Galoiscohomologie

M.Z.*

14. Oktober 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Spektralsequenzen

1.1 Die Spektralsequenz eines exakten Paares

Wir arbeiten in einer beliebigen abelschen Kategorie. R-Moduln, graduierte Moduln, Komplexe, filtrierte Moduln etc.

Definition. *Ein Differentialobjekt ist ein Objekt E mit einen Endomorphismus $d : E \to E$ mit $d^2 = 0$.*

Eine Spektralsequenz ist eine Folge (E_0, d_0), $(E_1, d_1), \dots$ von Differentialobjekten mit

$$E_{r+1} = \mathrm{H}(E_r, d_r).$$

Jedes E_r ist kanonisch isomorph zu einem Quotienten Z_r/B_r für Unterobjekte Z_r, B_r von E_0 mit

$$0 = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset Z_1 \subset Z_0 = E_0.$$

Wir setzen $Z_\infty = \bigcap_{r\geq 0} Z_r$ und $B_\infty = \bigcup_{r\geq 0} B_r$ und sagen, daß die Spektralsequenz $\{E_r\}$ gegen

$$E_\infty = Z_\infty/B_\infty$$

konvergiert. Die Konvergenz ist *endlich*, wenn die Z_r und B_r sich für genügend großes r nicht mehr ändern. Das bedeutet, daß $d_r = 0$ für genügend großes r.

*Skript für den zweiten Teil eines Schnellkurses in Freiburg

Definition. *Ein exaktes Paar ist ein exaktes kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

Jedem exakten Paar läßt sich auf folgende Weise eine Spektralsequenz zuordnen.

$$(E_0, d_0) = (E, \beta\gamma)$$

ist offenbar ein Differentialobjekt. Wir setzen $E_1 = H(E_0, d_0)$, $D_1 = \alpha D_1$ und definieren

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 : D_1 \to D_1 & \text{induziert durch} & \alpha \\ \beta_1 : D_1 \to E_1 & \text{induziert durch} & \beta\alpha^{-1} \\ \gamma_1 : E_1 \to D_1 & \text{induziert durch} & \gamma \end{array}$$

Lemma 1.1.1 ([1, VIII 1.1])**.** *α_1, β_1 und γ_1 sind wohldefiniert. Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & D_1 \arrow[dl, "\beta_1"] \\ & E_1 \arrow[ul, "\gamma_1"] & \end{tikzcd}$$

ist ein exaktes Paar.

Beweis. Nachrechnen. □

Folgerung 1.1.2. *Zu jedem exakten Paar $(E, D, \alpha, \beta, \gamma)$ gehört eine kanonische Spektralsequenz $\{E_r\}$ mit $(E_0, d_0) = (E, \beta\gamma)$.* □

Lemma 1.1.3 ([1, VIII 1.2])**.** *Wir haben*

$$E_r = \gamma^{-1}\alpha^r D/\beta(\alpha^{-r}(0)).$$

d_r wird induziert von $\beta\alpha^{-r}\gamma$. □

Beweis. Es ist $D_r = \alpha^r D$. α_r wird von α induziert, β_r von $\beta\alpha^{-r}$ und γ_r von γ. □

1.2 Die Spektralsequenz eines gefilterten Differentialobjekts

Ein gefiltertes Differentialobjekt (F, d) hat eine Filtration

$$F = F^0 \supset F^1 \supset \cdots$$

von Unterobjekten mit $dF^p \subset F^p$. Die Filtration heißt *endlich*, wenn $F_{N+1} = 0$ für ein N.

Das zugehörige graduierte Objekt ist

$$\operatorname{Gr} F = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} F^p/F^{p+1}.$$

Die Filtration von F überträgt sich auf $\mathrm{H}(F)$. Man definiert $\mathrm{H}(F)^p$ als das Bild von $\mathrm{H}(F^p)$ in $\mathrm{H}(F)$.

Proposition 1.2.1 ([2, IV 9.1]). *Sei F ein endlich gefiltertes Differentialobjekt. Dann gibt eine Spektralsequenz aus graduierten Differentialobjekten E_r mit*

$$E_0 = \operatorname{Gr} F; \qquad\qquad E_1 = \operatorname{H}(\operatorname{Gr} F)$$

$\{E_r\}$ konvergiert in jeder Dimension endlich gegen $\operatorname{Gr}\operatorname{H}(F)$. Die Differentiale $d_r : E_r \to E_r$ haben den Grad r.

Wenn $E_r = \bigoplus_{p\geq 0} E_r^p$, ist also $d_r : E_r^p \to E_r^{p+r}$. Man drückt die behauptete Konvergenz symbolisch aus durch

$$E_r \Rightarrow \operatorname{H}(F).$$

Beweis. Im Beweis müssen wir $\mathbb{Z}$–Graduierung verwenden. Der Satz ergibt sich durch Einschränkung auf nicht-negative Dimensionen. Wir setzen $F_i = F$ für negative i.

Wir starten mit $E_0 = \operatorname{Gr}' F = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} F^p/F^{p+1}$, d_0 induziert von d, und

$$E_1 = \operatorname{H}(\operatorname{Gr}' F) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \operatorname{H}(F^p/F^{p+1}).$$

Betrachte die exakte Folge

$$0 \to F^{p+1} \to F^p \to F^p/F^{p+1} \to 0.$$

Die zugehörige „lange Homologiesequenz“ ist das exakte Dreieck

$$\begin{tikzcd} \operatorname{H}(F^{p+1}) \arrow[rr, "\alpha_1"] & & \operatorname{H}(F^p) \arrow[dl, "\beta_1"] \\ & \operatorname{H}(F^p/F^{p+1}) \arrow[ul, "\gamma_1"] & \end{tikzcd}$$

Wenn man $D_1 = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \operatorname{H}(F^p)$ setzt[1], erhält man das exakte Paar

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & D_1 \arrow[dl, "\beta_1"] \\ & E_1 \arrow[ul, "\gamma_1"] & \end{tikzcd}$$

Dabei hat α den Grad -1, β den Grad 0 und γ den Grad 1. Also hat $d_1 = \beta\gamma$ den Grad 1. Die gewünschte Spektralsequenz erhalten wir durch iteriertes Anwenden von Lemma 1.1.2. Aus Lemma 1.1.3 folgt, daß d_n den Grad n hat[2].

Es bleibt zu zeigen, daß E_r^p gegen $\operatorname{H}(F)^p/\operatorname{H}(F)^{p+1}$ konvergiert. Sei $F_{N+1} = 0$ und $r > 0$. Dann ist D_r^i das Bild von $\operatorname{H}(F^{i+r-1})$ in $\operatorname{H}(F^i)$. Wenn also $r > N - i + 1$, ist $D_r^i = 0$; und wenn $i \leq 0$, ist $D_r^i = H(F)^{i+r-1}$.

In der exakten Sequenz

$$D_r \xrightarrow{\alpha_r} D_r \xrightarrow{\beta_r} E_r \xrightarrow{\gamma_r} D_r$$

[1]Hier braucht man die $\mathbb{Z}$–Graduierung!
[2]Der Index verschiebt sich um 1.

hat α_r den Grad -1, β_r den Grad $r-1$ und γ_r den Grad 1. Wir haben also in jeder Dimension p die exakte Sequenz

$$D_r^{p-r+2} \xrightarrow{\alpha_r} D_r^{p-r+1} \xrightarrow{\beta_r} E_r^p \xrightarrow{\gamma_r} D_r^{p+1}.$$

Wenn $r > N-p-1$ und $r \geq p+2$, ergibt das die exakte Sequenz

$$\mathrm{H}(F)^{p+1} \to \mathrm{H}(F)^p \to E_r^p \to 0$$

und daher $E_r^p = \mathrm{H}(F)^p / \mathrm{H}(F)^{p+1}$. $\square$

Proposition 1.2.2 ([2, IV 9.1])**.** *Die in Proposition 1.2.1 konstruierte Spektralsequenz läßt sich auch auf folgende Weise angegeben: Setze* $Z_r^p = \{x \in F^p \mid dx \in F^{p+r}\}$ *und*

$$E_r^p = Z_r^p / \big(dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}\big).$$

d bildet Z_r^p nach Z_r^{p+r} ab und induziert eine Abbildung

$$d_r : E_r^p \to E_r^{p+r}.$$

Beweis. Es ist $Z_{-1}^i = Z_0^i = F^i$. Also ist

$$Z_0^p / \big(dZ_{-1}^{p+1} + Z_{-1}^{p+1}\big) = F^p / F^{p+1} = E_0^p.$$

Wir nehmen jetzt an, daß $r > 0$ und beziehen uns auf den Beweis von 1.2.1. Nach Lemma 1.1.3 ist

$$E_r^p = \gamma_1^{-1} \alpha_1^{r-1}\, \mathrm{H}(F^{p+r}) / \beta_1(\alpha_1^{-r+1}(0)).$$

Sei Z die Menge aller $x \in F^p$, die in $\mathrm{H}(F^p/F^{p+1})$ ein Element von $\gamma_1^{-1}\alpha_1^{r-1}\,\mathrm{H}(F^{p+r})$ repräsentieren. x gehört genau dann zu Z, wenn $dx \in F^{p+1}$ und γ_1 die Klasse von x in das Bild von $\mathrm{H}(F^{p+r})$ in $\mathrm{H}(F^{p+1})$ abbildet. Die Klasse von x wird aber von γ_1 in die Klasse von dx abgebildet. Die letzte Bedingung bedeutet also, daß $dx \in F^{p+r} + dF^{p+1}$. Also ist

$$Z = Z_r^p + F^{p+1}.$$

B sei die Menge aller $x \in F^p$, die in $\mathrm{H}(F^p/F^{p+1})$ ein Element von $\beta_1(\alpha_1^{-r+1}(0))$ repräsentieren. $\alpha_1^{-r+1}(0)$ (in der richtigen Dimension) ist der Kern von $\mathrm{H}(F^p) \to \mathrm{H}(F^{p-r+1})$, wird also von den Elementen von $F^p \cap dF^{p-r+1}$ repräsentiert. Also ist

$$B = F^p \cap dF^{p-r+1} + F^{p+1}$$

und es folgt

$$E_r^p = Z/B = Z_r^p / \big(B \cap Z_r^p\big).$$

Die Behauptung folgt jetzt aus

$$(B \cap Z_r^p) = (dF^{p-r+1} + F^{p+1}) \cap Z_r^p = dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}.$$

$\square$

1.3 Spektralsequenz eines gefilterten Komplexes

Sei

$$X \ = \ X_0 \xrightarrow{\partial} X_1 \xrightarrow{\partial} \cdots$$

ein positiver Komplex mit eine Filtrierung

$$X = F^0 \supset F^1 \supset \cdots .$$

Die zu X gehörende Spektralsequenz $\{E_r^p\}$ erbt von X eine zusätzliche Graduierung, die allerdings so notiert wird, daß die „Dimension“ von $E_r^{p,q}$ gleich $p+q$ ist, q ist also $\geq -p$. Insbesondere haben wir für $n = p+q$

$$E_0^{p,q} = F_n^p / F_n^{p+1}; \qquad\qquad E_1^{p,q} = \mathrm{H}_n(F^p/F^{p+1}).$$

Der Bi-grad von $d_r : E_r \to E_r$ wäre in der „richtigen“ Notation $(r,1)$, in der neuen Notation aber $(r, -r+1)$, das heißt, daß

(1) $\quad d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}.$

Aus dem Beweis von Proposition 1.2.1 ergibt sich sofort

Lemma 1.3.1 ([1, VIII 3.5])**.** *Wenn die Filtrierung von X endlich ist, daß heißt, wenn es für alle n ein N gibt mit $F_n^{N+1} = 0$, konvergiert, für $n = p+q$, $E_r^{p,q}$ endlich gegen $\mathrm{H}_n(F)^p / \mathrm{H}_n(F)^{p+1}$.*

1.4 Spektralsequenz eines Doppelkomplexes

Ein *Doppelkomplex* K besteht aus Objekten $K_{p,q}$, $p,q \in N$ und Morphismen $d' : K_{p,q} \to K_{p+1,q}$ und $d'' : K_{p,q} \to K_{p,q+1}$ mit

$$d'^2 = d''^2 = 0 \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad d'd'' + d''d' = 0.$$

Der totale Komplex $\mathrm{Tot}\, K$ besteht aus den Objekten

$$K_n = \bigoplus_{s+r=n} K_{s,r}$$

mit dem Differential $d = d' + d''$. $\mathrm{Tot}\, K$ hat zwei Filtrierungen

$${}'K_n^p = \bigoplus_{\substack{s+r=n \\ s \geq p}} K_{s,r}$$

und

$${}''K_n^p = \bigoplus_{\substack{s+r=n \\ r \geq p}} K_{s,r}$$

$\{{}'E_r\}$ und $\{{}''E_r\}$ seien die zugehörigen Spektralsequenzen. Nach Lemma 1.3.1 konvergieren beide in jeder Dimension endlich gegen $\mathrm{Gr}\,\mathrm{H}\,\mathrm{Tot}(K)$, wobei man jeweils $\mathrm{H}\,\mathrm{Tot}(K)$ mit der richtigen Filtrierung versehen muß.

Proposition 1.4.1 ([1, VIII 9.1])**.** *Es gilt*

$${}'E_0^{p,q} = K_{p,q}; \qquad {}'E_1^{p,q} = H_q(K_{p,*}, d''); \qquad {}'E_2^{p,q} = H_p(H_q(K, d''), d')$$

und entsprechend

$${}''E_0^{p,q} = K_{q,p}; \qquad {}''E_1^{p,q} = H_q(K_{*,p}, d'); \qquad {}''E_2^{p,q} = H_p(H_q(K, d'), d'')$$

Beweis. ${}'E_0^{p,q} = {}''E_0^{p,q} = K_{p,q}$ ist klar. Man rechnet leicht nach, daß ${}'d_0$ von d'' und ${}''d_0$ von ${}'d$ induziert werden. Daraus folgen die Formeln für ${}'E_1$ und ${}''E_1$. Ebenso rechnet man nach, daß ${}'d_1$ von ${}'d$ und ${}''d_1$ von ${}''d$ induziert wird, woraus der Rest folgt. □

Wir vermerken noch die offensichtliche Tatsache:

Lemma 1.4.2. *Die Graduierung von E_r ist* positiv *in dem Sinn, daß $E_r^{p,q} = 0$ für negative q.*

Die Filtrierung von $\mathrm{H}\,\mathrm{Tot}\,K$ hat in der Dimension die Länge $n+1$:

$$\mathrm{H}_n \,\mathrm{Tot}\,K = (\mathrm{H}_n \,\mathrm{Tot}\,K)^0 \supset (\mathrm{H}_n \,\mathrm{Tot}\,K)^1 \supset \cdots (\mathrm{H}_n \,\mathrm{Tot}\,K)^{n+1} = 0.$$

${}'E_r^{p,q}$ (bzw. ${}''E_r^{p,q}$) konvergiert endlich gegen $(\mathrm{H}_{p+q}\,\mathrm{Tot}\,K)^p/(\mathrm{H}_{p+q}\,\mathrm{Tot}\,K)^{p+1}$.

1.5 Spektralsequenzen im engeren Sinn

Ich nenne ein Spektralsequenz (E_r, d_r) eine Spektralsequenz *im engerem Sinn*, wenn die E_r eine positive Graduierung $E_r^{p,q}$ haben, für die d_r den Grad $(r, 1-r)$ hat.

$$E_r \Rightarrow X$$

soll bedeuten, daß X ein gefiltertes graduiertes Objekt mit $X_n^{n+1} = 0$ ist, und, wenn $n = p+q$,

$$E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q} = X_n^p / X_n^{p+1}$$

für genügend große r.

Wir halten eine solche Sequenz fest.

Lemma 1.5.1. *Es gibt kanonische Epimorphismen* $(p > 0)$

$$E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_3^{p,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_{p+1}^{p,0} \cong E_\infty^{p,0}$$

und kanonische Monomorphismen

$$E_1^{0,q} \hookleftarrow E_1^{0,q} \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow E_{q+2}^{0,q} \cong E_\infty^{0,q}.$$

Beweis. Die Pfeile $E_r^{p,0} \xrightarrow{d_r}$ sind Null, wenn $r \geq 2$. Die $\xrightarrow{d_r} E_r^{p,0}$ sind Null, wenn $r \geq p+1$. Daraus folgt die erste Behauptung.

Die $\xrightarrow{d_r} E_r^{0,q}$ sind Null ab $r = 1$ und die $E_r^{0,q} \xrightarrow{d_r}$ sind Null ab $r = q+2$. Daraus folgt die zweite Behauptung. □

Folgerung 1.5.2. *Es gibt eine kanonische exakte Sequenz*

$$0 \to E_2^{1,0} \xrightarrow{\alpha} X_1 \xrightarrow{\beta} E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \xrightarrow{\gamma} X_2.$$

Beweis.

- α ist $E_2^{1,0} \cong (X_1)^1 \rightarrowtail X_1$.
- β ist $X_1 \to X_1/X_1^1 \cong E_3^{0,1} \rightarrowtail E_2^{0,1}$.
- γ ist $E_2^{2,0} \twoheadrightarrow E_3^{2,0} \cong (X_2)^2 \rightarrowtail X_2$.

□

Man beweist analog für alle $n \geq 1$

Lemma 1.5.3. *Wenn $E_2^{n-q,q} = E_2^{n+1-q,q} = 0$ für alle $q \in [1, n-1]$, hat man eine exakte Sequenz*

$$0 \to E_2^{n,0} \xrightarrow{\alpha} X_n \xrightarrow{\beta} E_2^{0,n} \xrightarrow{d_{n+1}} E_2^{n+1,0} \xrightarrow{\gamma} X_{n+1}.$$

2 Die Lyndon-Hochschild-Serre Spektralsequenz

2.1 $\mathrm{C}_N(G, A)$

Sei G eine profinite Gruppe und A ein G–Modul. $\mathrm{C}_1(G, A)$ sei der Komplex, der gegeben ist durch $\mathrm{C}_1^q(G, A) = \{x : G^{q+1} \mid x \text{ stetig}\}$ und

$$(\partial x)(\sigma_0, \ldots, \sigma_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i x(\sigma_0, \ldots, \widehat{\sigma_i}, \ldots, \sigma_{q+1}).$$

G operiert auf $\mathrm{C}_1(G, A)$ durch

$$(\sigma x)(\sigma_0, \ldots, \sigma_q) = \sigma x(\sigma^{-1}\sigma_0, \ldots, \sigma^{-1}\sigma_q).$$

∂ ist offenbar verträglich mit dieser Operation.

Sei N in abgeschlossener Normalteiler von G. Wir definieren den Subkomplex $\mathrm{C}_N(G, A)$ als $\mathrm{C}_1(G, A)^N$. Offenbar ist $\mathrm{C}_G(G, A) = \mathrm{C}(G, A)$.

Lemma 2.1.1. $\mathrm{C}_N(G, A) \cong \mathrm{C}(G, \mathrm{M}_G^N(A))$

Dabei ist

$$\mathrm{M}_G^N(A) = \{f : G \to A \mid f \text{ stetig und } \forall \nu \in N, \sigma \in G\ f(\nu\sigma) = \nu f(\sigma)\}$$

mit der Operation $(\tau y)(\sigma) = y(\sigma\tau)$.

Beweis. Der Isomorphismus $\mathrm{C}_N^q(G, A) \cong \mathrm{C}(G^q, \mathrm{M}_G^N(A))$ ist gegeben durch $x \longleftrightarrow y$, wobei

$$y(\sigma_0, \ldots, \sigma_q)(\sigma) = x(\sigma\sigma_0, \ldots, \sigma\sigma_q)$$

und

$$x(\sigma_0, \ldots, \sigma_q) = y(\sigma_0, \ldots, \sigma_q)(1).$$

□

Folgerung 2.1.2. $\mathrm{H}^q(N, A) = \mathrm{H}^q(\mathrm{C}_N(G, A))$.

Beweis. Es ist $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}_N(G, A)) = \mathrm{H}^q(G, \mathrm{M}_G^N(A))$ und nach [3, II, 7.4] ist $\mathrm{H}^q(G, \mathrm{M}_G^N(A)) = \mathrm{H}^q(N, A)$. □

Die $\mathrm{C}_N^p(G, A)$ sind auf natürliche Weise ein G/N–Modul.

Lemma 2.1.3. *Es ist*

$$\mathrm{H}^0(G/N, \mathrm{C}_N^p(G, A))) = \mathrm{C}^p(G, A)$$

und

$$\mathrm{H}^q(G/N, \mathrm{C}_N^p(G, A)) = 0$$

für alle $q > 0$.

Beweis. Die erste Behauptung ist klar. Sei also $q > 0$ und x ein Cozyklus aus $\mathrm{C}^q(G/N, \mathrm{C}^p_N(G,A))$. Um ein y in
$\mathrm{C}^{q-1}(G/N, \mathrm{C}^p_N(G,A))$ zu definieren setzen wir

$$y(\overline{\sigma_0}, \dots, \overline{\sigma_{q-1}})(\tau_0, \dots, \tau_p) = x(\overline{\sigma_0}, \dots, \overline{\sigma_{q-1}}, \overline{\tau_0})(\tau_0, \dots, \tau_p).$$

Daß $y \in \mathrm{C}^p_N(G,A))$ ist, ist klar. Daß

$$y(\bar\sigma\overline{\sigma_0}, \dots, \bar\sigma\overline{\sigma_{q-1}}) = \bar\sigma(y(\overline{\sigma_0}, \dots, \overline{\sigma_{q-1}})),$$

folgt aus

$$\begin{aligned} y(\bar\sigma\overline{\sigma_0}, \dots)(\tau_0, \dots) &= x(\bar\sigma\overline{\sigma_0}, \dots, \overline{\tau_0})(\tau_0, \dots) \\ &= (\bar\sigma(x(\overline{\sigma_0}, \dots, \bar\sigma^{-1}\overline{\tau_0}))(\tau_0, \dots) = \bar\sigma x(\overline{\sigma_0}, \dots, \bar\sigma^{-1}\overline{\tau_0})(\sigma^{-1}\tau_0, \dots) \\ &= \sigma y(\overline{\sigma_0}, \dots, \overline{\sigma_{q-1}})(\sigma^{-1}\tau_0, \dots) = (\bar\sigma(y(\overline{\sigma_0}, \dots)))(\tau_0, \dots). \end{aligned}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial x)(\overline{\sigma_0}, \dots, \overline{\sigma_q}, \overline{\tau_0})(\tau_0, \dots) \\ &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i x(\dots, \widehat{\overline{\sigma_i}}, \dots, \overline{\tau_0})(\tau_0, \dots) + (-1)^{q+1} x(\dots, \overline{\sigma_q})(\tau_0, \dots) \\ &= (\partial y)(\overline{\sigma_0}, \dots, \overline{\sigma_q})(\tau_0, \dots) + (-1)^{q+1} x(\dots, \overline{\sigma_q})(\tau_0, \dots). \end{aligned}$$

Es folgt $(-1)^q \partial y = x$. □

2.2 Die Spektralsequenz

Satz 2.2.1. *Sei N ein abgeschlossener Normalteiler der profiniten Gruppe G und A ein G-Modul. Dann gibt es eine Spektralsequenz (i.e.S.) $\{E_r^{p,q}\}$, mit*

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(G/N, \mathrm{H}^q(N,A)),$$

und (bei geeigneter Filtrierung)

$$E_r \Rightarrow H(G,A).$$

Beweis. Wir betrachten den Doppelkomplex

$$K_{r,s} = \mathrm{C}^r(G/N, C^s_N(G,A)),$$

wobei d' das Differential von $\mathrm{C}(G/N,-)$ ist und d'' vom Differential von $\mathrm{C}_N(G,-)$ induziert wird.

$$\{'E_r\} \Rightarrow \mathrm{H}\,\mathrm{Tot}\,K \qquad \text{und} \qquad \{''E_r\} \Rightarrow \mathrm{H}\,\mathrm{Tot}\,K.$$

seien die zugehörigen Spektralsequenzen. Wir setzen $E_r =' E_r$.

Nach 1.4.1 ist

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}_p(\mathrm{H}_q(\mathrm{C}(G/N, \mathrm{C}_N(G,A)), d''), d').$$

Weil der Funktor $\mathrm{C}_N(G/N, -)$ exakt ist, ist

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}_q(\mathrm{C}(G/N, \mathrm{C}_N(G, A)), d'') && = \mathrm{C}(G/N, \mathrm{H}_q(\mathrm{C}_N(G, A))) \\ &\text{(nach 2.1.2)} && = \mathrm{C}(G/N, \mathrm{H}^q(N, A)) \end{aligned}$$

Es folgt

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}_p(\mathrm{C}(G/N, \mathrm{H}^q(G, A)), d') = \mathrm{H}^p(G/N, \mathrm{H}^q(N, A)).$$

Damit ist die erste Behauptung gezeigt.

Für die zweite Behauptung genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{H}\,\mathrm{Tot}\,K = \mathrm{H}(G, A)$. Dazu berechnen wir zuerst $\{E_r\}$.

Aus 2.1.3 folgt

$$\mathrm{H}_q(\mathrm{C}(G/N, \mathrm{C}_N(G, A)), d') = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } q > 0 \\ \mathrm{C}(G, A) & \text{, wenn } q = 0 \end{cases}.$$

Also ist

$$''E_2^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } q > 0 \\ \mathrm{H}^p(G, A) & \text{, wenn } q = 0. \end{cases}$$

Weil d_2 den Bigrad $(2, -1)$ hat, ist $d_2 = 0$ und es folgt $''E_3 ='' E_2$ und ebenso, daß $''E_r = E_2$ für alle $r \geq 2$. Halten wir ein n fest. Dann ist für genügend große r

$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{H}^n\,\mathrm{Tot}\,K = \oplus_{p=0}^{n} {''E_r^{p,n-q}} = 0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus \mathrm{H}^n(G, A)$$

und daher $\mathrm{H}^n\,\mathrm{Tot}\,K = \mathrm{H}^n(G, A)$. □

Folgerung 2.2.2. *Es gibt eine exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{H}^1(G/N, A) \xrightarrow{inf} \mathrm{H}^1(G, A) \xrightarrow{res} \\ \xrightarrow{res} \mathrm{H}^1(N, A)^{G/N} \xrightarrow{d} \mathrm{H}^2(G/N, A^N) \xrightarrow{inf} \mathrm{H}^2(G, A). \end{aligned}$$

Beweis. Aus 1.5.2. □

Folgerung 2.2.3. *Wenn $\mathrm{H}^q(N, A) = 0$ für alle $q \in [1, n-1]$, gibt es eine exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{H}^n(G/N, A) \xrightarrow{inf} \mathrm{H}^n(G, A) \xrightarrow{res} \\ \xrightarrow{res} \mathrm{H}^n(N, A)^{G/N} \xrightarrow{d} \mathrm{H}^{n+1}(G/N, A^N) \xrightarrow{inf} \mathrm{H}^{n+1}(G, A). \end{aligned}$$

Beweis. Aus 1.5.3. □

Literatur

[1] P.J. Hilton and U. Stammbach. *A Course in Homological Algebra*, volume 4 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1970.

[2] Serge Lang. *Algebra.* Addison–Wesley Publishing Company, second edition, 1984.

[3] Luis Ribes. *Introduction of Profinite Groups and Galois Cohomology.* Number 24 in Queens' papers in pure and applied mathematics. Queen's University, Kingston, Ontario, 1970.