Hrushovskis Fusion*

A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler

4. März 2007

Wir betrachten zwei abzählbare streng–minimale Theorien T_1 und T_2 mit definierbarem Morleygrad, formuliert in zwei disjunkten Sprachen L_1 und L_2. Wir beweisen in diesem Artikel den folgenden Satz von E. Hrushovski.

Satz 0.1 ([2])**.** *$T_1 \cup T_2$ hat eine streng minimale Vervollständigung T^μ. Die Modelle M von T^μ haben die folgenden Eigenschaft: tr_i bezeichne den Transzendenzgrad im Sinn von T_i. Dann ist für jede endliche Teilmenge A von M*

$$|A| \leq \mathrm{tr}_1(A) + \mathrm{tr}_2(A).$$

1 Codes

Sei T eine abzählbare streng-minimale Theorie mit definierbarem Morleygrad.

Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen: $\mathrm{tr}(a/B)$ ist der Transzendenzgrad von a über B[1]. $\mathrm{MR}(p)$ ist der Morleyrang des Typs p. Wir haben also

$$\mathrm{tr}(a/B) = \mathrm{MR}(\mathrm{tp}(a/B)).$$

Wir schreiben

$$\phi(x) \sim^k \psi(x)$$

oder $\phi(x) \sim^k_x \psi(x)$, wenn der Morleyrang der symmetrischen Differenz von ϕ und ψ kleiner als k ist.

Wir nennen eine Formel $\chi(x, b)$ *einfach*, wenn sie Morleygrad 1 hat und wenn die Komponenten einer generischen Realisierung nicht zu $\mathrm{acl}(b)$ gehören und paarweise verschieden sind. Wenn a ein n–Tupel ist und s eine Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$, dann ist $a_s = \{a_i \mid i \in s\}$.

Ein *Code* c ist eine parameterfreie Formel

$$\phi_c(x, y),$$

wobei $|x| = n_c$, y über eine Sorte von T^{eq} läuft, mit den folgenden Eigenschaften.

(i) $\phi_c(x, b)$ ist leer[2] oder eine einfache Formel. $\phi_c(x, b)$ impliziert, daß die Komponenten von x paarweise verschieden sind.

*fusion2.tex,v 2.20, 4. März 2007. Die englische Version blackfusion.tex,v 1.19 hat eine ausführliche Einleitung und Literaturhinweise.

[1] Die maximale Länge eines über B algebraisch unabhängigen Teiltupels von a.

[2] Wir nehmen immer an, daß wenigstens ein $\phi_c(x, b)$ nicht leer ist.

(ii) Alle nicht–leeren $\phi_c(x,b)$ haben den selben Morleyrang k_c und Morleygrad 1.

(iii) Für jede Teilmenge s von $\{1,\ldots,n_c\}$ gibt es eine Zahl $k_{c,s}$, sodaß für jede Realisierung a von $\phi_c(x,b)$

$$\mathrm{tr}(a/ba_s) \leq k_{c,s}.$$

Wenn a generisch ist, tritt Gleichheit ein.

(iv) Wenn $\phi_c(x,b)$ und $\phi_c(x,b')$ nicht–leer sind und $\phi_c(x,b) \sim^{k_c} \phi_c(x,b')$, ist $b = b'$.

Die Einfachheit von $\phi_c(x,b)$ drückt sich in (iii) durch $k_{c,\{i\}} = k_c - 1$ aus. Die Forderung in (ii), daß alle $\phi_c(x,b)$ den gleichen Morleyrang k_c haben, bedeutet $k_{c,\emptyset} = k_c$. Daß der Morleygrad 1 ist, folgt natürlich schon aus der Einfachheit in (i).

Folgerung 1.1. *Sei $p \in \mathrm{S}(b)$ der Typ vom Morleyrang k_c, der $\phi_c(x,b)$ enthält. Dann ist b kanonische Basis von p.*

Beweis. Das folgt sofort aus (iv). □

Lemma 1.2. *Sei $\chi(x,d)$ eine einfache Formel. Dann gibt es einen Code c und ein $b_0 \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(d)$, sodaß $\chi(x,d) \sim^{k_c} \phi_c(x,b_0)$.*

Wir sagen, daß c die Formel $\chi(x,d)$ *codiert.*

Beweis. Setze $k_c = \mathrm{MR}(\chi(x,d))$ und $n_c = |x|$. Sei p der globale Typ vom Rang k_c, der $\chi(x,d)$ enthält, mit kanonischer Basis b_0. p enthält eine Formel $\phi(x,b_0)$ von Rang k und Grad 1. Sei a_0 eine generische Realisierung von $\phi(x,b_0)$. Für $s \subset \{1,\ldots,n_c\}$ setzen wir $k_{c,s} = \mathrm{MR}(a_0/b_0a_{0s})$. Wenn wir $\phi(x,b_0)$ etwas verstärken, können wir annehmen, daß $\phi_c(a,b_0)$ impliziert, daß die Komponenten von a paarweise verschieden sind und daß $\mathrm{tr}(a/b_0a_s) \leq k_{c,s}$ und $\mathrm{tr}(a_s/b_0) \leq (k_c - k_{c,s})$ für alle Realisierungen a von $\phi(x,b_0)$.

Betrachte folgende Eigenschaft $\mathsf{E}(b,b')$:

- $\phi(x,b)$ impliziert, daß die Komponenten von x paarweise verschieden sind.
- $\phi(x,b)$ hat Morleyrang k_c und Morleygrad 1.
- $\mathrm{tr}(a/ba_s) \leq k_{c,s}$ und $\mathrm{tr}(a_s/b) \leq (k_s - k_{c,s})$ für alle Realisierungen a von $\phi(x,b)$.
- $\phi(x,b) \sim^{k_c} \phi(x,b')$ impliziert $b = b'$.

E gilt für alle b,b', die den gleichen Typ wie b_0 haben. Andererseits ist E definierbar durch eine unendliche Disjunktion von Formeln $\epsilon(y,y')$. Es gibt also ein $\theta(y) \in \mathrm{tp}(b_0)$, sodaß $\models \theta(y) \wedge \theta(y') \rightarrow \mathsf{E}(y,y')$. Setze

$$\phi_c(x,y) = \phi(x,y) \wedge \theta(y).$$

Sei a eine generische Realisierung von $\phi_c(x,b)$. Dann folgt aus $\mathrm{tr}(a/ba_s) \leq k_{c,s}$, $\mathrm{tr}(a_s/b) \leq (k_c - k_{c,s})$ und $\mathrm{tr}(a/b) = k_c$, daß $\mathrm{tr}(a/ba_s) = k_{c,s}$. Aus der Einfachheit von $\chi(x,d)$ folgt $k_{c,\{i\}} < k_c$ für alle i. Das wiederum impliziert, daß alle nicht–leeren $\phi_c(x,b)$ einfach sind. □

Sei c ein Code, $\phi_c(x,b)$ nicht–leer und $p \in \mathrm{S}(b)$ der durch $\phi_c(x,b)$ bestimmte Typ vom Rang k_c. Dann ist b im definierbaren Abschluß einer genügend langen Morleyfolge von p. Sei m_c eine obere Schranke für die Längen dieser Morleyfolgen.

Lemma 1.3. *Für jeden Code c und jedes $\mu \geq m_c - 1$ gibt es eine parameterfreie Formel $\Psi_c(x_0, \ldots, x_\mu, y)$ mit folgenden Eigenschaften.*

(v) Sei $e_0, \ldots, e_\mu$ eine Morleyfolge von $\phi_c(x,b)$. Dann ist $\models \Psi_c(e_0, \ldots, e_\mu, b)$.

(vi) Sei $e_0, \ldots, e_\mu, b$ eine Realisierung von Ψ_c. Dann sind die e_i paarweise disjunkte Realisierungen von $\phi_c(x,b)$.

(vii) Sei $e_0, \ldots, e_\mu, b$ eine Realisierung von Ψ_c. Dann ist b im definierbaren Abschluß von je m_c–vielen der e_i.

Wir sagen dafür "$x_0, \ldots, x_\mu$ ist Pseudomorleyfolge von c über y".

Beweis. Die Eigenschaft "(e_i) ist eine Morleyfolge von $\phi_c(x,b)$" läßt sich durch einen partiellen Typ $\mathsf{M}(e_0, \ldots, b)$ beschreiben, die Eigenschaften (vi) und (vii) durch eine unendliche Disjunktion $\mathsf{D}(e_0, \ldots, b)$. Weil die nicht–leeren $\phi_c(x,b)$ einfach sind, gilt $\models \mathsf{M} \rightarrow \mathsf{D}$. Ein genügend großer Teil Ψ_c von M hat also die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Wir wählen für jeden Code (und jedes μ) vorläufig[3] eine Formel Ψ_c.

Sei c ein Code und σ eine Permutation von $\{1, \ldots, n_c\}$. Dann ist auch c^σ, definiert durch

$$\phi_{c^\sigma}(x^\sigma, y) = \phi_c(x, y),$$

ein Code und

$$\Psi_{c^\sigma}(\bar{x}^\sigma, y) = \Psi_c(\bar{x}, y)$$

definiert Pseudomorleyfolgen von c^σ.

Wir nennen zwei Codes c und c' *äquivalent*, wenn $n_c = n_{c'}$, $m_c = m_{c'}$ und

- Es gibt für alle b ein b', sodaß (in T) $\phi_c(x,b) \equiv \phi_{c'}(x,b')$ und $\Psi_c(\bar{x},b) \equiv \Psi_{c'}(\bar{x},b')$.
- Das gleiche für c und c' vertauscht.

Satz 1.4. *Es gibt eine Menge C von Codes, sodaß:*

(viii) Jede einfache Formel wird durch genau ein $c \in C$ codiert.

(ix) Für alle $c \in C$ und alle Permutationen σ ist c^σ äquivalent zu einem Code in C.[4]

In [2] wird statt (ix) gefordert, daß C unter Permutationen abgeschlossen ist. Eine solche Menge von Codes kann es nicht geben.

[3] Im Beweis von 1.4 wird diese Wahl abgeändert.

[4] Wir finden sogar ein C, für das jedes c^σ zu einer Permutation von c äquivalent ist, die zu C gehört.

Beweis. Wir fixieren ein abzählbares ω–saturiertes Modell M von T und eine Liste χ_i, $i = 1, 2, \ldots$, aller einfachen Formeln mit Parametern in M. Es genügt zu zeigen, daß sich alle χ_i durch ein $c \in C$ kodieren lassen. Wir konstruieren C als die Vereinigung einer Folge $\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset \cdots$ von endlichen Menge. Nehmen wir an, daß C_{i-1} schon definiert ist und daß C_{i-1} im Sinn von (ix) unter Permutationen abgeschlossen ist. Wenn χ_i durch ein Element von C_{i-1} kodiert werden kann, setzen wir $C_i = C_{i-1}$. Sonst wählen wir einen Code c und b_0 mit $\phi_c(x, b_0) \sim^{k_c} \chi_i$. Wir ersetzen ϕ_c durch

$$\phi_c(x, y) \wedge \text{“}\phi_c(x, y) \text{ hat keinen Code in } C_{i-1}\text{”}$$

und erhalten einen neuen Code, der immer noch χ_i kodiert. Wir können also annehmen, daß keine Permutation von c eine Formel kodiert, die auch von einem Element von C_{i-1} kodiert werden kann. Sei nun G die Gruppe aller Permutationen $\sigma \in \mathrm{Sym}(n_c)$ mit

$$\phi_c(x, b_0) \sim^{k_c} \phi_{c^\sigma}(x, b_0'))$$

für ein b_0', das denselben Typ wie b_0 hat. b_0' ist eindeutig bestimmt und darum eine $\emptyset$-definierbare Funktion von b_0. Wir schreiben $b_0' = b_0^\sigma$.

Wenn wir einen geeigneten Teil des Typs p von b_0 zu $\phi_c(x, y)$ hinzufügen[5], können wir annehmen, daß für alle b, für die $\phi_c(x, b)$ nicht–leer ist und alle σ es genau dann ein b^σ mit $\phi_c(x, b) \sim^{k_c} \phi_{c^\sigma}(x, b^\sigma)$ gibt, wenn $\sigma \in G$.

Man sieht leicht, daß

$$\phi_d(x, y) = \bigwedge_{\sigma \in G} \phi_{c^\sigma}(x, y^\sigma)$$

einen Code ist, der immer noch χ_i kodiert, und daß

$$\Psi_d(\bar{x}, y) = \bigwedge_{\sigma \in G} \Psi_{c^\sigma}(\bar{x}, y^\sigma)$$

Pseudomorleyfolgen von d definiert.

Außerdem gilt für alle $\sigma \in G$ $\phi_d(x, y) \equiv \phi_{d^\sigma}(x, y^\sigma)$ und $\Psi_d(\bar{x}, y) \equiv \Psi_{d^\sigma}(\bar{x}, y^\sigma)$, was zeigt, daß d und d^σ äquivalent ist. Schließlich wählen wir ein Vertretersystem $\rho_1, \ldots, \rho_r$ für die Rechtsnebenklassen von G in $\mathrm{Sym}(n_c)$ und setzen $C_i = C_{i-1} \cup \{d^{\rho_1}, \ldots, d^{\rho_r}\}$. □

2 Die δ–Funktion

Wir betrachten zwei streng–minimale Theorien[6] T_1 und T_2, formuliert in zwei disjunkten Sprachen T_1 und T_2.

Wenn wir die T_i durch ihre Morleyisierung ersetzen, sehen wir, daß wir das folgende annehmen können.

---

[5] Wähle ein $\rho'(y) \in \mathrm{tp}(b_0)$, sodaß $\models \neg\rho'(b_0^\sigma)$ alle $\sigma \notin G$. Der gesuchte Teil von p ist

$$\rho(y) = \bigwedge_{\sigma \in G} \rho'(b^\sigma) \wedge \bigwedge_{\sigma \notin G} \neg\rho'(b^\sigma)$$

[6] In diesem Abschnitt werden Abzählbarkeit und DMP nicht verwendet.

QE-Hypothese. T_1 und T_2 haben Quantorenelimination. Die Sprachen L_i sind relational.

Wir nehmen außerdem an, daß für T_1–Codes und T_2–Codes c die ϕ_c und Ψ_c quantorenfrei sind. T_i Typen $\mathrm{tp}_i(a/B)$ werden quantorenfrei aufgefaßt. Wir werden diese Annahme erst in Abschnitt 6 aufgeben.

Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller Modelle von $T_1^\forall \cup T_2^\forall$. Wir lassen auch $\emptyset$ als ein Element von $\mathcal{K}$ zu. Wenn die $\mathbb{C}_i$ die Monstermodelle von T_i sind, kann man die Strukturen aus $\mathcal{K}$ gleichzeitig als Teilmengen von $\mathbb{C}_1$ und als Teilmengen von $\mathbb{C}_2$ auffassen.

Für endliche $A \in \mathcal{K}$ sei

$$\delta(A) = \mathrm{tr}_1(A) + \mathrm{tr}_2(A) - |A|.$$

Es gilt

(1) $\delta(\emptyset) = 0$

(2) $\delta(\{a\}) \leq 1$

(3) $\delta(A \cup B) + \delta(A \cap B) \leq \delta(A) + \delta(B)$

Wenn $A \setminus B$ endlich ist, setzen wir

$$\delta(A/B) = \mathrm{tr}_1(A/B) + \mathrm{tr}_2(A/B) - |A \setminus B|.$$

Wenn auch B endlich ist, gilt $\delta(A/B) = \delta(A \cup B) - \delta(B)$.

B ist *stark* in A, wenn $B \subset A$ und $\delta(A'/B) \geq 0$ für alle endlichen $A' \subset A$. Wir schreiben dafür

$$B \leq A.$$

Sei $a \in A$. a ist *algebraisch* über $B \subset A$, wenn a im Sinn von T_1 oder im Sinn von T_2 algebraisch über B ist. A heißt transzendent über B, wenn kein $a \in A \setminus B$ algebraisch über B ist.

Eine echte starke Erweiterung $B \leq A$ heißt *minimal*, wenn $B \leq A' \leq A$ für kein A', das echt zwischen B und A liegt.

Lemma 2.1. *$B \lneq A$ ist genau dann minimal, wenn $\delta(A/A') < 0$ für alle A', die echt zwischen B und A liegen.*

Beweis. Die eine Richtung ist klar, weil aus $A' \leq A$ folgt, daß $\delta(A/A') \geq 0$. Umgekehrt, wenn $\delta(A/A') \geq 0$ für ein A', wählen wir ein A', für das $\delta(A/A')$ maximal ist. Dann ist $A' \leq A$ und A ist nicht minimal über B. □

Man beachte, daß für minimale Erweiterungen $A \setminus B$ endlich ist.

Lemma 2.2. *$B \leq A$ sei eine minimale Erweiterung von Elementen aus $\mathcal{K}$. Dann gibt es drei Fälle:*

(I) $\delta(A/B) = 0$, $A = B \cup \{a\}$ für ein Element $a \in A \setminus B$. a ist algebraisch über B. (algebraische minimale Erweiterung *)*

(II) $\delta(A/B) = 0$, A transzendent über B. (präalgebraische minimale Erweiterung *)*

(III) $\delta(A/B) = 1$, $A = B \cup \{a\}$ *für ein* a, *das transzendent über* B *ist.* *(* transzendente minimale Erweiterung *)*

Man beachte, daß im präalgebraischen Fall $|A \setminus B| \geq 2$.

Beweis. Wenn $A \setminus B$ ein algebraisches Element a enthält, ist $\delta(a/B) = 0$. Daraus folgt $B \cup \{a\} = A$.

Wenn A/B transzendent ist, gibt es zwei Fälle. Wenn $\delta(A/B) = 0$ ist die Erweiterung präalgebraisch minimal. Sonst ist $\delta(A'/B) \geq 1$ für jedes $A \subsetneq A' \subset A$. Für ein beliebiges $a \in A \setminus B$ ist also $B \cup \{a\} \leq A$ und darum $B \cup \{a\} = A$. $\square$

Wir definieren $\mathcal{K}^0 \subset \mathcal{K}$ durch

$$\mathcal{K}^0 = \{M \in \mathcal{K} \mid \emptyset \leq M\}.$$

Man sieht leicht, daß sich $\mathcal{K}^0$ durch eine Menge von universellen $L_1 \cup L_2$–Sätzen axiomatisieren läßt. Die folgenden beiden Lemmas folgen leicht aus (1), (2) und (3).

Lemma 2.3. *Sei* M *in* $\mathcal{K}^0$ *festgehalten und* A *eine endliche Teilmenge von* M. *Setze*

$$\mathrm{d}(A) = \min_{A \subset A' \subset M} \delta(A').$$

Dann ist d *die Dimensionsfunktion einer Prägeometrie. Das heißt,* d *erfüllt* (1), (2), (3) *und*

(4) $\quad \mathrm{d}(A) \geq 0$

(5) $\quad A \subset B \Rightarrow \mathrm{d}(A) \leq \mathrm{d}(B)$ $\square$

Lemma 2.4. *Sei* $M \in \mathcal{K}^0$ *und* A *eine endliche Teilmenge* M. *Sei* A' *eine minimale Obermenge von* A *mit* $\delta(A') = \mathrm{d}(A)$. *Dann ist* A' *die kleinste starke Teilmenge* $\mathrm{cl}(A)$ *von* M, *die* A *enthält, der* Abschluß *von* A. $\square$

3 Präalgebraische Codes

Ab jetzt sind T_1 und T wie Satz 0.1, also streng minimal, abzählbar, mit der DMP. Wir nehmen, wie auch in den nächsten beiden Abschnitten (4,5), die **QE-Hypothese** von Abschnitt 2 an.

Wir fixieren für T_i eine Menge C_i von Codes wie in Satz 1.4. Ein *präalgebraischer* Code $c = (c_1, c_2)$ besteht aus einem Code $c_1 \in C_1$ und einem Code $c_2 \in C_2$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $n_c := n_{c_1} = n_{c_2} = k_{c_1} + k_{c_2}$
- Für jede echte, nicht–leere Teilmenge s von $\{1, \ldots, n_c\}$ ist

$$k_{c_1,s} + k_{c_2,s} - (n_c - |s|) < 0$$

Wir setzen $m_c = \max(m_{c_1}, m_{c_2})$. Man beachte, daß die Einfachheit der $\phi_{c_i}(x, b)$ impliziert, daß

$$n_c \geq 2.$$

Für jede Permutation σ ist auch

$$c^\sigma = (c_1^\sigma, c_2^\sigma)$$

ein präalgebraischer Code.

T_1^{eq} und T_2^{eq} haben nur nur die Home-Sorte gemeinsam. Wir meinen darum mit $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B)$ ein Paar $b = (b_1, b_2)$ mit $b_i \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}{}_i(B)$ für $i = 1, 2$. Analog verwenden wir $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$. Eine (generische) *Realisierung* von $\phi_c(x, b)$ (über B) ist für $i = 1, 2$ eine (generische) Realisierung von $\phi_{c_i}(x, b_i)$ (über B) in Sinn von T_i. Eine *Morleyfolge* von $\phi_c(x, b)$ ist ein Morleyfolge gleichzeitig von $\phi_{c_1}(x, b_1)$ und $\phi_{c_2}(x, b_2)$. Eine *Pseudomorleyfolge* von c über b realisiert gleichzeitig $\Psi_{c_1}(\bar{x}, b_1)$ und $\Psi_{c_2}(\bar{x}, b_2)$. M ist *unabhängig* von A über B, wenn M ist unabhängig von A über B im Sinn von T_1 und von T_2 ist.

Lemma 3.1. *Sei $B \leq B \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine präalgebraische minimale Erweiterung und $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Dann gibt es einen präalgebraischen Code c und $b \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$, sodaß a generische Realisierung von $\models \phi_c(a, b)$ ist.*

Beweis. Sei $i \in \{1, 2\}$ festgehalten. Wähle $d_i \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}{}_i(B)$, sodaß $\mathrm{tp}_i(a/Bd_i)$ stationär wird und $\chi_i(x, d_i) \in \mathrm{tp}_i(a/Bd_i)$ mit Morleyrang $\mathrm{MR}_i(a/Bd_i)$ und Morleygrad 1. Weil A/B transzendent ist, ist $\chi_i(x, d_i)$ einfach. Wähle einen T_i–Code $c_i \in C_i$ und ein $b_i \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}{}_i(d_i)$ mit $\chi_i(x, d_i) \sim^{k_{c_i}} \phi_{c_i}(x, b_i)$. Aus $\delta(A/B) = 0$ folgt, $k_{c_1} + k_{c_2} = n$; aus 2.1 folgt $k_{c_1,s} + k_{c_2,s} - (n - |s|) < 0$. □

Das nächste Lemmas beweist man ähnlich.

Lemma 3.2. *Sei $B \in \mathcal{K}$, c ein präalgebraischer Code und $b \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$. $a = (a_1, \ldots, a_{n_c})$ sei eine generische Realisierung von $\phi_c(x, b)$ über B. Dann ist $B \cup \{a_1, \ldots, a_{n_c}\}$ eine präalgebraische minimale Erweiterung von B.* □

Man beachte, daß der Isomorphietyp von a über B eindeutig bestimmt ist.

Lemma 3.3. *Seien $B \subset A$ aus $\mathcal{K}$, c ein präalgebraischer Code, b aus $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$ und $a \in A$ eine Realisierung von $\phi_c(x, b)$ in A, die nicht ganz in B liegt. Dann ist*

1. $\delta(a/B) \leq 0$.
2. *Wenn $\delta(a/B) = 0$, ist a eine generische Realisierung von $\phi_c(x, b)$ über B.*

Beweis. Sei $s = \{i | a_i \in B\}$. Weil a nicht ganz in B liegt, ist s eine echte Teilmenge von $\{1, \ldots, n_c\}$. Es folgt

$$\delta(a/B) = \mathrm{tr}_1(a/B) + \mathrm{tr}_2(a/B) - (n - |s|) \leq k_{c_1,s} + k_{c_2,s} - (n - |s|)$$

Wenn $s \neq \emptyset$, ist die rechte Seite negativ. Wenn $s = \emptyset$, haben wir

$$\delta(a/B) = \mathrm{tr}_1(a/B) + \mathrm{tr}_2(a/B) - n \leq k_{c_1} + k_{c_2} - n = 0$$

$\delta(a/B) = 0$ impliziert also $\mathrm{tr}_i(a/B) = k_{c_i}$. □

Lemma 3.4. *$M \leq N$ eine Erweiterung von Strukturen in $\mathcal{K}$ und $e_0, \ldots, e_\mu \in N$ eine Pseudomorleyfolge von c über b. Dann trifft eine der beiden folgenden Aussagen zu.*

- $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$
- *Wenigstens $\mu - n_c m_c + 1$ viele der e_i liegen in $N \setminus M$.*

Beweis. Wir ordnen die e_i so um, daß $e_0, \ldots, e_{r_0-1}$ in M liegen und $e_{r_1}, \ldots, e_{\mu(c)}$ in $N \setminus M$. Es ist $0 \leq r_0 \leq r_1 \leq \mu(c)+1$. Vielleicht bilden die e_i keine Pseudomorleyfolge mehr, sie sind aber immer noch disjunkte Realisierungen von $\phi_c(x, b)$. Wenn wir annehmen, daß $b \notin \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$, folgt aus (vii), daß $r_0 < m_c$. Wir müssen zeigen, daß $r_1 \leq m_c n_c$. Dazu können wir annehmen, daß $m_c \leq r_1$.

Betrachte $\delta(i) = \delta(e_i / M e_0 \cdots e_{i-1})$. Für alle $i < r_1$, haben wir die grobe Abschätzung[7] $\delta(i) \leq (n_c - 1)$. Wenn $m_c \leq i < r_1$, folgt aus $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M e_0 \cdots e_{i-1})$ und 3.3, daß $\delta(i) < 0$. Das ergibt

$$\begin{aligned} 0 \leq \delta(e_0 \cdots e_{r_1-1}/M) &= \sum_{i<r_1} \delta(i) = \sum_{i<m_c} \delta(i) + \sum_{m_c \leq i < r_1} \delta(i) \\ &\leq m_c(n_c - 1) - (r_1 - m_c). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

4 Die Klasse $\mathcal{K}^\mu$

Sei μ^* eine Funktion, die jedem präalgebraischen Code c eine natürliche Zahl zuordnet. Wir nehmen an, daß

- $\mu^*(c) \geq m_c - 1$
- für jedes Tripel l, m, n mit $m > 0$ gibt es nur endlich viele c mit $\mu^*(c) = l$, $m_c = m$ und $n_c = n$. (Man findet μ^*, weil es nur abzählbar viele Codes gibt.)
- $\mu^*(c) = \mu^*(d)$, wenn c äquivalent zu einer Permutation von d ist[8].

Wir definieren dann

$$\mu(c) = m_c n_c + \mu^*(c)$$

Wir vermerken, daß $\mu(c) \geq m_c$.

Im folgenden ist eine *Pseudomorleyfolge* immer ein Pseudomorleyfolge der Länge $\mu(c)+1$ für einen präalgebraischen Code c. Wenn (e_i) eine Pseudomorleyfolge, folgt aus (ix), daß für jede Permutation σ auch (e_i^σ) ein Pseudomorleyfolge ist.

Die Klasse $\mathcal{K}^\mu$ ist die Klasse aller $M \in \mathcal{K}^0$, die keine Pseudomorleyfolge enthalten.

[7] Es gilt immer $\delta(A/B) \leq |A/B|$.

[8] Man beachte, daß jeder Code zu höchstens einem präalgebraischen Code äquivalent sein kann.

Lemma 4.1. *Sei B eine endliche starke Teilmenge von $M \in \mathcal{K}^\mu$, A/B eine präalgebraisch minimale Erweiterung. Dann enthält M nur endliche viele B–isomorphe Kopien von A.*

Beweis. Sei $A = B \cup \{a\}$ für ein Tupel a. Sei $d \in \operatorname{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$, sodaß die $\operatorname{tp}_i(a/Bd_i)$ stationär sind. Es genügt zu zeigen, daß für alle solchen d $\operatorname{tp}_1(a/Bd_1) \cup \operatorname{tp}_2(a/Bd_2)$ nur endlich viele Realisierungen in M hat. Dazu wählen wir (mit 3.1) einen präalgebraischen Code c und ein $b \in \operatorname{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$ mit $\models \phi_c(a, b)$. Wir zeigen, daß $\phi_c(x, b)$ in M nur endlich viele Realisierungen hat. Sonst gäbe es mehr als $\mu(c)$–viele solche Realisierungen e_i, sodaß $e_i \notin B \cup \{e_0, \ldots, e_{i-1}\}$. Aus 3.3 folgt nun, daß die e_i eine Morleyfolge von $\phi_c(x, b)$ über B sind, und aus (v) folgt, daß sie eine Pseudomorleyfolge von c über b bilden. Widerspruch. □

Folgerung 4.2. *Sei $B \leq M \in \mathcal{K}^\mu$, $B \subset A$ endlich mit $\delta(A/B) = 0$. Dann gibt es nur endlich viele A' mit $B \leq A' \subset M$, die über B zu A isomorph sind.*

Beachte, daß automatisch $A' \leq M$.

Beweis. Zerlege die Erweiterung A/B in eine Folge von minimalen Erweiterungen. □

Folgerung 4.3. *Sei B endliche Teilmenge von $M \in \mathcal{K}^\mu$. Dann ist der d–*Abschluß *von B:*

$$\operatorname{cl_d}(B) = \{x \in M \mid \operatorname{d}(Bx) = \operatorname{d}(B)\}$$

höchstens abzählbar.

Beweis. $\operatorname{cl_d}(B)$ ist die Vereinigung aller endlichen $A' \subset M$ mit $\operatorname{cl}(B) \subset A'$ und $\delta(A'/\operatorname{cl}(B)) = 0$. □

Lemma 4.4. *Wenn $M \in \mathcal{K}^\mu$, $M \leq N$ und $|N \setminus M| = 1$, dann gehört auch N zu $\mathcal{K}^\mu$.*

Beweis. Sei (e_i) eine Pseudomorleyfolge von c über b in N. Höchsten eins der e_i liegt nicht in M. Weil $\mu(c) \geq m_c$, ist $b \in \operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$. Aus 3.3 folgt jetzt, daß die e_i ganz in M oder ganz in $N \setminus M$ liegen. Das letztere ist aber nicht möglich, weil $n_c \geq 2$. Also liegt (e_i) ganz in M. Widerspruch. □

Satz 4.5. *$\mathcal{K}^\mu$ (und darum auch die Klasse der endlichen Elemente von $\mathcal{K}^\mu$) hat die Amalgamationseigenschaft bezüglich starker Einbettungen.*

Beweis. Die Strukturen $B \leq M$ und $B \leq A$ seien in $\mathcal{K}^\mu$. Wir suchen eine starke Erweiterung $M' \in \mathcal{K}^\mu$ von M und ein $B \leq A' \leq M'$, das über B zu A isomorph ist. Wir können annehmen, daß A/B minimal und M/B minimal sind. Wir zeigen, daß ein „freies Amalgam" M' von M und A zu $\mathcal{K}^\mu$ gehört, oder daß M und A über B isomorph sind.

Fall 1: A/B ist algebraisch minimal. Also $A = B \cup \{a\}$ für ein Element a ist z.B. im Sinn von T_1 algebraisch über B ist und im Sinne von T_2 transzendent. Es gibt zwei (nicht disjunkte) Unterfälle.

Unterfall 1.1: $\operatorname{tp}_1(a/B)$ wird in M realisiert, sagen wir durch a'. Dann ist a'/B im Sinn von T_2 transzendent. $B \cup \{a'\}$ ist über B isomorph zu A und stark in

M. Aus der Minimalität von M/B folgt $M = B \cup \{a'\}$.

Unterfall 1.2: Es gibt (im Sinn von T_1) ein $a' \notin M$, das $\mathrm{tp}_1(a/B)$ realisiert. Wir machen a' im Sinn von T_2 transzendent über M und identifizieren es mit a. $M' = M \cup \{a\}$ ist ein *freies Amalgam* von M und B über A, in dem Sinn, daß $M' \cup A = B$ und M unabhängig von A über B ist. Man sieht leicht, daß für freie Amalgame $M \leq M'$ und $A \leq M'$. Aus 4.4 folgt $M' \in \mathcal{K}^\mu$.

Fall 2: A/B ist transzendent. Dann existiert ein freies Amalgam M' von M und A. Nehmen wir an, daß M' nicht zu $\mathcal{K}^\mu$ gehört. Dann enthält M' eine Pseudomorleyfolge (e_i) von c über b. Wir wenden Lemma 3.4 auf die Erweiterung M'/M an und erhalten zwei Unterfälle.

Unterfall 2.1: $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$. Weil M zu $\mathcal{K}^\mu$ gehört, liegen nicht alle Glieder der Pseudomorleyfolge in M. Sei $e_i \notin M$. Dann ist nach 3.3 e_i eine generische Realisierung von $\phi_c(x, b)$ über M. Weil M und e_i über B unabhängig sind, folgt aus 1.1 daß die kanonischen Basis b in $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$ liegt. Weil $A \in \mathcal{K}^\mu$ gibt es ein e_j, das nicht ganz in A liegt. e_j ist wieder eine generische Realisierung von $\phi_c(x, b)$ über B. Es folgt, daß $M = B \cup \{e_j\}$ und $A = B \cup \{e_i\}$ über B isomorph sind.

Unterfall 2.2: Mehr als $\mu^*(c)$ der e_i liegen in $M' \setminus M$. Weil $\mu^*(c)+1 \geq m_c$, folgt daraus, daß $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$. Die Behauptung folgt jetzt wie in Unterfall 2.1. $\square$

Wir nennen $M \in \mathcal{K}^\mu$ *reich*, wenn es zu jedem endlichen $B \leq M$ und jedem endlichen $B \leq A \in \mathcal{K}^\mu$ ein $A \leq A' \leq M$ gibt, das über B zu A isomorph ist. Wir überlegen uns im nächsten Abschnitt, daß reiche Strukturen Modelle von $T_1 \cup T_2$ sind.

Folgerung 4.6. *Es gibt es eine eindeutig bestimmte, abzählbare, reiche Struktur K^μ. Alle reichen Strukturen sind $(L_1 \cup L_2)_{\infty,\omega}$–äquivalent.* $\square$

5 Die Theorie T^μ

Lemma 5.1. *Sei $M \in \mathcal{K}^\mu$, $b \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(M)$, a eine M–generische Realisierung von $\phi_c(x, b)$ und M' die präalgebraische minimale Erweiterung $M \cup \{a_1, \cdots a_{n_c}\}$. Wenn M' nicht zu $\mathcal{K}^\mu$ gehört, gilt eine der beiden folgenden Aussagen.*

(a) M' enthält eine Pseudomorleyfolge von c über b, deren Elemente bis auf eins in M liegen.

(b) M' enthält eine Pseudomorleyfolge für ein c', von der mehr $\mu^*(c')$ viele Elemente in $M' \setminus M$ liegen. Außerdem ist $m_{c'} > 0$.

Beweis. Sei (e'_i) ein Pseudomorleyfolge von c' über b' in M'. Wenn (b) auf (e'_i) nicht zutrifft, folgt aus 3.4, daß $b' \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$. Eins der e'_i kann nicht ganz in M liegen und aus 3.3 folgt, daß e'_i eine M–generische Realisierung von $\phi_{c'}(x, b')$ ist. Und aus der Minimalität von M'/M folgt, daß e'_i eine Permutation von a ist. Weil wir Pseudomorleyfolgen permutieren können, können wir annehmen, daß $e'_i = a$. Daraus folgt $\phi_{c'}(x, b') \sim^{k_c} \phi_c(x, b)$ und daher $c = c'$ und $b = b'$. $\square$

Folgerung 5.2.

1. *Sei c ein präalgebraischer Code. Daß ein $M \in \mathcal{K}$ keine Pseudomorleyfolge für c enthält, läßt sich durch eine universelle $L_1 \cup L_2$–Aussage ausdrücken.*

2. *Sei c ein präalgebraischer Code, $M \in \mathcal{K}^\mu$ ein Modell von $T_1 \cup T_2$. Daß für kein $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$, und keine generische Realisierung a von $\phi_c(x, b)$ die Struktur $M \cup \{a_1, \ldots, a_{n_c}\}$ zu $\mathcal{K}^\mu$ gehört läßt sich durch eine induktive $L_1 \cup L_2$–Aussage ausdrücken.*

Beweis. 1. Sei $\Psi^i(\bar{x})$ quantorenfrei und in T_i äquivalent zu $\exists y\, \Psi_{c_i}(\bar{x}, y)$. Die Aussage

$$\neg \exists \bar{x}\ (\Psi^1(\bar{x}) \wedge \Psi^2(\bar{x}))$$

leistet das gewünschte

2. Sei $i \in \{1, 2\}$ und M eine elementare Unterstruktur von $\mathbb{C}_i$. Sei $m \in M$ und $\phi(x, m)$ eine L_i–Formel vom Rang k und Grad 1, und $a \in \mathbb{C}_i$ eine M–generische Realisierung von $\phi(x, m)$. Dann läßt sich jede quantorenfreie Eigenschaft $\psi(a, m)$ von a, m in eine quantorenfreie Eigenschaft $\psi^*(m)$ von m übersetzen. Man setzt

$$\psi^*(y) = \mathrm{MR}_x\big(\phi(x, y) \wedge \psi(x, y)\big) \doteq k.$$

Das zeigt, daß man für alle $M \in \mathcal{K}$, und M–generische Realisierungen a von $\phi_c(x, b)$, jede $L_1 \cup L_2$–Aussage über $M \cup \{a_1 \ldots, a_{n_c}\}$ in eine $L_1 \cup L_2$–Aussage über M, b übersetzen kann.

Die Behauptung folgt nun aus 5.1, weil im Fall in (b) nur endliche viele c' in Frage kommen:

$$(\mu^*(c') + 1) n_{c'} \leq |M' \setminus M| = n_c.$$

□

Modelle M der $L_1 \cup L_2$–Theorie T^μ werden beschrieben durch die folgenden Eigenschaften. Daß sich die Axiome elementar ausdrücken lassen, folgt wegen der Lemmas 3.1 und 3.2 aus der letzten Folgerung.

Axiome von T^μ.

(a) $M \in \mathcal{K}^\mu$

(b) $T_1 \cup T_2$

(c) Keine präalgebraische minimale Erweiterung von M liegt in $\mathcal{K}^\mu$.

Man überlegt sich leicht, daß M genau dann ein Modell von (b) ist, wenn M unendlich ist und keine algebraischen minimalen Erweiterungen hat. Also ist M genau dann ein Modell von (b) und (c), wenn M unendlich ist und keine minimalen (oder echten) Erweiterungen $M' \in \mathcal{K}^\mu$ mit $\delta(M'/M) = 0$ hat.

Satz 5.3. *Die reichen Strukturen sind genau die ω–saturierten Modelle von T^μ.*

Beweis. Sei M ein ω–saturiertes Modell von T^μ. Um zu zeigen, daß M reich ist, betrachten wir ein endliche starke Teilmenge B von M und eine minimale starke Erweiterung A von B, die zu $\mathcal{K}^\mu$ gehört. Wir wollen eine Kopie $B \leq A' \leq M$ von A/B finden.

Fall (I/II): A/B ist algebraisch oder präalgebraisch. M hat keine algebraischen und keine präalgebraischen Erweiterungen in $\mathcal{K}^\mu$. Andererseits können wir M und A in $\mathcal{K}^\mu$ amalgamieren. Das ist nur möglich, wenn wir in M eine Kopie von A finden.

Fall (III): $A = B \cup \{a\}$ ist transzendent. Wir suchen ein $a' \in M$, das über B transzendent ist mit $B \cup \{a'\} \leq M$, Weil das bedeutet, daß a' einen bestimmten partiellen Typ über B erfüllt, und weil M ω–saturiert ist, genügt es a' in einer elementaren Erweiterung M' von M zu finden. Wenn M' überabzählbar ist, finden wir nach 4.3 ein $a' \in M' \setminus \mathrm{cl_d}(B)$. Das ist gleichbedeutend mit $B \cup \{a'\} \leq M'$.

Sei nun umgekehrt M eine reiche Struktur.

Axiom (b): Sei a ein Element in $\mathrm{acl}_1(M)$ und transzendent über M im Sinn von T_2. a ist schon 1–algebraisch über einer endlichen Teilmenge B von M. Wir können annehmen, daß $B \leq M$. Weil (wegen Lemma 4.4) $B \leq B \cup \{a\} \in \mathcal{K}^\mu$, findet sich eine Kopie von a über B in M. Daraus folgt, daß M acl_1–abgeschlossen ist. Weil M unendlich ist[9] , ist M ein Modell von T_1. Aus dem gleichen Grund ist M ein Modell von T_2.

Axiom (c): Sei a eine generische Realisierung von $\phi_c(x, b)$ über M, für die $M \cup \{a\}$ zu $\mathcal{K}^\mu$ gehört. Sei C eine beliebige starke endliche Teilmenge von M, mit $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(C)$. Dann ist $C \leq C \cup \{a\}$ und, weil M reich ist, gibt es in M eine Kopie a' von a über C mit $C' = C \cup \{a'\} \leq M$. Wenn wir so fortfahren, erhalten wir eine beliebig lange Morleyfolge $a', a'', \ldots$ von $\phi_c(x, b)$. Ein Widerspruch zu $M \in \mathcal{K}^\mu$.

Wähle $M' \equiv M$ ω–saturiert. Der erste Teil des Beweis impliziert, daß M' reich ist. Also ist $M' \equiv_{\infty,\omega} M$. Daraus folgt, daß auch M ω–saturiert ist. □

6 Beweis des Satzes

Wir lassen jetzt die Annahme, daß die T_i Quantorenelimination haben wieder fallen. In der Kategorie $\mathcal{K}$ müssen jetzt isomorphe Einbettungen ersetzt werden durch *bi-elementare* Abbildungen, die elementar sind im Sinn von T_1 und im Sinn von T_2.

Folgerung 6.1. *T^μ ist vollständig. Zwei Tupel a und a' in Modellen M und M' haben genau dann den selben Typ, wenn es eine bi-elementare Bijektion*

$$f : \mathrm{cl}(a) \to \mathrm{cl}(a')$$

mit $f(a) = a'$ gibt.

Beweis. K^μ ist ein Modell von T^μ. Also ist T^μ konsistent. Sei M ein beliebiges Modell von T^μ. Nach Satz 5.3 gibt es ein $M' \equiv M$, das reich ist. Aus $M' \equiv_{\infty,\omega} K^\mu$ folgt die Vollständigkeit.

[9] Das folgt ebenfalls aus 4.4.

$M \prec N$ und $M' \prec N'$ seien zwei ω–saturierte elementare Erweiterungen. Man sieht leicht[10] daß $M \leq N$ und $M' \leq N'$, also ändert sich „cl" nicht. Ein Isomorphismus $f : \mathrm{cl}(a) \to \mathrm{cl}(a')$ ist dann Teil eines back-and-forth-Systems von partiellen Isomorphismen zwischen endlichen starken Teilmengen von M' und N'. Also ist f eine elementare Abbildung.

Für die Umkehrung nehmen wir an, daß a und a' denselben Typ haben. Es gibt dann eine isomorphe Einbettung $f : \mathrm{cl}(a) \to M'$, die a auf a' abbildet. Wir schreiben A' für $f(\mathrm{cl}(a))$. Dann ist $\mathrm{d}(a) = \delta(\mathrm{cl}(a)) = \delta(A')$. Daraus folgt $\mathrm{d}(a') \leq \mathrm{d}(a)$ und aus Symmetriegründen $\mathrm{d}(a') = \mathrm{d}(a)$. Nun hat A', wie $\mathrm{cl}(a)$, keine echte Teilmenge A'', die a' enthält und $\delta(A'') = \mathrm{d}(a')$ erfüllt. Daraus folgt $A' = \mathrm{cl}(a')$. □

Satz 6.2. *T^μ ist streng–minimal.* d *ist die Dimensionfunktion der natürlichen Prägeometrie auf Modellen von T^μ. Insbesondere ist in Modellen von T^μ*

$$\mathrm{MR}(\bar{a}/B) = \mathrm{d}(\bar{a}/B)$$

.

Beweis. Alle Typen $\mathrm{tp}(a/B)$ mit $\mathrm{d}(a/B) = 0$ sind algebraisch nach Folgerung 4.2. Aus 6.1 folgt, daß es nur einen Typen mit $\mathrm{d}(a/B) = 1$ gibt[11]. Daraus folgt, daß T streng minimal ist. Der Rest des Satzes ist klar, weil d gerade den algebraischen Abschluß beschreibt. □

Damit ist Satz 0.1 bewiesen.

7 Bemerkungen

Man zeigt leicht, daß T^μ die folgenden Eigenschaften hat:

- T^μ hat die DMP
- Für jedes $i = 1, 2$ gilt: Jede L_i–Formel $\phi(x, b)$ hat in T^μ den gleichen Morleyrang und den gleichen Morleygrad wie in T_i.
- ([1]) M sei ein Modell von T^μ, das elementare Unterstruktur von N ist, im Sinn von T_1 und im Sinn von T_2. Dann ist M elementare Unterstruktur von N.

Wir beweisen die letzte Behauptung: Seien M und N Modelle von T^μ und $M \restriction L_i \prec N \restriction L_i$ für $i = 1, 2$. Wir zeigen, daß $M \leq N$. Mit 6.1 folgt dann $N \prec M$.

M hat in N keine echte Erweiterung M' mit $\delta(M'/M) = 0$. Wenn M nicht stark wäre, müßte es darum ein Element $a \in N$ mit $\delta(a/M) = -1$ geben, das also algebraisch über M ist, im Sinn von T_1 *und* T_2. Das gibt es nicht.

[10] Wenn $M \not\leq N$, gibt es ein Tupel $a \in N$ mit $\delta(a/M) < 0$. Es gibt ein endliches $B \leq M$ mit $\delta(a/B) < 0$. Das liegt an der Gültigkeit einer $L_1 \cup L_2$–Formel, $\phi(a, b)$. $\phi(x, b)$ ist nicht erfüllbar in M, also $M \not\prec N$.

[11] Dieser Typ hat nur eine Fortsetzung auf $\mathrm{cl}(B)$ und $\mathrm{cl}(B) \cup \{a\}$ ist stark im betrachteten Modell.

Literatur

[1] Kitty L. Holland. Model completeness of the new strongly minimal sets. *J. Symbolic Logic*, 64(3):946–962, 1999.

[2] Ehud Hrushovski. Strongly minimal expansions of algebraically closed fields. *Israel J. Math.*, 79:129–151, 1992.

Änderungen

Revision 1.6 (9. Januar 2005): Erste Version im Netz.
Revision 2.3 (22. Oktober 2005): Größere Revision.
Revision 2.9 (21. Dezember 2005): Größere Korrekturen.