Streng minimale Mengen mit einem Prädikat

M. Ziegler*

15.07.06

Wir fixieren eine vollständige streng minimale L–Theorie T. Sei M ein Modell von T und F eine unendliche Teilmenge von M. Aus F lassen sich zwei neu Strukturen definieren:

- Die *induzierte* Struktur auf F hat einen Namen R_ϕ für $\emptyset$–definierbare Relation $\phi(M) \cap F^n$ auf F. Die Sprache ist

$$L_{\text{ind}} = \{\mathrm{R}_\phi \mid \phi = \phi(x_1, \ldots, x_n) \text{ eine } L\text{–Formel}\}.$$

  F mit seiner L_{ind}–Struktur bezeichnen wir mit F_{ind}.

- Das Paar (M, F) ist eine $L(P)$–Struktur, wobei P ein unäres Prädikat für F ist und $L(P) = L \cup \{P\}$.

Wir betrachten die Kodimension $\dim(M/F)$ von F in M. Wenn (N, G) eine elementare Erweiterung von (M, F) ist, bleiben Elemente von M, die algebraisch unabhängig über F unabhängig über G. Daraus folgt, daß $\dim(M/F) \leq \dim(N/G)$.

Definition 1 *Die elementare Kodimension von F in M*

$$\mathbf{dim}(M/F) = \max\{\dim(N/G) \mid (N, G) \equiv (M, F)\}$$

Wir unterscheiden dabei unendliche Kodimensionen nicht und setzen sie ∞.

Es ist klar, daß $\dim(M/F) = \mathbf{dim}(M/F)$, wenn (M, F) ω–saturiert ist.

In [1] wird F klein in M genannt, wenn es $(N, G) \equiv (M, F)$ gibt, für das $(N, g)_{g \in G}$ ω–saturiert ist. Es ist klar, daß F genau dann klein in M ist, wenn $\mathbf{dim}(M/F) = \infty$.

Satz 2 *M und N seien Modelle von T mit Teilmengen F und G. Dann ist $(M, F) \equiv (N, G)$ genau dann, wenn $F_{\text{ind}} \equiv G_{\text{ind}}$ und $\mathbf{dim}(M/F) = \mathbf{dim}(N/G)$.*

Beweis: Die Behauptung ist ein Spezialfall von Satz 2.2 in [1], weil streng minimale Theorien stabil sind und nicht die fcp haben. Es gibt aber einen leichten direkten Beweis[1]:

---

* *Revision* : 1.10, Erweiterte Version der Fassung von 2001

[1] Man konsultiere [1] für allerlei Auskünfte, auch über streng minimale Mengen. Insbesondere für den Satz von Pillay (5.4).

Sei $F_{\text{ind}} \equiv G_{\text{ind}}$. Wir wollen zeigen, daß $(M, F) \equiv (N, G)$. Mit den üblichen Methoden sieht man, daß man annehmen kann, daß $F_{\text{ind}} \cong G_{\text{ind}}$ und daß F und G gleiche Kodimension in M und N haben. Wir fixieren eine Isomorphismus $f : F_{\text{ind}} \to G_{\text{ind}}$, also eine Bijektion, die im Sinn von M und N elementar ist. Es ist klar, daß das System aller elementaren partiellen Abbildungen von M nach N, die endlichen Erweiterungen von f sind, die Hinundhereigenschaft hat. Weil diese elementaren Abbildungen partielle Isomorphismen im Sinn von (M, F) und (N, G) sind, folgt, daß (M, F) und (N, G) partiell isomorph und daher elementar äquivalent sind. □

Folgerung 3 *$M \prec N$ seien Modelle von T und F eine Teilmenge von M, für die* $\mathbf{dim}(M/F) = \mathbf{dim}(N/F)$. *Dann ist $(M, F) \prec (N, F)$.*

Beweis: Die elementaren Kodimensionen ändern sich nicht, wenn wir Elemente benennen. Also ist $\mathbf{dim}(M_M/F) = \mathbf{dim}(N_M/F)$. Aus dem Satz folgt $(M_M, F) \equiv (N_M, F)$, was zu zeigen war. □

Lemma 4 *Es ist* $\mathbf{dim}(M/F) \leq n$ *genau dann, wenn es eine L–Formel $\phi(x, \bar{y}, z_1, \ldots, z_n)$ gibt, sodaß*

- *ϕ ist* algebraisch *in x. Das heißt, für ein d ist*

$$T \vdash \forall \bar{y}\, z_1 \ldots z_n\, \exists^{\leq d} x\; \phi(x, \bar{y}, z_1, \ldots, z_n)$$

- *Es gibt n Elemente $m_1, \ldots, m_n$ in M, für die*

$$M = \bigcup_{\bar{f} \in F} \phi(M, \bar{f}, m_1, \ldots, m_n) \tag{1}$$

Beweis: Wenn es ein algebraisches $\phi(x, \bar{y}, z_1, \ldots, z_n)$ mit (1) gibt, gilt (1) auch in allen elementar äquivalenten (N, G). Also ist $\dim(N/G) \leq n$ in allen elementar äquivalenten $\dim(N/G)$.

Nehmen wir an, daß es ein algebraisches $\phi(x, \bar{y}, z_1, \ldots, z_n)$ mit (1) nicht gibt. Wenn dann, für ein $k \leq n$, $m_1, \ldots, m_n \in M$ algebraisch unabhängig über F sind, ist die Formelmenge

$$\Phi(x) = \{\forall \bar{y}\ (P(\bar{y}) \to \neg\, \phi(x, \bar{y}, m_1, \ldots, m_k)) \mid \phi(x, \bar{y}, \bar{z}) \text{ algebraisch in } x\}$$

endlich erfüllbar. Sei m_{n+1} eine Realisierung von $\Phi(x)$ in einer elementaren Erweiterung (N, G). Man sieht dann leicht, daß $m_1, \ldots, m_k$ auch über G algebraisch unabhängig sind und daß m_{k+1} nicht algebraisch über $G m_1 \cdots m_n$ ist. Wenn man mit $k = 0$ beginnt und fortfährt bis $k = n$, erhält man eine elementare Erweiterung (N, G) von (M, F) mit $\dim(N, G) > n$. □

Folgerung 5 *Wenn* $\mathbf{dim}(M/F) < \infty$, *ist* $\dim(M/F) = \mathbf{dim}(M/F)$.

BEWEIS: Sei $m = \dim(M/F)$. Es ist klar, daß $m \leq \mathbf{dim}(M/F)$. Wir zeigen, daß $\mathbf{dim}(M/F) \leq m$: Sei $\mathbf{dim}(M/F) \leq n$. Dann gibt es ϕ und $m_1, \ldots, m_n$ wie in Lemma 4. Sei $m'_1, \ldots, m'_m$ eine Basis von M/F. Es gibt ein $\psi(\bar{w}, \bar{z})$, algebraisch in $\bar{w}$, mit

$$M \models \psi(m_1, \ldots, m_n, m'_1, \ldots, m'_m).$$

Setze

$$\phi'(x, \bar{y}, z_1, \ldots, z_m) = \exists\, \bar{w}\, \big(\psi(\bar{w}, z_1, \ldots, z_m) \wedge \phi(x, \bar{y}, \bar{w})\big).$$

$\phi'(x, \bar{y}, \bar{z})$ ist algebraisch in x und es ist

$$M = \bigcup_{\bar{f} \in F} \phi'(M, \bar{f}, m'_1, \ldots, m'_m).$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Das folgende Lemma ist klar: Gehe über zu ω–saturierten Situation und wende die Additivität von dim an.

Lemma 6 *Sei M ein Modell von T und $F \subset M' \prec M$. Dann ist*

$$\mathbf{dim}(M/F) = \mathbf{dim}(M/M') + \mathbf{dim}(M'/F).$$

$\square$

Satz 7 *Sei F Teilmenge eines Modells von T. Dann*

1. $\mathbf{dim}(\mathrm{acl}(F)/F) \in \{0, \infty\}$.
2. $\mathbf{dim}(\mathrm{acl}(F)/F)$ *hängt nur von* $\mathrm{Th}(F_{\mathrm{ind}})$ *ab.*

BEWEIS: Die erste Behauptung folgt sofort aus Folgerung 5. Zum Beweis der zweiten Behauptung nehmen wir an, daß $F_{\mathrm{ind}} \equiv G_{\mathrm{ind}}$. Wenn wir F und G in genügend große Modelle M und N einbetten, ist nach Satz 2 $(N, G) \equiv (M, F)$. Sei $\mathbf{dim}(\mathrm{acl}(F), F) = 0$. Dann gibt es nach Lemma 4 eine algebraische Formel $\phi(x, \bar{y})$ mit

$$\mathrm{acl}(F) = \bigcup_{\bar{f} \in F} \phi(M, \bar{f}).$$

Das kann man auch so ausdrücken, daß für alle algebraischen $\psi(x, \bar{z})$

$$(M, F) \models \forall x, \bar{z}\, (P(\bar{z}) \wedge \psi(x, \bar{z}) \rightarrow \exists \bar{y}(P(\bar{y}) \wedge \phi(x, \bar{y})))$$

Das gilt dann auch in (N, G) und es folgt $\mathbf{dim}(\mathrm{acl}(G), G) = 0$. $\square$

Folgerung 8 *Sei $M = \mathrm{acl}(F)$ ein Modell von T. Wenn $(N, G) \equiv (M, F)$, ist (N, G) eine elementare Erweiterung von $(\mathrm{acl}(G), G)$.*

BEWEIS: Aus dem Satz folgt $\mathbf{dim}(\mathrm{acl}(F)/F) = \mathbf{dim}(\mathrm{acl}(G), G)$. Andererseits ist $\mathbf{dim}(\mathrm{acl}(F)/F) = \mathbf{dim}(N/G)$. Daraus folgt die Behauptung mit Folgerung 3. $\square$

Satz 9 *Für die Menge*

$$K = \{\mathbf{dim}(N/M) \mid M \prec N \models T\}$$

gibt es zwei Möglichkeiten:

1. $K = \{0, \infty\}$
2. $K = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Wenn[2] *der zweite Fall eintritt, ist für alle* $M \prec N$

$$\mathbf{dim}(N/M) = \dim(N/M)$$

Beweis: Nehmen wir an, es gäbe Modelle $M \prec N$, deren elementare Kodimension positiv aber endlich ist. Wir können annehmen, daß M saturiert ist. Wähle ein elementare Unterstruktur M' zwischen M und N mit $\dim(M'/M) = 1$. Aus Lemma 5 folgt $\mathbf{dim}(M'/M) = 1$. Wähle eine elementare Kette $M_0 \prec M_1 \prec \ldots \prec M_n$ mit $(M_{i+1}, M_i) \cong (M'/M)$. Dann ist $\mathbf{dim}(M_{i+1}, M_i) = 1$ für alle i und es folgt $\mathbf{dim}(M_n/M_0) = n$. Also kommen alle Zahlen als elementare Kodimension vor.

Für den zweiten Teil des Satzes betrachten wir eine Erweiterung $M \prec N$ mit $\dim(N/M) = n \neq \infty$ aus K. Wir müssen zeigen, daß $\mathbf{dim}(N/M) = n$. Wähle $M' \prec N'$ mit $\dim(N'/M') = \mathbf{dim}(N'/M') = n$. Wir können annehmen, daß $M \prec M'$. Sei $n_1, \ldots, n_n$ eine Basis von N' über M'. Es gibt nach Lemma 4 ein $\phi(x, \bar{y}, z_1, \ldots, z_n)$, algebraisch in x, sodaß $N' = \bigcup_{\bar{m}' \in M'} \phi(N, \bar{m}', n_1, \ldots, n_n)$. Wir können annehmen, daß $N = \mathrm{acl}(M, n_1, \ldots, n_n)$. Die Behauptung folgt nun aus

$$N = \bigcup_{\bar{m} \in M} \phi(N, \bar{m}, n_1, \ldots, n_n).$$

Daß die rechte Seite in N enthalten ist, ist klar. Sei umgekehrt $a \in N$. Dann gibt es ein $\bar{m}' \in M'$ mit $N' \models \phi(a, \bar{m}', n_1, \ldots, n_n)$. Der Typ $\mathrm{tp}(N/M')$ ist Erbe von $\mathrm{tp}(N/M)$ und daher $\mathrm{tp}(an_1 \cdots n_n/M')$ Erbe von $\mathrm{tp}(an_1 \cdots n_n/M)$. Daraus folgt, daß es $\bar{m} \in M$ gibt mit $N' \models \phi(a, \bar{m}, n_1, \ldots, n_n)$. □

Folgerung 10 ([2]) *Sei M ein Modell von T und F eine Teilmenge. Wenn $F_{\mathrm{ind}} \equiv A$, dann gibt es ein Paar $G \subset N$, sodaß $A \cong G_{\mathrm{ind}}$ und $(M, F) \equiv (N, G)$.*

Beweis: Es gibt natürlich ein Modell $G \subset N'$ mit $A \cong G_{\mathrm{ind}}$. Nach Lemma 7 ist $\mathbf{dim}(\mathrm{acl}(F)/F) = \mathbf{dim}(\mathrm{acl}(G)/G)$. Wähle eine elementare Erweiterung[3] N von $\mathrm{acl}(G)$ mit $\dim(N/\mathrm{acl}(G) = \dim(M/\mathrm{acl}(F))$. Aus dem letzten Satz folgt $\mathbf{dim}(N/\mathrm{acl}(G) = \mathbf{dim}(M/\mathrm{acl}(F))$ und aus Lemma 6, daß $\mathbf{dim}(N/G) = \mathbf{dim}(M/F)$. Aus Satz 2 folgt $(M, F) \equiv (N, G)$. □

Zusatzstruktur auf dem Prädikat

Nehmen wir an, daß die Teilmenge $F \subset M$ Universum einer K–Struktur $\mathcal{F}$ ist. In M wird $\mathcal{F}$ zur $K \cup L_{\mathrm{ind}}$–Struktur $\mathcal{F}_{\mathrm{ind}}$. Wenn man die Interpretation der

[2] Juli 2006

[3] Wir nehmen immer an, daß F unendlich ist. $\mathrm{acl}(G)$ is also ein Modell von T.

Zeichen von K trivial auf M fortsetzt, erhält man die $(K \cup L)(P)$–Struktur $(M, \mathcal{F})$.

Man sieht leicht:

Lemma 11

$$\mathbf{dim}(M/F) = \max \{\dim(N/G) \mid (N, \mathcal{G}) \equiv (M, \mathcal{F})\}$$

□

Die folgende Verallgemeinerungen von Satz 2, Folgerung 3 und Folgerung 8 haben den gleichen Beweis.

Satz 2' *M und N seien Modelle von T mit Teilmengen F und G, die Universen von K–Strukturen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ sind. Dann ist $(M, \mathcal{F}) \equiv (N, \mathcal{G})$ genau dann, wenn $\mathcal{F}_{\mathrm{ind}} \equiv \mathcal{G}_{\mathrm{ind}}$ und $\mathbf{dim}(M/F) = \mathbf{dim}(N/G)$.* □

Folgerung 3' *$M \prec N$ seien Modelle von T und F eine Teilmenge von M, die Universum einer Struktur $\mathcal{F}$ ist. Wenn $\mathbf{dim}(M/F) = \mathbf{dim}(N/F)$, ist $(M, \mathcal{F}) \prec (N, \mathcal{F})$.* □

Folgerung 8' *Sei $M = \mathrm{acl}(F)$ ein Modell von T. Wenn $(N, \mathcal{G}) \equiv (M, \mathcal{F})$, ist $(N, \mathcal{G})$ eine elementare Erweiterung von $(\mathrm{acl}(G), \mathcal{G})$.* □

Literatur

[1] Enrique Casanovas and Martin Ziegler. Stable theories with a new predicate. *J. Symbolic Logic*, 66(3):1127–1140, September 2001.

[2] Olivier Roche. Strongly simple sets with a predicate are simple. Preprint, July 2006.