

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE UND HOMOLOGISCHE ALGEBRA

Vorlesung (Freiburg Sommersemester 1992)

Martin Ziegler

I HOMOTOPIEGRUPPEN

1 DIE FUNDAMENTALGRUPPE

Zwei Punkte a und b eines topologischen Raumes X lassen sich *durch einen Pfad verbinden*, wenn wir a stetig nach b verschieben können - wenn es also eine stetige Abbildung σ des Einheitsintervalls $I = [0,1]$ nach X gibt (einen Pfad) mit $\sigma(0)=a$ und $\sigma(1)=b$.

Lemma 1

Durch einen Pfad verbunden zu sein ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

a ist mit sich selbst durch den *trivialen* Pfad 1_a von a nach a - die konstante Abbildung mit Wert a - verbunden. Wenn σ a und b verbindet, dann verbindet der *inverse* Pfad $\sigma^{-1}(x) = \sigma(1-x)$ b und a . Einen Pfad σ , der a und b verbindet und einen Pfad τ , der von b nach c führt, können wir zu einem Pfad $\sigma\tau$ verbinden, der von a nach c führt: Wir setzen

$$\tau\sigma(x) = \begin{cases} \sigma(2x) & \text{falls } x \in [0, 1/2] \\ \tau(2x-1) & \text{falls } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Damit ist auch die Transitivität gezeigt. \square

Wenn in X je zwei Punkte durch einen Pfad verbunden sind, nennen wir X *bogenweise zusammenhängend*. Ein bogenweise zusammenhängender Raum ist zusammenhängend.

Die Verknüpfung von Pfaden ist nicht assoziativ. Man nennt zwei Pfade σ und τ *äquivalent*, wenn sie sich nur durch die Parametrisierung unterscheiden; wenn also $\sigma = \tau \circ \alpha$ für einen Automorphismus α von I , der die Endpunkte festläßt. Man zeigt leicht:

Lemma 2

- 1) *Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation.*
- 2) *Die Relation der Äquivalenz ist mit der Verknüpfung von Pfaden verträglich.*
- 3) *Die Verknüpfung ist assoziativ auf Äquivalenzklassen von Pfaden.*

□

Wir nennen zwei Pfade σ und τ von a nach b *homotop* (mit festgehaltenen Endpunkten), wenn es eine stetige Familie $(\phi_t)_{t \in I}$ von Pfaden von a nach b gibt, für die $\phi_0 = \sigma$ und $\phi_1 = \tau$. Eine nach Elementen von I indizierte Familie von Pfaden heißt dabei stetig, wenn für eine stetige Funktion $F: I \times I \rightarrow X$

$$\phi_t(s) = F(s, t).$$

F heißt eine *Homotopie* von σ nach τ . Wir schreiben

$$F: \sigma \simeq \tau \text{ rel}(0, 1)$$

oder auch kurz

$$\sigma \simeq \tau.$$

Äquivalente Pfade sind auch homotop: Eine Homotopie zwischen σ und $\sigma \circ \alpha$ ist $F(s, t) = \sigma((1-t)s + t\alpha(s))$.

Lemma 3

Homotopie von Pfaden ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

Wie der Beweis von Lemma 1. Für die Transitivität braucht man zum Beispiel:

Seien $F: X \times I \rightarrow Y$ und $G: X \times I \rightarrow Y$ stetig. Dann ist auch GF , definiert durch

$$GF(x,t) = \begin{cases} G(x,2t) & \text{falls } t \in [0, 1/2] \\ F(x,2t-1) & \text{falls } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

stetig. \square

Lemma 4

Die Verknüpfung von Pfaden ist mit der Homotopierelation verträglich.

Beweis:

Sei F eine Homotopie von σ_0 nach σ_1 und G eine Homotopie von τ_0 nach τ_1 .

Dann ist

$$GF(i,x) = \begin{cases} F(i,2x) & \text{falls } x \in [0, 1/2] \\ G(i,2x-1) & \text{falls } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

eine Homotopie von $\tau_0 \sigma_0$ nach $\tau_1 \sigma_1$. \square

Sei nun X ein topologischer Raum und a ein Punkt von X . Sei $\pi_1(X,a)$ die Menge aller Homotopieäquivalenzklassen von Pfaden von a nach a , von *Schleifen* bei a . Nach Lemma 1 macht die Verknüpfung von Pfaden $\pi_1(X,a)$ zu einer Halbgruppe.

Satz 5

$\pi_1(X,a)$ ist eine Gruppe, die Fundamentalgruppe von X bei a .

Beweis:

1_a (genauer gesagt die Homotopieklasse von 1_a) ist neutrales Element:

$$F(s, t) = \sigma\left(\frac{1+t}{2}s\right)$$

ist eine Homotopie von $\sigma 1_a$ nach σ .

Sei σ ein Pfad von a nach b . Dann ist

$$\sigma^{-1}(x) = \sigma(1-x)$$

der *inverse* Pfad von b nach a . Der Pfad $\sigma^{-1}\sigma$ ist eine Schleife bei a , die zu 1_a homotop ist; eine Homotopie von 1_a nach $\sigma^{-1}\sigma$ ist $(\sigma_i^{-1}\sigma_i)_{i \in I}$, wobei $\sigma_i = \sigma(\min(i, x))$. Das zeigt, daß $\pi_1(X, a)$ Inverse hat. \square

Lemma 6

Ein Pfad ρ von a nach b liefert einen Isomorphismus ρ_* von $\pi_1(X, a)$ mit $\pi_1(X, b)$. ρ_* hängt nur von der Homotopieklasse von ρ ab.

Beweis:

Man setzt $\rho_*(\sigma) = \rho^{-1}\sigma\rho$. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 4. \square

Wenn X *pfadweise* (oder auch *bogenweise*) *zusammenhängend* ist, d.h. wenn je zwei Punkte durch einen Pfad verbunden sind, können wir also von der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ von X sprechen.

Lemma 4

Eine *stetige* Abbildung f von X nach Y induziert einen Homomorphismus f_* von $\pi_1(X, a)$ nach $\pi_1(Y, f(a))$.

Beweis:

Wenn σ ein Pfad von a nach b ist, so ist $f \circ \sigma$ ein Pfad von $f(a)$ nach $f(b)$. Die Anwendung von f vertauscht mit der Verknüpfung von Pfaden. $\pi_a(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ ist also ein Homomorphismus falls wohldefiniert. Wenn aber F eine Homotopie von σ nach τ ist, so ist $f \circ F$ eine Homotopie von $f \circ \sigma$ nach $f \circ \tau$. \square

Tatsächlich ist π_1 ein *Funktor* von der Kategorie der *punktierten topologischen Räume* in die Kategorie der Gruppen. Die Objekte dieser Kategorie sind topologische Räume mit ausgezeichneten Punkt, Morphismen stetige Abbildungen, die die ausgezeichneten Punkte ineinander überführen. Um das einzusehen, ist nur noch zu bemerken, daß $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

π_1 ist kein Funktor auf der Kategorie der bogenweise zusammenhängenden topologischen Räume. Der Grund dafür ist, daß die Fundamentalgruppen i.A. nicht abelsch sind! Sei für eine Gruppe G

$$\text{ab}(G) = G/G'$$

die Abelianisierung von G (der Quotient von G nach der Kommutatorgruppe). Dann ist $H_1(X) = \text{ab}(\pi_1(X))$ ein Funktor von der Kategorie der bogenweise zusammenhängenden topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen. Präzise wird H_1 so definiert:

In jedem X wähle ein a_X und setze $H_1(X) = \pi_1(X, a_X)$. Für stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ wähle einen Pfad ρ von $f(a_X)$ nach a_Y . Setze $H_1(f) = \rho_* \circ f_*$.

2 HOMOTOPE ABBILDUNGEN

Zwei Abbildungen $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ heißen *homotop*, wenn f_0 und f_1 erstes und letztes Mitglied einer *stetigen Familie* $(f_t)_{t \in I}$ von Abbildungen von X nach Y sind. Eine stetige Familie ist gegeben durch eine *Homotopie* $F: X \times I \rightarrow Y$ via $f_t(x) = F(x, t)$. Wir schreiben

$$F: f_0 \simeq f_1.$$

Eine Verallgemeinerung dieses Begriff enthält die Homotopie von Pfaden als Spezialfall: Sei A eine Teilmenge von X , auf der f_0 und f_1 übereinstimmen. Dann heißen f_0 und f_1 *homotop relativ zu A* , wenn f_0 und f_1 durch eine Familie von Abbildungen verbunden werden, die alle auf A übereinstimmen. Man schreibt

$$f_0 \simeq f_1 \text{ rel } A.$$

Lemma 1

- 1) Homotopie (rel A) ist eine Äquivalenzrelation.
- 2) Homotopie ist mit der Verknüpfung von Abbildungen verträglich.

Beweis:

- 1) Wie der Beweis von Lemma 1.3
- 2) Wenn $F: f_0 \simeq f_1$ und $G: g_0 \simeq g_1$. Dann ist $H: g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$, wobei
$$H(x, t) = G(F(x, t), t). \quad \square$$

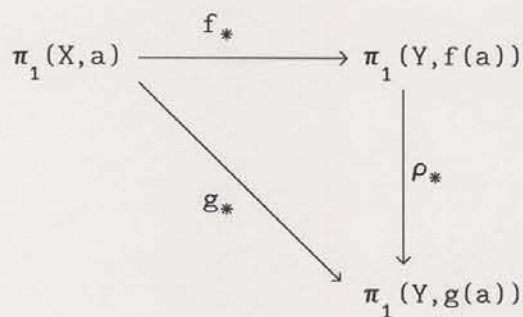
Lemma 1 gestattet die Definition der *Homotopiekategorie*: Die Objekte sind topologische Räume, die Morphismen Homotopieklassen von stetigen Abbildungen. Zwei Räume X und Y sind in dieser Kategorie isomorph, wenn es stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ mit $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ und $g \circ f \simeq \text{id}_X$ gibt. X und Y heißen dann *homotopieäquivalent*. f heißt *Homotopieinverses* von g .

Satz 2

Homotope Abbildungen induzieren die gleiche Abbildung auf den Fundamentalgruppen. Genauer:

$F: f \simeq g$ seien homotope stetige Abbildungen von X nach Y und a ein Element von X . Dann werden $f(a)$ und $g(a)$ durch den Pfad $\rho(s) = F(a, s)$ verbunden.

Das Diagramm



ist kommutativ.

Beweis:

Sei σ eine Schleife bei a . Wir müssen zeigen, daß

$$(1) \quad f \circ \sigma \approx \rho(g \circ \sigma) \rho^{-1}.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$(2) \quad \rho^{-1}(f \circ \sigma) \rho(g \circ \sigma^{-1}) \approx 1_{f(a)}.$$

Sei $f_t(x) = F(x, t)$. Dann verbindet der Pfad $\rho_t(s) = \rho(ts) f(a)$ mit $f_t(a)$. Nach dem nächsten Hilfssatz ist $(\tau_t)_{t \in I}$, definiert durch

$$\tau_t(s) = \rho_t^{-1}(f \circ \sigma) \rho_t(f_t \circ \sigma^{-1})$$

eine stetige Familie von Pfaden. τ_1 ist aber die linke Seite von (2) und τ_0 ist $1_{f(a)}(f \circ \sigma) 1_{f(a)}(f \circ \sigma^{-1})$, also homotop zu $1_{f(a)}$.

Hilfssatz:

$(\rho_t)_{t \in I}$ und $(\sigma_t)_{t \in I}$ seien stetige Familien von Pfaden. Dann ist auch $(\rho_t^{-1})_{t \in I}$ eine stetige Familie. Wenn für alle t der Endpunkt von ρ_t gleich dem Anfangspunkt von σ_t ist, dann ist auch $(\rho_t \sigma_t)_{t \in I}$ eine stetige Familie.

Beweis:

Die erste Behauptung ist klar. Die Funktion $\rho_t(s) \sigma_t(s)$ stimmt auf $[0, 1/2] \times I$ mit $\rho_t(2s)$ und auf $[1/2, 1] \times I$ mit $\sigma_t(2s-1)$ überein, ist also stetig. Daraus folgt die zweite Behauptung. \square

Folgerung 3

Bogenweise zusammenhängende homotopieäquivalente Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen.

Beweis:

Es gibt stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $G: Y \rightarrow X$ mit $f \circ g \approx \text{id}_Y$ und $g \circ f \approx \text{id}_X$. Sei a in X , $b = f(a)$ und $c = g(b)$. Aus Satz 2 folgt, daß in der Sequenz

$$\pi_1(X, a) \xrightarrow{f_*^a} \pi_1(Y, b) \xrightarrow{g_*^b} \pi_1(X, c) \xrightarrow{f_*^c} \pi_1(Y, f(c))$$

das Produkt von zwei aufeinander folgenden Abbildungen ein Isomorphismus

ist. Daraus folgt, daß g_*^b ein Isomorphismus ist. \square

Ein Raum, der homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum ist, heißt *zusammenziehbar*.

Bemerkung

Man sieht leicht, daß X genau dann zusammenziehbar ist, wenn es einen Punkt a in X gibt, sodaß id_X homotop zur konstanten Abbildung auf a ist. a kann beliebig gewählt werden. Ein zusammenziehbarer Raum ist bogenweise zusammenhängend.

Ein bogenweise zusammenhängender Raum heißt *einfach zusammenhängend*, wenn seine Fundamentalgruppe trivial ist.

Folgerung 4

Ein zusammenziehbarer Raum ist einfach zusammenhängend.

Man sieht leicht, daß für jedes n der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n zusammenziehbar ist. Ebenso ist klar, daß die n -dimensionale Vollkugel E^n zusammenziehbar ist. Wir werden später sehen, daß die n -Sphäre S^n nicht zusammenziehbar ist. Es gilt aber:

Satz 5

Die n -Sphären sind für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend.

(Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.)

Beweis:

Wir fixieren drei Punkte a, b, c in S^n . Man sieht leicht, daß

$$S^n \setminus \{b\} \cong S^n \setminus \{c\} \cong \mathbb{R}^n$$

einfach zusammenhängend sind. Sei σ eine Schleife bei a . Wir unterteilen jetzt I so fein $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = 1$, daß für alle $i < N$ $\sigma([s_i, s_{i+1}])$ b oder c nicht enthält. Wir können erreichen, daß die $\sigma(s_i)$ verschieden von b und c sind.

Wähle für jedes i einen Pfad τ_i , der a mit $\sigma(s_i)$ verbindet und b und c umgeht (das geht nur, wenn $n \geq 2$). σ_i sei der Teil von σ , der von $\sigma(s_i)$ nach $\sigma(s_{i+1})$ geht. σ ist nun homotop zu

$$\sigma_0 \tau_1^{-1} \tau_1 \sigma_1 \tau_2^{-1} \cdots \tau_{N-1} \sigma_{N-1}$$

Die Schleifen

$$\sigma_0 \tau_1^{-1}, \tau_1 \sigma_1 \tau_2^{-1}, \dots, \tau_{N-1} \sigma_{N-1}$$

sind aber alle zu 1_a homotop. \square

Wir haben eigentlich einen Spezialfall des Satzes von van Kampen bewiesen: X sei Vereinigung der offenen Mengen O und U . $O \cap U$ sei bogenweise zusammenhängend und enthalte a . Dann ist

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(O \cap U, a) & \longrightarrow & \pi_1(O, a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U, a) & \longrightarrow & \pi_1(X, a) \end{array}$$

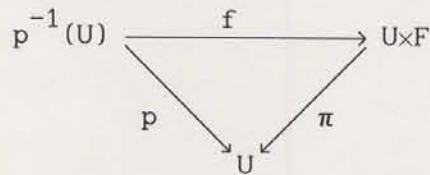
ein *push-out* In unserem Fall war $O = S^n \setminus \{b\}$ und $U = S^n \setminus \{c\}$.

3 ÜBERLAGERUNGEN

Sei X ein topologischer Raum. Eine *Überlagerung* von X ist ein Raum E zusammen mit einer Abbildung $p: E \rightarrow X$ mit der folgenden Eigenschaft:

Jedes x hat eine Umgebung U , deren Urbild $p^{-1}(U)$ in disjunkte offene Mengen U^j zerlegt werden kann, die vermöge p zu U homöomorph sind.

Diese Eigenschaft von U - die *Kleinheit* - kann auch so formuliert werden: Die Abbildung $p^{-1}(U) \rightarrow U$ ist *trivial*, das heißt es gibt einen diskreten Raum F , und einen Isomorphismus $f: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, der das Diagramm



kommutativ macht. (π ist die natürliche Projektion.).

Lemma 1

Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung und σ ein Pfad in X , der bei a anfängt. Dann kann man σ zu einem Pfad σ' in E liften (das heißt $p \circ \sigma' = \sigma$), der bei einem beliebigen a' anfängt, das über a liegt. σ' ist durch σ und a' eindeutig bestimmt.

Beweis:

Wenn die Überlagerung $E = X \times F \rightarrow X$ trivial ist und $a' = (a, f)$, muß σ' die Form (σ, τ) haben, wobei τ ein Pfad in F ist, der bei f anfängt. Für τ kann man 1_f nehmen, und weil F diskret ist, ist das die einzige Möglichkeit.

Nun zum allgemeinen Fall: Weil I kompakt ist, gibt es eine Unterteilung $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = 1$ von I , sodaß für jedes i $\sigma([s_i, s_{i+1}])$ in einer kleinen Umgebung U_i enthalten ist. Sei σ_i der Teil von σ , der von $\sigma(s_i)$ zu $\sigma(s_{i+1})$ führt. Wir liften nun σ_0 (eindeutig) zu einem Pfad σ'_0 , der bei a' anfängt. Dann liften wir σ_1 zu einem Pfad σ'_1 , der bei $\sigma'_0(s_1)$ anfängt, etc. Schließlich setzen wir $\sigma = \sigma'_0 \dots \sigma'_{N-1}$. \square

Sei $p(a') = a$ und σ ein Pfad, der bei a anfängt. Wir definieren

$$a' \sigma$$

als den Endpunkt, des Liftung σ' von σ , die bei a' anfängt. Man überlegt leicht, daß $(a' \sigma) \tau = a' (\sigma \tau)$.

Wir wollen zeigen, daß die Homotopieklasse von σ' nur von der Homotopie-

klasse von σ abhängt. Das folgt aus dem nächsten Satz, der für den einpunktigen Raum Z Lemma 1 enthält.

Satz 2 (Homotopieliftungssatz)

Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann läßt sich jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow \iota_0 & & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{f} & X \end{array},$$

wobei $\iota_0(z) = (z, 0)$, durch ein Lifting

$$f': Z \times I \rightarrow E$$

ergänzen. f' ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

Wie f' aussehen muß ist klar: für jedes z ist

$$I \xrightarrow{\iota_z} \{z\} \times I \xrightarrow{f'} E$$

die Liftung des Pfades

$$I \xrightarrow{\iota_z} \{z\} \times I \xrightarrow{f} X.$$

Es bleibt zu zeigen, daß f' stetig ist. Das ist klar, wenn die Überlagerung $E = X \times F \rightarrow X$ trivial ist: wir schreiben $g(z) = (f(z, 0), h(z))$ für eine stetige Abbildung $h: Z \rightarrow F$ und haben dann $f'(z, s) = (f(z, s), h(z))$.

Um die Stetigkeit von f' im allgemeinen Fall zu sehen, sei z ein beliebiges Element von Z . Wir finden eine Umgebung W von z und eine Einteilung $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = 1$ von I , sodaß für jedes $i < N$ $f(W \times [s_i, s_{i+1}])$ in einer kleinen Umgebung U_i enthalten ist. Betrachte für alle $i < N$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & p^{-1}(U) \\ & \nearrow f' & \downarrow p \\ W \times [s_i, s_{i+1}] & \xrightarrow{f} & U_i \end{array}.$$

Weil rechts eine triviale Überlagerung steht, ist f' auf $W \times [s_i, s_{i+1}]$ stetig, wenn f' auf $W \times \{s_i\}$ stetig ist. Weil f' auf $W \times \{0\}$ stetig ist, folgt induktiv, daß f' auf allen $W \times [s_i, s_{i+1}]$ und daher auch auf $W \times I$ stetig ist. \square

Folgerung 3

Sei $E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann sind die Liftungen homotoper Pfade mit gleichem Anfangspunkt homotop.

Beweis:

Sei $F: \sigma \simeq \tau$ und σ' eine Liftung von σ . Sei $F': I \times I \rightarrow E$ eine Liftung von F mit $F'(s, 0) = \sigma'(s)$. F' ist eine Homotopie zwischen σ' und einem Pfad τ' , der über τ liegt. Man muß noch checken, daß für alle t $F'(0, t) = \sigma'(0)$ und $F'(1, t) = \sigma'(1)$. Das liegt aber daran, daß z.B. $t \mapsto F'(0, t)$ die Liftung des trivialen Pfades $1_{\sigma(0)}$ mit Anfangspunkt $\sigma'(0)$ ist. \square

Sei $p(a') = a$ und σ ein Pfad, der bei a anfängt. Es folgt, daß $a'\sigma$ nur von der Homotopieklasse von σ abhängt. Das liefert eine *Operation* (von rechts) von $\pi_1(X, a)$ auf der Faser $p^{-1}(a)$.

Eine Gruppe G operiert (von links) auf einer Menge X , vermöge einer Abbildung $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g(x)$ mit $1(x) = x$ und $g(h(x)) = (gh)(x)$. G operiert *transitiv*, wenn es zu jedem x und jedem y ein g mit $g(x) = y$ gibt. Und operiert *regulär*, wenn g zusätzlich eindeutig bestimmt ist.

Satz 4

$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Wenn wir S^1 mit dem Einheitskreis in \mathbb{C} identifizieren, entspricht der Zahl z die Homotopieklasse der Schleife σ_z (bei 1):

$$\sigma_z(s) = e^{2\pi izs}.$$

Beweis:

Es ist klar, daß $\sigma_z \sigma_w \simeq \sigma_{z+w}$. Wir müssen zeigen, daß jede Schleife bei 1 zu

genau einem σ_z homotop ist:

\mathbb{R} ist vermöge $r \mapsto e^{2\pi ir}$ eine Überlagerung von S^1 , die Faser von 1 ist \mathbb{Z} . Sei τ ein Schleife bei 1, wir nennen 0τ die *Windungszahl* $w(\tau)$ von τ . $w(\tau)$ hängt nur von der Homotopieklasse von τ ab. Weil $\sigma'_z(s) = zs$, ist $w(\sigma_z) = z$.

Behauptung:

Zwei Schleifen bei 1 sind genau dann homotop, wenn sie die gleiche Windungszahl haben.

Beweis:

Wenn ρ und σ die gleiche Windungszahl haben, sind ρ' und σ' Pfade mit gleichem Anfangspunkt. Weil \mathbb{R} einfach zusammenhängend ist, sind ρ' und σ' homotop. Also sind auch ρ und σ homotop. \square

Mit E^n bezeichnen wir die n -dimensionale Vollkugel mit Rand S^{n-1} . Es besteht also E^0 aus einem Punkt, $E^1 = I$ und E^2 ist die Einheitskreisscheibe. Sei Y ein Unterraum von X . Y heißt *Retrakt* von X , wenn es eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ gibt mit $f|_Y = \text{id}_Y$. Y ist *Deformationsretrakt* von X , wenn $f \simeq \text{id}_X$ und *starker Deformationsretrakt*, wenn $f \simeq \text{id}_X$ (rel Y).

Folgerung 5 (Browerscher Fixpunktsatz für $n=1,2$)

Sei $n=1,2$.

- 1) S^{n-1} ist kein Retrakt von E^n
- 2) Jede stetige Abbildung $g: E^n \rightarrow E^n$ hat einen Fixpunkt

Beweis:

1) Wenn Y Retrakt von X ist, ist Y bogenweise zusammenhängend, wenn X bogenweise zusammenhängend ist, also ist $S^0 = \{0,1\}$ kein Retrakt von E^1 . Sei f die Retraktionsabbildung, i die Inklusionsabbildung von Y nach X und a ein Element von Y . Weil $f \circ i = \text{id}_Y$, gilt für die Homomorphismen

$$\pi_1(Y, a) \begin{array}{c} \xrightarrow{i_*} \\ \xleftarrow{f_*} \end{array} \pi_1(X, a)$$

$f_* \circ i_* = \text{id}$. i_* ist also injektiv. Wenn X also einfach zusammenhängend ist, muß auch Y einfach zusammenhängend sein. Also ist S^1 kein Retrakt von E^2 .

2) Wenn g keinen Fixpunkt hätte, könnte man eine Retraktionsabbildung f von E^n nach S^{n-1} konstruieren: Sei $x \in E^n$ gegeben. Verlängere die Gerade von $g(x)$ nach x bis sie auf S^{n-1} stößt. Dieser Schnittpunkt sei $f(x)$. \square

Eine Überlagerung $p: E \rightarrow X$ eines bogenweise zusammenhängenden Raumes X mit einfach zusammenhängenden E - wie die im letzten Beweis betrachtete Überlagerung von S^1 - heißt *universell*.

Der Beweis von Satz 4 zeigt, daß für universelle Überlagerungen $\pi_1(X, a)$ regulär auf $p^{-1}(a)$ operiert. (Daß die Operation transitiv ist, liegt am bogenweisen Zusammenhang von E .)

Eine *Decktransformation* einer Überlagerung ist ein Automorphismus δ von E mit $p \circ \delta = p$, der also die Fasern von p invariant läßt. Die Decktransformationen der oben betrachteten universellen Überlagerung von S^1 sind die Abbildungen $r \mapsto r + z$ für $z \in \mathbb{Z}$.

Satz 6

Sei X bogenweise und lokal bogenweise zusammenhängend und $p: E \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung. Dann gilt:

- 1) Die Fundamentalgruppe von X ist isomorph zur Gruppe der Decktransformationen.
- 2) Die Gruppe der Decktransformationen operiert regulär auf jeder Faser.

Hier heißt X lokal bogenweise zusammenhängend, wenn die Topologie eine Basis aus bogenweise zusammenhängenden Umgebungen hat.

Beweis:

Wir zeigen zuerst, wie 1) aus 2) folgt: Sei α eine Decktransformation. Und σ' eine Liftung von σ , die a' und a'' verbindet. Dann ist $\alpha\sigma'$ eine Liftung von σ , die $\alpha(a')$ und $\alpha(a'')$ verbindet. Wir haben also

$$(*) \quad \alpha(a'\sigma) = (\alpha a')\sigma.$$

Fixiere ein $a' \in p^{-1}(a)$ und setze

$$F(\alpha) = \text{das } \sigma \in \pi_1(X, a) \text{ mit } \alpha a' = a' \sigma.$$

F ist offensichtlich eine Bijektion. daß F ein Homomorphismus ist, folgt so:

Sei $F(\alpha) = g$ und $F(\beta) = h$, dann ist

$$(\alpha\beta)(a') = \alpha(\beta(a')) = \alpha(a'h) = (\alpha a')h = (a'g)h = a'(gh).$$

Beweis von 2) (Eindeutigkeit): Nehmen wir an, daß α den Punkt a_1 auf a_2 abbildet. Sei $b_1 = a_1\sigma$ ein anderer Punkt von E. Dann ist $\alpha(b_1) = a_2\sigma$.

Beweis von 2) : (Existenz): Seien a_1 und a_2 aus $p^{-1}(a)$ gegeben. Wir definieren eine Decktransformation α , die a_1 in a_2 abbildet, durch $\alpha(a_1\sigma) = a_2\sigma$. Es bleibt nur noch die Stetigkeit von α zu zeigen. Sei $\alpha(b_1) = b_2$ und $p(b_1) = b$. Wähle eine kleine und bogenweise zusammenhängende Umgebung U von b und eine offene Zerlegung (U_i) von $p^{-1}(U)$ auf denen p ein Homöomorphismus mit U ist. b_1 möge in U_1 und b_2 in U_2 liegen. Weil die U_i bogenweise zusammenhängen, folgt, daß αU_1 auf U_2 abbildet. α ist also ein Homöomorphismus zwischen U_1 und U_2 .

Folgerung 7

- 1) Wenn X lokal bogenweise zusammenhängt, sind alle universellen Überlagerungen über X isomorph.
- 2) Sei E einfach zusammenhängend und lokal bogenweise zusammenhängend. $p: F \rightarrow X$ sei ein Überlagerung. $g: E \rightarrow X$ sei stetig und $g(e) = p(f)$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $g': E \rightarrow F$ mit $p \circ g' = g$ und $g'(e) = f$.

Beweis:

Wie der Beweis von Satz 6 Teil 2).

Wir nennen einen Raum X *lokal einfach zusammenhängend*, wenn X eine Basis aus einfach zusammenhängenden offenen Mengen hat. *Semi-lokal einfach zusammenhängend* bedeutet die Existenz einer Umgebungsbasis aus offenen Mengen hat, so daß jede Schleife bei a , die ganz in U verläuft, in X homotop zu 1_a ist. (Wir nennen eine solche offene Umgebung *klein*.)

Satz 8

Jeder semi-lokal einfach zusammenhängende Raum hat eine universelle Überlagerung.

Beweis:

Sei X semi-lokal einfach zusammenhängend. Fixiere ein $a \in X$. E sei die Menge aller Homotopieklassen von Pfaden mit Anfangspunkt a . $p: E \rightarrow X$ ordnet jeder Klasse e den Endpunkt der Pfade aus e zu. Sei $e \in E$ und U eine kleine offene Umgebung von $p(e)=b$. Für jedes $c \in U$ gibt es einen Pfad σ_c , der in U verläuft und b mit c verbindet. Weil U klein ist, hängt die Homotopieklasse \bar{c} von σ_c nicht von der Wahl von σ_c ab. Setze $E_{e,U} = \{\bar{c} \mid c \in U\}$. Natürlich ist $p(E_{e,U})=U$.

Behauptung:

Sei f in $E_{e,U}$ und V eine kleine offene Umgebung von $p(f)$, die in U enthalten ist. Dann ist $E_{f,V} \subseteq E_{e,U}$.

Beweis: Sei $b=p(e)$ und $c=p(f)$. Dann ist $f=e\bar{c}$, wobei \bar{c} die Homotopieklasse eines Pfades von b nach c ist, der ganz in U liegt. Jedes $g \in E_{f,V}$ hat die Form $\bar{e}\bar{d}$, wobei \bar{d} die Homotopieklasse eines Pfades mit Anfangspunkt c ist, der ganz in V liegt. Dann zeigt $g=e(\bar{c}\bar{d})$, daß $g \in E_{e,U}$.

Es folgt aus der Behauptung leicht, daß

- 1) Die Mengen der Form $E_{e,U}$ bilden die Umgebungsbasis einer Topologie auf E .
- 2) Sei U eine kleine Umgebung von b . Dann ist $p^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung der Mengen $E_{e,U}$, wobei e alle Homotopieklassen von Pfaden von a nach b durchläuft.

Die durch die $E_{e,U}$ definierte Topologie von E , macht also $p:E \rightarrow X$ zu einer Überlagerung. Es bleibt zu zeigen, daß E einfach zusammenhängend ist. Sei σ ein Pfad, der bei a anfängt. Sei für alle $t \in I$ σ_t der Pfad $\sigma_t(s) = \sigma(st)$, der von a bis $\sigma(t)$ führt. Man sieht nun leicht, daß

$$\sigma'(t) = \text{Homotopieklasse von } \sigma_t$$

eine Liftung von σ definiert, die bei der Homotopieklasse $1_a / \simeq$ von 1_a anfängt. Daraus folgt zunächst, daß E bogenweise zusammenhängend ist. Nun ist jede Schleife bei $1_a / \simeq$ von der Form σ' . σ' endet aber bei der Homotopieklasse von σ , die also $1_a / \simeq$ ist; also ist nach Folgerung 3 auch σ homotopisch trivial. \square

4 HÖHERE HOMOTOPIEGRUPPEN.

In einer Übung haben wir die Menge X^I aller Pfade in X so mit einer (der kompakt-offenen) Topologie versehen, daß eine Abbildung $Z \rightarrow X^I$ genau dann stetig ist, wenn die zugehörige Abbildung $I \times Z \rightarrow X$ stetig ist. (Dadurch ist die Topologie eindeutig bestimmt. Man braucht nur, daß I lokalkompakt ist.) Offenbar ist also eine Homotopie zwischen zwei Pfaden σ und τ ein Pfad in X^I , der von σ nach τ führt und nur aus Pfaden mit gleichem Anfangs- und Endpunkt besteht.

$\Omega_a(X)$ sei der Raum aller Schleifen bei a . Wir definieren die höheren Homotopiegruppen induktiv durch:

$$\pi_n(X, a) = \pi_{n-1}(\Omega_a(X), 1_a), \quad (n > 1).$$

Satz 1

Die höheren Homotopiegruppen sind kommutativ.

Beweis:

Wir müssen zeigen, daß die Fundamentalgruppe eines Schleifenraums $\Omega_a(X)$ bei 1_a kommutativ ist. Eine Schleife $(S_t)_{t \in I}$ im Schleifenraum ist gegeben durch eine stetige Abbildung $S: I \times I \rightarrow X$, wobei $S_t(s) = S(s, t)$. Weil die S_t Schleifen bei a

sind, ist

$$S(0,t)=S(1,t)=a.$$

Weil S eine Schleife bei 1_a ist, ist

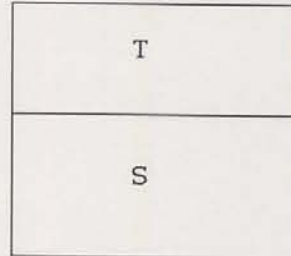
$$S(s,0)=S(s,1)=a.$$

Der Rand des Quadrats I^2 wird also auf a abgebildet.

S und T sind homotop, wenn es ein $F: I^2 \times I \rightarrow X$ gibt mit $S=F_0$, $T=F_1$ und für das alle F_u den Rand von I^2 auf a abbilden. ($F_u(s,t)=F(s,t,u)$).

Man verknüpft zwei Schleifen S und T vermöge

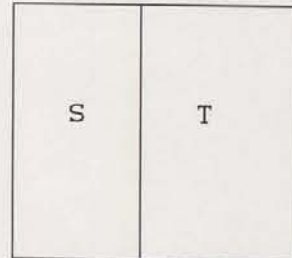
$$ST(s,t) = \begin{cases} S(s,2t), & \text{wenn } t \in [0, 1/2] \\ S(s,2t-1), & \text{wenn } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$



Diese Verknüpfung macht aus den Homotopieklassen unsere Fundamentalgruppe mit Einselement $\mathbb{I}(s,t)=a$.

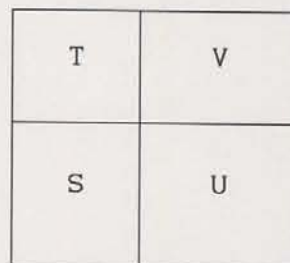
Vertauscht man die Rolle der Variablen s und t so sieht man, daß man "die selbe" Gruppe auch mit der Verknüpfung

$$S*T(s,t) = \begin{cases} S(2s,t), & \text{wenn } s \in [0, 1/2] \\ S(2s-1,t), & \text{wenn } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$



bekommt. Es gilt die Regel

$$(ST)*(UV) = (S*U)(T*V)$$



Daraus folgt

$$ST \simeq (S*\mathbb{I})(\mathbb{I}*T) \simeq (S\mathbb{I})*(\mathbb{I}T) \simeq S*T \simeq (\mathbb{I}S)*(T\mathbb{I}) \simeq (\mathbb{I}*T)(S*\mathbb{I}) \simeq TS. \quad \square$$

Bemerkungen:

1) Die n -dimensionalen Schleifen von X bei a sind die stetigen Abbildungen von I^n nach X , die den Rand auf a abbilden. Wenn man alle Punkte des Randes von I^n identifiziert (siehe Bemerkung , erhält man S^n , wo z.B. der Nordpol von S^n dem Rand von I^n entspricht. Die n -dimensionalen Schleifen sind also nichts anderes als auf S^n definierte Abbildungen, die den Nordpol auf a abbilden. Das liefert auch eine Definition der 0-ten Homotopiemenge $\pi_0(X,a)$: das ist die Menge alle Homotopieklassen rel 0 von Abbildungen von $S^0=\{0,1\}\rightarrow X$, die 0 auf a abbilden, also die Menge der Bogenzusammenhangskomponenten von X mit der Komponente von a als ausgezeichnetem Element.

2) Man sieht leicht, daß eine n -Schleife $S:S^n\rightarrow X$ genau dann zur trivialen Schleife homotop (rel Nordpol) ist, wenn S auf E^{n+1} fortgesetzt werden kann.

3) Weil die Bildung des Schleifenraums $(X,a)\mapsto(\Omega_a(X),1_a)$ auf natürliche Weise ein Funktor ist, ist π_n ein Funktor auf der Kategorie der punktierten Räume. Weil Ω homotope Abbildungen in homotope Abbildungen überführt, überführt π_n homotope Abbildungen in dieselben Homomorphismen. Zusammenziehbare Räume haben also triviale höhere Fundamentalgruppen.

Satz 2

Sei $p:E\rightarrow X$ eine Überlagerung und $p(e)=x$. Dann ist für alle $n>1$ die kanonische Abbildung $\pi_n(E,e)\rightarrow\pi_n(X,x)$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Surjektivität: Wir müssen zeigen, daß wir jede n -dimensionale Schleife $S:I^n\rightarrow X$ bei x liften können zu einer Schleife bei e . Nun können wir aber S auffassen als eine Abbildung $S^n\rightarrow X$, die den Nordpol nach x abbildet. Wenn $n>1$, ist S^n einfach zusammenhängend und man liftet mit Folgerung 3.7(2).

Injektivität: Folgt aus dem Homotopieliftungssatz. \square

Bemerkung:

Es ist

$$\pi_n(S^m) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n < m \\ \mathbb{Z}, & \text{wenn } n = m \\ \text{weitgehend unbekannt} & \text{für } n > m. \end{cases}$$

Aus $\pi_n(S^n)$ folgt der Brouwersche Fixpunktsatz für E^{n+1} wie in 3.5.

Der Begriff der Überlagerung verallgemeinert sich zum Begriff der *Faserung*. Das sind $p: E \rightarrow X$, für die der Homotopieliftungssatz 3.2 (ohne die Eindeutigkeitsaussage) gilt. Wenn X *parakompakt* ist (d.h. jede offene Überdeckung hat eine lokal endliche Verfeinerung, z.B. wenn X lokalkompakt ist und eine abzählbare Basis hat), ist jede *Bündelabbildung* $p: E \rightarrow X$ mit *Faser* F (das bedeutet, daß p lokal von der Form $\pi: U \times F \rightarrow U$ ist. Dabei ist F ein beliebiger topologischer Raum) eine Faserung. Das ist nicht leicht zu beweisen.

Beispiele

1) Die Hopfsche Faserung $S^3 \rightarrow S^2: (x_1, y_1, x_2, y_2)$ aus S^3 wird zunächst auf $\frac{x_1 + iy_1}{x + iy}$ aus $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Die Riemannsche Zahlkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist aber homöomorph zu S^2 .
Die Faser dieser Bündelabbildung ist homöomorph zu S^1 .

2) Sei X ein Raum und L der Raum aller Pfade bei a . Durch $p(s) = \sigma(1)$ wird $L \rightarrow X$ zu einer Faserung. (Man rechnet die Homotopieliftungseigenschaft leicht nach.) Die Faser von a ist $\Omega_a(X)$. L ist zusammenziehbar.

2 2

Satz 3 (Die erste exakte Homotopiesequenz)

Sei $p: E \rightarrow X$ eine Faserung. Dann gibt es kanonisch definierte Abbildungen

(Verbindungsmorphismen) $\pi_n(X, a) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e)$, sodaß die Folge

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, e) \rightarrow \pi_n(E, e) \rightarrow \pi_n(X, a) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(F, e) \rightarrow \pi_0(E, e) \rightarrow \pi_0(X, a)$$

exakt ist.

Das heißt, daß an jeder Stelle der Kern der ausgehenden Abbildung gleich dem

Bild der eingehenden Abbildung ist. (Der Kern einer Abbildung nach $\pi_0(\dots)$ ist das Urbild des ausgezeichneten Elements von $\pi_0(\dots)$.)

Hieraus folgt übrigens Satz X: Wenn $n > 1$ sind die $\pi_{n-1}(F)$ trivial.

Beweisskizze:

Der Verbindungsmorphismus ist folgendermaßen definiert. Sei $S: I^n \rightarrow X$ eine n -Schleife bei a . Wir liften S zu einer Abbildung $S': I^n \rightarrow E$, die $(0,0,\dots,0)$ auf e abbildet. Wenn E keine Überlagerung ist, kann man i.A. nicht erreichen, daß S' den ganzen Rand von I^n auf e abbildet. Die Einschränkung von S' auf δI^n liefert aber eine $(n-1)$ -Schleife in F bei e , deren Homotopieklasse das Bild von S unter dem Verbindungsmorphismus ist. Für Faserungen zeigt man leicht, daß Homotopieliftungen bis auf faserweise Homotopie eindeutig bestimmt sind. Also ist die Homotopieklasse von $S' | \delta I^n$ in F eindeutig bestimmt.

Exaktheit bei $\pi_n(F)$:

Sei $T: S^n \rightarrow F$ eine n -Schleife in F bei e . Dann ist T in E genau dann homotop zur trivialen Schleife, wenn T der Rand einer $(n+1)$ -Schleife $S': I^{n+1} \rightarrow E$ ist. Weil ein solches S' den Rand δI^{n+1} in F abbildet, sind diese S' gerade die Liftungen von $(n+1)$ -Schleifen bei a .

Exaktheit bei $\pi_n(X)$:

Sei $S: I^n \rightarrow X$ eine n -Schleife bei a . Wenn S Bild einer Schleife S' in E ist, bildet der Verbindungsmorphismus S auf den "Rand von S' " also auf die triviale $(n-1)$ Schleife bei e ab. Sei umgekehrt $S': I^n \rightarrow E$ eine Liftung von S . Wenn der Verbindungsmorphismus S auf die triviale Schleife in F abbildet, ist $S' | \delta I^n$ in F homotop zur trivialen Schleife. Eine solche Homotopie kann man (immer !) zu einer Homotopie $S' \simeq S''$ fortsetzen. S'' ist dann Schleife bei n . Dann ist S homotop zu pS'' , liegt also im Bild von $\pi_n(E) \rightarrow \pi_n(X)$.

Exaktheit bei $\pi_n(E)$:

Sei $T: S^n \rightarrow E$ n -Schleife bei e . Dann ist pT homotop zur trivialen Schleife bei a , wenn T homotop zu einer Schleife S ist, für die pS trivial ist (Homotopie-

liftung!). Das heißt aber, daß S in F liegt. \square

Sei A ein Teilraum von X , der a enthält. Eine *relative* n -Schleife ist eine Abbildung $S: I^n \rightarrow X$, die $0 \times I^{n-1}$ nach A und den Rest des Randes von I^n nach a abbildet. Mit der oben eingeführten Definition werden, die Homotopieklassen solcher Abbildungen zu einer Gruppe $\pi_n(X, A, a)$, die für $n > 2$ abelsch ist. Kanonische Abbildungen ergeben die *zweite* exakte Homotopiesequenz:

$$\dots \rightarrow \pi_n(A) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X, A) \rightarrow \pi_{n-1}(A) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(X).$$

Das ist alles leicht zu zeigen. Tatsächlich ergibt sich die zweite Homotopiesequenz aus der ersten, wenn man die Faserung $L' \rightarrow A$ betrachtet, die sich aus der oben betrachteten Faserung $L \rightarrow X$ ergibt.

Identifizierung

Sei X ein topologischer Raum und $f: X \rightarrow S$ eine Abbildung in die Menge S . Die offenen Mengen der *finalen* Topologie von S sind die Mengen, deren Urbild offen in X sind. Die finale Topologie ist die feinste Topologie von S , für die f stetig ist. Sei A eine Teilmenge von X . Im Raum X/A werden alle Punkte von A identifiziert. Die Grundmenge von X/A ist $(X \setminus A) \cup \{a\}$ mit der finalen Topologie der Projektion $X \rightarrow X/A$, wobei $A \rightarrow a$. Die stetigen Abbildungen auf X/A entsprechen genau den stetigen Abbildungen auf X , die auf A konstant sind.

5 KOMPAKTE FLÄCHEN

Eine Fläche ist eine zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeit (d.h. ein hausdorffscher topologischer Raum, der eine abzählbare Basis aus offenen Mengen hat, die homöomorph zu offenen Teilmengen des \mathbb{R}^2 sind). Eine nichtleere offene Teilmenge einer Fläche ist wieder eine Fläche. Man kann darum nicht hoffen, beliebige Flächen klassifizieren zu können. Wir beschränken uns im folgenden auf *kompakte* Flächen.

Beispiele:

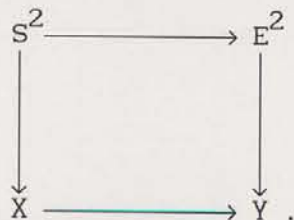
Die orientierbaren Flächen:

- 1) Die 2-Sphäre S^2
- 2) Der zweidimensionale Torus $T=S^1 \times S^1$
- 3) Die Brezel. Rezept: Man nehme zwei Torusse (Tori ist vielleicht besser) und schneide aus beiden einen kleinen Kreis heraus. Dann verklebe man die beiden Torusse an den Rändern der beiden Kreise. Diese Operation nennt man die zusammenhängende Summe $T\#T$. Weil man einen kleinen Kreis stetig überall hinschieben kann, hängt die zusammenhängende Summe nicht von der Wahl des Kreises ab. (Die zusammenhängende Summe von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten bildet man analog: Man schneidet kleine n-dimensionale Kugeln $\cong E^n$ aus, und verklebt an den zu S^{n-1} isomorphen Rändern.)
- 4) Die n-Brezel $T\#T\#T \dots \#T$ (n Kopien). (Die 0-Brezel soll S^2 sein.)

Das Geschlecht einer orientierbaren Fläche ist die Zahl ihrer Henkel. S^2 hat das Geschlecht 0, T das Geschlecht 1, eine n-Brezel das Geschlecht n.

Die nicht-orientierbaren Flächen:

- 5) Die projektive Ebene P^2 kann man auf verschiedene Weisen erhalten:
 - a) Man erweitert \mathbb{R}^2 um die Menge aller Richtungen. (Dann schneiden sich parallele Geraden "im Unendlichen", nämlich in ihrer gemeinsamen Richtung.) Topologisch passiert hier folgendes: \mathbb{R}^2 wird durch das Innere \dot{E}^2 von E^2 ersetzt. Man verklebt \dot{E}^2 mit einem topologischen Raum X zu Y, indem man vermöge einer stetigen Abbildung $S^2 \rightarrow X$ den Rand von E^2 mit Punkten von X identifiziert. Y ist dann der pushout des Diagramms



Um P^2 zu erhalten verklebt man \dot{E}^2 mit S^2 vermöge der 2-fachen Überlage-

rung $S^2 \longrightarrow S^2$.

- b) P^2 ist die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume des Vektorraums \mathbb{R}^3 mit der finalen Topologie der kanonischen Abbildung $\mathbb{R}^3 \setminus 0 \rightarrow P^2$. Das ist eine Bündelabbildung mit Faser $\mathbb{R} \setminus 0$.
- c) Man identifiziert in S^2 antipodischen Punkte und gibt P^2 die finale Topologie von $S^2 \rightarrow P^2$. Das ist eine 2-fache Überlagerung.
- 6) Die *Kleinsche Flasche* $P^2 \# T$.
- 7) Die nichtorientierbaren n -Brezeln $P^2 \# T \dots \# T$ (n viele Summanden). (Die nichtorientierbare 1-Brezel soll P^2 sein.)

P^2 hat das Geschlecht 1, nicht-orientierbare n -Brezeln das Geschlecht n .

Lemma 1

Sei P ein (ebenes) Polygon mit $2n$ Seiten. Wenn wir die Seiten paarweise verkleben erhält man eine kompakte Fläche F .

Beweis:

Wir können annehmen, daß alle Seiten von P gleichlang sind. Man sieht leicht, daß F kompakt ist und eine abzählbare Basis hat. Wir müssen zeigen, daß F lokal isomorph zum \mathbb{R}^2 ist. Für Punkte, die aus dem Inneren von P kommen, ist das klar. Ein Punkt p , der auf dem Inneren einer Seite liegt, wird mit einem Punkt q auf einer anderen Seite identifiziert. Wenn wir um p und um q in P zwei kleine Halbkreise vom gleichen Radius ziehen, werden in F diese Halbkreise an der Grundseite verklebt. Das ergibt einen Kreis mit Mittelpunkt $p=q$. F ist also bei $p=q$ lokal euklidisch. Nun zu den Eckpunkten. Wir schlagen um jede Eckpunkt von P kleine Kreise vom gleichen Radius. In F werden die Seiten der so entstandenen Tortenstücke paarweise verklebt. Dadurch entsteht eine Reihe kleiner Torten. Die Mittelpunkte dieser Torten entsprechen den verschiedenen Äquivalenzklassen der Eckpunkte von P in F . Die Torten sind euklidische Umgebungen dieser Punkte in F . \square

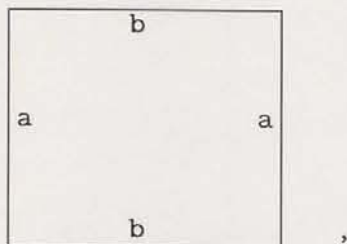
Wir zitieren

Lemma 2

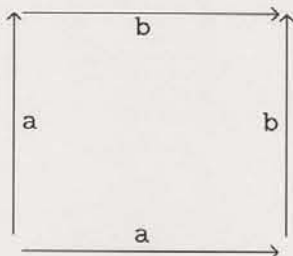
Jede kompakte Fläche entsteht aus einem Polygon durch paarweises Identifizieren von Seiten.

Beispiele

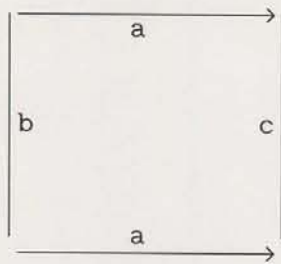
- 1) S^2 erhält man aus einem Polygon mit zwei (!) Seiten. Will man so etwas nicht als Polygon anerkennen, nehmen wir ein Quadrat



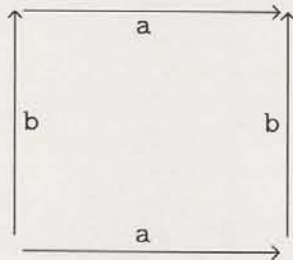
in dem wir gleichgenannte Seiten identifizieren. Die beiden Seiten a lassen sich auf zwei wesentlich verschiedene Arten identifizieren: Wenn wir beide Seiten orientieren, orientierungserhaltend und orientierungsumkehrend. Per Konvention identifizieren wir orientierungserhaltend. S^2 wird dann beschrieben durch



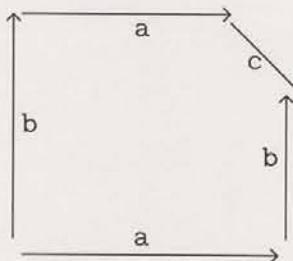
2) T entsteht aus dem Hohlzylinder



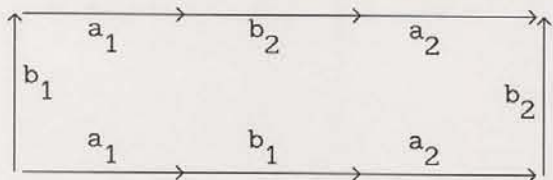
durch Identifizieren der beiden Randkreise b und c. Wir erhalten



3) Wir schneiden aus T einen kleinen Kreis c aus:



Wenn wir zwei solche gelochten Torusse an den Kreisrändern verkleben, ergibt sich die Brezel



Wenn wir die Seiten von P einmal zyklisch durchlaufen und die labels der Seiten, die wir entgegen ihrer Orientierung durchlaufen mit "⁻¹" versehen, erhalten wir ein Wort, das unsere Fläche beschreibt. Die Zerschneidung von S^2

gehört zum Wort $abb^{-1}a^{-1}$, T gehört zu $aba^{-1}b^{-1}$ und die Brezel zu $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$.

4) Die n-Brezel wird durch das Wort $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$ gegeben.

5) P^2 ist durch das Wort aa gegeben, oder, wenn man zweiseitige Polygone nicht mag, durch $abab$.

6) Die Kleinsche Flasche wird, wenn sie wie oben definiert wird, durch $ccaba^{-1}b^{-1}$ gegeben. Mit den unten angegebenen Methoden zeigt man leicht, daß die Kleinsche Flasche auch gemäß $aba^{-1}b$ und gemäß $aabb$ zerschnitten werden kann.

7) Die nichtorientierbaren n-Brezeln sind gegeben durch $a_1a_1a_2a_2 \dots a_na_n$.

Satz 3

Jede kompakte Fläche ist zu einer n-Brezel oder zu einer nichtorientierbaren n-Brezel isomorph. Die (nichtorientierbaren) n-Brezeln sind untereinander nicht isomorph.

Beweis: Die Nichtisomorphie folgt aus der Verschiedenheit der Fundamentalgruppen, die wir im nächsten Satz ausrechnen.

Ein *Standardwort* ist ein Wort der Form $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$ (Typ 0) oder $a_1a_1a_2a_2 \dots a_na_n$ (Typ N). Wir zeigen, daß wir jedes *normale* Wort (ein Wort in $a, b, c, \dots, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, \dots$, indem jeder Buchstabe, ob in der Form a oder a^{-1} , genau zweimal vorkommt) so in ein Standardwort umgeformt werden kann, daß die selbe Fläche beschrieben wird. Wörter, die dieselbe Fläche beschreiben, nennen wir *äquivalent* ($W \sim W'$). Die folgenden Regeln wandeln Wörter in äquivalente Wörter um:

- A) Wenn W' aus W entsteht, indem man für einen Buchstaben a überall a und a^{-1} vertauscht, so ist $W \sim W'$.
- B) $UV \sim VU$ (zyklische Vertauschung)
- C) $UabVab \sim UcVc$ und $UabVb^{-1}a^{-1} \sim UaVa^{-1}$.

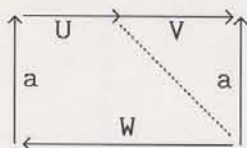
Beweis: Man kann die aufeinanderfolgenden Seiten a und b als *eine* Seite auffassen.

- D) $Uaa^{-1}V \sim UV$.

Beweis: Wenn man in das Polygon UV zwischen U und V eine Strecke weit hineinschneidet erhält man zwei neue Seiten, die identifiziert werden sollen. Also ein Polygon $Uaa^{-1}V$. Die Regel bleibt auch im entarteten Fall richtig, wenn wir festsetzen, daß das leere Wort S^2 liefert.

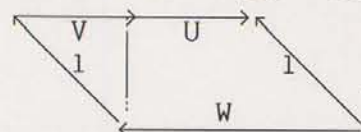
- E) $aUVa^{-1}W \sim aVUa^{-1}W$ (Schneiden&Kleben)

Beweis: Wir zerschneiden



entlang der gestrichelten Linie 1 und kleben die beiden

Teile an den Seiten a wieder zusammen. Es ergibt sich

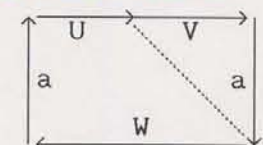


. Wir nennen 1 schließlich wieder a .

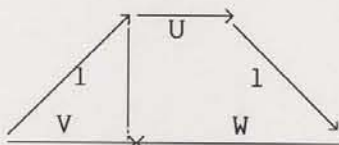
- F) $aUVaW \sim V^{-1}aUaW$ und ebenso $WaUVa \sim WaVaU^{-1}$.

(in V^{-1} die Reihenfolge der Buchstaben umgekehrt und die a und a^{-1} vertauscht.)

Beweis: Wie E):



\Rightarrow



Sei nun W ein normales Wort. Wir zeigen zunächst, daß W die Form UV , wobei U ein Standardwort vom Typ N und V ein Standardwort von Typ O ist.

1. Fall: W enthält einen Buchstaben a zweimal mit demselben Exponenten.

W hat also die Form $XaYaZ$. Dann folgt aus F) (mit stillschweigender Verwendung von B)) $W \sim XY^{-1}aaZ \sim aaXY^{-1}Z$. W ist also äquivalent zu einem

Wort der Form aaW' .

Behauptung: $aaUV \sim aaVU$.

Man kann also außerhalb von aa zyklisch vertauschen. Beweis: aus F) folgt $aaUV \sim VaaU \sim VaU^{-1}a \sim aU^{-1}aV \sim UaaV \sim aaVU$.

Aus der Behauptung folgt, daß wir das Umformungsverfahren auf W' anwenden können. Damit erhalten wir per Induktion ein zu W äquivalentes Wort der gewünschten Form.

2. Fall : Sonst.

Wenn W ein Teilwort aa^{-1} (oder $a^{-1}a$) enthält, können wir nach D) dieses Teilwort aus W streichen und erhalten ein kürzeres Wort, auf das wir Induktion anwenden.

Sonst hat W die Form (man wende ev. A) an): $AaBbCa^{-1}Db^{-1}E$. Aus F) folgt $W \sim AabCBa^{-1}Db^{-1}E \sim Aaba^{-1}DCBb^{-1}E \sim a^{-1}DCBb^{-1}EAab \sim a^{-1}b^{-1}EADCBab \sim aba^{-1}b^{-1}EADCB$. W hat also die Form $aba^{-1}b^{-1}W'$.

Behauptung: $aba^{-1}b^{-1}UV \sim aba^{-1}b^{-1}VU$.

Beweis: Aus E) folgt $aba^{-1}b^{-1}UV \sim aUba^{-1}b^{-1}V \sim abUa^{-1}b^{-1}V \sim aba^{-1}Ub^{-1}V \sim Uaba^{-1}b^{-1}V \sim aba^{-1}b^{-1}VU$.

Wir können also auf W' wieder das Umformungsverfahren anwenden.

Wir nehmen nun an, daß W die Form UV wie oben hat. Der Satz folgt nun aus der nächsten Behauptung:

Wenn U nicht leer ist, ist W äquivalent zu einem Wort vom Typ N .

Beweis: Sonst enthält W ein Teilwort $ccaba^{-1}b^{-1}$, das wir zyklisch vertauschen können. Die Behauptung folgt also aus $ccaba^{-1}b^{-1} \sim cbcaba^{-1} \sim a^{-1}cbcba^{-1} \sim a^{-1}a^{-1}dd$ nach F) und C). \square

Satz 4

Sei das Polygon P zur Fläche F verklebt wie durch das normale Wort W in den Buchstaben a_1, \dots, a_n angegeben. Jeder der "Ecken" f_1, \dots, f_m von F ordnen wir ein Wort W_i zu: Wir durchlaufen zyklisch die Seiten, die bei f_i zusammenstoßen. Die Seite a gibt den Beitrag a , wenn sie von f_i ausgeht und a^{-1} , wenn sie bei f_i endet. Dann hat die Fundamentalgruppe von F die Darstellung

$$\langle a_1, \dots, a_n ; W_1=1, \dots, W_m=1 \rangle.$$

Beweis:

Wenn wir in W eine "Spitze" aa^{-1} streichen, ändert sich F nicht. In der Gruppendarstellung fehlt die Erzeugende a und die Relation $aa^{-1}=1$ fällt weg; es wird also die selbe Gruppe dargestellt. Wir können daher annehmen, daß W keine Spitzen enthält. (Wenn W leer ist, ist $F=S^2$ und $\langle ; \rangle$ ist die (triviale) Fundamentalgruppe von F).

Wir behandeln noch den Fall $W=aa$ gesondert: Hier ist $F=P^2$, das S^2 als zweifache universelle Überlagerung besitzt. Nach 3.6 ist die Fundamentalgruppe von P^2 die Gruppe C_2 mit zwei Elementen, die in der Tat die Darstellung $\langle a ; aa=1 \rangle$ besitzt.

Man sieht nun leicht, daß, wenn W keine Spitzen und nicht die Form aa hat, an jeder Ecke von F mindestens 3 Kanten zusammenstoßen. Jetzt kann man die Ebene \mathbb{R}^n so mit (verzerrten und eventuell geklappten) Kopien von P überdecken, daß zu identifizierende Seiten aneinander gelegt werden. Die Kanten dieser Pflasterung sind orientiert und haben labels a, b, c, \dots . Auf diese Weise wird \mathbb{R}^2 universelle Überlagerung von F . Wir fixieren einen Punkt p in der Mitte von P und für jedes Seitenpaar a, a (bzw. a, a^{-1}) in F eine Schleife σ_a bei p , die p in P mit einem Punkt in der Mitte der einen Seite verbindet und dann den entsprechenden Punkt der anderen Seite wieder mit p . Wenn p' in der Überlagerung über p liegt, ist $p'\sigma_a$ der Punkt in der Mitte der an die Seite a angrenzenden Kopie von P . Weil man in \mathbb{R}^2 je zwei Mittelpunkte von Kopien von P durch

einen Pfad verbinden kann, der sich aus Liftungen der Pfade σ_a zusammensetzt, operiert die von den σ_a erzeugte Untergruppe H von $\pi_1(X,p)$ transitiv auf der Faser von p . Weil $\pi_1(X,p)$ aber regulär operiert, muß $H=\pi_1(X,p)$ sein.

Eine Schleife die von p ausgehend in \mathbb{R}^2 sich einmal um dem Eckpunkt f_i windet und wieder nach p zurückkehrt, wird in $\pi_1(X,p)$ durch das Wort $W_i(\sigma)$ beschrieben. Es ist also $W_i(\sigma)=1$ in $\pi_1(X,p)$.

Sei umgekehrt $W(\sigma)=1$ in $\pi_1(X,p)$. Wir müssen zeigen, daß die Gleichung $W=1$ aus den angegebenen Relationen folgt; das heißt, daß in der von den Buchstaben a,b,c,\dots erzeugten freien Gruppe W in dem von den W_i erzeugten Normalteiler N liegt. In \mathbb{R}^2 ist $W(\sigma)$ eine Schleife bei p . Wir können diese Schleife durch die folgenden beiden Operationen langsam auf die triviale Schleife zusammenziehen. Das triviale Wort liegt sicherlich in N .

1) Wir streichen eine Spitze in $W=Uaa^{-1}V$ (bzw. $Ua^{-1}aV$). UV beschreibt dann eine engere Schleife und es ist $UV=W$ in der freien Gruppe.

2) Wenn ein Teil $U_1(\sigma)$ von $W(\sigma)=XU_1Y(\sigma)$ zwei Kopien von P verbindet, die an einer Ecke f'_i zusammenstoßen, kann man $U_1(\sigma)$ durch einen Pfad $U_2(\sigma)$ ersetzen, der statt z.B. links um f'_i herum rechts um f'_i herumführt. $U_1U_2^{-1}(\sigma)$ ist dann eine kleine Schleife um f'_i . $U_1U_2^{-1}$ muß daher eine zyklische Permutation von W_i sein und gehört folglich zu W . Wenn der neue "Pfad" XU_2Y zu N gehört, so gehört also auch W zu N . \square

Folgerung 5

1) Die orientierbare n -Brezel hat die Fundamentalgruppe

$$\langle a_1 b_1 \dots a_n b_n ; a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} = 1 \rangle$$

2) Die nichtorientierbare n -Brezel die Fundamentalgruppe

$$\langle a_1 \dots a_n ; a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n = 1 \rangle$$

Alle diese Gruppen sind nicht isomorph.

Beweis:

Die Gruppendarstellung folgt unmittelbar aus Satz 4. Die Nichtisomorphie sieht

man leicht anhand der *Abelianisierungen* der Fundamentalgruppen. Die Abelianisierung der Fundamentalgruppe der orientierbaren n -Brezel ist die freie abelsche Gruppe mit $2n$ Erzeugenden, also \mathbb{Z}^{2n} . Die Abelianisierung der nichtorientierbaren n -Brezel ist die von den $a_1 \dots a_n$ mit der Relation $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n = 1$ erzeugte abelsche Gruppe. Ersetzt man a_n durch $c = a_1 \dots a_n$, so sieht man, daß diese Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}^{n-1} \oplus C_2$ ist ($C_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). \square

II SINGULÄRE HOMOLOGIE

6 DIE SINGULÄREN HOMOLOGIEGRUPPEN.

Ein n -Simplex ist der von $n+1$ Punkten A_0, \dots, A_n im \mathbb{R}^N aufgespannte konvexe Körper

$$[A_0, \dots, A_n] = \{ \sum \lambda_i A_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1 \}.$$

Es sei $E_0=0$ und E_1, E_2, \dots die kanonische Basis von \mathbb{R}^N . Das n -Standardsimplex ist

$$\Delta_n = [E_0, \dots, E_n].$$

Wenn wir uns \mathbb{R}^N kanonisch in \mathbb{R}^{N+1} eingebettet denken, hängt die letzte Definition nicht von der Wahl von N ab: Wir stellen uns alle Simplices in \mathbb{R}^∞ , der Vereinigung der \mathbb{R}^N , vor.

Sei X ein topologischer Raum. Ein *singuläres* n -Simplex in X ist eine stetige Abbildung $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$. Die abelsche Gruppe $S_n(X)$ der n -Ketten über \mathbb{R} ist die von den singulären n -Simplices frei erzeugte abelsche Gruppe.

Wenn die Punkte A_0, \dots, A_n im \mathbb{R}^N *affin unabhängig* (d.h. wenn die Vektoren $A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0$ linear unabhängig) sind und B_0, \dots, B_n beliebig aus \mathbb{R}^N , gibt es eine *affine* Abbildung $f: [A_0, \dots, A_n] \rightarrow [B_0, \dots, B_n]$, definiert durch

$$f(\sum \lambda_i A_i) = \sum \lambda_i B_i \quad (\lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1).$$

Mit (B_0, \dots, B_n) bezeichnen wir die affine Abbildung von Δ_n nach $[B_0, \dots, B_n]$, die E_i nach B_i abbildet. Wir nennen (B_0, \dots, B_n) ein *singuläres affines* Simplex. Für (E_0, \dots, E_n) schreiben wir σ_n . Die i -te Seite $\sigma^{(i)}$ des singulären n -Simplex σ sei definiert als die Komposition $\sigma \circ (E_0, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_n)$.

Die *Randabbildung* $\partial: S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)$ ist ein Homomorphismus, der auf den singulären n -Simplices gegeben ist durch

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}.$$

Lemma 1

$$\partial \partial = 0$$

Beweis:

In $\partial\partial\sigma = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^j (-1)^i \sigma^{(i)(j)}$ kommt jeder Term $\sigma \circ (E_0, \dots, \hat{E}_k, \dots, \hat{E}_1, \dots, E_n)$ ($k < 1$) zweimal vor: einmal als $\sigma^{(1)(k)}$ mit Vorzeichen $(-1)^{k+1}$, einmal als $\sigma^{(k)(1-1)}$ mit Vorzeichen $(-1)^{1-1+k}$. \square

Sei R ein unitärer Ring. Ein Kettenkomplex über R ist eine Familie $K = (K_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ von R -Moduln mit Homomorphismen $\partial: K_q \rightarrow K_{q-1}$, mit $\partial\partial=0$. Der Modul $Z_q(K)$ der q -Zyklen ist der Kern von $\partial: K_q \rightarrow K_{q-1}$, die q -Ränder sind das Bild $B_q(K)$ von $\partial: K_{q+1} \rightarrow K_q$. Die q -te Homologie $H_q(K)$ von K ist $Z_q(K)/B_q(K)$. Zwei Elemente x und y von K_q heißen homolog, $x \sim y$, wenn $x-y \in B_q(K)$. Wir schreiben kurz $H(K) = Z(K)/B(K)$.

Die Ketten eines topologischen Raumes bilden den Kettenkomplex $S(X)$ (über \mathbb{Z}), wenn wir $S_q(X) = 0$ für negative q setzen. $H(X) = H(S(X))$ sind die Homologiemoduln von X .

Satz 2

Für den einpunktigen Raum $*$ gilt

$$H_q(*) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } q > 0 \\ \mathbb{Z}, & \text{wenn } q = 0 \end{cases}$$

Beweis:

Für jedes q gibt es nur einen singulären q -Simplex, den wir mit dem Einselement von R identifizieren; es ist dann $S_q(*) = R$. Wir bestimmen $\partial: S_q \rightarrow S_{q-1}$: Für $q=0$ ist $\partial=0$, für positive gerade q ist ∂ die Identität, für ungerade q die Nullabbildung. Also ist $Z_0=R$, $B_0=0$; für positive gerade q ist $Z_q=B_q=0$; für ungerade q ist $Z_q=B_q=R$. Daraus folgt die Behauptung. \square

7 $H_0(X)$ UND $H_1(X)$

Satz 1

Die X_b ($b \in B$) seien die Bogenzusammenhangskomponenten des topologischen Raumes X . Dann sind $H(X)$ und $\bigoplus_{b \in B} H(X_b)$ kanonisch isomorph.

Beweis:

Jedes singuläre Simplex liegt ganz in einer Bogenkomponente. Also ist $S(X) = \bigoplus_{b \in B} S(X_b)$. \square

Aus dem nächsten Satz folgt, daß für ein beliebiges X $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^N$, N die Zahl der Bogenzusammenhangskomponenten.

Satz 2

Wenn X bogenzusammenhängend ist, ist $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis:

Zuerst bemerken wir, daß singuläre 0-Simplices einfach Punkte von X sind und - wenn wir I vermöge $\lambda \mapsto \lambda E_1$ mit Δ_1 identifizieren - singuläre 1-Simplices σ Pfade in X . Es ist $\sigma^{(0)}$ der Endpunkt und $\sigma^{(1)}$ der Anfangspunkt von σ .

Sei $\tilde{\partial}: S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ der Epimorphismus $\tilde{\partial}(\sum \nu_b b) = \sum \nu_b$. Wir zeigen, daß $B_0(X)$ der Kern von $\tilde{\partial}$ ist; daraus folgt die Behauptung. Aus

$$\tilde{\partial}(\partial\sigma) = \tilde{\partial}(\sigma^{(0)} - \sigma^{(1)}) = 0$$

folgt, daß $B_0(X)$ im Kern von ∂ enthalten ist. Sei umgekehrt $\tilde{\partial}(\sum \nu_b b) = 0$.

Fixiere ein a in X und für jedes b einen Pfad σ_b von a nach b . Dann ist

$$\partial(\sum \nu_b \sigma_b) = \sum \nu_b (b - a) = \sum \nu_b b - \sum \nu_b a = \sum \nu_b b.$$

Also ist $\sum \nu_b b$ in $B_0(X)$. \square

Satz 3

Sei X bogenweise zusammenhängend. Dann ist $H_1(X)$ die Abelianisierung der Fundamentalgruppe von X .

Beweis:

Für Pfade σ und τ gelten

(1) $\sigma\tau \sim \sigma+\tau$

(2) $\sigma \simeq \tau \text{ rel}(0,1) \Rightarrow \sigma \sim \tau$.

Für ein singuläres 2-Simplex ξ ist

(3) $\xi^{(0)}\xi^{(1)-1}\xi^{(2)} \simeq 1_{\xi(E_1)} \text{ rel}(0,1)$

Beweis von (1): Der Rand des singulären 2-Simplexes $(\sigma\tau) \circ (0,1/2,1)$ ist $\tau-\sigma+\sigma$.

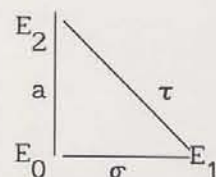
Aus (1) folgt $1_a = 1_a + 1_a \sim 1_a + 1_a$, also $1_a \sim 0$.

Beweis von (2): σ und τ seien Pfade von a nach b und $F: I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen σ und τ . Definiere $\rho: \Delta_2 \rightarrow X$ durch $\rho(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2) = F(\lambda_1, \lambda_2 / (1-\lambda_1))$, und $\rho(1,0) = b$, wobei $0 \leq \lambda_1$ und $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$. ρ ist stetig, weil $F(1 \times I) = b$. Es ist

$$\rho^{(0)}(\lambda) = F((1-\lambda)E_1 + \lambda E_2) = F(1-\lambda, \lambda) = \tau^{-1}(\lambda),$$

$$\rho^{(1)}(\lambda) = \rho(\lambda E_2) = F(0, \lambda) = a,$$

$$\rho^{(2)}(\lambda) = \rho(\lambda E_1) = F(\lambda, 0) = \sigma(\lambda).$$



Also ist $\partial(\lambda) = \tau^{-1} - 1_a + \sigma$ und daher $\sigma + \tau^{-1} \sim 0$. Für $\sigma = \tau$, haben wir $\tau + \tau^{-1} \sim 0$.

Und daher $\sigma \sim \tau$.

Beweis von (3): Die in Frage stehende Schleife hat die Form $\xi \circ \sigma$ für eine Schleife σ in Δ_2 . Weil Δ_2 einfach zusammenhängend ist, ist σ zum konstanten Pfad homotop. Also ist auch $\xi \circ \sigma$ zum konstanten Pfad homotop.

Fixiere ein $a \in X$. Aus (1) und (2) folgt nun daß $\sigma \mapsto \sigma / \sim$ einen Homomorphismus von $\pi_1(X, a)$ nach $H_1(X)$ definiert. Weil $H_1(X)$ abelsch ist, erhalten wir einen Homomorphismus

$$\kappa: \text{Ab}(\pi_1(X, a)) \rightarrow H_1(X).$$

Wähle nun für jedes $b \in X$ einen Pfad σ_b von a nach b und definiere

$$\mu: S_1(X) \rightarrow \text{Ab}(\pi_1(X, a))$$

durch $\mu(\sigma) = \sigma_b \sigma_c^{-1}$, wobei b der Anfangspunkt und c der Endpunkt von σ ist.

Sei ξ ein singuläres 2-Simplex und $\xi(E_i) = a_i$ und $\sigma_{a_i} = \sigma_i$. Dann ist

$$\mu(\partial\xi) = (\sigma_1 \xi^{(0)} \sigma_2^{-1}) (\sigma_0 \xi^{(1)} \sigma_2^{-1})^{-1} (\sigma_0 \xi^{(2)} \sigma_1^{-1}) = \sigma_1 \xi^{(0)} \xi^{(1)-1} \xi^{(2)} \sigma_1^{-1}.$$

Nach (3) ist also $\mu(\partial\xi) = 1$. μ ist daher trivial auf $B_1(X)$ und induziert einen Homomorphismus

$$\bar{\mu}: S_1(X)/B_1(X) \rightarrow \text{Ab}(\pi_1(X)).$$

Es ist klar, daß $\bar{\mu} \circ \kappa(\sigma) = \sigma_a \sigma_a^{-1} = \sigma$. Sei $\Phi: S_0(X) \rightarrow S_1(X)$ definiert durch $\Phi(b) = \sigma_b$. Dann ist $\kappa \circ \mu(\sigma) = \sigma - \Phi(\partial\sigma) \pmod{B_1}$. Also ist $\kappa \circ \mu(c) = \sigma - \Phi(\partial c)$ für alle $c \in S_1(X)$. Es folgt, daß $\kappa \circ \bar{\mu}(c) = c$ für alle $c \in H_1(X)$. κ ist also ein Isomorphismus. \square

8 HOMOLOGIE ALS FUNKTOR

$L = (L_q)$ und $K = (K_q)$ seien zwei Kettenkomplexe über R . Ein *Morphismus*

$$\varphi: L \rightarrow K$$

ist eine Familie $(\varphi_q: L_q \rightarrow K_q)$ von Modulhomomorphismen, die mit den Randabbildungen kommutieren d.h. $\varphi_q \partial = \partial \varphi_{q+1}$. Die Klasse der Kettenkomplexe wird auf diese Weise eine Kategorie. Zwei früher eingeführte Konstrukte werden jetzt auf kanonische Weise zu Funktoren:

Lemma 1

- (1) $S(-) = (S_q(-))$ ist ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe über \mathbb{Z} .
- (2) H_q ist ein Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe über R in die Kategorie der R -Moduln.
- (3) $H_q(-)$ ist ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Beweis:

(1) Ist $f: X \rightarrow Y$ stetig, definiere $S_q(f): S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$ durch $S_q(f)(\sigma) = f \circ \sigma$. Weil $(S_{q+1}(f)(\sigma))^{(i)} = f \circ \sigma \circ (E_0, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_{q+1}) = S_q(f)(\sigma^{(i)})$, ist $\partial S_{q+1}(f) = S_q(f)\partial$.

(2) Ein Morphismus $\varphi: L \rightarrow K$ bildet $Z_q(L)$ in $Z_q(K)$ (denn wenn $c \in Z_q(L)$, ist $\partial\varphi c = \varphi_{q-1}\partial c = 0$) und $B_q(L)$ in $B_q(K)$ ab (denn ein $c \in B_q(L)$ hat die Form ∂d . Dann ist $\varphi_q(c) = \partial\varphi_{q+1}d$). Also induziert φ einen Homomorphismus $H_q(\varphi): H_q(L) \rightarrow H_q(K)$.

(3) folgt aus (1) und (2) \square

Wir lassen häufig die Indices weg und schreiben H für die Familie der Funktoren H_q .

φ und ψ seien zwei Morphismen von L nach K . Eine *Homotopie* ϕ von φ nach ψ ist eine Familie von Homomorphismen $\phi_q: L_q \rightarrow L_{q+1}$ sodaß

$$\varphi_q - \psi_q = \partial\phi_q + \phi_{q+1}\partial.$$

In Zeichen: $\varphi \sim \psi$. Man rechnet leicht nach, daß \sim eine Äquivalenzrelation ist, die mit der Verknüpfung von Morphismen verträglich ist.

Lemma 2

Für Morphismen zwischen Kettenkomplexen gilt

$$\varphi \sim \psi \Rightarrow H(\varphi) = H(\psi).$$

Beweis:

Wenn $x \in Z_q(L)$, so ist $\varphi_q - \psi_q(x) = \partial\phi_q(x)$. Also ist $H_q(\varphi - \psi)(x/\sim) = 0$. \square

Satz 3

Wenn f und g homotope stetige Abbildungen von X nach Y sind, ist $H(f) = H(g)$.

Beweis:

Wir machen Gebrauch von der anschließend entwickelten Theorie der affinen natürlichen Transformationen. Betrachte die beiden Funktoren $S(-)$ und $S(-\times I)$ von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe. Definiere für jedes X einen Morphismus $\mathcal{P}:S(X)\rightarrow S(X\times I)$ durch $\mathcal{P}(\sigma)=(\sigma\times 1-\sigma\times 0)$ (\mathcal{P} steht für *Prisma*). \mathcal{P} ist offensichtlich eine affine natürliche Transformation und es gilt $\tilde{\partial}\mathcal{P}=0$ auf $S_0(X)$. Aus Lemma 6 folgt, daß \mathcal{P} 0-homotop ist, es gilt also für die beiden Abbildungen $\text{id}\times 0$ und $\text{id}\times 1$ von X nach $X\times I$

$$H(\text{id}\times 0)=H(\text{id}\times 1).$$

Sei nun $F:X\times I\rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g . Dann ist $f = F\circ(\text{id}\times 0)$ und $g = F\circ(\text{id}\times 1)$ und daher $H(f) = H(F)\circ H(\text{id}\times 0) = H(F)\circ H(\text{id}\times 1) = H(g)$. \square

Folgerung 4

(1) Wenn A Deformationsretrakt von X ist, so ist $H(A) \cong H(X)$.

(2) Wenn X zusammenziehbar ist, so ist $H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ wenn } q > 0 \\ \mathbb{Z} & , \text{ wenn } q = 0. \end{cases}$

Beweis:

(1) Sei $i:A\rightarrow X$ die Inklusion und $f:X\rightarrow A$ die Retraktion mit $fi=\text{id}_A$ und $if\approx\text{id}_X$. Dann ist $H(f)\circ H(i)=\text{id}_{H(A)}$ und $H(i)\circ H(f)=\text{id}_{H(X)}$.

(2) Ein einpunktiger Teilraum von X ist Deformationsretrakt. Die Behauptung folgt also aus 6.2. \square

Erinnern wir uns an den Begriff der *natürlichen Transformation*. Eine natürliche Transformation zwischen S_p und S_q ordnet jedem Raum X einen Homomorphismus $\mu:S_p(X)\rightarrow S_q(X)$ zu, sodaß für jede stetige Abbildung $f:X\rightarrow Y$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 S_q(X) & \xrightarrow{\mu} & S_p(X) \\
 S_q(f) \downarrow & & \downarrow S_p(f) \\
 S_q(Y) & \xrightarrow{\mu} & S_p(Y)
 \end{array}$$

kommutiert. Sei, für $X = \Delta_q$, $\bar{\mu} = \mu(\sigma_q)$. μ ist durch $\bar{\mu}$ vollständig bestimmt. Denn für jedes singuläre q -Simplex $\sigma: \Delta_q \rightarrow Y$ aus $S_q(Y)$ ist

$$\mu(\sigma) = S_p(\sigma)(\bar{\mu}).$$

Diese Gleichung definiert auch umgekehrt eine natürliche Transformation μ für jedes vorgegebene Element $\bar{\mu}$ von $S_p(\Delta_q)$. Wir nennen μ *affin*, wenn $\bar{\mu}$ eine affine p -Kette ist (d.h. eine \mathbb{Z} -Linearkombination von affinen singulären p -Simplices). Die Randabbildung $\partial: S_q \rightarrow S_{q-1}$ ist eine affine natürliche Transformation.

Eine natürliche Transformation $\mu: S \rightarrow S$ ist eine Familie $(\mu_q: S_q \rightarrow S_q)$ von natürlichen Transformationen mit $\partial \mu_q = \mu_{q-1} \partial$. Solche μ lassen sich nicht mehr so einfach konstruieren wie natürliche Transformationen zwischen S_p und S_q .

Sei A der Kettenkomplex der affinen Ketten in \mathbb{R}^∞ .

Lemma 5

Sei $M: A \rightarrow A$ ein Morphismus, der jedes affine Simplex σ in eine Kette aus $S(\sigma)$ abbildet. Wenn M mit affinen Abbildungen von \mathbb{R}^∞ vertauscht, läßt sich M eindeutig zu einer affinen natürlichen Transformation $\mu: S \rightarrow S$ fortsetzen.

Beweis:

Definiere $\bar{\mu}_q = M(\sigma_q)$, $\mu_q: S_q \rightarrow S_q$ sei die dadurch bestimmte natürliche Transformation. Sei σ affines singuläres q -Simplex in \mathbb{R}^∞ . Dann ist $\sigma = f \circ \sigma_q$ für eine affine Abbildung f . Es folgt $\mu_q(\sigma) = S_b(f) \bar{\mu}_q = S_q(f) M(\sigma_q) = M(f \circ \sigma_q) = M(\sigma)$. μ setzt also M fort. Um zu zeigen, daß μ mit ∂ vertauscht, fixieren wir ein singuläres q -Simplex σ in X . Man rechnet

$$\begin{aligned}
\mu(\partial\sigma) &= \sum (-1)^i \mu(\sigma^{(i)}) = \sum (-1)^i S_{q-1}(\sigma \circ (E_0, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_q))(\bar{\mu}_q) \\
&= \sum (-1)^i S_{q-1}(\sigma) S_{q-1}((E_0, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_n)) M_{q-1}(\sigma_{q-1}) \\
&= \sum (-1)^i S_{q-1}(\sigma) M_{q-1}((E_0, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_n) \circ \sigma_{q-1}) = S_{q-1}(\sigma) M_{q-1}(\partial\sigma_q) \\
&= \partial S_{q-1}(\sigma) M_q(\sigma_q) \\
&= \partial\mu(\sigma). \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma 6

Eine affine natürliche Transformation $\mu: S \rightarrow S$ mit $\tilde{\partial}\mu_0 = 0$ ist 0-homotop.

Beweis:

Wir suchen eine Familie $(\phi_q: S_q \rightarrow S_{q-1})$ von natürlichen Transformationen mit

$$(*) \quad \mu_q = \partial\phi_q + \phi_{q-1}\partial.$$

Für negative q setzen wir $\phi_q = 0$. Sei ϕ_q mit (*) bereits konstruiert. Setze

$$\lambda = \mu_{q+1} - \phi_q \partial$$

Dann ist $\partial\lambda = \partial\mu_{q+1} - \partial\phi_q \partial = \mu_q \partial - (\mu_q \partial - \phi_{q-1} \partial \partial) = 0$. Wenn $q+1=0$, ist auch $\tilde{\partial}\lambda = \tilde{\partial}\mu_0 = 0$.

Betrachte für jedes p den Kegeloperator $F = F_{E_0}: \mathbb{A}_p \rightarrow \mathbb{A}_{p+1}$, der jedem affinen singulären Simplex (A_0, \dots, A_p) das Simplex (E_0, A_0, \dots, A_p) zuordnet. Man rechnet leicht nach, daß für $p > 0$

$$\text{id}_{\mathbb{A}_p} = \partial F + F\partial$$

und für c aus \mathbb{A}_0

$$c = \partial F(c) + \tilde{\partial}(c) \cdot (E_0).$$

Definiere ϕ_{q+1} durch $\bar{\phi}_{q+1} = F(\bar{\lambda})$. Dann gilt für $q+1 > 0$

$$\partial\phi_{q+1}(\sigma_{q+1}) = \partial F(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} - F(\partial\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} = \lambda(\sigma_{q+1})$$

und für $q+1=0$

$$\partial\phi_0((E_0)) = \partial F(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} - \tilde{\partial}(\bar{\lambda}) \cdot (E_0) = \bar{\lambda} = \lambda((E_0)).$$

Also ist $\lambda = \partial\phi_{q+1}$ und es gilt (*) für $q+1$. \square

Zusatz

Sei K ein affines Simplex. Dann gelten Lemma 5 und Lemma 6 sinngemäß für natürliche Transformationen $S(-) \rightarrow S(- \times K)$.

Die Beweise sind die gleichen. \square

9 DIE EXAKTE HOMOLOGIESEQUENZ

Konvention: Alle Moduln sind über R .

Sei A ein Unterraum von X . Dann ist $S_q(A)$ eine Untergruppe von $S_q(X)$. Weil der Randoperator von $S(X)$ $S_q(A)$ in $S_{q-1}(A)$ abbildet, wird die Familie der

$$S_q(X, A) = S_q(X) / S_q(A)$$

ein Kettenkomplex. $H_q(X, A) = H_q(S(X, A))$ sind die *relativen* Homologiegruppen.

Eine andere Beschreibung der relativen Homologie erhält man so:

$$H_q(X, A) = Z_q(X, A) / B_q(X, A),$$

wobei $Z_q(X, A) = \{c \in S_q(X) \mid \partial c \in S_q(A)\}$ die relativen Zyklen und $B_q(X, A) = B_q(X) + S_q(A)$ die relativen Ränder sind.

Die Paare (X, A) bilden eine Kategorie, deren Morphismen $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ sind, die A in B abbilden. f und g heißen *homotop*, wenn es eine Homotopie $F: f \simeq g$ gibt, mit $F(A, I) \subseteq B$.

Lemma 1

- (1) $H_q(X, A)$ ist ein Funktor von der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen.
- (2) Homotope Abbildungen von (X, A) nach (Y, B) liefern dieselbe Abbildung $H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$.

Beweis:

(1) Ein $(X,A) \rightarrow (Y,B)$ liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S(A) \subseteq S(X) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(B) \subseteq S(Y) & , & \end{array}$$

also einen Morphismus $S(X,A) \rightarrow S(Y,B)$.

(2) Jede natürliche Transformation $\mu: S_p(X) \rightarrow S_q(X)$ liefert unmittelbar einen natürlichen Transformation $S_p(X,A) \rightarrow S_q(X,A)$. Die im Beweis von 8.3 betrachtete natürliche Transformation \mathcal{P} liefert in der gleichen Weise eine natürliche Transformation $P: S(X,A) \rightarrow S(X \times I, A \times I)$, die 0-homotop ist vermöge einer Familie von natürlichen Transformationen $\phi_q: S_q(X \times I, A \times I) \rightarrow S_{q+1}(X \times I, A \times I)$. Der Beweis geht jetzt wie in 8.3. \square

Satz 2 (Die lange exakte Homologiesequenz)

$0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$ sei eine exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann gibt es natürlich definierte Verbindungshomomorphismen $H_q(\mathcal{L}) \rightarrow H_{q-1}(\mathcal{J})$, sodaß die Folge

$$\dots \rightarrow H_q(\mathcal{J}) \rightarrow H_q(\mathcal{K}) \rightarrow H_q(\mathcal{L}) \rightarrow H_{q-1}(\mathcal{J}) \rightarrow H_{q-1}(\mathcal{K}) \rightarrow \dots$$

exakt wird. (Die übrigen Homomorphismen sind durch $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$ und $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ induziert.)

Wenn man Satz 2 auf die exakte Sequenz $0 \rightarrow S(A) \rightarrow S(X) \rightarrow S(X,A) \rightarrow 0$ anwendet, erhält man die

Folgerung 3

A sei ein Teilraum von X . Dann gibt es Verbindungshomomorphismen $\partial: H_q(X,A) \rightarrow H_{q-1}(A)$ sodaß die Folge

$$\dots \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X,A) \rightarrow H_{q-1}(A) \rightarrow H_{q-1}(X) \rightarrow \dots$$

exakt wird. Wenn der relative Zyklus c die Homologieklassen $h \in H_q(X,A)$ repräsentiert, ist ∂c ein Repräsentant von $\partial(h)$.

Daß ∂ tatsächlich so aussieht wie hier angegeben, ergibt sich aus dem Beweis von Satz 2.

Satz 2 folgt aus dem folgenden Lemma.

Lemma 4 (Schlangenlemma)

Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A & \xrightarrow{\lambda} & B & \xrightarrow{\mu} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\lambda} & B' & \xrightarrow{\mu} & C' & &
 \end{array}$$

seien die Reihen exakt. Dann gibt es einen Verbindungshomomorphismus $\partial: \text{Ker}\gamma \rightarrow \text{Ker}\alpha$, sodaß die Sequenz

$$\text{Ker}\alpha \longrightarrow \text{Ker}\beta \longrightarrow \text{Ker}\gamma \xrightarrow{\partial} \text{Ker}\alpha \longrightarrow \text{Ker}\beta \longrightarrow \text{Ker}\gamma$$

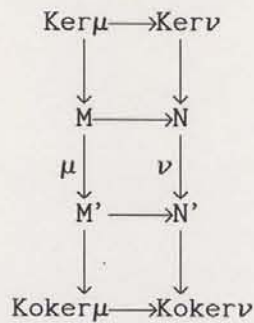
exakt ist. (Die übrigen Abbildungen sind kanonisch definiert.)

Beweis:

Es ist leicht zu sehen, daß sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ker}\mu & & \text{Ker}\nu \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & \longrightarrow & N \\
 \mu \downarrow & & \nu \downarrow \\
 M' & \longrightarrow & N' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Ker}\mu & & \text{Ker}\nu
 \end{array}$$

eindeutig zu einem kommutativen Diagramm



ergänzen läßt. Die Abbildungen $\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta \rightarrow \text{Ker } \gamma$, $\text{Koker } \alpha \rightarrow \text{Koker } \beta \rightarrow \text{Koker } \gamma$ sind dadurch definiert. Daß diese beiden Sequenzen exakt sind, ist leicht zu sehen.

Sei nun $c \in \text{Ker } \gamma$. Schreibe c als μb für ein $b \in B$ und setze $b' = \beta b$. Weil $\mu b' = \gamma c = 0$, ist $b' = \lambda a'$ für ein eindeutig bestimmtes $a' \in A'$. Definiere ∂c als das Bild von a' in $\text{Koker } \alpha$. Diese Definition hängt scheinbar noch von der Wahl von b ab. Sei also $\bar{b} \in B$ ein anderes Element mit $\mu \bar{b} = c$. Sei $\bar{a}' \in A'$ mit $\lambda \bar{a}' = \bar{b}' = \beta \bar{b}$. Man findet nun ein $a \in A$ mit $\bar{b} = b + \lambda a$. Daraus folgt $\lambda \bar{a} = \beta(b + \lambda a) = \lambda a' + \lambda \alpha a$. Weil λ injektiv ist, folgt $\bar{a}' = a' + \alpha a$. a' und \bar{a}' repräsentieren also das gleiche Element von $\text{Koker } \alpha$. Daß ∂ ein Homomorphismus ist, ist wie immer in solchen Fällen trivial zu verifizieren.

Exaktheit bei $\text{Ker } \gamma$:

Sei c aus $\text{Ker } \gamma$. Wähle b, b' und a' wie in der Definition von ∂ . Dann ist $\partial c = 0$ genau dann, wenn a' die Form αa hat. Das bedeutet für a , daß $\beta \lambda a = \lambda \alpha a = b'$; das heißt, daß sich λa und b durch ein Element d aus $\text{Ker } \beta$ unterscheiden. a existiert also genau dann, wenn es ein $d \in \text{Ker } \beta$ gibt mit $\mu(b-d) = 0$; was wiederum bedeutet, daß $c = \mu d$.

Exaktheit bei $\text{Koker } \alpha$:

Sei $x \in \text{Koker } \alpha$ repräsentiert durch $a' \in A'$. Dann wird x genau dann auf $0 \in \text{Koker } \gamma$ abgebildet, wenn $\lambda a' = b'$ im Bild von β liegt, wenn also $b' = \beta b$ für ein b aus B . Ein solches b muß aber $\gamma \mu b = \mu \beta b = \mu b' = 0$ erfüllen, das heißt $\mu b = c \in \text{Ker } \gamma$. Man findet b also genau dann, wenn $x = \partial c$ für ein $c \in \text{Ker } \gamma$. \square

Beweis von Satz 2:

Die Abbildung $J_q \rightarrow J_{q-1}$ faktorisiert auf kanonische Weise:

$$J_q \rightarrow J_q/B_q(J) \rightarrow Z_q(J) \rightarrow J_{q-1}$$

Macht man das gleiche für $K_q \rightarrow K_{q-1}$ und $L_q \rightarrow L_{q-1}$ erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 J_{q+1} & \longrightarrow & K_{q+1} & \longrightarrow & L_{q+1} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & J_q & \longrightarrow & K_q & \longrightarrow & L_q & \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 J_q/B_q(J) & \longrightarrow & K_q/B_q(K) & \longrightarrow & L_q/B_q(L) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow j & & \downarrow k & & \downarrow 1 & & \\
 0 \longrightarrow & Z_q(J) & \longrightarrow & Z_q(K) & \longrightarrow & Z_q(L) & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & J_{q-1} & \longrightarrow & K_{q-1} & \longrightarrow & L_{q-1} & \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & J_{q-2} & \longrightarrow & K_{q-2} & \longrightarrow & L_{q-2} &
 \end{array}$$

Weil die bei den ersten Reihen exakt sind, liefert der triviale Teil des Schlangenlemmas die Exaktheit der dritten Reihe. (Der zweite Pfeil ist surjektiv, weil $K_q \rightarrow L_q$ surjektiv ist.) Ebenso folgt die Exaktheit der vierten Reihe aus der Exaktheit der beiden letzten Reihen. Jetzt folgt der Satz aus dem Schlangenlemma, weil $\text{Ker}j = H_q(J)$, $\text{Ker}k = H_q(K)$, $\text{Ker}l = H_q(L)$, $\text{Koker}j = H_{q-1}(J)$ und $\text{Koker}k = H_{q-1}(K)$. \square

Bemerkung 5

Wenn $A \subseteq B \subseteq X$, erhält man eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_q(B, A) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_q(X, B) \rightarrow H_{q-1}(A, B) \rightarrow H_{q-1}(X, A) \rightarrow \dots$$

Beweis:

Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow S(B, A) \rightarrow S(X, A) \rightarrow S(X, B) \rightarrow 0.$$

□

Bemerkung 6

Der Verbindungshomomorphismus $\partial: H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$ ist eine natürliche Transformation.

Beweis:

Es ist zu zeigen, daß jeder Morphismus $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{\quad} & H_{q-1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(Y, A) & \xrightarrow{\quad} & H_{q-1}(A) \end{array}$$

liefert. Das ergibt sich unmittelbar aus der Beschreibung von ∂ in Folgerung

3. □

Die letzte Bemerkung hat eine abstrakte Version: Jedes kommutative Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & L & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & J' & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen führt zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(K) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & H_{q-1}(J) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(K') & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & H_{q-1}(J') \end{array}$$

Bemerkung 7

Wenn A bogenzusammenhängend ist, ist $H_1(X) \rightarrow H_1(X, A)$ surjektiv.

Beweis: $H_0(A) \rightarrow H_0(X)$ ist injektiv (siehe Beweis von 7.2). \square

10 DER EXCISIONSSATZ

Satz 1 (Excisionssatz)

Sei $A \subseteq B \subseteq X$ und der Abschluß von A enthalten im Inneren von B . Dann ist $H(X \setminus A, B \setminus A) \rightarrow H(X, B)$ ein Isomorphismus.

Bevor wir den Satz beweisen, geben wir eine wichtige Anwendung.

Satz 2

$$H_q(S^n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n < q \text{ oder } 0 < q < n \\ \mathbb{Z}, & \text{wenn } q = n \text{ oder } 0 = q < n \\ \mathbb{Z}^2, & \text{wenn } 0 = q = n \end{cases}$$

Beweis:

Der Rand der n -dimensionale Vollkugel E^n ist die $n-1$ Sphäre S^{n-1} . Wir berechnen $H_q(E^n, S^{n-1})$ auf zwei Arten:

1. Methode

Für $q > 1$ ist nach 8.4(2) $H_q(E^n) = 0$. Also folgt aus der Exaktheit von

$$H_q(E^n) \rightarrow H_q(E^n, S^{n-1}) \rightarrow H_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{q-1}(E^n),$$

daß

$$H_q(E^n, S^{n-1}) \cong H_{q-1}(S^{n-1}).$$

2. Methode

E_+^n und E_-^n seien die nördliche und südliche Halbkugel von S^n . Ihr Durchschnitt ist der Äquator A . Jetzt folgt aus der Exaktheit von

$$H_q(E_+^n) \rightarrow H_q(S^n) \rightarrow H_q(S^n, E_+^n) \rightarrow H_{q-1}(E_+^n)$$

daß $H_q(S^n, E_+^n) \cong H_q(S^n)$. Aus 9.7 folgt, daß diese Isomorphie auch für $q=1$ gilt.

In \dot{S}^n und \dot{E}_+^n sei der Nordpol entfernt. Der Excisionssatz liefert

$H_q(S^n, E_+^n) \cong H_q(\dot{S}^n, \dot{E}_+^n)$. Man sieht leicht, daß das Raumpaars (E_-^n, A) Deformationsretrakt von (\dot{S}^n, \dot{E}_+^n) ist. Also ist nach 8.4(1) $H_q(\dot{S}^n, \dot{E}_+^n) \cong H_q(E_-^n, A)$. Weil $(E_+^n, A) \cong (E^n, S^{n-1})$, ergibt sich

$$H_q(E^n, S^{n-1}) \cong H_q(S^n).$$

Man hat also schließlich für $q > 1$

$$H_q(S^n) \cong H_{q-1}(S^{n-1}).$$

Weil die S^n für $n > 1$ einfach zusammenhängend sind, folgt aus 7.3, daß $H_1(S^n) = 0$. Also folgt, daß $H_q(S^n) = 0$ für alle $0 < q < n$. Aus $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ folgt $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ und also $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ für alle $n > 0$. Aus 7.1 und 6.2 folgt $H_q(S^0) = 0$ für $q > 0$ und daraus $H_q(S^n) = 0$ für $n < q$. Die Behauptung über $H_0(S^n)$ folgt aus 7.1 und 7.2. \square

Beweis von Satz 1

Wir definieren die *baryzentrische Unterteilung*, eine affine natürliche Transformation $B: S \rightarrow S$. Wir verwenden dabei Lemma 8.5. Wir definieren zunächst

$B_q: A_q \rightarrow A_q$ rekursiv durch $B_0(\sigma) = \sigma$ für $\sigma \in A_0$ und sonst durch

$$B_q(\sigma) = F_M(B_{q-1}(\partial\sigma)),$$

wobei $M = (A_0 + \dots + A_q) / (q+1)$ der Schwerpunkt von $\sigma = (A_0, \dots, A_q)$ ist und F der in Kapitel 8 eingeführte Kegeloperator. Es ist klar, daß B_q mit affinen Abbildungen vertauscht.

Behauptung 1: $\partial B = B\partial$.

Beweis: Sei σ ein singuläres affines q -Simplex, wir zeigen durch Induktion über q , daß $\partial B(\sigma) = B(\partial\sigma)$: Für $q=1, 2$ rechnet man das unmittelbar nach. Für $q > 1$ ist $\partial B(\sigma) = \partial F_M B(\partial\sigma) = B(\partial\sigma) - F_M \partial B(\partial\sigma) = B(\partial\sigma) - F_M B(\partial\partial\sigma) = B(\partial\sigma)$. (Man verwende $\text{id} = \partial F + F\partial$.)

Mit Lemma 8.5 können wir B zu einer natürlichen Transformation $B: S \rightarrow S$ fortsetzen. Weil $\tilde{\partial} B_0 = \tilde{\partial}$, ist nach Lemma 8.6 $\text{id} - B$ 0-homotop. Das gleiche gilt für B^n . Es gibt also für jedes n eine Familie ϕ von natürlichen Transformationen sodaß

$$\text{id} = B^n + \partial\phi + \phi\partial.$$

Sei nun (U_i) eine offene Überdeckung von X . Wir nennen eine q -Kette c *klein*, wenn die in c vorkommenden Simplices jeweils in einem der U_i liegen. Der Modul der kleinen q -Simplices ist also $\sum S(U_i)$.

Behauptung 2: Für alle c gibt es ein n sodaß $B^n(c)$ klein ist.

Beweis: Wir können annehmen, daß c ein singuläres q -Simplex ist. Weil Δ_q kompakt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodaß jede Teilmenge von Δ_q , die einen kleineren Durchmesser als ε hat, in einer der Mengen der offenen Überdeckung $f^{-1}(U_i)$ liegt. Man wählt nun n so groß, daß die Durchmesser der Simplices von $B^n(\sigma_q)$ kleiner als ε sind. Dann ist $B^n(\sigma) = S_q(\sigma) \circ B^n(\sigma_q)$ klein.

Behauptung 3: Wenn ∂c klein ist, ist c zu einer kleinen Kette homolog.

Beweis: Sei $B^n(c)$ klein. Dann ist $c = B^n(c) + \partial\phi(c) + \phi(\partial c)$. Weil ∂c klein ist, ist auch $\phi(\partial c)$ klein.

Seien nun A, B, X wie in Satz 1. Wir betrachten die offene Überdeckung $X = \overset{\circ}{B} \cup (X \setminus \bar{A})$.

Behauptung 4: $H(X \setminus A, B \setminus A) \rightarrow H(X, B)$ ist surjektiv.

Beweis: Sei $c \in Z_q(X, B)$ d.h. $c \in S_q(X)$ und $\partial c \in S_q(B)$. Wir müssen zeigen, daß es ein $d \in Z_q(X \setminus A, B \setminus A)$ mit $c = d \bmod B_q(X) + S_q(B)$ gibt. Nach Behauptung 3 ist c homolog zu einer kleinen Kette $\bar{c} = d + e$, wobei $d \in S_q(X \setminus A)$ und $e \in S_q(B)$. Weil $\partial d = \partial \bar{c} - \partial e \in S_{q-1}(B)$, ist $\partial d \in S_{q-1}(X \setminus A) \cap S_{q-1}(B) = S_{q-1}(B \setminus A)$.

Behauptung 5: $H(X \setminus A, B \setminus A) \rightarrow H(X, B)$ ist injektiv.

Beweis: Sei $d \in Z_q(X \setminus A, B \setminus A) \cap (B_q(X) + S_q(B))$. Wir müssen zeigen, daß $d \in B_q(X \setminus A) + S_q(B \setminus A)$. Nun ist $d = \partial c + e$, wobei $c \in S_{q+1}(X)$ und $e \in S_q(B)$. Weil ∂c klein ist, ist c homolog zu einer kleinen Kette $\bar{c} = f + g$, wobei $f \in S_{q+1}(X \setminus A)$ und $f \in S_{q+1}(B)$. Dann ist $d = \partial f + (\partial g + e)$. Es ist $\partial f \in B_q(X \setminus A)$ und

$$(\partial g + e) = d - \partial f \in S_{q-1}(X \setminus A) \cap S_{q-1}(B) = S_{q-1}(B \setminus A). \quad \square$$

Sei X Vereinigung von zwei offenen Teilmengen A_1 und A_2 mit Durchschnitt B . Wir bezeichnen die kanonischen Abbildungen $H_q(B) \rightarrow H_q(A_i)$ mit f_i und die kanonischen Abbildungen $H(A_i) \rightarrow H(X)$ mit g_i . Definiere

$$H_q(B) \xrightarrow{f} H_q(A_1) \oplus H_q(A_2) \xrightarrow{g} H_q(X)$$

durch $f = f_1 \oplus f_2$ und $g = g_1 \oplus g_2$. Dann gilt

Satz 3 (Mayer-Vietoris Sequenz)

Es gibt Homomorphismen $h: H_q(X) \rightarrow H_{q-1}(B)$ sodaß die Sequenz

$$\dots H_{q+1}(X) \rightarrow H_q(B) \rightarrow H_q(A_1) \oplus H_q(A_2) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_{q-1}(B) \rightarrow \dots$$

exakt ist.

Für bogenweise zusammenhängendes B ist $H_0(B) \rightarrow H_0(A_1) \oplus H_0(A_2)$ injektiv.

Also ist $H_1(A_1) \oplus H_1(A_2) \rightarrow H_1(X)$ surjektiv. Satz 3 impliziert daß

$$\begin{array}{ccc} H_1(B) & \longrightarrow & H_1(A_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1(A_1) & \longrightarrow & H_1(X) \end{array}$$

ein pushout von abelschen Gruppen ist. Weil $H_1 = \text{Ab}(\pi_1)$, ist das die abelianisierte Version des in Kapitel 2 erwähnten Satzes von van Kampen.

Beweis von Satz 3:

Sei $\xi \in H_q(X)$ repräsentiert durch $x \in Z_q(X)$. Nach Behauptung 3 des Beweises von Satz ist x homolog zu einer *kleinen* Kette d.h. $x \sim a_1 - a_2$, wobei $a_i \in S_q(A_i)$. Im allgemeinen ist $H_q(A_1) \oplus H_q(A_2) \rightarrow H_q(X)$ nicht surjektiv; wir können also nicht erwarten, daß die a_i Zyklen sind. Wir wissen aber, daß $\partial a_1 = \partial a_2 \in Z_q(B)$. $h(\xi)$

sei die Homologiekategorie von ∂a_1 in $H_q(B)$. $h(\xi)$ hängt nicht von der Wahl der a_i ab. Denn sei $x = a_1 - a_2 \sim a'_1 - a'_2$, also $a_1 - a_2 - (a'_1 - a'_2) = \partial d$. Nach Behauptung 3 ist d homolog zu $d_1 - d_2$, wobei $d_i \in S_{q+1}(A_i)$. Also ist

$$a_1 - a'_1 - \partial d_1 = a_2 - a'_2 - \partial d_2 = b \in S_q(B).$$

Und daher $\partial a_1 - \partial a'_1 = \partial b \in B_{q-1}(B)$.

Exaktheit bei $H_q(A_1) \oplus H_q(A_2)$:

Es ist klar, daß $gf=0$.

Seien andererseits $\alpha_i \in H_q(A_i)$ repräsentiert durch $a_i \in Z_q(X)$ und $g(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = 0$. Dann ist wie oben $a_1 - a_2 = \partial d_1 - \partial d_2$ für $d_i \in S_{q+1}(A_i)$. Dann ist $a_1 - \partial d_1 = a_2 - \partial d_2 = b \in S_q(B)$ und wir haben $f(b + B_q(B)) = (\alpha_1 \oplus \alpha_2)$.

Exaktheit bei $H_q(X)$:

Sei $\xi \in H_q(X)$. Wenn ξ im Bild von g ist, wird ξ repräsentiert durch $a_1 - a_2$, wobei $a_i \in Z_q(A_i)$. Dann ist $\partial a_1 = 0$, und also $h(\xi) = 0$.

Wenn umgekehrt $h(\xi) = 0$ ist, und ξ von $a_1 - a_2$, $a_i \in S_q(A_i)$ repräsentiert wird, ist $\partial a_1 = \partial a_2 = \partial b \in B_{q-1}(B)$. Dann sind die $a_i - b$ aus $Z_q(A_i)$ und wenn die α_i die zugehörigen Homologieklassen sind, ist $\xi = g(\alpha_1 \oplus \alpha_2)$.

Exaktheit bei $H_{q-1}(B)$:

Sei $\beta \in H_{q-1}(B)$. Wenn β im Bild von h ist, wird β durch ein Element $\partial a_1 = \partial a_2$ repräsentiert. Dann ist $f(\beta) = (\partial a_1 + B_{q-1}(A_1)) \oplus (\partial a_2 + B_{q-1}(A_2)) = 0 \oplus 0 = 0$.

Sei umgekehrt $f(\beta) = 0$. Wenn β durch $b \in S_{q-1}(B)$ repräsentiert wird, ist also $b \in B_{q-1}(A_1) \cap B_{q-1}(A_2)$; wir haben also $a_i \in S_q(A_i)$ mit $b = \partial a_1 = \partial a_2$. dann repräsentiert der Zyklus $x = a_1 - a_2$ ein $\xi \in H_q(X)$, das auf β abgebildet wird. \square

Wenn X, A_1, A_2, B wie im letzten Satz sind, kann man auf das Tripel $(X \setminus A_1) \subseteq A_2 \subseteq X$ den Excisionssatz anwenden und man erhält

$$(1) H_q(A_1, B) \cong H_q(X, A_2).$$

Ebenso ergibt sich

$$(2) H_q(A_2, B) \cong H_q(X, A_1).$$

Satz 4

Für die Existenz der Mayer-Vietoris Sequenz genügt es die Gültigkeit von (1) und (2) zu fordern.

Beweis:

Definiere h durch

$$\begin{array}{c} H_q(X) \longrightarrow H_q(X, A_2) \cong H_q(A_1, B) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(B) \\ \hline \hspace{10em} h \end{array}$$

Exaktheit bei $H_q(A_1) \oplus H_q(A_2)$:

Wir müssen zeigen, daß für alle $\alpha_1 \in H_q(A_1)$ und $\alpha_2 \in H_q(A_2)$: $f_1(\alpha_1) = f_2(\alpha_2)$ gdw. es ein $\beta \in H_q(B)$ mit $\alpha_1 = g_1(\beta)$ und $\alpha_2 = g_2(\beta)$ gibt. Betrachte dazu das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccccccc} H_{q+1}(X, A_1) & \xrightarrow{\partial} & H_q(A_1) & \xrightarrow{g_1} & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A_1) \\ \uparrow & & \uparrow f_1 & & \uparrow g_2 & & \uparrow \\ H_{q+1}(A_2, B) & \xrightarrow{\partial} & H_q(B) & \xrightarrow{f_2} & H_q(A_2) & \longrightarrow & H_q(A_2, B) \end{array}$$

Die Zeilen sind exakt und die beiden äußeren vertikalen Pfeile sind Isomorphismen. Damit folgt die Behauptung aus dem folgenden

Lemma (Viererlemma)

Im kommutativen Diagramm von R-Moduln

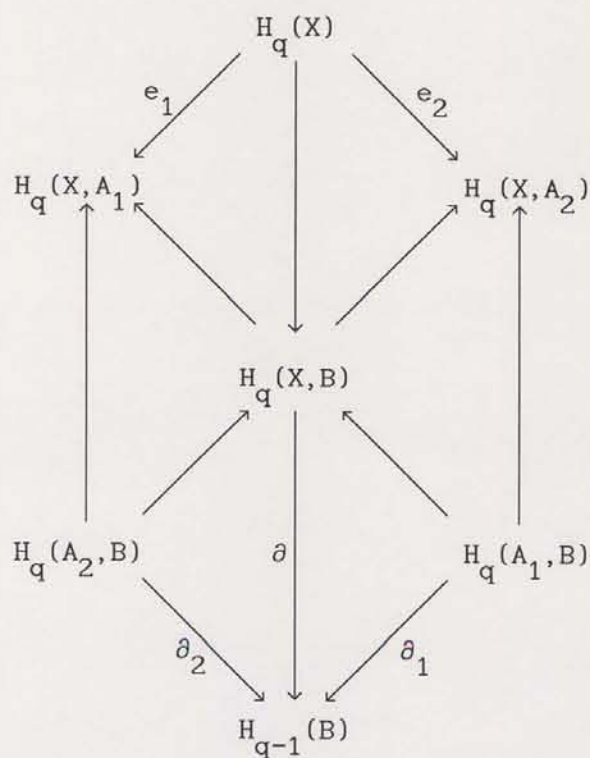
$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \uparrow \alpha & & \uparrow \beta & & \uparrow \gamma & & \uparrow \delta \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' \end{array}$$

seien die Zeilen exakt. δ sei injektiv und α surjektiv. Dann ist für alle $b \in B$ und $c' \in C'$ $g(b) = \gamma(c')$ gdw. ein $b' \in B'$ mit $b = \beta(b')$ und $c' = g'(b')$ gibt.

Beweis: Sei $g(b) = \gamma(c')$. Dann ist $\delta h'(c') = h\gamma(c') = hg(b) = 0$. Also $h'(c') = 0$ und es

gibt ein b^* mit $c' = g'(b^*)$. Weil $g(b) = g'\gamma(b^*) = g\beta(b^*)$, gibt es ein a mit $b = \beta(b^*) + f(a)$. Wähle ein a' mit $a = \alpha(a')$. Dann ist $b' = b^* + f'(a')$ das gesuchte Element.

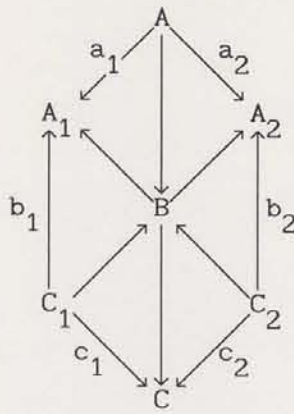
Für die Exaktheit bei $H_q(X)$ und $H_{q-1}(B)$ betrachten wir das folgende kommutative Diagramm



Die Kerne der e_i sind die $\text{Im}g_i$. Die Exaktheit der Mayer-Vietoris Sequenz bei $H_q(X)$ bedeutet also gerade, daß $\text{Ker}h = \text{Ker}e_1 + \text{Ker}e_2$. Die Bilder der δ_i sind die $\text{Ker}f_i$. Die Exaktheit bei $H_q(B)$ bedeutet $\text{Im}h = \text{Im}\delta_1 + \text{Im}\delta_2$. Das folgt alles aus dem folgenden Lemma. \square

Lemma 5 (Sechsecklemma)

Im folgenden Diagramm von R -Moduln seien alle Dreiecke kommutativ, die drei kurzen Sequenzen, die durch B gehen seien exakt und die b_i Isomorphismen.



Dann gilt

$$(1) c_1 b_1^{-1} a_1 + c_2 b_2^{-1} a_2 = 0$$

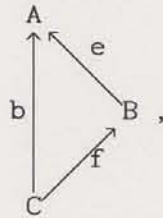
und für $h = c_1 b_1^{-1} a_1$

$$(2) \text{Ker} h = \text{Ker} a_1 + \text{Ker} a_2$$

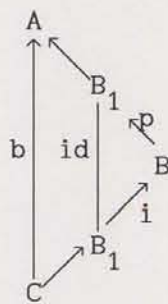
$$(3) \text{Im} h = \text{Im} c_1 \cap \text{Im} c_2.$$

Beweis:

Ein kommutatives Dreieck



in dem b ein Isomorphismus ist, beschreibt nichts anderes als eine direkte Zerlegung von B . Es ist $B = B_1 \oplus B_2$, wobei $B_1 = \text{Ker} e$ und $B_2 = \text{Im} f$. Das heißt, es gibt eine eindeutig bestimmte Verfeinerung



des Diagramms, indem p die natürliche Projektion, i die Inklusion ist und die

anderen Abbildungen Isomorphismen. Wegen der Exaktheit der beiden Diagonalen, gehören die beiden mittleren Dreiecke zur selben Zerlegung von B (nur die Rollen von B_1 und B_2 sind vertauscht.) Weiterhin ist klar, daß man im Ausgangsdiagramm annehmen kann, daß der obere vertikale Pfeil injektiv und der untere surjektiv ist. Jetzt ist die Behauptung des 6-er-lemmas reduziert auf:

Sei A ein Untermodul von $B=B_1 \oplus B_2$. Definiere $h_1: A \rightarrow B/A$ durch

$h_1(a) = (p_1(a) + A)$ wobei $p_1: B \rightarrow B_1$ die natürliche Projektion ist. Dann gilt

$$(1) \quad h_1 + h_2 = 0$$

$$(2) \quad \text{Ker } h_1 = (A \cap B_1) + (A \cap B_2)$$

$$(3) \quad \text{Im } h_1 = (A + B_1)/A \cap (A + B_2)/A$$

Das kann man nun leicht nachrechnen. \square

11 PRODUKTE

Die Homotopiegruppen eines Produktraumes $X \times Y$ sind das direkte Produkt der Homotopiegruppen von X und Y . Die Homologie von $X \times Y$ ist schwerer auszurechnen. Zuerst beweisen wir

Satz 1 (Eilenberg-Zilber)

$S(X \times Y)$ und $S(X) \otimes S(Y)$ sind homotopieäquivalent.

Das braucht einige Vorbereitungen.

Tensorprodukt

Sei R ein Ring, M ein Rechts- und N ein Linksmodul über R . Eine bilineare Abbildung $(_, _)$ von $M \times N$ in eine abelsche Gruppe heißt R -bilinear, wenn für alle $r \in R$

$$(mr, n) = (m, rn).$$

Das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ von M und N ist eine abelsche Gruppe zusammen mit einer

R-bilinearen Abbildung

$$\otimes: M \times N \longrightarrow M \otimes_R N,$$

die die folgende universelle Eigenschaft hat:

Jede R-bilineare Abbildung von $M \times N$ in abelsche Gruppe L hat die Form $f \circ \otimes$ für einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $f: M \otimes_R N \rightarrow L$.

Für abelsche Gruppen M und N schreiben wir $M \otimes N$ statt $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$.

Man zeigt leicht, daß dadurch das Tensorprodukt bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Die Existenz sieht man so ein: Sei H die freie abelsche Gruppe, die von allen Paaren (n, m) erzeugt wird. K sei die von allen Elementen der Form $(n+n', m) - (n, m) - (n', m)$, $(n, m+m') - (n, m) - (n, m')$, $(rn, m) - r(n, m)$, $(n, rm) - r(n, m)$ erzeugte Untergruppe. Setze $M \otimes_R N = H/K$ und $m \otimes n = (n, m) + K$. Man sieht, daß $M \otimes_R N$ von allen $m \otimes n$ - den *reinen Tensoren* - erzeugt wird.

Das Tensorprodukt ist ein *Bifunktor*, das heißt, für jedes Paar von Morphismen $f: M \rightarrow M'$ und $g: N \rightarrow N'$ ist ein Morphismus $f \otimes g: M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$ gegeben und es gelten die Regeln: $\text{id} \otimes \text{id} = \text{id}$, $(f \circ h) \otimes g = (f \otimes g) \circ (h \otimes g)$ und $f \otimes (g \circ h) = (f \otimes g) \circ (f \otimes h)$. $f \otimes g$ ist definiert als die zur R-bilinearen Abbildung $(m, n) \mapsto f(m) \otimes g(n)$ gehörende Abbildung $M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$.

Wenn M ein *S-R-Bimodul* ist, also gleichzeitig ein S Linksmodul und ein R -Rechtsmodul ist und $(sm)r = s(mr)$ erfüllt, wird $M \otimes_R N$ ein Links S -Modul. Man definiert $s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$. Die Zulässigkeit dieser Definition sieht man so ein: Für festes s ist definiert $(m, n) \mapsto (sm) \otimes n$ eine R -bilineare Abbildung von $M \times N$ nach $M \otimes_R N$, faktorisiert also durch eine Abbildung $M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$: die Linksmultiplikation mit s . Wenn N außerdem ein R - T -Bimodul ist, wird $M \otimes_R N$ zum S - T -Bimodul. Wenn R kommutativ ist, brauchen wir zwischen Links und Rechtsmoduln nicht mehr zu unterscheiden und jeder R -Modul ist auch ein R - R -Bimodul. $M \otimes_R N$ ist dann wieder ein R -Modul und es gilt $r(m \otimes n) = (rm) \otimes n = m \otimes (rn)$.

Das folgende Lemma gestattet es im Prinzip das Tensorprodukt zu berechnen:

Lemma 2

Sei R ein beliebiger Ring. Dann gilt:

- 1) $R \otimes_R M \cong M$
- 2) $(\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$
- 3) $(_ \otimes_R N)$ ist ein linksexakter Funktor.

Beweis:

1) Der Isomorphismus ist $r \otimes m \mapsto rm$ mit Umkehrabbildung $m \mapsto 1 \otimes m$.

2) Sei H eine abelsche Gruppe. Dann sind die folgenden Bijektionen natürlich:

$$\begin{aligned} \text{Hom}((\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N, H) &\cong \text{Bil}_R((\bigoplus_{i \in I} M_i) \times N, H) \cong \prod_{i \in I} \text{Bil}_R(M_i \times N, H) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(M_i \otimes_R N, H) \\ &\cong \text{Hom}(\bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N), H). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

3) Sei

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} 0$$

exakt. Wir müssen zeigen, daß

$$A \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes_R N \xrightarrow{h \otimes 1} 0$$

exakt ist. Daß $g \otimes 1$ surjektiv ist, ist klar. Es bleibt also die Exaktheit bei $B \otimes_R N$ zu zeigen. Aus der Funktoreigenschaft von $(_ \otimes_R N)$ folgt, daß

$\text{Im}(f \otimes 1) \subseteq \text{Ker}(g \otimes 1)$; $g \otimes 1$ faktorisiert daher auf natürliche Weise

$$(B \otimes_R N) \xrightarrow{\pi} (B \otimes_R N) / \text{Im}(f \otimes 1) = H \xrightarrow{\rho} C \otimes_R N.$$

Um zu zeigen, daß ρ injektiv ist, definieren wir eine R -bilineare Abbildung $[_, _]: C \times N \rightarrow H$ durch $[c, n] = (b \otimes n) + \text{Im}(f \otimes 1)$, wobei b ein Urbild von c ist. Weil $c = g(b) = 0$ zur Folge hat, daß $b \in \text{Im}(f)$ und also $b \otimes n \in \text{Im}(f \otimes 1)$, ist $[c, n]$ von der Wahl von b unabhängig. Es folgt die Existenz eines Homomorphismus $i: C \otimes_R N \rightarrow H$ mit $i \circ (g \otimes 1) = \pi$. ρ ist also injektiv d.h. $\text{Im}(f \otimes 1) \supseteq \text{Ker}(g \otimes 1)$. \square

Folgerung 3

Sei R kommutativ, dann ist das Tensorprodukt von freien Moduln wieder ein freier R -Modul.

Im Folgenden sei der Einfachheit halber R immer *kommutativ*. Meist wird gelten die Sätze aber auch für nicht-kommutative Ringe. Man muß nur die Formulierung geeignet ändern und zwischen Rechtsmoduln, Linksmoduln und abelschen Gruppen unterscheiden.

Das Tensorprodukt $K \otimes_R L = M$ zweier Kettenkomplexe K und L über R ist folgendermaßen definiert: Es ist $M_p = \bigoplus_{q+r=p} (K_q \otimes_R L_r)$ und die Randabbildung ∂ ist gegeben durch

$$\partial(k \otimes l) = (\partial k \otimes l) + (-1)^q (k \otimes \partial l),$$

wenn $k \in K_q$.

Lemma 4

- 1) Das Tensorprodukt von Kettenkomplexen ist wieder ein Kettenkomplex.
- 2) Tensorieren ist ein Bifunktor von der Kategorie der Kettenkomplexe in die Kategorie der Kettenkomplexe.
- 3) $(-\otimes_R L)$ ist linksexakt.
- 4) Der Funktor \otimes_R ist verträglich mit der Homotopie von Morphismen von Kettenkomplexen.
- 5) Für positive Kettenkomplexe (d.h. ohne nichttriviale Ketten negativer Dimension) ist $H_0(K \otimes_R L) \cong H_0(K) \otimes_R H_0(L)$.

Beweis:

$$1) \partial \partial(k \otimes l) = \partial(\partial k \otimes l) + (-1)^q \partial(k \otimes \partial l) = (-1)^{q-1} (\partial k \otimes \partial l) + (-1)^q (\partial k \otimes \partial l) = 0$$

2) klar

3) Weil die direkte Summe von exakten Sequenzen wieder exakt ist: Sei

$$I \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow 0$$

exakt, das heißt alle induzierten Sequenzen $I_p \rightarrow J_p \rightarrow K_p \rightarrow 0$ sind exakt. Wir fixieren ein p ; zu zeigen ist, daß $(I \otimes_R L)_p \rightarrow (J \otimes_R L)_p \rightarrow (K \otimes_R L)_p \rightarrow 0$ exakt ist. Diese Sequenz ist aber die direkte Summe der exakten Sequenzen

$$I \otimes_{\mathbb{R}} L_r \rightarrow J \otimes_{\mathbb{R}} L_r \rightarrow K \otimes_{\mathbb{R}} L_r \rightarrow 0$$

für $p=q+r$.

4) ϕ und ψ seien homotope Morphismen von J nach K . Wir müssen zeigen, daß die beiden Morphismen $\phi \otimes_{\mathbb{R}} 1$ und $\psi \otimes_{\mathbb{R}} 1$ von $J \otimes_{\mathbb{R}} L$ nach $K \otimes_{\mathbb{R}} L$ homotop sind. Sei $\Phi: \phi \simeq \psi$. Definiere $(\Phi \otimes_{\mathbb{R}} 1)_p: (J \otimes_{\mathbb{R}} L)_p \rightarrow (K \otimes_{\mathbb{R}} L)_{p+1}$ durch

$$(\Phi \otimes_{\mathbb{R}} 1)_p(a \otimes b) = \phi_q(a) \otimes b,$$

wobei $a \in K_q$, $b \in L_r$ und $p=q+r$. Dann ist $\Phi \otimes_{\mathbb{R}} 1$ eine Homotopie von $\phi \otimes_{\mathbb{R}} 1$ nach $\psi \otimes_{\mathbb{R}} 1$, denn für a, b wie eben berechnet sich $\partial(\Phi \otimes_{\mathbb{R}} 1)(a \otimes b) - (\Phi \otimes_{\mathbb{R}} 1)\partial(a \otimes b) = [\partial\Phi a \otimes b + (-1)^{q+1}\Phi a \otimes \partial b] - [\Phi \partial a \otimes b + (-1)^q\Phi a \otimes \partial b] = (\partial\Phi a - \Phi \partial a) \otimes b = (\phi \otimes_{\mathbb{R}} 1 - \psi \otimes_{\mathbb{R}} 1)(a \otimes b)$.

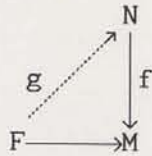
5) Wir müssen zeigen, daß die Exaktheit von $K_1 \rightarrow K_0 \rightarrow G \rightarrow 0$ und $L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow H \rightarrow 0$ die Exaktheit von $(K_0 \otimes_{\mathbb{R}} L_1) \otimes_{\mathbb{R}} (K_1 \otimes_{\mathbb{R}} L_0) \rightarrow K_0 \otimes_{\mathbb{R}} L_0 \rightarrow G \otimes_{\mathbb{R}} H \rightarrow 0$ zur Folge hat. Die Exaktheit bei $G \otimes_{\mathbb{R}} H$ ist klar. Wenn man die beiden Sequenzen tensoriert erhält man ein kommutatives Diagramm, das das folgende Diagramm enthält. Dabei sei

$$A_{ij} = K_i \otimes_{\mathbb{R}} L_j, \quad B_i = K_i \otimes_{\mathbb{R}} H \quad \text{und} \quad C = G \otimes_{\mathbb{R}} H.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & A_{10} & \longrightarrow & B_1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ A_{01} & \longrightarrow & A_{00} & \longrightarrow & B_0 \\ & & & & \downarrow \\ & & & & C \end{array}$$

Wenn in einem solchen Diagramm die Zeile(n) und die Spalte(n) exakt sind, ist auch $A_{01} \oplus A_{10} \rightarrow A_{00} \rightarrow C$ exakt. \square

Ein Kettenkomplex K heißt *azyklisch*, wenn $H(K)_p = 0$ für alle positiven p . Ein positiver Kettenkomplex L heißt *frei*, wenn alle L_p freie \mathbb{R} -Moduln sind. Die Kettenkomplexe topologischer Räume und Tensorprodukte von freien Kettenkomplexen sind zum Beispiel frei. Man beachte, daß freie Moduln F *projektive* sind: Jedes Diagramm



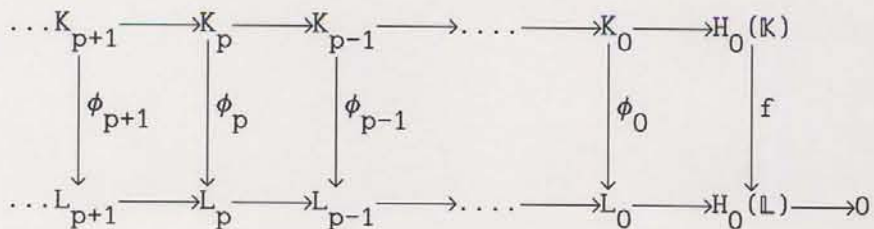
mit surjektivem f läßt sich durch ein g zu einem kommutativen Diagramm vervollständigen. Es genügt natürlich, daß das Bild von f im Bild von $F \rightarrow M$ liegt.

Lemma 5

Wenn K frei ist und L azyklisch, wird jeder Homomorphismus $f: H_0(K) \rightarrow H_0(L)$ von einem Morphismus $\phi: K \rightarrow L$ induziert. ϕ ist bis auf Homotopie eindeutig.

Beweis:

Wir konstruieren rekursiv die ϕ_p so, daß das Diagramm



kommutativ wird. ϕ_0 existiert, weil L_0 frei ist und $L_0 \rightarrow H_0(L)$ surjektiv. Sei ϕ_p schon konstruiert. Weil $\partial \phi_p \partial = \phi_{p-1} \partial \partial = 0$, liegt das Bild von $\phi_p \partial$ im Kern von $L_p \rightarrow L_{p-1}$ und wegen der Exaktheit der unteren Sequenz im Bild von $L_{p+1} \rightarrow L_p$. Weil L_{p+1} frei ist, existiert ϕ_{p+1} . (Wenn $p=0$, spielen $H_0(K), H_0(L)$ und f die Rolle von K_{-1}, L_{-1} und ϕ_{-1} .)

Für die Eindeutigkeit müssen wir zeigen, daß ϕ nullhomotop ist, wenn $f=0$ ist. Dazu konstruieren wir rekursiv eine Folge $\Phi_p: K_p \rightarrow L_{p+1}$ mit $\phi_p = \partial \Phi_p + \Phi_{p-1} \partial$. Wir setzen $\Phi_p = 0$ für negative p . Sei Φ_{p-1} (für ein $p \geq 0$) schon konstruiert. Wir

wollen $\phi_p - \Phi_{p-1} \partial: K_p \rightarrow L_p$ zu einem $\Phi_p: K_p \rightarrow L_{p+1}$ liften. Dazu ist zu zeigen, daß das Bild von $\phi_p - \Phi_{p-1} \partial$ ein Rand ist. Für $p=0$ liegt das daran, daß ϕ_p auf H_0 die Nullabbildung induziert, also ganz K_0 auf Ränder abbildet. Wenn $p>0$, ist L exakt bei L_p und wir müssen zeigen, daß das Bild von $\phi_p - \Phi_{p-1} \partial$ ein Zyklus ist. In der Tat:

$$\partial(\phi_p - \Phi_{p-1} \partial) = \partial\phi_p - (\partial\Phi_{p-1})\partial = \partial\phi_p - (\phi_{p-1} - \Phi_{p-2} \partial)\partial = \partial\phi_p - \phi_{p-1} \partial = 0. \quad \square$$

Folgerung 6

Wenn X und Y zusammenziehbar sind, ist $S(X) \otimes S(Y)$ azyklisch.

Beweis:

Wenn X und Y zusammenziehbar sind, so sind $S(X)$ und $S(Y)$ azyklisch und frei. $H_0(X)$ und $H_0(Y)$ sind freie \mathbb{Z} -Moduln, deren Rang die Zahl der Bogenzusammenhangskomponenten ist. Sei K bzw. L der bei 0 konzentrierte (d.h. $L_p=0$ für $p \neq 0$) Kettenkomplex mit $K_0=H_0(X)$ bzw. $L_0=H_0(Y)$. Dann sind K und L ebenfalls azyklisch und frei mit $H_0(K)=H_0(X)$ und $H_0(L)=H_0(Y)$. Nach dem Lemma sind also $S(X)$ und K bzw. $S(Y)$ und L homotopieäquivalent. Also sind auch $S(X) \otimes S(Y)$ und $K \otimes L$ homotopieäquivalent. $K \otimes L$ ist aber bei 0 konzentriert und daher azyklisch. \square

Sei \mathcal{A} eine Kategorie und \mathcal{F} ein Funktor von \mathcal{A} in die Kategorie der positiven Kettenkomplexe über R . \mathcal{M} (die Modelle) sei eine Menge von Objekten von \mathcal{A} .

Definition

1. \mathcal{F} heißt \mathcal{M} -azyklisch, wenn für alle $M \in \mathcal{M}$ $\mathcal{F}M$ azyklisch ist.
2. \mathcal{F} heißt \mathcal{M} -frei, wenn es für jedes p eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Modellen gibt und Elemente $a_i \in (\mathcal{F}(M_i))_p$, sodaß für alle Objekte A die Familie $(\mathcal{F}(\sigma)a_i \mid \sigma: M_i \rightarrow A, i \in I)$ eine Basis von $(\mathcal{F}A)_p$ ist.

Der nächste Satz ist eine Verallgemeinerung von Lemma 5:

Satz 7

\mathcal{F} und \mathcal{G} seien Funktoren von \mathcal{A} in die Kategorie der Kettenkomplexe über R . M sei eine Menge von Objekten von \mathcal{A} . Wenn \mathcal{F} M -frei und \mathcal{G} M -azyklisch ist, wird jede natürliche Transformation $f: H_0(\mathcal{F}) \rightarrow H_0(\mathcal{G})$ induziert von einer natürlichen Transformation $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, die bis auf natürliche Homotopie eindeutig bestimmt ist.

Beweis:

Wir definieren rekursiv für jedes p eine natürliche Transformation

$\phi_p: \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$, sodaß das folgende Diagramm kommutativ wird.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \mathcal{F}_{p+1} & \longrightarrow & \mathcal{F}_p & \longrightarrow & \mathcal{F}_{p-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{F}_0 & \longrightarrow & H_0(\mathcal{F}) \\
 & \downarrow \phi_{p+1} & & \downarrow \phi_p & & \downarrow \phi_{p-1} & & & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow f \\
 \dots & \mathcal{G}_{p+1} & \longrightarrow & \mathcal{G}_p & \longrightarrow & \mathcal{G}_{p-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{G}_0 & \longrightarrow & H_0(\mathcal{G}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Sei ϕ_p schon konstruiert. (ϕ_0 verschafft man sich ähnlich.) Dann liegt für jedes A das Bild von $\phi_p(A)\delta$ im Kern von $\mathcal{G}_p A \rightarrow \mathcal{G}_{p-1} A$. Für alle i liegt also $\phi_p(M_i)\delta$ im Bild von $\mathcal{G}_{p+1}(M_i) \rightarrow \mathcal{G}_p(M_i)$. Wir definieren $\phi_{p+1}(A)$, indem wir $\phi_{p+1}(A)x=y$ für jedes Basiselement $x=\mathcal{F}(\sigma)a_i$ ($\sigma: M_i \rightarrow A$, $a_i \in \mathcal{F}_{p+1}(M_i)$) von $\mathcal{F}_{p+1} A$ angeben: Wähle ein $b_i \in \mathcal{G}_{p+1}(M_i)$ mit $\delta b_i = \phi_p(M_i)\delta a_i$ und setze $y = \mathcal{F}(\sigma)b_i$.

Das Diagramm kommutiert: $\phi_p(A)\delta x = \phi_p(A)\delta \mathcal{F}(\sigma)a_i = \phi_p(A)\mathcal{F}(\sigma)\delta a_i = \mathcal{F}(\sigma)\phi_p(M_i)\delta a_i = \mathcal{F}(\sigma)\delta b_i = \delta \mathcal{F}(\sigma)b_i = \delta y = \delta \phi_{p+1}(A)x$.

$\phi_{p+1}(A)$ ist eine natürliche Transformation: Sei $\tau: A \rightarrow B$ ein Morphismus. Dann haben wir für x wie oben: $\mathcal{F}(\tau)\phi_{p+1}(A)x = \mathcal{F}(\tau)\mathcal{F}(\sigma)b_i = \mathcal{F}(\tau\sigma)b_i = \phi_{p+1}(B)(\mathcal{F}(\tau\sigma)a_i) = \phi_{p+1}(B)\mathcal{F}(\tau)\mathcal{F}(\sigma)a_i = \phi_{p+1}(B)\mathcal{F}(\tau)x$.

Den zweiten Teil der Behauptung zeigt man ähnlich. \square .

Beweis von Satz 1:

Wir wenden Satz 7 an: \mathcal{A} sei die Kategorie der Paare topologischer Räume. $S(X \times Y)$ und $S(X) \otimes S(Y)$ spielen die Rollen von \mathcal{F} und \mathcal{G} . $H_0(X \times Y)$ hat eine kanonische Basis, die den Bogenzusammenhangskomponenten von $X \times Y$ und also den Paaren von Bogenzusammenhangskomponenten von X bzw. Y entspricht. $H_0(S(X) \otimes S(Y))$ ist nach Lemma 4(5) isomorph zu $H_0(X) \otimes H_0(Y)$; hat also ebenfalls eine kanonische Basis, die den Paaren von Bogenzusammenhangskomponenten von X bzw. Y entspricht. Es gibt also einen natürlichen Isomorphismus

$$f: H_0(S(_ \times _)) \rightarrow H_0(S(_) \otimes S(_)).$$

Sei M_1 die Klasse aller Raumpaare (Δ_q, Δ_q) für $q=0,1,2,\dots$ und M_2 die Klasse aller Raumpaare (Δ_q, Δ_r) für $q,r=0,1,2,\dots$. Weil $\Delta_q \times \Delta_r$ zusammenziehbar ist, ist der Funktor $S(_ \times _)$ M_1 -azyklisch und M_2 -azyklisch. Wegen Folgerung 6 ist $S(_) \otimes S(_)$ ebenfalls azyklisch im Sinne von M_1 und M_2 .

Behauptung 1: $S(_ \times _)$ ist M_1 frei.

Beweis: Fixiere p . Wenn dann $\tau_p = \sigma_p \times \sigma_p \in S_p(\Delta_p \times \Delta_p)$ die Diagonalabbildung $\Delta_p \rightarrow \Delta_p \times \Delta_p$ ist, hat jede stetige Abbildung $\rho: \Delta_p \rightarrow X \times Y$ die Form $\sigma \circ \tau_p = S(\sigma^1 \times \sigma^2)(\tau_p)$ für ein Paar $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ von stetigen Abbildungen $\sigma: (\Delta_p, \Delta_p) \rightarrow (X, Y)$. Diese Abbildungen sind aber eine Basis von $S_p(X \times Y)$.

Behauptung 2: $S(_) \otimes S(_)$ ist M_2 frei.

Beweis: Sei p fest. Die kanonische Basis von $(S(_) \otimes S(_))_p$ besteht aus allen $\sigma^1 \otimes \sigma^2$, wobei für $p=q+r$ σ^1 und σ^2 stetige Abbildungen von Δ_q bzw. Δ_r nach X bzw. Y sind. Wenn wir also $\{(\Delta_q, \Delta_r) \mid p=q+r\}$ für die M_i nehmen und $\sigma_q \otimes \sigma_r$ für die a_i , ist die Bedingung der Definition erfüllt.

Behauptung 1 liefert nun eine natürliche Transformation

$\phi: S(\times) \rightarrow S(_) \otimes S(_)$, die f induziert; Behauptung 2 eine natürliche Transformation $\gamma: S(_) \otimes S(_) \rightarrow S(\times)$, die f^{-1} induziert. Die Eindeutigkeitsaussage von Satz 7 ergibt, daß $\phi\gamma$ und $\gamma\phi$ zur Identität homotop sind. \square

Der Satz von Künneth (Satz 10) erlaubt es, für Hauptidealringe die Homologie von $K \otimes_R L$ aus den Homologien von K und L zu berechnen. Wir brauchen dazu den Bifunktor $\text{Tor}(_, _)$, die erste *Linksderivierte* von \otimes .

Jeder Modul M ist epimorphes Bild eines freien Moduls F_0 . Der Kern der Abbildung $F_0 \rightarrow M$ ist wiederum epimorphes Bild eines freien Moduls F_1 . Fährt man in dieser Weise fort, erhält man einen azyklischen freien Komplex F mit $H_0(F) = M$. Wir nennen F eine *freie Auflöser* von M .

Sei nun T ein (wie immer additiver) Funktor von der Kategorie der R -Moduln in die Kategorie der S -Moduln. Wähle für jeden R -Modul M eine freie Auflöser F_M und setze $L_i(T)M = H_i(TF_M)$. L_i ist auf natürliche Weise ein Funktor von der Kategorie der S -Moduln: Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ läßt sich nach Lemma 5 zu einem Morphismus $\phi: F_M \rightarrow F_N$ liften. Das ergibt eine Abbildung $H_i(\phi): H_i(F_M) \rightarrow H_i(F_N)$. Weil ϕ bis auf Homotopie eindeutig bestimmt ist, ist $H_i(\phi)$ eindeutig bestimmt. Wir nennen diese Abbildung $L_i(T)(f)$. Man rechnet sofort nach, daß dadurch $L_i(T)$ ein Funktor wird. Das zeigt auch, daß $L_i(T)$ -bis auf natürliche Isomorphie- unabhängig von der Wahl der F_M definiert ist. $L_i(T)$ ist der i -te *linksderivierte Funktor* von T .

Lemma 8

- 1) Wenn T rechtsexakt ist, ist $L_0(T) \cong T$.
- 2) Wenn T exakt ist, ist $L_n(T) = 0$ für alle $n > 0$.
- 3) Wenn A projektiv ist, ist $L_n(T)A = 0$ für alle $n > 0$.

Beweis:

1) Eine freie Auflösung \mathbb{F} von M endet mit der exakten Sequenz $F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$.

Wenn T rechtsexakt ist, ist auch $TF_1 \rightarrow TF_2 \rightarrow TM \rightarrow 0$ exakt. Daraus folgt

$$H_0(TF) \cong TM.$$

2) TF ist exakt bei allen F_n , $n > 0$.

3) Wenn A frei ist, ist der bei A konzentrierte Kettenkomplex \mathbb{F} mit $F_0 = A$ eine freie Auflösung von A . $T(\mathbb{F})$ ist ebenfalls bei 0 konzentriert und es folgt $H_n(TF) = 0$ für alle $n > 0$. Wenn A projektiv ist, ist A direkter Summand eines freien Moduls M . Dann ist $L_n(T)A$ direkter Summand von $L_n(T)M = 0$, ist also ebenfalls $= 0$. \square

Sei B ein fester Modul. Die Linksderivierten des Funktors $T_B = (- \otimes_R B)$ nennt man $\text{Tor}_n(-, B)$. Man zeigt leicht, daß $\text{Tor}_n(-, -)$ ein Bifunktor ist.

Bemerkung

Aus dem Lemma folgt, daß $\text{Tor}_n(A, B) = 0$ ist, wenn A oder B frei ist. In der Tat gilt $\text{Tor}_n(A, B) \cong \text{Tor}_n(B, A)$ (Übung).

Satz 9 (Die langen exakten Sequenzen)

1) Sei T ein Funktor und $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ exakt. Dann gibt es

Morphismen $\partial: L_n(T)C \rightarrow L_{n-1}(T)A$ sodaß die Sequenz

$$\dots \rightarrow L_n(T)A \rightarrow L_n(T)B \rightarrow L_n(T)C \rightarrow L_{n-1}(T)A \rightarrow \dots \rightarrow L_0(T)C \rightarrow 0$$

exakt wird.

2) $0 \rightarrow T \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow 0$ sei eine exakte Sequenz von Funktoren. Das heißt es sind

natürliche Transformationen $T \rightarrow U$ und $U \rightarrow V$ gegeben, sodaß für alle M

die sich ergebende Sequenz $0 \rightarrow TM \rightarrow TU \rightarrow TV \rightarrow 0$ exakt ist. Dann gibt es

natürliche Transformationen $L_n(V) \rightarrow L_{n-1}(T)$, sodaß die Folge

$$\dots \rightarrow L_n(T) \rightarrow L_n(U) \rightarrow L_n(V) \rightarrow L_{n-1}(T) \rightarrow \dots \rightarrow L_0(V) \rightarrow 0$$

exakt wird.

Beweis:

1) Sei E freie Auflösung von A und G freie Auflösung von C . Es sind also Surjektionen $E_0 \rightarrow A$ und $G_0 \rightarrow C$ gegeben. Weil G_0 frei ist können wir die letzte Abbildung liften zu einer Abbildung $G_0 \rightarrow B$. Diese Abbildung liefert zusammen mit der Komposition $E_0 \rightarrow A \rightarrow B$ eine Abbildung $E_0 \oplus G_0 \rightarrow B$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} E_0 & \rightarrow & E_0 \oplus G_0 & \rightarrow & G_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \end{array}$$

kommutativ macht. Wir wenden nun das Schlangenlemma 9.4 auf dieses Diagramm an: Weil die beiden äußeren vertikalen Pfeile surjektiv sind, ist auch der mittlere Pfeil surjektiv. Weiterhin ergibt sich daß die Folge der Kerne $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ der vertikalen Pfeile kurz-exakt ist (das heißt, daß $0 \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow 0$ exakt ist.) Jetzt beachten wir, daß $E_1 \rightarrow A'$ und $G_1 \rightarrow C'$ surjektiv sind und fahren so fort. Schließlich erhalten wir eine freien Auflösung F von B und eine exakte Sequenz $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$, die $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ liftet. Diese Sequenz sieht lokal aus wie die kanonische Sequenz $0 \rightarrow E_n \rightarrow F_n \cong E_n \oplus G_n \rightarrow G_n \rightarrow 0$, zerfällt also lokal. Die Folge $0 \rightarrow TE \rightarrow TF \rightarrow TG \rightarrow 0$ ist also ebenfalls exakt. Die Behauptung ergibt sich jetzt aus dem Satz 9.2 über die lange exakte Homologiesequenz.

2) Eine freie Auflösung F von M liefert eine exakte Sequenz $0 \rightarrow TF \rightarrow UF \rightarrow VF \rightarrow 0$ und die wiederum eine exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow L_n(T)M \rightarrow L_n(U) \rightarrow L_n(V)M \rightarrow L_{n-1}(T)M \rightarrow \dots \rightarrow L_0(V)M \rightarrow 0.$$

Es bleibt die Natürlichkeit dieser Abbildung zu zeigen. Sei \mathcal{K}_R die Kategorie der Kettenkomplexe über R modulo Homotopieäquivalenz. Dann ist "freie Auflösung von $_$ " ein Funktor von der Kategorie $R\text{-Mod}$ der R -Moduln in \mathcal{K}_R . T liefert einen Funktor von \mathcal{K}_R nach \mathcal{K}_S . Die H_n sind Funktoren von \mathcal{K}_S nach $S\text{-Mod}$. Der Verbindungshomomorphismus eine natürliche Transformation $H_n \rightarrow H_{n-1}$. Daraus

folgt die Behauptung. \square

Folgerung 10

T sei rechtsexakt. Dann läßt sich $L_1(T)M$ folgendermaßen berechnen: Wähle eine exakte Sequenz $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ mit freiem (oder projektivem) F . Dann ist $L_1(T)M = \ker(TK \rightarrow TF)$.

Beweis:

$L_1(T)F \rightarrow L_1(T)M \rightarrow L_0(T)K \rightarrow L_0(T)F$ ist exakt, $L_1(T)F=0$, $L_0(T)K=TK$ und $L_0(T)F=TF$.

\square

Zur Formulierung der Künnethformel im nächsten Satz führen wir die folgende Notationen ein: Sei K ein Kettenkomplex und z eine ganze Zahl, dann ist $K[z]$ der um z geshiftete Kettenkomplex, der durch $K[z]_n = K_{z+n}$ gegeben ist. Mit $\text{Tor}_1(K, L)$ bezeichnen wir den durch

$$\text{Tor}_1(K, L)_n = \bigoplus_{p+q=n} \text{Tor}_1(K_p, L_q)$$

gegeben trivialen Kettenkomplex. $H(K)$ fassen wir ebenfalls als Kettenkomplex mit trivialem Randoperator auf.

Satz 11 (Die Künnethformel)

K und L seien Kettenkomplexe über R . Wenn K frei ist und R ein Hauptidealring, gibt es eine exakte Sequenz von trivialen Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow H(K) \otimes_R H(L) \xrightarrow{\zeta} H(K \otimes_R L) \rightarrow \text{Tor}_1(K, L)[-1] \rightarrow 0.$$

Die Sequenz zerfällt, ζ ist eine natürliche Transformation.

Beweis:

Sei Z der triviale Kettenkomplex der Zyklen von K (diesmal nicht der Ring der ganzen Zahlen) und B der triviale Kettenkomplex der Ränder von K . Die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow Z_p \rightarrow K_p \rightarrow B_{p-1} \rightarrow 0 \quad (1)$$

setzen sich zu einer Sequenz

$$0 \rightarrow Z \rightarrow K \rightarrow B[-1] \rightarrow 0 \quad (2)$$

zusammen. Weil K_{p-1} frei ist, ist nach dem nächsten Lemma auch B_{p-1} frei. Also zerfällt die Sequenz (1). Wir sagen dann, daß die Sequenz (2) *lokal* zerfällt.

Wenn wir (2) mit L tensorieren ergibt, sich daher nach Lemma 2 (2) die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow Z \otimes_R L \rightarrow K \otimes_R L \rightarrow B[-1] \otimes_R L \rightarrow 0,$$

die wieder lokal zerfällt. Wir wenden hierauf den Satz von der langen exakten Homologiesequenz an, bemerken aber vorher noch für freie triviale Kettenkomplexe F die natürlichen Isomorphismen

$$H(F \otimes_R L) \cong F \otimes_R H(L).$$

Die lange exakte Homologiesequenz ergibt damit die exakte Sequenz

$$B \otimes_R H(L) \xrightarrow{\alpha} Z \otimes_R H(L) \rightarrow H(K \otimes_R L) \rightarrow B[-1] \otimes_R H(L) \xrightarrow{\beta} Z[-1] \otimes_R H(L). \quad (3)$$

Man rechnet leicht nach, daß die Verbindunghomomorphismen α und β von den Inklusionen $B \rightarrow Z$ und $B[-1] \rightarrow Z[-1]$ induziert sind. Aus (3) ergibt sich die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Koker}(\alpha) \rightarrow H(K \otimes_R L) \rightarrow \text{Ker}(\beta) \rightarrow 0.$$

Nach Lemma 2 (3) ist $\text{Koker}(\alpha) \cong (Z/B) \otimes_R H(L) \cong H(K) \otimes_R H(L)$.

Wir wenden nun Folgerung 10 auf die exakte Sequenz

$0 \rightarrow B[-1] \rightarrow Z[-1] \rightarrow H(K)[-1] \rightarrow 0$ und den Funktor $(_ \otimes_R H(L))$ an (genauer gesagt: auf die exakten Sequenzen in jeder Dimension.) Wir erhalten

$$\text{Ker}(\beta) \cong \text{Tor}_1(H(K), H(L))[-1]. \quad \square$$

Die Abbildung ζ in der Künnethformel läßt sich für beliebige Ringe definieren: Wenn $\alpha \in H_p(K)$ und $\beta \in H_q(L)$ repräsentiert werden durch die Zyklen m und n , definieren wir $\zeta(\alpha \otimes \beta)$ als die Homologiekategorie von $m \otimes n$ in $K \otimes_R L$. Diese Definition ist sinnvoll, weil offenbar $m \otimes n$ ein Zyklus ist. Außerdem ist $m \otimes n$ ein Rand, wenn $m = \partial m'$ oder $n = \partial n'$ ein Rand ist: Wir haben dann $m \otimes n = \partial(m' \otimes n)$ oder

$\partial(-m\otimes n')$.

Lemma 12

Wenn R ein Hauptidealring ist, ist jeder Untermodul eines freien R -Moduls wieder frei.

Beweis:

Sei F frei. Dann ist F direkte Summe $\bigoplus_{\alpha \in I} R_\alpha$ von Kopien von R . Sei U ein Untermodul von F . Wir nehmen an, daß I die Menge der Vorgänger der Ordinalzahl μ ist und setzen für jedes $\beta \leq \mu$

$$U_\beta = U \cap \left(\bigoplus_{\alpha < \beta} R_\alpha \right).$$

Weil jeder Untermodul von R_α frei ist (nämlich $=0$ oder $\cong R$) zerfallen die exakten Sequenzen $0 \rightarrow U_\alpha \rightarrow U_{\alpha+1} \rightarrow R_\alpha$. Es ist also $U_{\alpha+1} = U_\alpha \oplus I_\alpha$ für einen freien Modul I_α . Die Behauptung folgt aus der Darstellung $U = \bigoplus_{\alpha < \mu} U_\alpha$. \square

Als Folgerung aus Künneths Satz erhalten wir

Folgerung 13

X und Y seien topologische Räume. Dann gibt es für jedes n eine zerfallende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \rightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1(H_p(X), H_q(Y)) \rightarrow 0.$$

12 VERALLGEMEINERUNGEN

Sei X ein topologischer Raum. Wir haben in diesem Kapitel Invarianten für X konstruiert, indem wir dem Kettenkomplex $S(X)$ Invarianten zugeordnet haben. Das Verfahren läßt sich so verallgemeinern: Sei T ein (additiver) Funktor von

der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der R -Moduln. Dann ist die Homologie $HTS(X)$ von $TS(X)$ eine Invariante von X . Einem Paar $A \subseteq X$ von topologischen Räumen ordnen wir die Invariante $HTS(X,A)$ zu.

Lemma 1

$TS(X,A)$ und $TS(X)/TS(A)$ sind kanonisch isomorph.

Beweis:

$S_q(A)$ ist direkter Summand von $S_q(X)$. Die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow S(A) \rightarrow S(X) \rightarrow S(X,A) \rightarrow 0$$

zerfällt also in jeder Dimension. Also ist auch

$$0 \rightarrow TS(A) \rightarrow TS(X) \rightarrow TS(X,A) \rightarrow 0$$

exakt.

Satz 2

Sei T ein additiver Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der R -Moduln. Dann gilt für $F(X) = HTS(X)$:

- 1) (Funktor) F_q ist ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume (bzw. der Kategorie der Paare topologischer Räume) in die Kategorie der R -Moduln.
- 2) (Homotopie) Wenn f und g stetige homotope Abbildungen von X nach Y sind, ist $F(f) = F(g)$.
- 3) (Lange Homologiesequenz) Jedem Raumpaars $A \subseteq X$ sind natürliche Homomorphismen $F_q(X,A) \rightarrow F_{q-1}(A)$ zugeordnet, sodaß die Folge

$$\dots \rightarrow F_q(A) \rightarrow F_q(X) \rightarrow F_q(X,A) \rightarrow F_{q-1}(A) \rightarrow F_{q-1}(X) \rightarrow \dots$$
 exakt wird.
- 4) (Excision für rechtsexakte T) Sei T rechtsexakt. Weiter sei $A \subseteq B \subseteq X$ und der Abschluß von A enthalten im Inneren von B . Dann ist $F(X \setminus A, B \setminus A) \rightarrow F(X, B)$ ein Isomorphismus.

Beweis:

- 1) Klar, weil S , T und H Funktoren sind.
- 2) Sei $G: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g . Nach dem Beweis von Satz 8.3 sind $S(\text{id} \times 0)$ und $S(\text{id} \times 1)$ homotope Morphismen von $S(X)$ nach $S(X \times I)$. Dann sind auch $S(f) = S(G \circ (\text{id} \times 0)) = S(G) \circ S(\text{id} \times 0)$ und $S(g) = S(G \circ (\text{id} \times 1)) = S(G) \circ S(\text{id} \times 1)$ homotope Morphismen von $S(X)$ nach $S(Y)$. Also sind auch $TS(f)$ und $TS(g)$ homotop und folglich ist $HTS(f) = HTS(g)$.
- 3) Klar mit Lemma 1 und Satz 9.2.
- 4) Nach dem Excisionssatz liefert die natürliche Abbildung

$$i: S(X \setminus A, B \setminus A) \rightarrow S(X, B)$$

einen Isomorphismus der Homologiegruppen. Nach dem nächsten Lemma ist $HT(i)$ ein Isomorphismus zwischen $F(X \setminus A, B \setminus A)$ und $F(X, B)$. \square

Lemma 3

Sei T rechtsexakt, K und L freie Kettenkomplexe über einem Hauptidealring. $\phi: K \rightarrow L$ ein Morphismus.

- 1) Es gibt für jedes n eine natürliche, zerfallende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow TH_n(K) \rightarrow H_n(TK) \rightarrow L_1(T)H_{n-1}(K) \rightarrow 0.$$

- 2) Wenn $H_n(\phi)$ und $H_{n-1}(\phi)$ Isomorphismen sind, so ist auch $H_n T(\phi)$ ein Isomorphismus.

Beweis:

- 1) Wie der Beweis der Künnethformel. Man ersetze $\otimes L$ durch $T(\cdot)$.
- 2) Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & TH_n(K) & \rightarrow & H_n(TK) & \rightarrow & L_1(T)H_{n-1}(K) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow TH_n(\phi) & & \downarrow H_n T(\phi) & & \downarrow L_1(T)H_{n-1}(\phi) \\ 0 & \rightarrow & TH_n(L) & \rightarrow & H_n(TL) & \rightarrow & L_1(T)H_{n-1}(L) \rightarrow 0 \end{array}$$

sind die beiden äußeren Pfeile Isomorphismen, also auch der mittlere. \square

Folgerung 4

Sei T rechtsexakt und F die oben definierte Homologie. Dann gilt:

- 1) $F_0(X) \cong \mathbb{TZ}^N$, N die Anzahl der Bogenkomponenten von X .
- 2) $F_1(X) = T(\text{Ab}(\pi_1(X)))$ für bogenweise zusammenhängendes X .
- 3) Für den einpunktigen Raum $*$ ist

$$F_q(*) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } q > 0 \\ \mathbb{TZ}, & \text{wenn } q = 0 \end{cases}$$

$$4) F_q(S^n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n < q \text{ oder } 0 < q < n \\ \mathbb{TZ}, & \text{wenn } q = n \text{ oder } 0 = q < n \\ \mathbb{TZ}^2, & \text{wenn } 0 = q = n \end{cases}$$

Beweis:

Wenn $H_{q-1}(X)$ frei ist, folgt aus 3(1) und 11.8(3), daß $F_q(X) \cong TH_q(X)$. Weil $H_{-1}(X) = 0$ folgt also 1) aus 7.2. Aus 7.2 folgt insbesondere, daß die $H_0(X)$ frei sind, also ergibt sich 2) aus 7.3. 3) und 4) folgen aus 6.2 und 10.2. \square

Als Beispiel kann man für einen Modul M über einem beliebigen Ring den rechtsexakten Funktor $-\otimes M$ betrachten. Es ergibt sich dann die Homologie $H(X, M)$ von topologischen Räumen mit Koeffizienten in M . Nach 3(1) läßt sich $H(X, M)$ durch $H_n(X, M) \cong (H_n(X) \otimes M) \oplus \text{Tor}_1(H_{n-1}(X), M)$ berechnen. (Das ist das *universelle Koeffizienten Theorem*.) Das bedeutet aber nicht, daß die Betrachtung von $H(X, M)$ überflüssig wäre. Die obige Isomorphie ist nämlich nicht *natürlich* d.h. kein Isomorphismus von Funktoren.

Betrachten wir dieses Beispiel genauer: $H(X, M)$ ist die Homologie des Kettenkomplexes $S(X, M) = S(X) \otimes M$ über R . Im Fall $M = R_R$ ist $S_q(X, R)$ der von den singulären q -Simplices frei erzeugte R -Rechts-Modul. Es gelten weitgehend die gleichen Sätze wie im Fall $M = \mathbb{Z}$: Wir verwenden in den Beweisen Lemma 3(1). Man könnte auch die früheren Beweise einfach im allgemeineren Zusammenhang wieder-

holen.

Bemerkung 5

1) Sei R kommutativ. Dann sind $S(X \times Y, R)$ und $S(X, M) \otimes_R S(Y, R)$ homotopieäquivalent.

2) Sei R ein Hauptidealring, X und Y topologische Räume. Dann gibt es für jedes n eine zerfallende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X, R) \otimes_R H_q(Y, R) \rightarrow H_n(X \times Y, R) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1(H_p(X, R), H_q(Y, R)) \rightarrow 0.$$

Beweis:

1) Das folgt aus 11.1: Es ist $(A \otimes B) \otimes R \cong (A \otimes R) \otimes_R (B \otimes R)$ für abelsche Gruppen A und B .

2) Aus 1) und 11.11. \square

III COHOMOLOGIE

13 GRUNDLAGEN

Sei X ein topologischer Raum. Wir haben im zweiten Kapitel Invarianten für X konstruiert, indem wir dem Kettenkomplex $S(X)$ Invarianten zugeordnet haben. Das Verfahren läßt sich so beschreiben: Sei T ein Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der R -Moduln. Dann ist die Homologie von $TS(X)$ eine Invariante von X . Jetzt betrachten wir *kontravariante* Funktoren T .

Wenn K ein Kettenkomplex über einem Ring R ist und T ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der R -Moduln in die Kategorie der S -Moduln, so ist TK kein Kettenkomplex mehr sondern ein *Cokettenkomplex* über S , d.h. eine Familie $L = (L_z)_{z \in \mathbb{Z}}$ von S -Moduln mit *Corandabbildungen* $\delta: L_z \rightarrow L_{z+1}$, für die $\delta^2 = 0$ gilt. Wie bei Kettenkomplexen - aber die Anordnung der Indexmenge invertiert - definiert man nun Morphismen von Cokettenkomplexen, Homotopie von Morphismen und die Homologiegruppen $H^n(K)$ von Cokettenkomplexen, die jetzt *Cohomologiegruppen* heißen, als die Quotienten der *Cozyklen* und *Coränder*. Einem topologischen Raum X ordnen wir die cohomologische Invariante $HTS(X)$ und einem Raum-paar die Invariante $HTS(X, A)$ zu.

In diesem Kapitel interessiert uns der kontravariante Funktor $\text{Hom}(_, M)$, der jeder abelschen Gruppe den R -Modul aller Homomorphismen in den R -Modul M zuordnet. Wir bezeichnen mit $S^*(X, M) = \text{Hom}(S(X), M)$ den zugehörigen Cokettenkomplex ($S(X)$ wäre also eigentlich $S_*(X)$ zu schreiben), mit $Z^n(X, M)$ die n -Cozyklen, mit $B^n(X, M)$ die Coränder und mit $H^n(X, M)$ die *Cohomologiegruppen* $H^n(S^*(X, M)) = Z^n(X, M) / B^n(X, M)$ von X mit *Koeffizienten in M* und schreiben entsprechend $H^n((X, A), M)$ für $H^n(S^*((X, A), M))$. Wenn $M = \mathbb{Z}$ ist, schreiben wir einfach $H^n(X)$ und $H^n(X, A)$. Beachte daß $\text{Hom}(_, M)$ ein *linksexakter* kontravarianter Funktor ist: Wenn $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ exakt ist, ist auch

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, M) \rightarrow \text{Hom}(B, M) \rightarrow \text{Hom}(A, M)$$

exakt. Der folgende Satz gilt also für Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in M .

Satz 1

Sei T ein kontravarianter additiver Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der R -Moduln. Dann gilt für $F(X) = \text{HTS}(X)$:

- 1) (Funktor) F_q ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der topologischen Räume (bzw. der Kategorie der Paare topologischer Räume) in die Kategorie der R -Moduln.
- 2) (Homotopie) Wenn f und g homotope stetige Abbildungen von X nach Y sind, ist $F(f) = F(g)$.
- 3) (Lange Cohomologiesequenz) Jedem Raumpaars $A \subseteq X$ sind natürliche Homomorphismen $F_q(X, A) \rightarrow F_{q+1}(A)$ zugeordnet, sodaß die Folge

$$\dots \rightarrow F_q(A) \rightarrow F_q(X) \rightarrow F_q(X, A) \rightarrow F_{q+1}(A) \rightarrow F_{q+1}(X) \rightarrow \dots$$
 exakt wird.
- 4) (Excision für linksexakte T) Sei T linksexakt. Weiter sei $A \subseteq B \subseteq X$ und der Abschluß von A enthalten im Inneren von B . Dann ist $F(X, B) \rightarrow F(X \setminus A, B \setminus A)$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Der Beweis geht wie der Beweis von 12.2. Zum Beweis von 4) brauchen wir allerdings eine Version von 12.3. Zunächst der Begriff des Linksderivierten eines kontravarianten Funktors.

Sei T ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der R -Moduln in die Kategorie der S -Moduln. Wähle für jeden R -Modul M eine freie Auflösung \mathbb{F}_M und setze $R^i(T)M = H^i(T\mathbb{F}_M)$. $R^i(T)$ - der i -te Rechtsderivierte von T - ist ein kontravarianter Funktor, der von der Wahl der freien Auflösungen nicht abhängt. Man hat mit den gleichen Beweisen wie bei 11.8 und 11.10:

Lemma 2

- 1) Wenn T linksexakt ist, ist $R^0(T) \cong T$.
- 2) Wenn T exakt ist, ist $R^n(T) = 0$ für alle $n > 0$.
- 3) Wenn A projektiv ist, ist $R^n(T)A = 0$ für alle $n > 0$.
- 4) Für linksexakte T läßt sich $R^1(T)M$ so berechnen. Man wähle eine exakte Sequenz $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ mit freiem F . Dann ist $R^1(T)M = \text{Koker}(TF \rightarrow TK)$.

Der i -te Linksderivierte von $\text{Hom}(_, M)$ wird mit $\text{Ext}^i(_, M)$ bezeichnet. (Allgemeiner ist für einen S - R -Bimodul M $\text{Hom}_S(_, M)$ ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der S -Moduln in die Kategorie der R -Moduln und $\text{Ext}^i(_, M)$ ist entsprechend definiert. Eine ähnliche Bemerkung gilt für Tor_i .)

Lemma 3

Sei T linksexakt, K und L freie Kettenkomplexe über einem Hauptidealring R , $\phi: K \rightarrow L$ ein Morphismus.

- 1) Es gibt für jedes n eine natürliche, zerfallende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow R^1(T)H_{n-1}(K) \rightarrow H^n(TK) \rightarrow TH_n(K) \rightarrow 0.$$

- 2) Wenn $H_n(\phi)$ und $H_{n-1}(\phi)$ Isomorphismen sind, so ist auch $H^n T(\phi)$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Der Beweis geht wieder wie der Beweis von der Künnethformel 11.11. Zur Sicherheit schreiben wir den Beweis noch einmal aus:

- 1) Sei Z der Komplex der Zyklen und B der Komplex der Ränder von K . Weil R ein Hauptidealring ist und K frei ist, zerfällt die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow Z \rightarrow K \rightarrow B[-1] \rightarrow 0$$

lokal. Also ist die Sequenz

$$0 \rightarrow TB[-1] \rightarrow TK \rightarrow TZ \rightarrow 0$$

exakt und zerfällt lokal. Weil Z und B trivial sind, ist $HTZ=TZ$ und $HTB=TB$. Die lange exakte (Co)homologiesequenz liefert also die exakte Sequenz

$$TZ[-1] \xrightarrow{\alpha} TB[-1] \rightarrow HTK \rightarrow TZ \xrightarrow{\beta} TB.$$

Die Sequenz

$$0 \rightarrow B \rightarrow Z \rightarrow H(K) \rightarrow 0$$

ist exakt, also auch

$$0 \rightarrow TH(K) \rightarrow TZ \rightarrow TB$$

und wir haben $\text{Ker}(\beta)=TH(K)$. Lemma 2(4) angewendet auf die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow B[-1] \rightarrow Z[-1] \rightarrow H(K)[-1] \rightarrow 0$$

liefert $\text{Koker}(\alpha)=R^1(T)H(K)[-1]$.

2) Folgt aus 1) wie im Beweis von 12.3(2). \square

Damit ist auch Satz 1(4) bewiesen. \square

Folgerung 4

Sei T kontravariant, linksexakt und F die oben definierte Cohomologie.

Dann gilt:

- 1) $F^0(X) \cong TZ^N$, N die Anzahl der Bogenkomponenten von X .
- 2) $F^1(X) = T(\text{Ab}(\pi_1(X)))$ für bogenweise zusammenhängendes X .
- 3) Für den einpunktigen Raum $*$ ist

$$F^q(*) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } q > 0 \\ TZ, & \text{wenn } q = 0 \end{cases}$$

$$4) F^q(S^n) = \begin{cases} , & \text{wenn } n < q \text{ oder } 0 < q < n \\ TZ, & \text{wenn } q = n \text{ oder } 0 = q < n \\ TZ^2, & \text{wenn } 0 = q = n \end{cases}$$

Beweis:

Wie der Beweis von 12.4.

Die in Satz 1 und Folgerung 4 angegebenen Eigenschaften bilden eine mehr oder weniger vollständige Liste. Andere allgemeine Sätze, wie zum Beispiel eine cohomologische Version der Mayer-Vietoris Sequenz, lassen sich formal aus ihnen beweisen.

Sei R ein kommutativer Ring. Dann kann man $S^*(X, R)$ auffassen als den R -Cokettenkomplex $\text{Hom}_R(S_*(X, R))$ aller R -linearen Abbildungen von $S_*(X, R)$ nach R . Das folgt aus der Identität $\text{Hom}(A, R) \cong \text{Hom}_R(A \otimes R)$, die für beliebige abelsche Gruppen A gilt. Wendet man Lemma 3 auf $\text{Hom}_R(-, R)$ an ergibt sich das Universelle Koeffizienten Theorem:

Satz 5

Wenn R ein Hauptidealring ist, gibt für jedes n eine natürliche, zerfallende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{n-1}(X, R), R) \rightarrow H^n(X, R) \rightarrow \text{Hom}_R(H_n(X, R)) \rightarrow 0.$$

Eine n -dimensionale Cokette c von X ist gegeben durch ihre Werte $[\sigma, c]$ auf den singulären n -Simplexen σ von X . Der Corandoperator ist bestimmt durch die Gleichung

$$[\sigma, \delta c] = [\partial \sigma, c].$$

Sei γ ein n -Zyklus und z ein n -Cozyklus. Dann ist nach dieser Gleichung für alle σ und alle c

$$[\gamma, \delta c] = [\partial \sigma, z] = 0.$$

Es folgt, daß $[\gamma, z]$ nur von der (Ko)homologieklassen von γ bzw z abhängt. $[\cdot, \cdot]$ definiert also eine R -bilineare Abbildung von $H_n(X, R) \times H^n(X, R)$ nach R , also eine R -lineare Abbildung von $H^n(X, R)$ nach $\text{Hom}_R(H_n(X, R))$. Für Hauptidealringe ist das natürlich die in Satz 5 angegebene Abbildung.

Seien M und N zwei R -Moduln. Dann gibt es einen natürliche Homomorphismus

$$\text{Hom}_R(M, R) \otimes_R \text{Hom}_R(N, R) \rightarrow \text{Hom}_R(M \otimes_R N).$$

Dabei ordnet man zwei Homomorphismen $\alpha: M \rightarrow R$ und $\beta: N \rightarrow R$ den Homomorphismus $m \otimes n \mapsto \alpha(m)\beta(n)$ zu. Für zwei Kettenkomplexe K und L ergibt sich dadurch ein Morphismus von Cokettenkomplexen:

$$\text{Hom}_R(K, R) \otimes_R \text{Hom}_R(L, R) \xrightarrow{\mu} \text{Hom}_R(K \otimes_R L).$$

Wir müssen noch nachrechnen, daß μ mit ∂ und d vertauscht: Wir schreiben dabei $[m, \alpha]$ statt $\alpha(m)$. Sei $m \in K_p$, $n \in L_q$, $\alpha \in \text{Hom}_R(K_p, R)$, $\beta \in \text{Hom}_R(L_q, R)$. Es ist $[m \otimes n, d\mu(\alpha \otimes \beta)] = [\partial(m \otimes n), \mu(\alpha \otimes \beta)] = [\partial m \otimes n - m \otimes \partial n, \mu(\alpha \otimes \beta)] = [\partial m, \alpha][n, \beta] - [m, \alpha][\partial n, \beta] = [m, d\alpha][n, \beta] - [n, d\beta][m, \alpha] = [m \otimes n, \mu(d\alpha \otimes \beta - \alpha \otimes d\beta)] = [m \otimes n, \mu d(\alpha \otimes \beta)]$.

Wir erhalten dadurch einen Homomorphismus von Kokettenkomplexen

$$S^*(X, R) \otimes_R S^*(Y, R) \rightarrow S^*(X \times Y, R).$$

Nach der Bemerkung nach 11.11 ergibt das auf natürliche Weise einen Homomorphismus $H^*(X, R) \otimes_R H^*(Y, R) \rightarrow H^*(X \times Y, R)$, das *Kreuzprodukt*.

14 DER COHOMOLOGIERING

Wir fixieren einen unitären kommutativen Ring R . Außer in der Formulierung der Sätze notieren wir R nicht und meinen mit $\dots(X)\dots$ immer $\dots(X, R)\dots$.

Eine R -Algebra \mathcal{R} ist ein R -Modul mit einer R -bilinearen Ringmultiplikation, unter einem R -Rechts-Modul verstehen wir immer einen R -Modul mit einer R -bilinearen Moduloperation $M \times \mathcal{R} \rightarrow M$. Eine *graduierter* R -Modul M ist in eine direkte Summe von Untermoduln $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ zerlegt, die Elemente von M_n heißen *homogen* vom Grad n . Eine *graduierte* R -Algebra hat eine R -Modul-Graduierung $(\mathcal{R}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, sodaß $R^p \mathcal{R}^q \subseteq \mathcal{R}^{p+q}$. M ist ein *graduierter* \mathcal{R} -Rechtsmodul, wenn $M_p \mathcal{R}^q \subseteq M_{p-q}$.

Wir schreiben jetzt $S_*(X)$ bzw. $S^*(X)$ für die direkte Summe der $S_n(X)$ bzw. die direkte Summe der $S^n(X)$ und erhalten auf natürliche Weise graduierte R -Moduln (die Moduln vom negativen Grad sollen per Definition trivial sein). Mit

Hilfe des cup- und des cap-Produkts machen wir $S^*(X)$ zu einem graduierten Ring und $S_*(X)$ zu einem graduierten $S^*(X)$ -Modul.

Definition

- 1) Sei n fixiert. Für alle $0 \leq i \leq n$ sei λ_i und ρ_i^n die beiden singulären affinen i -Simplexe (E_0, \dots, E_i) und (E_{n-i}, \dots, E_n) . (Früher haben wir σ_i für λ_i geschrieben.).
- 2) Das cup-Produkt $c \cup e$ einer p -Cokette c und einer q -Cokette d ist eine $p+q$ -Cokette, definiert durch ihre Werte $[\sigma, c \cup d] = [\sigma \lambda_p, c][\sigma \rho_q^{p+q}, d]$ auf den singulären $p+q$ -Simplexen σ . Die Fortsetzung zu einer R -bilinearen Operation auf $S^*(X)$ ist das *cup-Produkt*.
- 3) Das cap-Produkt $\sigma \cap c$ eines singulären $p+q$ -Simplexes σ und einer p -Cokette c ist die q -Kette $[\sigma \lambda_p, c] \sigma \rho_q^{p+q}$. Die Fortsetzung zu einer R -bilinearen Abbildung

$$S_*(X) \times S^*(X) \xrightarrow{\cap} S_*(X)$$

ist das *cap-Produkt*.

Wir zeigen zuerst

Lemma 1

$\sigma \cap c$ ist das (dadurch eindeutig bestimmte) Element von $S_q(X)$ mit $[\sigma \cap c, d] = [\sigma, c \cup d]$ für alle $d \in S^q(X)$.

Beweis:

Für singuläre $p+q$ -Simplexe σ ist $[\sigma \cap c, d] = [[\sigma \lambda_p, c] \sigma \rho_q^{p+q}, d] = [\sigma \lambda_p, c][\sigma \rho_q^{p+q}, d] = [\sigma, c \cup d]$. \square

Satz 2

cup- und cap-Produkt machen $S^*(X, R)$ zu einer unitären graduierten

Beweis:

Wir zeigen zuerst, daß $S(X)$ ein Einselement hat:

Das Einselement ist $1 = \tilde{\delta} \in S^0(X)$, der Homomorphismus $\tilde{\delta}(\sum \nu_b b) = \sum \nu_b$. In der Tat ist für eine p -Kette σ und eine p -Cokette c $[\sigma, c \cup 1] = [\sigma \lambda_p, c] [\sigma \rho_0^p, 1] = [\sigma, c] 1 = [\sigma, c]$ und $[\sigma, 1 \cup c] = [\sigma \lambda_0, 1] [\sigma \rho_p^p, c] = 1 [\sigma, c] = [\sigma, c]$.

Dann ist zu zeigen, daß $(\sigma \cap c) \cap d = \sigma \cap (c \cup d)$:

Aus Lemma 1 und der Assoziativität des cup-Produkts folgt $[(\sigma \cap c) \cap d, e] = [\sigma \cap c, d \cup e] = [\sigma, c \cup (d \cup e)] = [\sigma, (c \cup d) \cup e] = [\sigma \cap (c \cup d), e]$ für alle e und daraus die Behauptung.

Schließlich die Assoziativität des cup-Produkts:

Sei $c \in S^p(X)$, $d \in S^q(X)$, $e \in S^r(X)$, $n = p + q + r$ und σ ein singuläres n -Simplex. Dann ist $[\sigma, (c \cup d) \cup e] = [\sigma \lambda_{p+q}, c \cup d] [\sigma \rho_r^n, e] = [\sigma \lambda_{p+q} \lambda_p, c] [\sigma \lambda_{p+q} \rho_q^{p+q}, d] [\sigma \rho_r^n, e] = [\sigma \lambda_p, c] [\sigma \rho_{q+r}^n, d \cup e] = [\sigma, c \cup (d \cup e)]$

□

Lemma 3

Für alle $\sigma \in S_{p+q}(X)$, $c \in S^p(X)$ und $d \in S^q(X)$ gilt:

- 1) $\delta(c \cup d) = \delta c \cup d + (-1)^p c \cup \delta d$
- 2) $\delta \sigma \cap c = c \cup \delta \sigma + (-1)^p \delta(\sigma \cap c)$

Beweis:

1) Sei $n = p + q + 1$ und σ ein singuläres n -Simplex. Dann ist

$$\begin{aligned} [\sigma, \delta(c \cup d)] &= [\partial \sigma, c \cup d] \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i [\sigma^{(i)} \lambda_p, c] [(\sigma^{(i)} \rho_q^{p+q}, d)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^p (-1)^i [(\sigma\lambda_{p+1})^{(i)}, c] [\sigma\rho_q^n, d] + \sum_{i=p+1}^n (-1)^i [\sigma\lambda_p, c] [(\sigma\rho_{q+1}^n)^{(i-p)}, d] \\
&= \left([\sigma, \delta c u d] - (-1)^{p+1} [\sigma\lambda_p, c] [\sigma\rho_q^n, d] \right) + (-1)^p \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^i [\sigma\lambda_p, c] [(\sigma\rho_{q+1}^n)^{(i)}, d] \\
&= \left([\sigma, \delta c u d] - (-1)^{p+1} [\sigma\lambda_p, c] [\sigma\rho_q^n, d] \right) + (-1)^p \left([\sigma, c u \delta d] - [\sigma\lambda_p, c] [\sigma\rho_q^n, d] \right) \\
&= [\sigma, (\delta c u d) + (-1)^p (c u \delta d)].
\end{aligned}$$

2) Für alle $d \in S^{q-1}(X)$ gilt

$$\begin{aligned}
[\partial \sigma n c, d] &= [\partial \sigma, c u d] = [\sigma, \delta (c u d)] \\
&= [\sigma, \delta c u d] + (-1)^p [\sigma, c u \delta d] \\
&= [\sigma n \delta c, d] + (-1)^p [\sigma n c, \delta d] \\
&= [\sigma n \delta c + (-1)^p \partial (\sigma n c), d]. \quad \square
\end{aligned}$$

Wir schließen aus 3(1), daß $Z'(X) = \oplus Z^*(X)$ eine unitäre Unter algebra von $S'(X)$ ist und $B'(X) = \oplus B^*(X)$ ein Ideal in $Z'(X)$. Also ist $H'(X) = \oplus H^*(X) = Z'(X)/B'(X)$ eine graduierte R -Algebra, der *Cohomologierung* von X . Aus 3(2) folgt, daß $Z_*(X) = \oplus Z_*(X)$ unter dem cap-Produkt ein graduiertes $Z'(X)$ -Modul ist. Außerdem rechnet man leicht nach, daß $Z_*(X) \cap B'(X) \subseteq B_*(X)$. Daraus folgt, daß $H_*(X)$ ein graduiertes $H'(X)$ -Modul ist.

Folgerung 4

Der Homologiemodul $H_*(_, R)$ über dem Cohomologierung $H^*(_, R)$ ist ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Paare (M, R) , wobei M ein graduiertes Modul über der graduierten R -Algebra R ist.

Beweis:

Die gesamte Konstruktion ist funktoriell. \square

Unsere Darstellung hat den Nachteil, daß die Definition des cup-Produkts

unmotiviert ist und die seine Eigenschaften zufällig erscheinen. Das folgende Lemma behebt diesen Mißstand.

Lemma 5

Sei $\Delta: X \rightarrow X \times X$ die Diagonaleinbettung. Das cup-Produkt ist die Komposition der Abbildungen

$$H^*(X, R) \times H^*(X, R) \rightarrow H^*(X, R) \otimes_R H^*(X, R) \rightarrow H^*(X \times X, R) \rightarrow H^*(X, R),$$

wobei der zweite Pfeil das Kreuzprodukt und der dritte Pfeil von Δ induziert ist.

Beweis:

Sei ϕ die Komposition $S_*(X) \rightarrow S_*(X \times X) \rightarrow S_*(X) \otimes_R S_*(X)$, wobei der erste Pfeil von Δ herrührt und der zweite Pfeil die Homotopieäquivalenz von 11.1 und 12.5 ist. ϕ ist ein natürlicher Morphismus, der den kanonischen Isomorphismus $H_0(X) \rightarrow H_0(X) \otimes_R H_0(X)$ induziert, und dadurch nach 11.7 bis auf Homotopie eindeutig bestimmt. Vergleiche dazu den Beweis von 11.1 und 12.5. Definiere für $c \in S^p(X)$ und $d \in S^q(X)$ das (R-bilineare) Produkt $c \times d \in S^{p+q}(X)$ durch $[\sigma, c \times d] = [\phi(\sigma), c \otimes d]$, wobei

$$[\rho \otimes \tau, c \otimes d] = \begin{cases} [\rho, c][\tau, d], & \text{falls } \rho \in S_p(X) \text{ und } \tau \in S_q(X) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(Siehe die Bemerkungen am Ende von Kapitel 13.) Es ist klar, daß die im Lemma angegebene Operation von \times auf den Homologie induziert wird.

Nach der unten bewiesenen Behauptung kann man ϕ so wählen, daß für singuläre n-Simplexe σ

$$\phi(\sigma) = \bigoplus_{p+q=n} \sigma \lambda_p \otimes \sigma \rho_q^n. \quad (*)$$

Dann ist aber für $c \in S^p(X)$ und $d \in S^q(X)$ und $p+q=n$ $[\sigma, c \times d] = [\sigma \lambda_p, c][\sigma \rho_q^n, d] = [\sigma, c \otimes d]$. Es folgt $c \times d = c \otimes d$ und das Lemma.

Behauptung

Die durch (*) definierte Abbildung ist ein natürlicher Morphismus von $S_*(X)$ nach $S_*(X) \otimes_R S(X)$, der die kanonische Abbildung $H_0(X) \rightarrow H_0(X) \otimes_R H_0(X)$ induziert.

Beweis:

ϕ ist offenbar eine natürliche Transformation. Auf $S_0(X)$ ist $\phi(a) = a \otimes b$, also wird $H_0(X)$ richtig abgebildet. Es muß aber noch gezeigt werden, daß ϕ tatsächlich ein Morphismus von Kettenkomplexen ist, d.h. mit ∂ vertauscht. Der Beweis geht wie der Beweis von 3(1). Man kann 3(1) aber auch anwenden: Sei σ ein singuläres $n+1$ -Simplex. Es genügt zu zeigen, daß für beliebige p, q mit $p+q=n$ und beliebige $c \in S^p(X)$ und $d \in S^q(X)$

$$[\phi(\partial\sigma), c \otimes d] = [\partial\phi(\sigma), c \otimes d].$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber $[\partial\sigma, c \otimes d] = [\sigma, \delta(c \otimes d)]$. Die rechte Seite ist

$$\begin{aligned} & [\partial(\sigma \lambda_{p+1}) \otimes \sigma \rho_q^n + (-1)^p \sigma \lambda_p \otimes \partial(\sigma \rho_{q+1}^n), c \otimes d] \\ &= [\partial(\sigma \lambda_{p+1}), c] [\sigma \rho_q^n, d] + (-1)^p [\sigma \lambda_p, c] [\partial(\sigma \rho_{q+1}^n), d] \\ &= [\sigma \lambda_{p+1}, \delta c] [\sigma \rho_q^n, d] + (-1)^p [\sigma \lambda_p, c] [\sigma \rho_{q+1}^n, \delta d] \\ &= [\sigma, \delta c \otimes d + (-1)^p c \otimes \delta d]. \quad \square \end{aligned}$$

Nimmt man die Abbildung von Lemma 5 als Definition des cup-Produkts läßt sich die Assoziativität leicht beweisen. Man zeigt einfach, daß die beiden Abbildungen $c \otimes d \otimes e \mapsto (c \cup d) \cup e$ und $c \otimes d \otimes e \mapsto c \cup (d \cup e)$ von $S^*(X) \otimes_R S^*(X) \otimes_R S^*(X)$ nach $S^*(X)$ homotop sind. Das folgt daraus, daß die beiden Abbildungen $S_*(X) \rightarrow S_*(X) \otimes_R S_*(X) \otimes_R S_*(X)$ die durch $(\phi \otimes \text{id}) \circ \phi$ und $(\text{id} \otimes \phi) \circ \phi$ definiert sind, homotop sind. Die beiden Abbildungen sind aber natürliche Morphismen, die auf $H_*(X)$ übereinstimmen und man kann 11.7 anwenden.

Der Cohomologiering ist nicht kommutativ. Es gilt vielmehr

Bemerkung 6

Für p -Coketten c und q -Coketten d gilt $c \cup d = (-1)^{pq} d \cup c$.

Beweis:

Die Abbildung $\mu: S_*(X) \otimes_R S_*(X) \rightarrow S_*(X) \otimes_R S_*(X)$, definiert durch $\sigma \otimes \tau \mapsto (-1)^{pq} \sigma \otimes \tau$ für $\sigma \in S_p(X)$ und $\tau \in S_q(X)$ ist ein Morphismus von Kettenkomplexen, wie die folgende Rechnung zeigt, (der Faktor $(-1)^{pq}$ ist gerade so gewählt).

$$\begin{aligned} \mu(\partial(\sigma \otimes \tau)) &= \mu(\partial\sigma \otimes \tau + (-1)^p \sigma \otimes \partial\tau) = (-1)^{(p-1)q} \tau \otimes \partial\sigma + (-1)^p (-1)^{p(q-1)} \partial\tau \otimes \sigma = \\ &(-1)^{pq} (\partial\tau \otimes \sigma + (-1)^q \tau \otimes \partial\sigma) = (-1)^{pq} \partial(\tau \otimes \sigma) = \partial\mu(\sigma \otimes \tau). \end{aligned}$$

Sei ϕ die Abbildung aus dem Beweis von Lemma 5. Dann ist

$$\mu \circ \phi : S_*(X) \rightarrow S_*(X) \otimes_R S_*(X)$$

ein Morphismus, der wieder auf $H_0(X)$ die gleiche Abbildung wie ϕ induziert. Die beiden Abbildungen sind also nach 11.7 homotop. Also sind auch die dadurch bestimmten Abbildungen $S'(X) \otimes_R S'(X) \rightarrow S'(X)$ homotop. Die eine Abbildung ist aber unser cup-Produkt, die andere gegeben durch $c \cup d \mapsto (-1)^{pq} c \cup d$. Auf $H'(X)$ wird also die gleiche Operation definiert. \square

INHALT

I	HOMOTOPIEGRUPPEN	
1	Die Fundamentalgruppe	1
2	Homotope Abbildungen	5
3	Überlagerungen	9
4	Höhere Homotopiegruppen	17
5	Kompakte Flächen	22
II	SINGULÄRE HOMOLOGIE	
6	Die singulären Homologiegruppen	33
7	$H_0(X)$ und $H_1(X)$	35
8	Homologie als Funktor	37
9	Die exakte Homologiesequenz	42
10	Der Excisionssatz	48
11	Produkte	56
12	Verallgemeinerungen	70
III	COHOMOLOGIE	
13	Grundlagen	75
14	Der Cohomologiering	80
	INHALT	87