[X_1, .., X_{l(x)+1}] \quad \text{mit}$$

$$r_x(d_1(x), .., d_{l(x)}(x), x) = o \quad .$$

Nach Satz I 8 existieren henselsche Körper (K_n, Γ^1, k_n) $(K^1, ..) \subset (K_n, ..) \subset (K^2, ..)$.

Sei f eine beliebige Abbildung

$$f : k^1 \longrightarrow K^1 \quad \text{mit} \quad res^1 \circ f = id_{k^1} \quad .$$

Wir definieren dann für jedes n eine Abbildung

$$f_n : k_n \longrightarrow K_n \quad \text{mit} \quad res^2 \circ f_n = id_{k_n}$$

wie folgt.: Setze $f_n(x)$

a) beliebig mit $res^2(f(x)) = x$, falls $x \in E_n$

b) $= y$, sodaß $res^2(y) = x$ und

$$f(r_x)(f_n(d_1(x)), .., f_n(d_{l(x)}(x)), y) = o \quad ,$$

falls $x \in E_i \setminus E_{i+1}$, $i < n$.

c) $= y$, sodaß $res^2(y) = x$ und

$$f(p_x)(f_n(e_1(x)),\ldots,f_n(e_{k(x)}(x)),y) = o \quad ,$$

falls $x \in k_n \setminus \bigcup_{i=o}^{n} E_i$.

Die Möglichkeit einer solchen Definition folgt aus der Henseleigenschaft der K_n und der Separabilität der Polynome

$f(p_x)(f_n(e_1(x)),\ldots,X)$ bzw. $f(r_x)(f_n(d_1(x)),\ldots,X)$

wie beim Beweis von Satz 1 .

Wir setzen nun $I := \mathbb{N}$ und wählen für $\mathbb{U}$ einen Nichthauptultrafilter auf I .

Sei weiter

$$\prod_{i\in I} f_i/_{\mathbb{U}} =: \check{f} : \prod_{i\in I} k_i/_{\mathbb{U}} \longrightarrow K^{2\,I}/_{\mathbb{U}} \quad .$$

Aus $\bigcup_{n=o}^{\infty} k_n = k$ folgt leicht $\prod_{i\in I} k_i/_{\mathbb{U}} \supset k$.

Setze dann

$\tilde{K} := K^{1\,I}/_{\mathbb{U}}\ (\check{f}(k))$ und

$\hat{K} :=$ henselsche Hülle von $\tilde{K}$.

Wenn $\tilde{\Gamma}$ die Wertgruppe und $\tilde{k}$ der Restklassenkörper von $\tilde{K}$ sind, müssen wir also um den Hilfssatz zu beweisen, zeigen, daß

$\tilde{\Gamma} = \Gamma^{1\,I}/_{\mathbb{U}}$, $k \subset \tilde{k} \subset k^I/_{\mathbb{U}}$ und $k^I/_{\mathbb{U}}$ separabel über $\tilde{k}$.

Zunächst ist

$K^{1\,I}/_{\mathbb{U}} \subset \tilde{K} \subset \prod_{i\in I} K_i/_{\mathbb{U}}$. Also $\tilde{k} \subset k^I/_{\mathbb{U}}$.

Da die Wertgruppe von $\prod_{i\in I} K_i/_{\mathbb{U}}$ $\Gamma^{1\,I}/_{\mathbb{U}}$ ist, folgt $\Gamma^{1\,I}/_{\mathbb{U}} = \tilde{\Gamma}$.

Weiter ist wegen $\mathrm{res} \circ \check{f}_{|k} = \mathrm{id}_k$ $k^{1\,I}/_{\mathbb{U}} \cdot k \subset \tilde{k}$.

Wir zeigen ,daß $\tilde{k}$ algebraisch über $k^{1\,I}/_{\mathbb{U}} \cdot k$ ist

Wir betrachten zunächst $K^{1\,I}/_{\mathbb{U}}(\check{f}(E_n))$.

Nach Satz 4 iii) a) sind $k^1(E_n)$ und $k^{1\,I}/_{\mathbb{U}}$ über k^1 linear disjunkt . E_n ist also auch über $k^{1\,I}/_{\mathbb{U}}$ algebraisch unabhängig.Da $\mathrm{res} \circ \check{f}_{|k} = \mathrm{id}_k$, folgt wie beim Beweis von Satz 1 , daß der Restklassenkörper von

$K^{1\,I}/_{\mathbb{U}}(\check{f}(E_n))$ $k^{1\,I}/_{\mathbb{U}}(E_n)$ ist .

Wie beim Beweis von Satz 1 liefert die Konstruktion der f_n , daß $K^{1\,I}/_{\mathbb{U}}(\check{f}(k_n))$ algebraisch über $K^{1\,I}/_{\mathbb{U}}(\check{f}(E_n))$ ist . Also ist der Restklassenkörper $\tilde{k}$ von $\tilde{K}$ algebraisch über $k^{1\,I}/_{\mathbb{U}}(\bigcup_{i=o}^{\infty} E_i)$, also auch algebraisch über $k^{1\,I}/_{\mathbb{U}} \cdot k$.

Nach Satz 4 iii) b) ist $k^I/_{\mathbb{U}}$ separabel über $k^{1\,I}/_{\mathbb{U}} \cdot k$. Also ist nach Satz 4 ii) $k^I/_{\mathbb{U}}$ separabel über $\tilde{k}$.

Damit ist der Hilfssatz 1 gezeigt.

Hilfssatz 1 liefert den Hilfssatz 2 :

Seien $(K^1,\Gamma^1,k^1) \subset (K^2,\Gamma^2,k^2)$ bewertete Körper. $(K^2,\ldots)$ sei henselsch , $k^1 \subset k \subset k^2$ ein Zwischenkörper, der über k^1 separabel ist .

Dann gibt es ein l.u.S. "$*$" und einen henselschen Zwischenkörper

$(K^1,\ldots)^* \subset (\hat{K},\hat{\Gamma},\hat{k}) \subset (K^2,\ldots)^*$ mit

$k \subset \hat{k} \subset k^*$, $\hat{\Gamma} = \Gamma^{1*}$ und

k^* separabel über $\hat{k}$.

Beweis:

Sei $M := (K^1,k^1,\Gamma^1,K^2,\Gamma^2,k^2,k)$ das siebensortige Relationalsystem,das aus den beiden gegebenen bewerteten Körpern und dem Körper k durch Hinzunehmen der Inklusionsabbildungen entsteht . Sei L die zu M gehörende Sprache. L ist offenbar abzählbar.

Sei A die Menge aller Konstanten,Funktionen und Relationen auf der Trägermenge von M. Ist $B \subset A$, so bezeichne M_B das Relationalsystem, das aus M durch Auszeichnung der Konstanten, Funktionen und Relationen aus B entsteht, und L_B die Sprache von M_B.

Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem gibt es zu jedem $B \in S_\omega(A) := \{C \in \mathfrak{P}(A) \mid \operatorname{card} C < \omega\}$ eine abzählbare L_B-Struktur $\bar{M}_B = (\bar{K}^1_B, \dots, \bar{k}_B)$, die zu M_B - bzgl. L_B elementaräquivalent ist.

Aus Satz 4 i) folgt sofort, daß die Separabilität von k über k^1 in L beschreibbar ist. Also ist auch $\bar{k}_B$ separabel über $\bar{k}^1_B$. Wir können also auf $\bar{M}_B$ den Hilfssatz 1 anwenden und erhalten einen Ultrafilter U_B auf I_B und einen henselschen Zwischenkörper

$$(\bar{K}^1_B, \dots)^{I_B}/_{U_B} \subset (\hat{K}_B, \hat{\Gamma}_B, \hat{k}_B) \subset (\bar{K}^2_B, \dots)^{I_B}/_{U_B}$$

mit

$$\bar{k}_B \subset \hat{k}_B \subset \bar{k}_B{}^{I_B}/_{U_B} \quad , \quad \hat{\Gamma}_B = \bar{\Gamma}^1_B{}^{I_B}/_{U_B} \qquad \text{und}$$

$\bar{k}_B{}^{I_B}/_{U_B}$ separabel über $\hat{k}_B$.

Wir setzen $\bar{M}_B$ beliebig zu einer L_A-Struktur $\check{M}_B$ fort. Setze

$$\tilde{M}_B := \check{M}_B{}^{I_B}/_{U_B} =: (\tilde{K}^1_B, \dots, \tilde{k}_B).$$

Sei $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter auf $I := S_\omega(A)$, der die Mengen $U^B := \{X \in I \mid B \subset X\}$ für jedes B aus I enthält.

Wir betrachten die L_A-Struktur

$$M^* := \prod_{B \in I} \tilde{M}_B/_{\mathfrak{U}} =: (K^{1*}, \dots, k^*).$$

M^* ist elementar äquivalent zu M_A. Denn sei C eine Aussage aus L_A, die in M_A gilt. Wenn dann B' die Menge der neuen nichtlogischen Zeichen in C ist, gilt C also auch in allen M_B und daher allen $\tilde{M}_B$ für $B \supset B'$.

Also ist

$$U^{B'} \subset \{B \in I \mid \tilde{M}_B \Vdash C\} \in \mathfrak{U} \qquad \text{d.h.} \quad M^* \Vdash C.$$

Nach dem eingangs erwähnten Satz von Keisler gibt es also

ein l.u.S. u, sodaß $M^* = M^u$.

Setze

$$(\hat{K}, \hat{\Gamma}, \hat{k}) := \prod_{B \in I} (\hat{K}_B, \dots)/_{\mathfrak{U}}.$$

Offenbar ist $\hat{\Gamma} = \Gamma^{1*}$, $\hat{k} \subset k^*$ und nach Satz 4 i) ist k^* separabel über $\hat{k}$. Zum Beweis von Hilfssatz 2 bleibt noch $k \subset \hat{k}$ zu zeigen.

Sei dazu $a \in k$. Für alle B mit $a \in B$ liegt dann die entsprechende Interpretation von a in $\check{M}_B$ in $\check{k}_B$ und also auch in $\hat{k}_B$. Also liegt die Interpretation von a in M^* - d.h. vermöge der kanonischen Einbettung a selbst - in $\hat{k}$.

Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Beweis von Satz 5: Wir beschränken uns wegen der Einfachheit auf den Fall $k^3 = k^1$. Wir können zunächst annehmen, daß $(K^o, \dots)$ henselsch ist, sonst gehen wir zur henselschen Hülle über. Wir konstruieren uns nun Folgen von henselschen Körpern $(i=1,2)$

$$\begin{array}{ccccccccc} (K^i, \dots) & = & (K^{i,o}, \dots) & \subset & (K^{i,1}, \dots) & \subset \dots \subset & (K^{i,n}, \dots) & \subset \dots \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & \\ (K^o, \dots) & = & (\hat{K}^{i,o}, \dots) & \subset & (\hat{K}^{i,1}, \dots) & \subset \dots \subset & (\hat{K}^{i,n}, \dots) & \subset \dots \end{array},$$

eine Folge von Isomorphismen

$$\psi^n : (\hat{K}^{1,n}, \hat{\Gamma}^{1,n}, \hat{k}^{1,n}) \longrightarrow (\hat{K}^{2,n}, \hat{\Gamma}^{2,n}, \hat{k}^{2,n}),$$

eine Folge von isomorphen Einbettungen

$$\varphi^n : k^{1,n} \longrightarrow k^{2,n}$$

und eine Folge von l.u.S. u_n mit für $n=o,1,\dots$ $i=1,2$

1) $\varphi^o = \varphi$, $\psi^o = \mathrm{id}_{(K^o, \dots)}$

2) $(K^{i,n}, \dots)^{u_n} = (K^{i,n+1}, \dots)$

3) $(\hat{K}^{i,n}, \dots)^{u_n} \subset (\hat{K}^{i,n+1}, \dots)$

4) $(\hat{\Gamma}^{i,n})^{u_n} = \hat{\Gamma}^{i,n+1}$

5) $k^{1,n} \subset \hat{k}^{1,n+1}$

6) $k^{1,n}$ separabel über $\hat{k}^{1,n}$

7) $(\psi^n)^{u_n} \subset \psi^{n+1}$

8) $(\varphi^n)^{u_n} = \varphi^{n+1}$

9) $\psi^n|_{k^{1,n}} = \varphi^n|_{k^{1,n}}$.:

Seien die $(K^{j,m},..)$, $(\hat{K}^{j,m},..)$, ψ^m , φ^m , u_{m-1} , $j=1,2$, für alle $m \leq n$ mit den Eigenschaften 1) - 9) bereits konstruiert.

Da $k^{1,n}$ separabel über $\hat{k}^{1,n}$ ist , gibt es nach Satz I 8 für jede endliche Teilmenge $M \subset k^{1,n}$ henselsche Zwischenkörper $j=1,2$

$$(\hat{K}^{j,n},..) \subset (K^j_M, \hat{\Gamma}^{j,n}, k^j_M) \subset (K^{j,n},..)$$

und eine Fortsetzung von ψ^n

$$\psi_M : (K^1_M,..) \longmapsto (K^2_M,..) \quad \text{mit}$$

$$k^1_M = k^{1,n}(M) \quad \text{und} \quad \psi_M|_{k^1_M} = \varphi^n|_{k^1_M} \quad .$$

Sei nun $I := S_\omega(k^{1,n})$ und $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter auf I, der die Mengen $U_B := \{X \in I \mid B \subset X\}$ für jedes $B \in I$ enthält.

Setze

$$\check{K}^2 := \prod_{M \in I} K^1_M/_{\mathfrak{U}} , \quad \check{K}^1 := \hat{K}^{1,n\,I}/_{\mathfrak{U}} \quad \text{und} \quad \check{k} = \hat{k}^{1,n\,I}/_{\mathfrak{U}} \cdot k^{1,n} .$$

Dann ist K^2 henselsch , $\check{k}^1 \subset \check{k} \subset \check{k}^2$ und $\check{k}$ separabel über $\check{k}^1$.Denn zunächst ist wegen der besonderen Wahl von $\mathfrak{U}$

$$k^{1,n} \subset \prod_{M \in I} \hat{k}^{1,n}(M)/_{\mathfrak{U}} = \check{k}^2$$

. Bleibt die Separabilität zu zeigen.Nach Satz 4 iii a) ist $k^{1,n}$ zu $\hat{k}^{1,n\,I}/_{\mathfrak{U}}$ über $\hat{k}^{1,n}$ linear disjunkt . Da $k^{1,n}$ über $\hat{k}^{1,n}$ separabel ist, ist also auch $k^{1,n} . \hat{k}^{1,n\,I}/_{\mathfrak{U}}$ separabel über $\hat{k}^{1,n\,I}/_{\mathfrak{U}}$, d.h. $\check{k}$ separabel über $\check{k}^1$, (siehe [9]) .

Hilfssatz 2 findet also Anwendung,und wir haben ein l.u.S. u und einen henselschen Zwischen-körper

$$(\check{K}^1,..)^u \subset (\bar{K}, \check{\Gamma}^{1\,u}, \bar{k}) \subset (\check{K}^2,..) \quad \text{mit}$$

$\check{k} \subset \bar{k} \subset \check{k}^u$ und $\check{k}^u$ separabel über $\bar{k}$.

Sei $\check{\psi} : \check{K}^2 \longrightarrow \prod_{m \in I} K^2_M/_{\mathfrak{U}}$ vermöge $\check{\psi} := \prod_{M \in I} \psi_M/_{\mathfrak{U}}$.

Um die Konstruktion zu vollenden, wählen wir als u_n ein l.u.S. ,das für eine genügend reichhaltige Struktur S

$$(S^I/_{\mathfrak{U}})^u = S^{u_n}$$

erfüllt , und setzen weiter

$$(K^{j,n+1},..) := (K^{j,n},..)^{u_n} \qquad j=1,2$$

$$(\hat{K}^{1,n+1},..) := (\bar{K},..) \quad , \quad \psi^{n+1} = \check{\psi}^u|_{(\hat{K}^{1,n+1},..)} ,$$

$$(\hat{K}^{2,n+1},..) := \psi^{n+1}((\hat{K}^{1,n+1},..)) \quad , \quad \varphi^{n+1} := (\varphi^n)^{u_n} .$$

Wir müssen noch 1) - 9) nachweisen.

1),2) und 8) sind klar nach Definition .

3) gilt wegen $(K,..) \supset (\check{K}^1,..)^u = ((K^{1,n},..)^I/_{\mathfrak{U}})^u$.

4) gilt wegen $\bar{\Gamma}^1 = \check{\Gamma}^{1\,u} = (\hat{\Gamma}^{1,n\,I}/_{\mathfrak{U}})^u$.

5) gilt,weil $k^{1,n} \subset \check{k} \subset \bar{k}$.

6) Nach Satz 4 iii b) ist $\check{k}$ separabel in $k^{1,n\,I}/_{\mathfrak{U}}$ enthalten . Also ist nach Satz 4 i) $k^{1,n+1} = (k^{1,n\,I}/_{\mathfrak{U}})^u$ separabel über $\check{k}^u$, da andererseits $\check{k}^u$ separabel über $\bar{k}$ ist,ist $k^{1,n+1}$ separabel über $\bar{k}$.

7) folgt aus $(\psi^n)^I/_{\mathfrak{U}} \subset \check{\psi}$, und 3) .

9) folgt aus $\check{\psi}|_{\check{k}^2} = (\varphi^n)^I/_{\mathfrak{U}}|_{\check{k}^2}$.

Um Satz 5 zu beweisen wählen wir ein l.u.S. "*" , sodaß für eine genügend reichhaltige Struktur S

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (\ldots((S^{u_0})^{u_1})^{u_2}\ldots)^{u_n} = S^* .$$

Dann ist

$(K^i,..)^* = \bigcup_{n=o}^{\infty} (K^{i,n},..)$ wegen 2), i=1,2

$\varphi^* = \bigcup_{n=o}^{\infty} \varphi^n$ wegen 8).

Wir definieren ,i=1,2

$(\hat{K}^i,..) := \bigcup_{n=o}^{\infty} (\hat{K}^{i,n},..)$.

Die $(\hat{K}^i,..)$ sind als Vereinigung einer aufsteigenden Kette henselscher Körper wieder henselsch .

Aus 3) folgt,daß $(K^o,..)^* \subset (\hat{K}^i,..)$ i=1,2 .

Aus 4) folgt $\Gamma^{o*} = \hat{\Gamma}^1 = \hat{\Gamma}^2$.

Aus 5) folgt $\hat{k}^1 = k^{1*}$.

Wir definieren

$\psi : (\hat{K}^1,..) \longrightarrow (\hat{K}^2,..)$ vermöge

$\psi := \bigcup_{n=o}^{\infty} \psi^n$.

ψ ist ein Isomorphismus, der wegen 1) und 7) $(K^o,..)^*$ festläßt .Aus 9) folgt

$\varphi^*|_{\hat{k}^1} = \psi|_{\hat{k}^1}$. qed.

Definition:

$T_m(\pi)$ bezeichnet die Theorie der bewerteten Körper der Charakteristik null mit Schnitt, deren Wertgruppe – falls der Restklassenkörper die Charakteristik p hat – ein kleinstes positives Element α mit $v(p) = m\alpha$ besitzt.Die Sprache von $T_m(\pi)$ ist $L_o(\pi)$. Weiter sei $T_m^H(\pi)$ die Theorie der henselschen Modelle von $T_m(\pi)$ und $\hat{T}_m^H(\pi) := T_m^H(\pi) \cup \{\pi(v(p)) = p \vee v(p) = o \mid p \text{ prim}\}$.

Satz 6

Sei (K^o,Γ^o,k^o) gemeinsamer Unterkörper mit Schnitt der $T_m^H(\pi)$ – Modelle (K^i,Γ^i,k^i) i=1,2 . k^1 sei separabel über k^o . Weiter sei

$\varphi : (\Gamma^1,k^1) \longrightarrow (\Gamma^2,k^2)$

eine isomorphe Einbettung , die (Γ^o,k^o) festläßt. Dann existiert ein l.u.S. "$*$" und eine isomorphe Einbettung

$\psi : (K^1,..)^* \longrightarrow (K^2,..)^*$ mit

$\psi|_{(K^o,..)} = id_{(K^o,..)}$ und

$\psi|_{(\Gamma^1,k^1)^*} = \varphi^*$.

Ist φ surjektiv, so kann man ψ surjektiv erreichen .

Bemerkung : Satz 5 gilt auch , wenn man $T_m^H(\pi)$ durch $T^M(\pi)$ ersetzt .

Beweis:

Satz 5 und Satz I 9 liefern ein l.u.S. u , henselsche Zwischenkörper

$(K^o,..)^u \prec (\hat{K}^i,..) \prec (K^i,..)^u$

und einen $(K^o,..)^u$ -Isomorphismus

$\hat{\psi} : (\hat{K}^1,..) \longrightarrow (\hat{K}^2,..)$ mit

$(\hat{\Gamma}^1,\hat{k}^1) = (\Gamma^1,k^1)^u$ und $\hat{\psi}|_{(\hat{\Gamma}^1,\hat{k}^1)} = \varphi^u$.

Seien $R_1^i,R_2^i,..$ die Restklassenringe der $(K^i,..)^u$.

Wegen der Bedingung an die Wertgruppen und Satz I 2 folgt, daß R_1^1,R_2^1 .. auch die Restklassenringe von $(\hat{K}^1,..)$ sind. $\hat{\psi}$ liefert eine $S(\pi)$-isomorphe Einbettung von $(\hat{\Gamma}^1,R_1^1,..)$ in $(\hat{\Gamma}^2,R_1^2,..)$. Also gibt es nach Satz III 1 – man beachte, daß nach Satz I 2 die $(K^i,..)^u$ S-henselsch sind ! – ein Ultralimessystem v und eine isomorphe Einbettung

$\Psi : ((K^1,..)^u)^v \longrightarrow ((K^2,..)^u)^v$ mit

$\Psi|_{(\hat{\Gamma}^1,R_1^1,..)^v} = (\Psi|_{(\hat{\Gamma}^1,R_1^1,..)})^v$ und

Also läßt ψ $(K^o,..)$ fest , und es ist

$$\psi|_{(\Gamma^1,k^1)}{}^{u\,v} = \varphi^{u\,v} \quad . \text{ qed.}$$

Definition:

Eine $L_o(\pi)$ - Formel C heißt separabel bzgl. der Variablen $x_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq n$, wenn sie von folgender Gestalt ist:

$$C = A_1 \wedge A_2 \quad \ldots\ldots \wedge A_n \quad ,$$

wobei A_i von der Form ist

$$A_i = \sum_{j=o}^{n} t_j \operatorname{res}(x_{i,j})^{p_i} = 1 \vee \bigwedge_y \sum_{j=o}^{n} t_j \cdot y^{p_i} \neq 1 \vee v(p_i) = o$$

und von den Variablen $x_{k,m}$ nur die $x_{k,m}$ mit $k < i$ in den Termen t_j vorkommen , p_i prim .

Satz 7

Sei L eine Erweiterung von $\hat{L}$, in der die Sorte K nicht vorkommt. $T \subset L$ eine Theorie . Dann gilt

i) Sei $(K^o,..)$ gemeinsame $L_o(\pi)$ - Unterstruktur der $T_m^H(\pi)$ - Modelle $(K^i,..)$ $i=1,2$.
Der Restklassenkörper von K^o sei separabel in k^1 enthalten. Dann folgt aus
$(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. $L(\Gamma^o,k^o)$
$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L \cup L_o(\pi)(K^o,..)$.

ii) $T_m^H(\pi) \cup T$ ist <u>die</u> K-Modellvervollständigung von $T_m(\pi) \cup T$.

iii) $T_m^H(\pi) \cup T$ ist <u>die</u> K^*-Modellvervollständigung von $T_m(\pi) \cup T$.

iv) Ist T modellvollständig, so ist auch $T_m^H(\pi) \cup T$ modellvollständig .

v) Zu jeder $L \cup L_o(\pi)$ - Formel A gibt es eine in $x_1,..,x_n$ separable Formel $C(x_1,..,x_n)$,
$L_o(\pi)$-Terme $t_1,..,t_m$,
eine reine L-Formel B vom gleichen Präfixtyp wie A, die alle neuen Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) vorkommen, positiv (negativ) enthält, sodaß
$T_m^H(\pi) \vdash C(x_1,..,x_n) \longrightarrow (A \rightarrow B(t_1,..,t_m))$ und
$T_m^H(\pi) \vdash B(t_1,..,t_m) \rightarrow A$

vi) Sei $\mathbb{1}$ eine Konstante aus L. Dann ist jede Aussage A aus $L \cup L_o(\pi)$ bzgl. $\hat{T}_m^H(\pi) \cup \{v(p)=\mathbb{1} \vee v(p)=o \mid p \text{ prim}\}$ zu einer reinen L-Aussage äquivalent, die vom gleichen Präfixtyp wie A ist, und in der alle neuen Relationszeichen, die in A positiv(negativ) vorkommen, positiv(negativ) vorkommen.
Wenn A nicht den Präfixtyp B_1 hat, kann man erreichen, daß diese reine L-Aussage bereits bzgl. $\hat{T}_m^H(\pi)$ zu A äquivalent ist.

vii) Ist T vollständig, so ist auch $\hat{T}_m^H(\pi) \cup T$ vollständig.

viii) Ist T entscheidbar, so ist auch $\hat{T}_m^H(\pi) \cup T$ entscheidbar.

ix) Seien $(K^i,..)$ $i=1,2$ Modelle von $\hat{T}_m^H(\pi) \cup T$ und
$(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. L . Dann ist auch
$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L \cup L_o(\pi)$.

Beweis:

i) folgt mit Hilfe von Satz II 1 aus Satz 6 - analog zum Beweis von Satz 3 i) .

ii) folgt sofort aus i)

iii) folgt wie beim Beweis von Satz 3 aus i), wenn man bedenkt, daß nach Satz 4 i) eine elementare Erweiterung von Körpern separabel ist

iv) folgt sofort aus iii) .

v) Der Beweis läuft in ähnlichen Bahnen wie der Beweis von Satz 3 v) .

Sei A_i eine Formel, wie in der letzten Definition.

Man kann offenbar in $T_m(\pi)$ ableiten:

$\bigvee_{x_{i,1}} \dots \bigvee_{x_{i,n}} A_i(x_{i,1},\dots)$.

Wir erweitern also für jede solche Formel $L_o(\pi)$ durch ein n-Tupel von Funktionen $(\psi_1,\dots,\psi_n) = \vec{\psi}$ zur Sprache L_s und erweitern $T^H_m(\pi)$ zu T_s , indem wir die Axiome $A_i(\psi_1,\dots,\psi_n)$ hinzunehmen.

Wir nennen eine Menge von Termen aus L_s normal, wenn alle Argumente eines der neuen Funktionentupel in allen Termen der Menge gleich sind. Wie beim Beweis von Satz 3 erhält man den

Hilfssatz:

Seien A,B,C Formeln aus $L \cup L_o(\pi)$, $t_1,\dots,t_n$ eine normale Menge von L_s-Termen mit

$T_s \vdash C \to A \to B(t_1,\dots)$ und $T^H_m(\pi) \vdash B(t_1,\dots) \to A$.

Dann gibt eine in $x_1,\dots,x_k$ separable Formel $D(x_1,\dots)$ und $L_o(\pi)$-Terme $s_1,\dots,s_n$ mit

$T^H_m(\pi) \vdash C \to D(x_1,\dots) \to A \to B(s_1,\dots)$ und

$T^H_m(\ \ ) \vdash B(s_1,\dots) \to A$

(Wir brauchen den Hilfssatz nur für den Fall C ='o=o' , die starke Form dient dem Induktionsbeweis)

Sei $(K^1,\dots)$ ein Modell von $T_m(\pi)$ und $(K^2,\dots)$ eine $L_o(\pi)$-Unterstruktur von $(K^1,\dots)$. Man sieht leicht mit Hilfe von Satz 4 i), daß die Formel A_i gerade so gewählt sind, daß $(K^2,\dots)$ genau dann ein bewerteter Körper ist, dessen Restklassenkörper separabel im Restklassenkörper von $(K^1,\dots)$ ist, wenn für jede solche Formel $C(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots)$, die in $x_1,\dots,x_n$ separabel ist , und für alle $a_1,\dots$ aus $(K^2,\dots)$ Elemente $b_1,\dots,b_n$ aus $(K^2,\dots)$ existieren mit

$(K^1,\dots) \Vdash C(b_1,\dots,b_n,a_1,\dots)$.

Daraus ergibt sich wie beim Beweis von Satz 3 der Hilfssatz:

Für jedes k gibt es eine normale Menge T von L_S-Termen derart, daß für jedes T_S - Modell $(K,\dots)$ und $a_1,\dots,a_k$ aus $(K,\dots)$

$\{ t(a_1,\dots,a_k) \mid t(x_1,\dots,x_k) \in T\}$

ein schnittabgeschlossener Unterkörper von $(K,\dots)$ ist, dessen Restklassenkörper separabel im Restklassenkörper von $(K,\dots)$ enthalten ist , und der $a_1,\dots a_n$ enthält.

Wegen des ersten Hilfssatzes genügt es für v) zu zeigen, daß es zu jeder Formel A aus $L \cup L_o(\pi)$ eine normale Menge von L_s-Termen $t_1,\dots,t_n$ und eine reine L-Formel vom gleichen Präfixtyp usw. gibt mit

$T_s \vdash A \to B(t_1,\dots,t_n)$ und $T^H_m(\pi) \vdash B(t_1,\dots,t_n) \to A$.

Wir zeigen das durch Induktion über den Präfixtyp.

1.Fall A ist quantorfrei

Wir wenden Satz II 4 an . Sei $T_1 = T_s$, $T_2 = T^H_m(\pi)$, $\varphi_1 = \varphi_2 = A$ und G die Menge aller Formeln der Form $D(t_1,\dots,t_n)$, wo $t_1,\dots,t_n$ L_s-Terme aus einer von Hilfsatz 2 für die Zahl der freien Variablen von A (:= k) gelieferten normalen Termmenge sind und D eine quantorfreie L-Formel ist in der alle neuen Relationszeichen mit dem richtigen Vorzeichen vorkommen.

Sei nun $(K^1,\dots)$ ein T_s-Modell und $(K^2,\dots)$ eine $L \cup L_o(\pi)$-Struktur, die $T^H_m(\pi)$-Modell ist. Weiter seien $a^i_1,\dots,a^i_k$ aus $(K^i,\dots)$, sodaß die Bedingungen von Satz II 4 erfüllt sind (i=1,2) .Seien $(\bar{K}^i,\dots)$ die $L_o(\pi)$ Unterstrukturen $\{t(a^i_1,\dots,a^i_k) \mid t$ aus der Termmenge$\}$. Dann ist nach dem

Hilfssatz $(\bar{K}^1,\dots)$ ein Unterkörper, dessen Restklassenkörper in k^1 separabel liegt. Weiter hat man wegen der Gültigkeit der Voraussetzung von Satz II 4 einen Isomorphismus

$$\bar{\Psi}:(\bar{K}^1,\dots) \to (\bar{K}^2,\dots) \quad \text{mit} \quad \bar{\Psi}(a_i^1) = a_i^2 .$$

Seien in L' gerade die Funktionszeichen und Konstanten von L enthalten und sei P (N) die Menge der neuen Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) vorkommen. Sei weiter $(\check{\Gamma}^i,\check{k}^i)$ die von $(\bar{\Gamma}^i,\bar{k}^i)$ in (Γ^i,k^i) erzeugte $L\cup\hat{L}$-Struktur. Wegen der Wahl von G setzt sich dann $\bar{\Psi}|_{(\bar{\Gamma}^1,\bar{k}^1)}$ fort zu einem

$(L'\cup\hat{L},P,N)$-Isomorphismus $\check{\Psi}:(\check{\Gamma}^1,\check{k}^1) \to (\check{\Gamma}^2,\check{k}^2)$.

Satz I 9 und IV 5 liefern nun ein l.u.S. "$*$",

henselsche Zwischenkörper

$(\bar{K}^i,\dots)^* \subset (\hat{K}^i,\check{\Gamma}^{i*},\check{k}^{i*}) \subset (K^i,\dots)^*$ und einen

$(L_o(\pi)-)$ Isomorphismus über $\bar{\Psi}^* \subset \hat{\Psi}:(\hat{K}^1,\dots) \to (\hat{K}^2,\dots)$ mit

$$\hat{\Psi}|_{(\Gamma^{1*},k^{1*})} = \check{\Psi}^* .$$

Es ist klar, daß die Zwischenkörper $L'\cup L_o(\pi)$-Strukturen sind und daß $\hat{\Psi}$ ein $(L'\cup\hat{L},P,N)$-Isomorphismus ist. Also folgt aus

$$(K^1,\dots) \Vdash A(a_1^1,\dots) \to (K^1,\dots)^* \Vdash A(a_1^1,\dots) \to$$
$$(\hat{K}^1,\dots) \Vdash A(a_1^1,\dots) \to (\hat{K}^2,\dots) \Vdash A(a_1^2,\dots) \to$$
$$(K^2,\dots)^* \Vdash A(a_1^2,\dots) \to (K^2,\dots) \Vdash A(a_1^2,\dots) .$$

Damit sind die Bedingungen von Satz II 4 nachgewiesen.

2.Fall A ist vom Präfixtyp E_1 .

Der Beweis beginnt wie im ersten Fall. Wir wählen nur als G die Menge aller Formeln der Form $D(t_1,\dots,t_n)$, wo die t_i Terme aus der gewählten Termmenge sind und D eine reine L-Existenzformel ist, in der die neuen Relationszeichen mit dem richtigen Vorzeichen vorkommen. Dann gilt für jede Existenzformel φ aus L in der die neuen Relationszeichen mit dem richtigen Vorzeichen vorkommen und $b_1,\dots,b_r$ aus $(\bar{\Gamma}^1,\bar{k}^1)$

$$(\Gamma^1,k^1) \Vdash \varphi(b_1,\dots) \to (\Gamma^2,k^2) \Vdash \varphi(\bar{\Psi}(b_1),\dots) .$$

Nach Satz II 10 und IV 6 gibt es ein l.u.S. "$*$" und eine isomorphe Einbettung über $\bar{\Psi}$

$$\hat{\Psi}:(K^1,\dots)^* \to (K^2,\dots)^* \quad \text{mit}$$

$\hat{\Psi}|_{(\Gamma^1,k^1)^*}$ $(L'\cup\hat{L},P,N)$-isomorphe Einbettung .

Wie im ersten Fall sieht man jetzt leicht, daß aus

$(K^1,\dots) \Vdash A(a_1^1,\dots)$ $(K^2,\dots) \Vdash A(a_1^2,\dots)$ folgt.

Damit sind die Bedingungen von Satz II 4 nachgewiesen.

3.Fall A ist vom Präfixtyp A_1

Der Beweis geht wie im ersten und zweiten Fall. Es ist klar, wie G zu wählen ist. Satz II 10 liefert eine Ultrapotenz "+" und eine $(L'\cup\hat{L},N,P)$-isomorphe Einbettung

$$\varphi:(\Gamma^2,k^2) \to (\Gamma^1,k^1)^+ \quad \text{mit} \quad \bar{\Psi}^{-1} = \varphi|_{(\bar{\Gamma}^2,\bar{k}^2)} .$$

Sei $Bi(\varphi) = (\check{\Gamma}^1,\check{k}^1)$. Wegen Satz 4 ist $\check{k}^1$ separabel über k^1. Nach Satz 5 gibt es ein l.u.S. "u" und einen henselschen Zwischenkörper (auch mit Satz I 9)

$$(\bar{K}^1,\dots)^u \subset (\hat{K}^1,\check{\Gamma}^{1u},\check{k}^{1u}) \subset (K^1,\dots)^{+u} .$$

Wegen Satz 4 ist $\check{k}^{1u}$ separabel über $\bar{k}^{1u}$. Wir wenden Satz 6 auf φ^{-1u} an und erhalten ein l.u.S."v" und einen Isomorphismus

$$\hat{\Psi}:(\hat{K}^1,\dots)^v \to (K^2,\dots)^{uv} \quad \text{mit}$$

$$(\varphi^{-1})^{uv} = \hat{\Psi}|_{(\Gamma^{1u},k^{1u})^v} \quad \text{und} \quad \bar{\Psi}^u \subset \hat{\Psi} .$$

$\hat{\Psi}^{-1}:(K^2,\dots)^{uv} \to (\hat{K}^1,\dots)^{+uv}$ ist

offenbar eine $(L'\cup L_o(\pi),N,P)$-isomorphe Einbettung. Wie im zweiten Fall erkennt man also, das aus

$(K^1,\dots) \Vdash A(a_1^1,\dots)$ $(K^2,\dots) \Vdash A(a_1^2,\dots)$ folgt.

4.Fall A ist vom Präfixtyp E_{n+1} . $n \geq 1$

Sei also $A = \bigvee_{x_1}\dots\bigvee_{x_h} D$ und D vom Präfixtyp A_n .

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine reine L-Formel vom richtigen Präfixtyp usw. , $L_o(\pi)$-Terme $t_1,..$ und eine in $y_1,..$ separable Formel $C(y_1,..)$, sodaß

$$T^H_m(\pi) \vdash C(y_1,..) \rightarrow D \rightarrow B(t_1,..) \quad \text{und} \qquad (*)$$

$$T^H_m(\pi) \vdash B(t_1,..) \rightarrow D \quad .$$

Man schließt leicht hieraus, daß

$$T^H_m(\pi) \vdash D \leftrightarrow \bigvee_{y_1}..(C(y_1,..) \wedge B(t_1,..)) \ .$$

Die Formel rechts in der Klammer ist aber von der Form $F(s_1,..)$. Dabei sind sie s_i $L_o(\pi)$ - Terme und F eine reine L-Formel vom Präfixtyp A_n , in der die neuen Relationszeichen mit dem richtigen Vorzeichen vorkommen.
Wir führen ein neues Relationszeichen R ein und wenden den 2.Fall auf die Formel $A' :=$

$\bigvee_{x_1}..\bigvee_{x_n}\bigvee_{y_1}.. R(s_1,..)$ an und erhalten eine reine L-Formel vom Präfixtyp E_1 in der R positiv vorkommt G und eine normale Menge von L_s-Termen $k_1,..k_p$ mit

$$T_s \vdash A' \rightarrow G(k_1,..,k_p) \quad \text{und} \quad T^H_m(\pi) \vdash G(k_1,..) \rightarrow A'.$$

Wir erhalten nun das gewünschte, wenn wir in G R durch F ersetzen.

5.Fall A ist vom Präfixtyp A_{n+1} , $n \geq 1$.

Der Beweis geht hier dual zum Beweis von 4. Man nutzt aus, daß aus (*) auch folgt

$$T^H_m(\pi) \vdash D \leftrightarrow \bigwedge_{y_1}..(C(y_1,..) \rightarrow B(t_1,..)) \quad .$$

vi) Sei A eine Aussage aus $L \cup L_o(\pi)$. Wir wenden v) an und erhalten eine in $x_1,..x_n$ separable Formel C und eine reine L-Formel B mit $L_o(\pi)$ - Termen $t_1,..,t_k$ sodaß

$$T^H_m(\pi) \vdash A \leftrightarrow \bigwedge_{x_1},..\bigwedge_{x_n}(C(x_1,..) \rightarrow B(t_1,..,t_k)) \quad \text{und}$$

$$T^H_m(\pi) \vdash (C(x_1,.) \wedge C(x_1',.)) \rightarrow (B(t_1(x_1,.).) \leftrightarrow B(t_1(x_1',.),.) \ .$$

B ist dabei vom gleichen Präfixtyp wie A und enthält alle neuen Relationen mit demselben Vorzeichen wie A

Es genügt zu zeigen, daß A bzgl.

$$T' = \hat{T}^H_m(\pi) \cup \{v(p)=1 \vee v(p)=o \mid p \ \text{prim}\}$$

zu einer negationslosen aussagenlogischen Kombination von Formeln des Typs

$B(s_1,..,s_k)$, s_i konstante L-Terme ,

äquivalent ist .
Wir wenden Satz II 4 an . Sei G die Menge der Formeln vom angegeben Typ.
Seien $(K^i,..)$ $i=1,2$ zwei Modelle von T′, sodaß alle Aus- aus G , die in $(K^1,..)$ gelten, auch in $(K^2,..)$ gelten.
Die $(K^i,..)$ besitzen einen gemeinsamen Unterkörper: $(\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{F}_p)$ oder $(\mathbb{Q},\{o\},\mathbb{Q})$. Sei $(K^o,..)$ dieser Unterkörper.
Sei A in $(K^1,..)$ gültig , wir müssen zeigen, daß dann A auch in $(K^2,..)$ gilt . Da k^1 separabel über k^o ist, gibt es $a_1,..,a_n$ aus K^o , sodaß $C(a_1,..)$ in $(K^1,..)$ gilt . Also gilt $B(t_1(a_1,..),..)$ in $(K^1,..)$.
Da $(K^o,..)$ $L_o(\pi)$ -Unterstruktur ist und (Γ^o,k^o) durch konstante Terme beschrieben wird , gibt es also konstante L-Terme $s_1,..s_k$, sodaß in $(K^1,..)$ und $(K^2,..)$ $t_i(a_1,..,a_n) = s_i$ gilt für $i=1,..,k$.
Nach Annahme gilt $B(t_1(a_1,..),..)$ also auch in $(K^2,..)$.
$C(a_1,..)$ gilt , wie man leicht einsieht, auch in $(K^2,..)$. Also ist für alle $b_1,..b_n$ aus $(K^2,..)$, für die $C(b_1,..)$ in $(K^2,..)$ gilt, auch $B(t_1(b_1,.),.)$ in $(K^2,..)$ gültig , d.h. A gilt in $(K^2,..)$,qed.

Der Zusatz folgt wie beim Beweis von Satz III 1o vii) .

ix) Seien $(K^i,..)$ $i=1,2$ wie in ix). Dann enthalten $(K^1,..)$ und $(K^2,..)$ die gemeinsamen (schnittabgeschlossenen) Unterkörper $(K^o,..)$:

$(\{o\},\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ oder $(\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{F}_p)$.

Da jedes Element aus (Γ^o,k^o) in den $(K^i,..)$ -durch jeweils diesselbe Formel -definierbar ist, ist auch

$(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. $L(\Gamma^o,k^o)$.

Da die k^i separabel über k^o sind, folgt die Behauptung aus i).

vii) folgt sofort aus ix)

vi) folgt aus vii) mit Satz II 2

viii) folgt - wie beim Beweis von Satz III 4 - aus vi).

V Die Elimination des Schnittes

Satz 1

Seien G,Γ abelsche Gruppen und $v : G \longrightarrow \Gamma$ ein surjektiver Homomorphismus. Sei H eine Untergruppe von Γ und $\Gamma/_H$ torsionsfrei. Weiter sei $\pi : H \longrightarrow G$ ein Homomorphismus mit $v \circ \pi = id_H$.

Dann existiert ein Ultralimessystem " $*$ " und ein Homomorphismus

$\hat{\pi} : \Gamma^* \longrightarrow G^*$ mit

$v^* \circ \hat{\pi} = id_{\Gamma^*}$ und $\hat{\pi}_{|H^*} = \pi^*$.

Beweis:

Wir konstruieren Folgen von Gruppen

$H_o \subset \Gamma_o \subset H_1 \subset \Gamma_1 \subset H_2 \subset \Gamma_2 \subset \ldots \subset H_n \subset \Gamma_n \subset H_{n+1} \ldots$

$G_o \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$,

von Homomorphismen

$v_i : G_i \longrightarrow \Gamma_i$, $\pi_i : H_i \longrightarrow G_i$, $i=o,1,..$

und von Ultrafiltern $\mathfrak{U}_i$ auf Mengen I_i, sodaß

i) $\Gamma_o = \Gamma$, $G_o = G$, $H_o = H$, $v_o = v$, $\pi_o = \pi$,

ii) $H_i \subset \Gamma_i$, $v_i \circ \pi_i = id_{H_i}$,

iii) $\Gamma_i/_{H_i}$ ist torsionsfrei,

iv) $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i{}^{I_i}/_{\mathfrak{U}_i}$, $G_{i+1} = G_i{}^{I_i}/_{\mathfrak{U}_i}$, $v_{i+1} = v_i{}^{I_i}/_{\mathfrak{U}_i}$,

v) $H_{i+1} \supset H_i{}^{I_i}/_{\mathfrak{U}_i}$, $\pi_{i+1} \supset \pi_i{}^{I_i}/_{\mathfrak{U}_i}$,

vi) $H_{i+1} \supset \Gamma_i$.

Um Satz 1 zu beweisen, nehmen wir $(I_n,\mathfrak{U}_n)_{n \in N}$ als Ultralimessystem. Dann ist

$\Gamma^* = \bigcup_{i=o}^{\infty} \Gamma_i$, $G^* = \bigcup_{i=o}^{\infty} G_i$ und $v^* = \bigcup_{i=o}^{\infty} v_i$.

Setze $\hat{\pi} := \bigcup_{i=o} \pi_i$.

Aus ii) folgt dann $v^* \circ \hat{\pi} = id_{\Gamma^*}$.

Aus v) folgt $\hat{\pi}_{|H^*} = \pi^*$.

Und nun zur Konstruktion :

Seien $\Gamma_i, G_i, H_i, v_i, \pi_i, I_{i-1}, \mathfrak{U}_{i-1}$ für $i \leq n$ bereits mit den Eigenschaften i) - vi) konstruiert.

Sei M eine endliche Teilmenge $\subset \Gamma_n$. Dann ist

$(H_n + \langle M \rangle)/_{H_n}$ endlich erzeugt und torsionsfrei, also frei.

Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_n \longrightarrow H_n + \langle M\rangle \longrightarrow (H_n+\langle M\rangle)/_{H_n} \longrightarrow 0$$

zerfällt also , und $H_n + \langle M \rangle$ ist direkte Summe

$$H_n + \langle M\rangle = H_n \oplus \langle x_1\rangle \oplus \dots \oplus \langle x_k\rangle , (\langle x_i\rangle \cong Z).$$

Definiere dann

$$\pi_M(x_i) = a_i \in G_n \quad \text{beliebig mit} \quad v_n(a_i) = x_i .$$

$$\pi_M(h + n_1x_1 + .. + n_kx_k) := \pi_n(h) + n_1a_1 + \dots n_ka_k .$$

$\pi_M : H_n + \langle M\rangle \longrightarrow G_n$ ist dann ein wohldefinierter Homomorphismus mit $v_n \circ \pi_M = id_{H_n+\langle M\rangle}$, der π_n fortsetzt .

Setze nun $I_n := S_\omega(\Gamma_n)$,und wähle als $\mathfrak{U}_n$ einen Ultrafilter auf I , der für jedes $M \in I$ die Menge

$U_M = \{X \in I \mid M \subset X\}$ enthält .

Setze

$$G_{n+1} := G_n^{I_n}/_{\mathfrak{U}_n} , \quad H_{n+1} := H_n^{I_n}/_{\mathfrak{U}_n} + \Gamma_n , \quad \Gamma_{n+1} := \Gamma_n^{I_n}/_{\mathfrak{U}_n} ,$$

$$v_{n+1} := v_n^{I_n}/_{\mathfrak{U}_n} \quad \text{und} \quad \pi_{n+1} := \prod_{M \in I_n} \pi_M / \mathfrak{U}_n \Big|_{H_{n+1}} .$$

Wir weisen i) - vi) nach .

Zunächst setzen wir

$$\check{H} := \prod_{M\in I_n} H_n + \langle M\rangle /_{\mathfrak{U}_n} \quad \text{und} \quad \check{\pi} := \prod_{M\in I_n} \pi_M /_{\mathfrak{U}_n} .$$

Dann ist $\check{\pi}: \check{H} \longrightarrow G_{n+1}$ ein Homomorphismus mit

$v_{n+1} \circ \check{\pi} = id_{\check{H}}$. Weiter ist

$H_n^{I_n}/_{\mathfrak{U}_n} \subset \check{H} \subset \Gamma_{n+1}$ und $\pi_n^{I_n}/_{\mathfrak{U}_n} \subset \check{\pi}$.

Aus der Wahl des Ultrafilters $\mathfrak{U}_n$ ergibt sich $\Gamma_n \subset H$.

Also ist π_{n+1} sinnvoll definiert und i),ii), iv) - vi) sind erfüllt . Es bleibt noch iii) zu zeigen .

iii) folgt aus dem

Hilfssatz:

Seien $F \subset L$ abelsche Gruppen , $L/_F$ torsionsfrei . $\mathfrak{U}$ sei ein Ultrafilter auf I .

Dann ist $(L^I/_{\mathfrak{U}})/_{(L + F^I/_{\mathfrak{U}})}$ torsionsfrei .

Beweis:

Sei $n \neq o$, $x \in L^I/_{\mathfrak{U}}$, $y \in F^I/_{\mathfrak{U}}$, $a \in L$ und $nx = a + y$.

Dann gibt es auch in F und L Elemente $b \in L$ und $c \in F$ mit $nb = a + c$. Es folgt also

$n(x - b) = y - c \in F^I/_{\mathfrak{U}} + F = F^I/_{\mathfrak{U}}$.

Da $L/_F$ torsionsfrei ist , ist auch $(L^I/_{\mathfrak{U}})/_{(F^I/_{\mathfrak{U}})}$ torsionsfrei. Es folgt also $x - b \in F^I/_{\mathfrak{U}}$

d.h. $x \in F^I/_{\mathfrak{U}} + L$ qed.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Folgerungen aus Satz 1

i) Sei K,v ein bewerteter Körper , H eine Untergruppe der Wertgruppe Γ von K,v derart, daß $\Gamma/_H$ torsions-

frei ist. $\Pi: H \to K$ sei ein Homomorphismus von H in die Multiplikationsgruppe von K mit $v \circ \Pi = id_H$.
Dann gibt es ein Ultralimessystem " $*$ " und einen Schnitt
$\hat{\Pi}: \Gamma^* \to K^*$ mit $\Pi^* \subset \hat{\Pi}$.

ii) Seien $K^1, v^1 \subset K^2, v^2$ zwei bewertete Körper mit Wertgruppen Γ^1, Γ^2. Γ^2/Γ^1 sei torsionsfrei.
Dann gibt es ein Ultralimessystem " $*$ " und Schnitte
$\Pi_1: \Gamma^{1*} \to K^{1*}$, $\Pi_2: \Gamma^{2*} \to K^{2*}$ mit
$\Pi_1 \subset \Pi_2$.

iii) Sei T die Theorie der bewerteten Körper. $\tilde{T}$ sei eine Erweiterung von T in einer vergrößerteten Sprache $\tilde{L}$, in der das Funktionszeichen Π nicht vorkommt.
Dann ist die Hinzunahme der Schnittaxiome eine konservative Erweiterung von $\tilde{T}$.

Beweis:

i) folgt sofort aus Satz 1.

ii) Da $\Gamma^1/\{0\}$ torsionsfrei, gibt es nach i) ein Ultralimessystem u und einen Schnitt

$\Pi: (\Gamma^1)^u \to (K^1)^u$.

Da $(\Gamma^2)^u/(\Gamma^1)^u$ wieder torsionsfrei ist, gibt es wiederum nach i) ein Ultralimessystem v und einen Schnitt $\Pi_2: ((\Gamma^2)^u)^v \to ((K^2)^u)^v$ mit

$(\Pi)^v \subset \Pi_2$. Setze $\Pi_1 := (\Pi)^v$.

iii) Sei A eine Aussage aus $\tilde{L}$ und

$\tilde{T}$ + Schnittaxiome $\vdash A$.

Sei K ein Modell von $\tilde{T}$. Aus i) folgt, daß es eine elementare Erweiterung von K gibt die einen Schnitt gestattet. Also gilt A in dieser elementaren Erweiterung und damit in K. Wir haben also

$\tilde{T} \vdash A$.

Definition:

T_R (T_R^p, T_S^p) sei die Theorie, die aus $T_R(\Pi)$ ($T_R^p(\Pi)$, $T_S^p(\Pi)$) durch Streichen der Axiome, die $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots$ festlegen entsteht.

L_R sei die zugehörige Sprache. L_R sei L_R ohne die Sorte K.

Eine Erweiterung von T_R - Modellen
$(K^1, \Gamma^1, R_1^1, \ldots) \subset (K^2, \Gamma^2, R_1^2, \ldots)$
heißt S-torsionsfrei, wenn es für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $x_2 \in \Gamma^2$ und $a \in \Gamma^1$ ein $x_1 \in \Gamma^1$ gibt mit
$|nx_2 - a| \leq v(n) \longrightarrow |nx_1 - a| \leq v(n)$.

Satz 2

Seien $(K^0, \Gamma^0, R_1^0, \ldots) \subset (K^i, \Gamma^i, R_1^i, \ldots)$ $(i=1,2)$
Modelle von T_R. $(K^1, \ldots)$ und $(K^2, \ldots)$ seien S-henselsch und S-torsionsfreie Erweiterungen von $(K^0, \ldots)$. Weiter sei

$\varphi: (\Gamma^1, R_1^1, \ldots) \longrightarrow (\Gamma^2, R_1^2, \ldots)$

eine L_R - isomorphe Einbettung, die auf $(\Gamma^0, R_1^0, \ldots)$ identisch operiert.

Dann existiert ein Ultralimessystem " $*$ " und eine isomorphe Einbettung

$\psi: (K^1, \ldots)^* \longrightarrow (K^2, \ldots)^*$ mit

$\psi|_{(K^0, \ldots)} = id_{(K^0, \ldots)}$ und

$\psi|_{(\Gamma^1, \ldots)^*} = \varphi^*$.

Ist φ surjektiv, kann man ψ surjektiv erreichen.

Beweis:

Nach Satz I12 gibt ein Ultralimessystem u derart, daß

$(K^2,..)^u$ ω-vollständig ist . Wir wenden Satz I 7 an und erhalten S-henselsche Zwischenkörper

$(K^o,..)^u \subset (\hat{K}^i, \hat{\Gamma}^i,..) \subset (K^i, \Gamma^i,..)^u$ mit

$\hat{R}^i_j = (R^i_j)^u$ für $i=1,2$ $j=1,2,3,..$,

$\hat{\Gamma}^1 = (\Gamma^o)^u + \{ x \in (\Gamma^1)^u | \bigvee_{n \in N} n \neq o \quad v(n) \geq |x| \}$

und einen $(K^o,..)^u$ - Isomorphismus

$\hat{\varphi} : (\hat{K}^1,..) \longrightarrow (\hat{K}^2,..)$ mit

$\hat{\varphi}_{|(\hat{\Gamma}^1,..)} = \varphi^u{}_{|(\hat{\Gamma}^1,..)}$.

Wir haben wieder, daß $(K^1,..)^u$ über $(K^o,..)^u$ S-torsionsfrei ist . Daraus schließt man leicht, daß

$(\Gamma^1)^u/\hat{\Gamma}^1$ und $\varphi^u(\Gamma^1)^u/\varphi^u(\hat{\Gamma}^1)$

torsionsfrei sind. Wenn wir Satz 1 dreimal anwenden, erhalten wir ein Ultralimessystem v und Schnitte

$\pi_o : (\hat{\Gamma}^1)^v \longrightarrow (\hat{K}^1,..)^v$, $\pi_1 : (\Gamma^1)^{uv} \longrightarrow (K^1,..)^{uv}$

$\pi_2 : \varphi^{uv}(\hat{\Gamma}^1)^v \longrightarrow (\hat{K}^2,..)^{uv}$ mit

$\pi_o \subset \pi_1$ und $\varphi^v \circ \pi_o \subset \pi_2$.

Da für alle $x \in (\Gamma^1)^{uv} \setminus (\hat{\Gamma}^1)^v$ $\pi_n(x) = o$ ist, ist φ^{uv} mit den Schnitten verträglich. Also gibt es nach einer leichten Verallgemeinerung von Satz III 1 einen Ultralimes w und eine isomorpe Einbettung über

$\psi : (K^1,..)^{uvw} \longrightarrow (K^2,..)^{uvw}$

die $\hat{\varphi}^{vw}$ fortsetzt . qed.

Definition:

Eine L_R - Formel heißt S-torsionsfrei in den Variablen $x_1,..,x_n$, wenn sie von folgender Gestalt ist :

$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \dots \wedge A_n$ und die A_k die Form

$|n_k \cdot v(x_k) - t_k| \leq v(m_k) \vee \bigwedge_y |n_k \cdot y - t_k| > v(m_k)$ haben.

Dabei sind n_k, m_k natürliche Zahlen $\neq o$, t_k Terme in denen von den Variablen $x_1,..$ nur die Variablen $x_1,..,x_{k-1}$ vorkommen .

Aus Satz 2 folgt

Satz 3

Sei L eine Erweiterung von $\hat{L}_R$, in der die Sorte K nicht vorkommt. T sei eine Theorie. Dann gilt $(p \in P)$

i) Sei $(K^o,..)$ gemeinsame L_R Unterstruktur der T^p_S - Modelle $(K^i,..)$ $i=1,2$. $(K^1,..)$ sei S-torsionsfrei über $(K^o,..)$. Dann folgt aus

$(\Gamma^1, R^1_1,..) \equiv (\Gamma^2, R^2_1,..)$ bzgl. $L(\Gamma^o, R^o_1,..)$

$(K^1, \Gamma^1,..) \equiv (K^2, \Gamma^2,..)$ bzgl. $L_R \cup L\ (K^o,..)$.

ii) $T^p_S \cup T$ ist die K-Modellvervollständigung von $T^p_R \cup T$.

iii) $T^p_S \cup T$ ist die K^* -Modellvervollständigung von $T^p_R \cup T$.

iv) Ist T modellvollständig , so ist auch $T^p_S \cup T$ modellvollständig.

v) Zu jeder $L \cup L_R$ - Formel vom Präfixtyp A_n (E_n) gibt es $L \cup L_R$ -Terme $t_1,..$,eine in $x_1,..$ S-torsionsfreie Formel C und eine A_n- $(E_n$-) Formel B aus L, die alle neuen Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) vorkommen, positiv (negativ) enthält, sodaß

$T^p_S \vdash C(x_1,..) \rightarrow B(t_1,..) \rightarrow A$ $(C(x_1,..) \rightarrow A \rightarrow B(t_1,..))$

und

$T^p_S \vdash A \rightarrow B(t_1,..)$ $(B(t_1,..) \rightarrow A)$.

Ist $n \neq o$, findet man die t_i bereits in L_R .

vi) Jede Aussage A aus $L \cup L_R$ ist bzgl. T_S^p zu einer reinen L-Aussage äquivalent , die zum gleichen Präfixtyp wie A gehört und in der alle neuen Relationszeichen aus L , die in A positiv (negativ) vorkommen , positiv (negativ vorkommen.

vii) Ist T vollständig , so ist auch $T_S^p \cup T$ vollständig.

viii) Ist T entscheidbar , so ist auch $T_S^p \cup T$ entscheidbar.

ix) Seien $(K^i,..)$ $i=1,2$ Modelle von T_S^p und

$$(\Gamma^1, R_1^1,..) \equiv (\Gamma^2, R_1^2,..) \quad \text{bzgl. } L \text{ .Dann ist auch}$$

$$(K^1, \Gamma^1,..) \equiv (K^2, \Gamma^2,..) \quad \text{bzgl. } L \cup L_R \quad .$$

Beweis: Der Beweis geht wie der Beweis von Satz IV 7 . Dabei beachte man , daß in T_R ableitbar ist

$$T_R \vdash \bigvee_{x_1} .. \bigvee_{x_n} C(x_1,..,x_n,y_1,..y_k)$$

für eine in $x_1,..,x_n$ S-torsionsfreie Formel C .

Andererseits ist eine L_R-Unterstruktur eines T_R-Modells

$$(K^1,..) \subset (K^2,..)$$

genau dann in $(K^2,..)$ S-torsionsfrei ist, wenn für jede in $x_1,..,x_n$ S-torsionsfreie Formel $C(x_1,..,x_n,y_k,..y_k)$ und $a_1,..,a_k$ aus $(K^1,..)$ es $b_1,..,b_n$ aus $(K^1,..)$ gibt , sodaß

$$(K^2,..) \Vdash C(b_1,..a_k) \; .$$

Für vi) beachte man , daß jedes T_R - Modell S-torsionsfrei über den Primkörpern $(\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{F}_p,..)$ bzw. $(\mathbb{Q},\{o\},\mathbb{Q},\mathbb{Q},..)$ ist .

Definition:

T_A sei die Theorie , die aus $T_A(\pi)$ durch Streichen der Schnittaxiome entsteht. L_o sei die zugehörige Sprache .

T^M sei die Theorie der algebraisch maximalen Modelle von T_A.

Setze $T_g^M := T^M \cup \{ v(p)=o \vee p =_K o_K \mid p \text{ prim} \}$.

Sei $\hat{L}(\mathbb{1})$ aus $\hat{L}$ durch Hinzunehmen der Konstanten $\mathbb{1}$ entstanden. Setze dann $L_o(\mathbb{1}) = L_o \cup \hat{L}(\mathbb{1})$ und

$$T_o^M := T^M \cup \{\mathbb{1} \neq \infty\} \cup \{v(p)=\mathbb{1} \vee v(p)=o \mid p \text{ prim}\} \cup$$

$$\cup \{\bigvee_x nx=\mathbb{1} = v(p) \neq o \longrightarrow \bigvee_y y^n = p \mid p \text{ prim} , n \in \mathbb{N}\} .$$

T_m bezeichne die Theorien , die aus den $T_m(\pi)$ durch Weglassen der Schnittaxiome entstehen.

T_m^H sei die Theorie der henselschen T_m - Modelle .Setze

$$\hat{T}_m^H := T_m^H \cup \{v(p) > o \longrightarrow \bigvee_y y^m = p \mid p \text{ prim}\} .$$

Satz 4

Sei (K^o, Γ^o, k^o) gemeinsamer Unterkörper der T^M.- Modelle (T_m^H - Modelle) (K^i, Γ^i, k^i) $i=1,2$. k^1 sei separabel über k^o . Γ^1/Γ^o sei torsionsfrei. Weiter sei

$$\varphi : (\Gamma^1, k^1) \longrightarrow (\Gamma^2, k^2)$$

eine isomorphe Einbettung , die (Γ^o, k^o) festläßt.

Dann existiert ein l.u.S. "$*$" und eine isomorphe Einbettung

$$\Psi : (K^1,..)^* \longrightarrow (K^2,..)^* \quad \text{mit}$$

$$\Psi_{|(K^o,..)} = id_{(K^o,..)} \quad \text{und}$$

$$\Psi_{|(\Gamma^1,k^1)^*} = \varphi^* \quad .$$

Ist φ surjektiv , so kann man Ψ surjektiv erreichen .

Beweis:

Wir wenden Satz 1 dreimal an und erhalten ein Ultralimessystem u und Schnitte

$$\pi_o : (\Gamma^o)^u \longrightarrow (K^o)^u \; , \; \pi_1 : (\Gamma^1)^u \longrightarrow (K^1)^u \; ,$$

$$\pi_2 : \varphi^u(\Gamma^1)^u \longrightarrow (K^2)^u \quad \text{mit}$$

$$\pi_o \subset \pi_1 \quad \text{und} \quad \pi_o \subset \pi_2 \quad .$$

Nach Satz IV 5 gibt es ein l.u.S v , henselsche Zwischenkörper

$$(K^o,..)^{uv} \subset (\hat{K}^i,..) \subset (K^i,..)^{uv} \quad \text{mit}$$

$$\hat{k}^1 = (k^1)^{uv} \quad , \quad \hat{\Gamma}^1 = (\Gamma^o)^{uv}$$

und einen $(K^o,..)^{uv}$ - Isomorphismus

$$\hat{\varphi} : (\hat{K}^1,..) \longrightarrow (\hat{K}^2,..) \quad \text{mit}$$

$$\hat{\varphi}|\hat{k}^1 = \varphi^{uv}|\hat{k}^1 \quad .$$

Wenn es sich um die Theorie T^M handelt ist k^1 perfekt.

Wir können also Satz IV 2 (Satz IV 6) anwenden und finden ein l.u.S. w und einen Isomorphismus

$$\psi : (K^1,..)^{uvw} \longrightarrow (K^2,..)^{uvw} \quad \text{mit}$$

$$\psi|(\Gamma^1,..)^{uvw} = \varphi^{uvw} \quad \text{und}$$

$$\hat{\varphi} \subset \psi \quad . \quad \text{qed.}$$

Definition:

Eine L_o - Formel C heißt torsionsfrei und separabel in den Variablen $x_1,..,x_n$, wenn es natürliche Zahlen $1=k_1 < k_2 < \ldots < k_r = n+1$, $n_1,..,n_{r-1}$, Terme $t_1,..,t_{r-1}$ und für $i=1,..,r-1$ in den Variablen $x_{k_i+1},..,x_{k_{i+1}-1}$ separable Formeln C_i gibt derart, daß

$$C = \bigwedge_{i=1}^{r-1} (n_i v(x_{k_i})=t_i \vee \bigwedge_y n_i y \neq t_i) \wedge C_i(x_{k_i+1},..,x_{k_{i+1}-1})$$

und von den Variablen $x_1,..,x_n$

in den t_i höchstens $x_1,..,x_{k_i-1}$

und in den C_i höchstens $x_1,..,x_{k_i}$ vorkommen .

Aus Satz 4 folgt wie früher

Satz 5

Sei L eine Erweiterung von $\hat{L}$, in der die Sorte K nicht vorkommt . $T \subset L$ sei eine Theorie . T^h bezeichne eine der Theorien T^M , T^H_m , $m=1,2,..$. Dann gilt

I)

i) Sei $(K^o,..)$ gemeinsame L_o - Unterstruktur der T^h-Modelle $(K^i,..)$ $i=1,2$. Γ^1/Γ^o sei torsionsfrei und k^1 separabel über k^o. Dann folgt aus

$$(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2) \quad \text{bzgl. } L(\Gamma^o,k^o)$$

$$(K^1,..) \equiv (K^2,..) \quad \text{bzgl. } L \cup L_o(K^o,..) \quad .$$

ii) $T^h \cup T$ ist die K-Modellvervollständigung von $T_A \cup T$ bzw. $T_m \cup T$.

iii) $T^h \cup T$ ist die K^*-Modellvervollständigung von $T_A \cup T$ bzw. $T_m \cup T$.

iv) Ist T modellvollständig , so ist auch $T^h \cup T$ modellvollständig.

v) Zu jeder $L \cup L_o$ -Formel A gibt es L_o-Terme $t_1,..,t_k$, eine in $x_1,..,x_n$ torsionsfreie und separable Formel $C(x_1,.)$ und eine reine L-Formel B vom gleichen Präfixtyp wie A, in der alle neuen Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) autreten, positiv (negativ) vorkommen, sodaß

$$T^h \vdash C(x_1,..,x_n) \rightarrow A \rightarrow B(t_1,..,t_k) \quad \text{und}$$

$$T^h \vdash B(t_1,..,t_k) \longrightarrow A \quad .$$

II) Sei T^h eine der Theorien T^M_g , $\hat{T}^H_m \cup \{v(p)=1 > o \vee v(p)=o\}$.
Im zweiten Fall sei $\hat{L}(1) \subset L$. Dann gilt:

i) Jede Aussage aus $L \cup L_o$ ist bzgl. T^h zu einer reinen L-Aussage vom gleichen Präfixtyp äquivalent, in der alle neuen Relationszeichen, die in A positiv (negativ) vorkommen, positiv (negativ) vorkommen. Wenn A nicht von Präfixtyp B_1 ist, ist diese Aussage bereits bzgl. $\hat{T}^H_m$ zu A äquivalent.

ii) Ist T vollständig, so ist auch $T^h \cup T$ vollständig.

iii) Ist T entscheidbar, so ist auch $T^h \cup T$ entscheidbar.

iv) Seien $(K^i,..)$ i=1,2 Modelle von T^h. Dann folgt aus

$(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. L

$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L \cup L_o$.

III) Sei $\hat{L}(\mathbb{1}) \subset L$. Dann gilt

i) Jede Aussage A aus $L \cup L_o$ ist bzgl. T^M_o zu einer reinen L-Aussage äquivalent, die zum gleichen Präfixtyp wie A gehört und in der alle neuen Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) vorkommen, positiv (negativ) vorkommen.

ii) Ist T vollständig, so ist auch $T^M_o \cup T$ vollständig.

iii) Ist T entscheidbar, so ist auch $T^M_o \cup T$ entscheidbar

iv) Seien $(K^i,..)$ i=1,2 Modelle von T^M_o. Dann folgt aus

$(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. L

$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L \cup L_o$.

v) Jede Aussage A aus $L \cup L_o$ ist bzgl.

$\hat{T}^H_m \cup \{v(p)=\mathbb{1} \vee v(p)=o \mid p \text{ prim}\}$

zu einer reinen L-Aussage äquivalent, die von gleichen Präfixtyp wie A ist und in der alle neuen Relationszeichen, die in A positiv (negativ), positiv (negativ) vorkommen.

<u>Beweis</u>:

Der Beweis folgt den früheren Mustern bei den Sätzen

2, IV 3 und 7. Wir beweisen hier nur Teil III i):
Zunächst überlegt man leicht, daß, wenn man in III i T^M_o durch $T^M_o(\pi)$ ersetzt, die Behauptung leicht - analog zum Beweis Satz IV 7 vi) - aus Satz IV 3 v) folgt.

III i) ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß $T^M_o(\pi)$ konservative Erweiterung von T^M_o ($\subset L \cup L_o(\mathbb{1})$) ist.

Dazu genügt es zu zeigen, daß es zu jedem Modell von T^M_o einen Ultralimes gibt, der einen Schnitt hat mit $\pi(\mathbb{1}) = p$ falls $v(p) > o$.

Sei also (K,Γ,k) ein Modell von T^M_o. Sei H die divisible Hülle von $\mathbb{1}$ in Γ. Wir zeigen zunächst, daß ein Homomorphismus

$$\hat{\pi} : H \to K^{\cdot} \quad \text{mit } \hat{\pi}(\mathbb{1}) = p \text{ und } v \circ \hat{\pi} = id_H$$

existiert.:

Sei M eine endliche Teilmenge von H und H_M die von M erzeugte Untergruppe. H_M ist zyklisch. Sei also $H_M = \langle z_o \rangle$ und $nz_o = \mathbb{1}$. Nach Definition von T^M_o gibt ein $x_o \in K$ mit $x_o^n = p$. Durch

$\pi_M : z_o \mapsto x_o$

wird ein Homomorphismus

$\pi_M : H_M \to K^{\cdot}$ mit $\pi_M(\mathbb{1})=p$ und $v \circ \pi_M = id_{H_M}$

definiert.

Sei $I := S_\omega(H)$ und U ein Ultrafilter auf I der die Mengen $U_M := \{X \in I \mid M \subset X\}$ für alle $M \in I$ enthält.

Dann ist $\hat{\pi} := \prod_{M \in I} \pi_M /_U \mid H$ ein Homomorphismus von H in $K^I/_U$ mit $\hat{\pi}(\mathbb{1})=p$ und $v \circ \hat{\pi} = id_H$.

Um die Behauptung zu beweisen, zeigen wir, daß $\hat{\pi}(H) \subset K$. Sei also $x \in H$ und $mx = n \cdot \mathbb{1}$. Dann ist also $(\pi(x))^m = p^n$. D.h. $\hat{\pi}(x)$ ist algebraisch über K und liegt daher in K.

Nun ist $\Gamma/_H$ torsionsfrei. Also existiert nach Satz 1 ein Ultralimessystem "$*$" und ein Schnitt

$\pi : \Gamma^* \longrightarrow K^*$ mit $\hat{\pi}^u \subset \pi$. qed.

Bemerkung :

Aus Satz 5 folgt mit Hilfe eines noch unveröffentlichten Resultats von Eršov aus der rekursiven Algebra das folgende Analogon zum Satz von Rabin

Jedes rekursive Modell von T_A bzw. T_m besitzt eine rekursive algebraische unmittelbare Erweiterung, die Modell von T^M bzw. T^H_m ist.

In einem besonderen Fall können wir auch ohne Schnitt Quantorenelimination erreichen:

Satz 6

Sei T_r die Theorie der henselschen Körper, deren Restklassenkörper die Charakteristik null haben und radikal abgeschlossen sind. Sei L eine Erweiterung von L_o, in der die Sorte K nicht vorkommt. $T \subset L$ sei eine Theorie. Dann gilt

i) Sei $(K^o,..)$ eine gemeinsame L_o - Unterstruktur der $T_r \cup T$ - Modelle $(K^i,..)$ $i=1,2$. Dann folgt aus

$(\Gamma^1,k^1) \equiv (\Gamma^2,k^2)$ bzgl. $L(\Gamma^o,k^o)$

$(K^1,..) \equiv (K^2,..)$ bzgl. $L \cup L_o(K^o,..)$.

ii) Jede Formel A aus $L \cup L_o$ ist bzgl. T_r einer Formel der Form $B(t_1,..t_n)$ äquivalent. Dabei sind $t_1,...,t_n$ L_o-Terme und B ist eine reine L-Formel, die den gleichen Präfixtyp wie A hat und in der alle neuen Relationszeichen aus L, die in A positiv (negativ) vorkommen, positiv (negativ) vorkommen.

iii) Erlaubt T Quantorenelimination, so erlaubt auch $T_r \cup T$ Quantorenelimination.

Beweis:

Wie früher folgt die Behauptung aus dem folgenden

Hilfssatz:

Sei $(K^o,..)$ ein gemeinsamer Unterkörper der T_r-Modelle $(K^i,..)$. Weiter sei

$\varphi:(\Gamma^1,k^1) \longrightarrow (\Gamma^2,k^2)$

eine isomorphe Einbettung, die (Γ^o,k^o) festläßt. Dann gibt es ein l.u.S. "$*$" und eine isomorphe Einbettung über $(K^o,..)$

$\psi: (K^1,..)^* \longrightarrow (K^2,..)^*$ mit

$\psi|_{(\Gamma^1,k^1)^*} = \varphi^*$.

Beweis:

Sei $\hat{\psi}$ ein maximaler Isomorphismus über $(K^o,..)$

$\hat{\psi}: (\hat{K}^1,..) \longrightarrow (\hat{K}^2,..)$

von Zwischenkörpern $(K^o,..) \subset (\hat{K}^i,..) \subset (K^i,..)$ $i=1,2$, der

$\hat{\psi}|_{(\hat{\Gamma}^1,\hat{k}^1)} = \varphi|_{(\hat{\Gamma}^1,\hat{k}^1)}$ erfüllt.

Da sich der Isomorphismus auf die henselschen Hüllen fortsetzt sind die $(\hat{K}^i,..)$ henselsch. Die Restklassenkörper haben die Charakteristik o. Also folgt aus Satz I 8, daß $\hat{k}^1 = k^1$. $(\hat{K}^i,..)$ $i=1,2$ ist also wieder Modell von T_r. Wir bemerken, daß in allen Modellen von T_r alle Wurzeln aus Elementen vom Wert o gezogen werden können.

Denn sei

$f = X^n - a$ und $v(a) = o$. Dann gibt es ein b aus dem Körper, sodaß $res(b^n) = res(a) \neq o$. Also ist $res(f(b)) = o$ und $res(f'(b)) = n \cdot res(b^{n-1}) \neq o$.

Also hat f wegen der Henseleigenschaft eine Nullstelle.

Wir können jetzt schließen, daß $\Gamma^1/\hat{\Gamma}^1$ torsionsfrei ist.

Denn sei $x \in \Gamma^1 \setminus \hat{\Gamma}^1$ und $n > o$ minimal mit $nx \in \hat{\Gamma}^1$.

Sei x_1 beliebig aus K^1 mit $v(x_1) = x$ und $x_2 = \varphi(x_1)$.

Sei b_1 aus $\hat{K}^1$ mit $v(b_1) = nv(x_1)$ und $b_2 = \varphi(b_1)$.
Dann ist für $i=1,2$ $v(b_i/x_i^n) = o$ und es gibt $y_i \in K^i$
mit $y_i^n = b_i/x_i^n$. Also ist für $z_i := y_i \cdot x_i$
$z_i^n - b_i = o$. Da $v(z_i) = x_i$, ist wegen der minimalen Wahl von n und der Gradungleichung $X^n - b_i$ das Minimalpolynom von z_i über K^i, und wir können vermöge

$\tilde{\varphi} : z_1 \mapsto z_2$

$\hat{\varphi}$ zu einem Isomorphismus

$\tilde{\varphi} : \hat{K}^1(z_1) \longrightarrow \hat{K}^2(z_2)$ fortsetzen.

Da die $(\hat{K}^i, ..)$ henselsch sind, ist $\tilde{\varphi}$ mit der Bewertung verträglich. Da nach Voraussetzung die Restklassenkörper nicht größer werden, sieht man leicht, daß $\tilde{\varphi}$ auch mit der Restklassenabbildung verträglich ist. Das widerspricht der maximalen Wahl von $\hat{\varphi}$.

Da $T^M \subset T_r$, folgt nun aus der Torsionsfreiheit und Satz 4 die Behauptung des Hilfssatzes. qed.

Literaturverzeichnis

[1] J.Ax and S.Kochen, "Diophantine problems over local fields I,II" American Journal of Mathematics vol. 87, (1965), pp.605-630, pp.631-648

[2] J.Ax and S.Kochen, "Diophantine problems over local fields III, Decidable fields" Annals of Math.83 (1966), S. 437-456

[3] P.J.Cohen, "Decision Procedures for Real and p-Adic fields" Stanford University 1967

[4] Ju.L.Eršov, "On elementary theories of local fields" ; Algebra i logika Sem. 4 (1965) no.2,S.5 - 30

[5] Ju.L.Eršov, "Über die elementare Theorie maximal bewerteter Körper" (Russisch) Algebra i logika 4 - 6, (1965 - 1967)

[6] I.Kaplansky, "Maximal fields with valuations" Duke Math. Journal 9 (1942), S.303-321

[7] H.J.Keisler, "Limit ultrapowers" Trans.AMS 107 (1963), S.382

[8] S.Kochen, "Ultraproducts in the theory of models" Annals of Math. 74 (1961), S.221-261

[9] Serge Lang, "Algebra" Addison Wesley 1965

[10] P.Ribenboim, "La conjecture d'Artin sur les equations diophantiennes" Queen's Papers on Pure and Applied Mathematics No. 14, Kingston 1968

[11] P.Ribenboim, "Théorie des valuations" Les Presses de l'Université de Montreal, 1964

[12] A.Robinson, "Introduction to model theory and to the metamathematics of Algebra" Amsterdam 1963

[13] A.Robinson, "Relative model-completeness and the elimination of quantifiers" Dialectica, 12 (1958), S.394-406

[14] J.R.Shoenfield, "Mathematical Logic" Addison-Wesley 1967

[15] V.Weispfenning, "Elementary theories of Valued fields" Diss. Heidelberg 1971

[16] S.Feferman, "Persistent and invariant formulas for outer extensions" Compositio Mathematica, Vol 20, 1968

[17] P.Eklof,G.Sabbagh, "Model-completions and modules" Annals of Mathematical Logic, Vol.2, 1970

Lebenslauf

Am 13.8.1948 wurde ich als Sohn von Heinrich Ziegler und seiner Ehefrau Katharina Ziegler, geb. Schütte, in Kassel geboren. Von 1955 bis 1959 besuchte ich dort die Volksschule, anschließend die Wilhelmsschule in Kassel, an der ich im Sommer 1967 das Abitur machte.
Im Wintersemester 1967/68 begann ich in Köln Mathematik zu studieren. Im August 1969 heiratete ich Susanne Heyer. Im Mai 1971 legte ich die Diplomprüfung im Fach Mathematik an der Kölner Universität ab. Anschließend arbeitete ich im Mathematischen Institut der Universität Köln als wissenschaftliche Hilfskraft und schrieb während dieser Zeit meine Dissertation.

Spezialdruckerei für Dissertationen. F. Hansen, 5 Köln 1, Otto-Fischer-Str. 31, Tel. 41 96 93

61

Die elementare Theorie der henselschen Körper

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

vorgelegt von
Martin Ziegler
aus Kassel

Köln 1972