Hrushovskis primordiales Amalgam

M.Z.*

27. September 2009

Zusammenfassung

Hrushovskis originale Fusion [1]. Seminarvortrag, Freiburg 4.Mai 2005
We prove that the resulting theory is model-complete (26.11.2005).

1 Das Hauptlemma

Wir betrachten Strukturen mit einem dreistelligen Prädikat R und definieren für endliches A
$$\delta(A) = |A| - |R(A)|.$$
und allgemeiner
$$\delta(A/M) = |A \setminus M| - |R(A \cup M) \setminus R(M)|.$$
Wenn $\delta(A/M)$ endlich ist, ist $\delta(A/M) = \delta(A \cup B) - \delta(B)$ genügend große endliche B zwischen $A \cap M$ und M.

$B \subset M$ ist *abgeschlossen* in M, wenn $\delta(A/B) \geq 0$ für alle $A \subset M$. Wir schreiben dafür $B \leq M$. Wir sagen auch M/B ist *stark*. $\mathrm{cl}(X)$, der *Abschluß* von X in M ist die kleinste starke Teilmenge von M, die X enthält. $\mathcal{C}^0$ ist die Klasse aller M mit $\emptyset \leq M$. Wenn M zu $\mathcal{C}^0$ gehört und $X \subset M$ endlich ist, ist auch $\mathrm{cl}(X)$ endlich.

Für endliche Teilmengen B von $M \in \mathcal{C}^0$ definieren wir
$$\mathrm{d}(B) = \min\{\delta(A) | B \subset A \subset M\} = \delta\,\mathrm{cl}(B).$$
d ist Dimensionsfunktion eines Matroids.

Eine echte starke Erweiterung $M \leq N$ ist *minimal*, wenn sie sich nicht in zwei echte starke Erweiterungen $M \leq M'$ und $M' \leq N$ zerlegt.

Lemma 1.1. *Sei N/M minimal und $\delta(N/M) > 0$. Dann ist $\delta(N/M) = 1$ und $N = M \cup \{n\}$, für ein n, das mit keinen Elementen von M in Relation steht.*

Definition 1.2. *Ein Paar (A, B) heißt gut, wenn*

a) $B \cup A \in \mathcal{C}^0$

b) $A \cap B = \emptyset$

c) $(B \cup A)/B$ *minimal*

*primordial.tex,v 1.14, September 26, 2009 *d)* $\delta(A/B) = 0$

(A, B) heißt sehr gut, wenn für keine echte Teilmenge B' von B das Paar (A, B') gut ist.

Wenn (A, B) sehr gut ist, steht jedes $b \in B$ in Relation mit einem Element von A (und Elementen von $B \cup A$). Wenn (A, B) gut ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes $B' \subset B$, für das (A, B') sehr gut ist: B' ist die Menge aller $b \in B$, die in Relation mit einem Element von A (und Elementen von $B \cup A$) sind. Wir nennen B' die *Basis* von A/B. Man hat die Abschätzung $|B'| \leq 2 \cdot |A|$.

Ein *Code* α ist ein Isomorphietyp eines sehr guten Paares (A_α, B_α). Eine *Pseudomorleyfolge* von α über B ist eine Menge von paarweise disjunkten A_i so, daß $(A_i, B) \cong (A_\alpha, B_\alpha)$.

Wir fixieren für jedes sehr gute α eine Zahl $\mu(\alpha) \geq \delta(B_\alpha)$.

Definition 1.3. *$\mathcal{C}^\mu$ ist die Klasse aller M aus $\mathcal{C}^0$, so daß jedes α über jedem $B \subset M$ in M höchstens Pseudomorleyfolgen der Länge $\mu(\alpha)$ hat.*

Lemma 1.4. *Sei $M \in \mathcal{C}^\mu$ und a nicht mit M verbunden. Dann ist $M \cup \{a\}$ in $\mathcal{C}^\mu$.* □

Lemma 1.5 (Hauptlemma)**.** *Sei $M \in \mathcal{C}^\mu$ und (A, M) ein gutes Paar mit Basis B. Dann ist $M' = M \cup A$ in $\mathcal{C}^\mu$, es sei denn, einer der beiden folgenden Fälle tritt ein:*

1. *Der Typ α von (A, B) hat in M über B eine Pseudomorleyfolge der Länge $\mu(\alpha)$.*
2. *Es gibt ein $B' \subset M'$, das nicht in M liegt, und einen Code α', der über B' in M' eine Pseudomorleyfolge (A'_i) der Länge $\mu(\alpha') + 1$ hat. Es folgt*
   - *(a) Kein A'_i liegt in $M \setminus B$.*
   - *(b) Ein A'_i liegt in A.*
   - *(c) $B' \subset B \cup A$.*

Beweis. Es ist klar, daß M' nicht in $\mathcal{C}^\mu$ ist, wenn einer der beiden Fälle eintritt. Nehmen wir also an, daß M' nicht in $\mathcal{C}^\mu$ ist. Dann gibt es ein α' mit einer zu langen Morleyfolge A'_i über einem B' in M'. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1.Fall: $B' \subset M$. Weil $M \in \mathcal{C}^\mu$, liegt eines der A'_i nicht in M. Wäre A'_i nicht ganz in A, würde aus der Minimalität von A'_i/B' folgen, daß $\delta(A'_i/M) < 0$, was $M \leq M'$ widerspricht. Also ist $A'_i \subset A$. Nun ist aber $\delta(A'_i/M) = 0$, was wegen der Minimalität von A/M impliziert, daß $A'_i = A$. Es folgt $B' = B$ und $\alpha' = \alpha$. Also hat α über B in M ein Pseudomorleyfolge der Länge $\mu(\alpha)$.

2.Fall: B' liegt nicht ganz in M.

Ein A'_i, das ganz in $M \setminus B$ läge, könnte nicht mit den Punkten $B' \setminus M$ verbunden sein. Also gilt (2a).

Nehmen wir an, daß die ersten $A'_1, \ldots, A'_k$ ganz in M liegen und die nächsten $A'_{k+1}, \ldots, A'_{k+l}$ weder ganz in M noch ganz in A. Weil alle A'_i mit den Punkten aus $B' \setminus M$ verbunden sind, folgt zunächst, daß[1]

$$\delta(B'/M) \leq \delta(B'/M \cap B') - k \leq \delta(B') - k.$$

[1] Beachte $\delta(B'/M \cap B') \leq \delta(B')$, weil $\delta(M \cap B') \geq 0$.

Dann folgt aus der Minimalität der A'_i/B', daß

$$\delta(A'_i/M \cup B' \cup A'_{k+1} \cup \cdots A'_{i-1}) < 0$$

für alle $i = k+1, \ldots, k+l$. Es ergibt sich

$$\delta(\bigcup_{i=k+1}^{k+l} A'_i/M \cup B') \leq -l.$$

Also ist

$$0 \leq \delta(\bigcup_{i=k+1}^{k+l} A'_i \cup B'/M) \leq \delta(B'/M) - l \leq \delta(B') - (k+l).$$

Es liegen also höchstens $\delta(B')$ viele der A'_i nicht in A. Daraus folgt (2b). Weil die Elemente von A nicht mit den Punkten von $B' \setminus (B \cup A)$ verbunden sind, folgt (2c). □

2 Die Theorie T^μ

Folgerung 2.1. *$\mathcal{C}^\mu$ hat bezüglich starker Einbettungen die Amalgamationseigenschaft.*

Beweis. Sei $N \leq M \in \mathcal{C}^\mu$, $N \leq N' \in \mathcal{C}^\mu$. Wir suchen ein $M \leq M' \in \mathcal{C}^\mu$ und eine starke Einbettung $N' \to M'$ über N. Wir können annehmen, daß N'/N minimal ist (!). Der Fall $\delta(N'/N) > 0$ ist klar nach Lemma 1.1: Es ist $N' = N \cup \{a\}$, für ein a, daß nicht mit N verbunden ist. Wir setzen $M' = M \cup \{a\}$, wobei a nicht M verbunden ist. Wir haben also nur noch den Fall zu betrachten, daß $N' = N \cup A$, wobei (A, N) gut ist.

Fall 1: Die (freie) Vereinigung $M' = M \cup A$ gehört zu $\mathcal{C}^\mu$. Dann sind wir fertig, weil $M \leq M'$ und $N' \leq M'$.

Fall 2: Sonst tritt einer der beiden Fälle von Lemma 1.5 ein.

Weil die Basis B von A/M in N liegt, kann der zweite Fall kann nicht eintreten: Die A'_i liegen nicht voll in $M \setminus N = M' \setminus N'$ und daher, weil $B' \subset N' \leq M'$, und A'_i/B' minimal, liegen sie voll in N'. Es würde $N' \notin \mathcal{C}^\mu$ folgen.

Also hat der Typ α von (A, B) in M eine Pseudomorleyfolge (A_i) der Länge $\mu(\alpha)$. Die A_i können nicht alle in N liegen, weil $N' \in \mathcal{C}^\mu$. Also gibt es ein A_i, das voll in $M \setminus N$ liegt. Es folgt $N \cup A_i \leq M$. Der Isomorphismus zwischen $B \cup A$ und $B \cup A_i$ setzt sich trivial zu einem Isomorphismus $N' \to N \cup A_i$ über N fort. □

Definition 2.2. *Ein $M \in \mathcal{C}^\mu$ ist reich, wenn es für alle endlichen $B \leq M$ und $B \leq C \in \mathcal{C}^\mu$ eine starke Einbettung $C \to M$ über B gibt.*

Aus der letzten Folgerung ergibt sich sofort die Existenz einer eindeutig bestimmten abzählbaren reichen Struktur K^μ.

Wir bezeichnen mit F_n die Struktur mit n Elementen und $\delta(\mathrm{F}_n) = n$, das heißt ohne Relationen. $\mathrm{F}_n \leq M$ bedeutet, daß die Elemente von F_n in M d–unabhängig sind. Es ist klar, daß F_n zu $\mathcal{C}^\mu$ gehört.

Definition 2.3. *M ist ein Modell der Theorie T^μ, wenn*

a) $M \in \mathcal{C}^\mu$

b) Wenn (A, M) gut ist, ist $M \cup A \notin \mathcal{C}^\mu$.

c) Für jedes n ist F_n stark einbettbar in eine elementare Erweiterung von M.[2]

Folgerung 2.4. *T^μ ist tatsächlich eine elementare Theorie.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß für jedes α die Eigenschaft *Für kein $B \subset M$ enthält M ein Pseudomorleyfolge von α über B der Länge* $\mu(\alpha) + 1$ sich durch eine elementare Aussage ausdrücken läßt.

Für alle α müssen wir (durch eine Aussage) ausdrücken: Wenn (A/M) gut ist, mit einer Basis $B \subset M$ für die (A, B) vom Typ α ist, ist $M' = M \cup A \notin \mathcal{C}^\mu$. Das geht, wenn wir nur für endlich viele α' die Länge von Pseudomorleyfolgen in M' beschränken müssen. Das folgt aber aus Lemma 1.5: Für die dort vorkommenden α' gilt $|A_{\alpha'}| \leq |A|$ und $|B_{\alpha'}| \leq |B \cup A|$. □

Satz 2.5. *M ist genau dann reich, wenn M ein ω–saturiertes Modell von T^μ ist.*

Beweis. Sei K reich. Es ist klar, daß K die Axiome a) und c) erfüllt. Sei (A, K) ein gutes Paar und sei $K \cup A \in \mathcal{C}^\mu$. Wähle ein endliches $C_0 \leq K$, das die Basis B von A/K enthält und eine Kopie A_0 von A über C_0 mit $C_1 = C_0 \cup A_0 \leq K$. Man fährt so fort und erhält in K eine unendliche Pseudomorleyfolge von α über B. Widerspruch. Also gilt b). Daß K ω–saturiert ist, zeigen wir später.

Sei jetzt $M \models T^\mu$ ω–saturiert, $B \leq M$ und $B \leq C \in \mathcal{C}^\mu$. Wir können annehmen, daß C/B minimal ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1.$\delta(C/B) > 0$. Dann ist $C = B \cup \{a\}$ für ein a, das mit B nicht verbunden ist. Aus Axiom c) und der ω–Saturiertheit folgt, daß $\mathrm{d}(M) = \infty$. Also gibt es ein $a' \in M$ mit $\mathrm{d}(a'/B) = 1$. Daraus folgt, daß a' nicht mit B verbunden ist und $B \cup \{a'\} \leq M$. Das liefert die gesuchte starke Einbettung von C in M.

2. $C = B \cup A$ für ein gutes Paar (A, B). Weil $M \cup A$ nicht zu $\mathcal{C}^\mu$ gehört, C und M aber stark in $\mathcal{C}^\mu$ amalgamierbar sind, ist $B \cup A$ über B stark in M einbettbar. (Siehe Beweis von 2.1.)

Weil M und K partiell isomorph sind, folgt, daß auch K ω–saturiert ist. □

Folgerung 2.6. *T^μ ist die vollständige Theorie von K^μ.*

Beweis. Jedes saturierte Modell von T^μ ist partiell isomorph zu K^μ □

[2]Ich weiß nicht, ob dieses Axiom wirklich notwendig ist. Wenn $\mu(\alpha) > 0$, falls $B_\alpha \neq \emptyset$, folgt dieses Axiom aus den anderen beiden Axiomen.
26.11.2005: Das Axiom ist in der Tat überflüssig. Siehe 4.2

3 T^μ ist streng minimal

Lemma 3.1. *M und M' seien zwei Modell von T^μ. Zwei Tupel $a \in M$ und $a' \in M'$ haben genau dann denselben Typ, wenn $a \mapsto a'$ sich zu einem Isomorphismus $\mathrm{cl}(a) \to \mathrm{cl}(a')$ fortsetzen läßt.*

Beweis. Nehmen wir an, daß a und a' denselben Typ haben. Man sieht leicht, daß $\mathrm{d}(a) = \mathrm{d}(a')$. Es gibt ein $a' \in A' \subset M'$, das zu $\mathrm{cl}(A)$ isomorph ist. Dann ist A' – in A' – der Abschluß von a' und $\mathrm{d}(a') = \delta(A')$. Daraus folgt $A' = \mathrm{cl}(a')$. Damit ist eine Richtung der behaupteten Äquivalenz bewiesen.[3]

Für die Umkehrung wählen wir elementare ω–saturierte elementare Erweiterungen $M \prec N$ und $M' \prec N'$. Der erste Teil des Beweises zeigt, daß a und a' in N bzw. N' denselben Abschluß haben. Ein Isomorphismus zwischen $\mathrm{cl}(a)$ und $\mathrm{cl}(a')$ erhält $L_{\infty,\omega}$–Formeln (in N und N'), weil N und N' reich sind. □

Lemma 3.2. *Sei $M \in \mathcal{C}^\mu$, B eine starke Teilmenge von M, (A, B) eine gutes Paar. Dann gibt es nur endlich viele Kopien von A über B in M.*

Beweis. Seien A_1 und A_2 zwei verschieden Kopien von A über B. Es genügt zu zeigen, daß A_1 und A_2 disjunkt sind. Weil $B \leq M$ und $\delta(A_1/B) = 0$, ist $B \cup A_1 \leq M$. Also ist $B \leq (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2) \leq B \cup A_2$. Weil $(B \cup A_2)/B$ minimal ist, folgt die Behauptung. □

Folgerung 3.3. *Sei $M \in \mathcal{C}^\mu$, B eine starke Teilmenge von B, A/B eine Erweiterung mit $\delta(A/B) = 0$. Dann gibt es nur endlich viele Kopien von A über B in M.*

Beweis. Wir können annehmen, daß $B \leq A$. Zerlege A/B in eine Folge von minimalen Erweiterungen. □

Satz 3.4. *T^μ ist streng minimal mit Dimensionsfunktion* d.

Beweis. Wir arbeiten in einem Modell von T^μ. Sei X eine Teilmenge und a ein Element. Es gibt zwei Fälle:

- $\mathrm{d}(a/X) = 0$. Dann ist nach dem obigen a algebraisch über X.
- $\mathrm{d}(a/X) = 1$. Dann ist a mit X nicht verbunden und $\mathrm{cl}(X) \cup \{a\}$ ist eine starke Teilmenge. Der Typ von a über X ist also festgelegt.

Es gibt also nur einen nicht–algebraischen 1–Typ über X. Das bedeutet, daß T^μ streng minimal ist. □

4 Schlußbemerkung

Lemma 4.1. *Der* d*–Abschluß einer endlichen Teilmenge von $M \in \mathcal{C}^\mu$ ist höchstens abzählbar.*

Beweis. $\mathrm{cl}_{\mathrm{d}}(X)$ ist die Vereinigung aller $A' \subset M$ mit $\mathrm{cl}(X) \subset A'$ und $\delta(A'/\mathrm{cl}(X)) = 0$. □

[3] Wir haben nur verwendet, daß a und a' dieselben Existenzformeln erfüllen. Aus 4.3 folgt, daß es genügt, wenn a' alle Existenzformeln erfüllt, die a erfüllt.

Folgerung 4.2. *Das Axiom c) kann ersetzt werden durch die Forderung, daß es unendlich viele Element gibt.*

Beweis. Sei M ein ω_1–saturiertes unendliches Modell der Axiome a), b). Wähle e_i mit $e_i \notin \mathrm{cl_d}(e_0, \ldots, e_{i-1})$. Die e_i sind d–unabhängig. Also hat $\{e_0, \ldots\}$ keine Relationen und ist stark in M. $\square$

Folgerung 4.3. *T^μ ist modellvollständig.*

Beweis. T^μ ist $\forall\exists$–axiomatisierbar und streng minimal. $\square$

5 Änderungen

1.4 : Druckfehler im Beweis von 2.1.
1.6 : Kleine Druckfehler (Junker).
1.7 : Abschnitte 3, 4.
1.8 : Beweis von 4.2
1.9 : Beweis von 3.2 (Omar Kaziz)
1.12 : Formulierung von 3.1, Beweis von 3.4 (Omar Kaziz)
1.13: Beweis von 3.2 (Tent)
1.14: Letzte Ungleichung in Abschnitt 1.

Literatur

[1] Ehud Hrushovski. A new strongly minimal set. *Ann. Pure Appl. Logic*, 62:147–166, 1993.