Lemma für Daniels beschränkte Automorphismen*

Martin Ziegler

23. März 2004

Satz 1. *Sei G eine stabile abelsche Gruppe. a, b und c seien paarweise unabhängig über 0 und $a+b+c=0$. Dann:*

1. *Die starken Typen von a, b und c haben alle den gleichen zusammenhängenden Stabilisator U.*

2. *a, b, und c sind generischen Elemente von $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(0)$–definierbaren Nebenklassen von U.*

Wenn G total–transzendent ist, folgt, daß a, b und c den gleichen Morleyrang über 0 haben, nämlich den Rang von U. Außerdem ist U dann definierbar.

p und q seien zwei starke Typen über 0. Dann ist

$$\mathrm{Hom}(p,q) = \{g \in G \mid \forall a \ \ a \models p_{|g} \Rightarrow a+g \models q_{|g}\}$$

eine $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(0)$–typdefinierbare (im totaltranszendenten: definierbare) Teilmenge von G. Natürlich ist $\mathrm{Hom}(p,p) = \mathrm{Stab}(p)$.

Lemma 2. *p, q und r seien starke Typen. Dann gilt*

- *Für alle $A \subset G$ und $g \in \mathrm{Hom}(p,q)$ ist*
$$a \models p_{|g,A} \Rightarrow a+g \models q_{|g,A}.$$
- $\mathrm{Hom}(p,q) + \mathrm{Hom}(q,r) \subset \mathrm{Hom}(p,r)$
- $\mathrm{Hom}(p,q) = -\mathrm{Hom}(q,p) = \mathrm{Hom}(-q,-p)$
- $0 \in \mathrm{Hom}(p,p)$
- *Wenn $\mathrm{Hom}(p,q)$ nicht leer ist, ist (falls G total–transzendent)*
$$\mathrm{MR}(\mathrm{Hom}(p,q)) \leq \mathrm{MR}(p) = \mathrm{MR}(q).$$

Beweis. Sei a eine Realisierung von p, die von g, A unabhängig ist. Dann folgt aus $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\vert}_g A$, daß $a+g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\vert}_g A$. Weil $a+g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\vert} g$, ist $a+g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\vert} g, A$.

Sei $g \in \mathrm{Hom}(p,q)$ und $h \in \mathrm{Hom}(q,r)$ und a eine Realisierung, die von $g+h$ unabhängig ist. Wir können annehmen, daß a von g, h unabhängig ist. Dann ist $a+g$ eine Realisierung von q, die ebenfalls von g, h unabhängig ist. Daher ist ist

*Rekonstruktion eines Beweises von Oktober 1990. Version 9/05

$a+g+h$ eine Realisierung von r, die von g, h und damit von $g+h$ unabhängig ist.

Sei $g \in \mathrm{Hom}(p,q)$ und a eine Realisierung von p, die von g unabhängig ist. Dann ist

$$\mathrm{MR}(a) = \mathrm{MR}(a/g) = \mathrm{MR}(a+g/g) = \mathrm{MR}(a+g).$$

Daraus folgt $\mathrm{MR}(p) = \mathrm{MR}(q)$. Aus

$$\mathrm{MR}(g) = \mathrm{MR}(g/a) = \mathrm{MR}(a+g/a) \leq \mathrm{MR}(a+g)$$

folgt $\mathrm{MR}(\mathrm{Hom}(p,q)) \leq \mathrm{MR}(q)$. □

Seien nun a, b und c wie im Satz, p, q und r die starken Typen von a, b und c. Dann ist trivialerweise

- $p(G) \subset \mathrm{Hom}(q,-r) = \mathrm{Hom}(r,-q)$
- $q(G) \subset \mathrm{Hom}(r,-p)) = \mathrm{Hom}(p,-r)$
- $r(G) \subset \mathrm{Hom}(p,-q) = \mathrm{Hom}(q,-p)$.

Es folgt

- $p(G) - p(G) \subset \mathrm{Stab}(q), \mathrm{Stab}(r)$
- $q(G) - q(G) \subset \mathrm{Stab}(r), \mathrm{Stab}(p)$
- $r(G) - r(G) \subset \mathrm{Stab}(p), \mathrm{Stab}(q)$.

Weil andererseits

- $\mathrm{Stab}(p) \subset p(G) - p(G)$
- $\mathrm{Stab}(q) \subset q(G) - q(G)$
- $\mathrm{Stab}(r) \subset r(G) - r(G)$,

sind alle Stabilisatoren gleich

$$U = p(G) - p(G) = q(G) - q(G) = r(G) - r(G).$$

Die $p(G)$, $q(G)$, $r(G)$ liegen also jeweils in einer $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(0)$–definierbaren Nebenklasse von U. Weil die Stabilisatoren gleich U sind, sind p, q, r generische Typen und U ist zusammenhängend. Damit ist der Satz bewiesen.