Deskriptive Mengenlehre

Freiburger Vorlesung , Sommersemester 1978

Martin Ziegler

Inhaltsverzeichnis

I Satz von Baire

X sei ein metrischer Raum ; $d: X^2 \to \mathbb{R}$ die Metrik von X .

Definition

Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ heißt von Baire Klasse 1 , wenn f Limes einer Folge stetiger Funktionen ist. Stetige Funktionen haben die Klasse o.

Ziel dieses Kapitels ist den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1 (Baire)

X sei separabel und vollständig. $f: X \to \mathbb{R}$ ist genau dann von Baire-Klasse 1 , wenn jede nicht-leere abgeschlossene Teilmenge $F \subset X$ einen Punkt enthält, bei dem $f_{|F}$ stetig ist.

Zuerst geben wir eine andere Charakterisierung der Baireschen Funktionen der Klasse 1, die von Lebesgue stammt.

Definition

Die Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen ist eine F_σ-Menge.
Der Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen ist eine G_δ-Menge.

Lemma 2

i) Das System der F_σ-Mengen ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen und endlichen Durchschnitten. Das System der G_δ-Mengen ist abgeschlossen unter abzählbaren Durchschnitten und endlichen Vereinigungen.

ii) $A \subset X$ ist genau dann eine F_σ-Menge , wenn $X \setminus A$ eine G_δ-Menge ist.

iii) Offene Mengen sind F_σ , abgeschlossene G_δ .

Beweis von iii) : Wenn F abgeschlossen ist, ist

$$F = \bigcap \{x \mid d(F,x) < (i+1)^{-1}\} .$$

Definition

$F: X \to \mathbb{R}$ heißt 2-Borel meßbar, wenn für alle offenen $G \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(G)$ eine F_σ-Menge ist. Stetige Funktionen sind 1-Borel meßbar.

Bemerkung: Sei $\underline{B}$ eine Basis (der offenen Mengen) von $\mathbb{R}$. Weil $\mathbb{R}$ separabel ist, genügt zur 2-Borel Meßbarkeit, daß alle $f^{-1}(B)$, $B \in \underline{B}$ F_σ-Mengen sind.

Satz 3 (Lebesgue)

Die Baireschen Funktionen der ersten Klasse sind genau die 2-Borel meßbaren Funktionen.

Der Beweis der einen Richtung ist einfach: Sei f Bairesch der ersten Klasse und G eine offene Teilmenge von R. f ist Limes einer Folge (f_i) von stetigen Funktionen, G können wir in der Form $\bigcup \{\bar{G}_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \bigcup \{G_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ für offene G_i schreiben. Man sieht leicht, daß

$$x \in f^{-1}(G) \quad \text{gdw.} \quad \underbrace{\exists i,n \ \underbrace{\forall k \geq n \ \underbrace{f_k(x) \in \bar{G}_i}_{}}_{\text{abgeschlossen}}}_{\text{abgeschlossen}} \ . \qquad F_\delta \ .$$

Wir haben durch die Klammern folgende Schlußweise angedeutet:

$U_{k,i}$ sei die Menge der $x \in X$, die die Aussage in der innersten Klammer erfüllen; $F_{i,n}$ die Menge der x , die die nächste Klammer erfüllen. Die $U_{k,i}$ sind -als Urbild von $\bar{G}_i$ unter f_k - abgeschlossen . $F_{i,n}$ ist der

der Durchschnitt der $U_{k,i}$, $k \geq n$ - also auch abgeschlossen . $f^{-1}(G)$ ist schließlich eine F_δ -Menge : die Vereinigung der $F_{i,n}$.

Die andere Richtung zeigen wir zuerst für Treppenfunktionen.

Definition

Eine Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt heißt Treppenfunktion.

Lemma

Eine 2-Borel meßbare Treppenfunktion ist Bairesch der ersten Klasse. Man findet sogar eine Folge von stetigen Funktionen f_i , die gegen h konvergieren, mit $|h| \geq |f_i|$. ($|h| = \sup_x |f(x)|$)

Beweis: $y^o,..y^m$ seien die Werte von h . Die Urbildmengen $h^{-1}(y^j)$ sind F_δ . Wir schreiben $h^{-1}(y^j)$ als Vereinigung einer aufsteigenden Folge $F_o^j, F_1^j,..$ von abgeschlossenen Mengen. Für alle i ist $h|_{F_i^o \cup F_i^1 \cup .. \cup F_i^m} = h_i$ stetig.

Wir zitieren

Satz (Tietze)

F sei abgeschlossen in X. Dann läßt sich jede stetige Funktion $h:F \to \mathbb{R}$ zu einer stetigen Funktion $f:X \to \mathbb{R}$ mit $|h| = |f|$ fortsetzen.

Sei nun f_i eine stetige Fortsetzung von h_i auf X mit $|h_i| = |f_i|$.

Dann ist $\lim_i f_i = h$.

Zum Beweis von Satz 3 brauchen wir noch zwei Lemmas:

Lemma 4 (F_δ -Reduktion)

$A^o, A^1,...$ sei eine Folge von F_δ-Mengen. Dann gibt es eine Folge $B^o, B^1,...$ von disjunkten F_δ -Mengen, $B^j \subset A^j$, deren Vereinigung gleich der Vereinigung der A^j ist.

Beweis: Sei $A^j = \bigcup \{F_i^j \mid j \in \mathbb{N}\}$, F_i^j abgeschlossen. Wir verwenden eine Bijektion von $\mathbb{N}^2$ nach $\mathbb{N}$, die i,j die Zahl $\langle i,j \rangle$ zuordnet. Die B^j definieren wir durch

$$B^j = \{x \mid \underbrace{\exists i\,(\underbrace{\underbrace{x \in F_i^j}_{\text{abgeschlossen}} \wedge \underbrace{\forall k,l\,(\langle k,l\rangle < \langle i,j\rangle \to \underbrace{x \notin F_k^l}_{\text{offen}})}_{\text{offen}}}_{F_\delta})}_{F_\delta}\} .$$

Lemma 5

Jede beschränkte 2-Borel meßbare Funktion ist gleichmäßiger Limes von 2-Borel meßbaren Treppenfunktionen.

Beweis: f sei beschränkte 2-Borel meßbare Funktion und $i \in \mathbb{N}$. Es gibt reelle Zahlen $y^o,...y^m$ mit $\forall x \exists j \ |f(x)-y^j| < 2^{-i}$. Die Vereinigung der F_δ-Mengen $A^j = \{x \mid |f(x)-y^j| < 2^{-i}\}$ ist X . Wir wählen uns $B^o, B^1,...$ mit Lemma 4 zur Folge $A^o,..A^m,\emptyset,\emptyset,..$ Die Funktion h_i , definiert durch $h_i(x) = y^j$, $x \in B^j$, ist eine 2-Borel Treppenfunktion mit $|f - h_i| < 2^{-i}$. $\lim_i h_i = f$.

Beweis von Satz 3 :

Sei $f:X \to \mathbb{R}$ 2-Borel meßbar.

1) Wir nehmen zunächst an, daß f beschränkt ist.

Lemma 5 liefert uns eine Folge von 2-Borel meßbaren Treppenfunktionen h^j , $j > o$, mit $|f - h^j| < 2^{-j-1}$. Gemäß unserem ersten Lemma finden wir für jedes j eine Folge f_i^j von stetigen Funktionen mit $\lim_i f_i^j = h^{j+1} - h^j$ $(h^o := o)$ und $|f_i^j| \leq 2^{-j}$. Wir setzen $g_i = f_i^o + f_i^1 + ... f_i^i$.

Sei $k > o$. Dann ist für alle $i \geq k$ und alle $x \in X$

$$|f(x) - g_i(x)| \le |f(x) - h^k(x)| + |h^k(x) - h^{k-1}(x) - f_i^{k-1}(x)| + \dots + |h^1(x) - h^o(x) - f_i^o(x)| + |f_i^k(x) + \dots + f_i^i(x)| .$$

Also ist $\limsup_i |f(x) - g_i(x)| \le |f(x) - h^k(x)| + 2^{-k+1}$. Daraus folgt $\lim_i g_i(x) = f(x)$.

2) Sei f nun beliebig.

Wir wählen einen Homeomorphismus $g:\mathbb{R} \to (o,1)$. $gf : X \to \mathbb{R}$ ist dann eine beschränkte 2-Borelmeßbare Funktion. Es gibt stetige Funktionen g_i, die gegen gf konvergieren. Wir modifizieren die g_i:

$$f_i(x) = \begin{cases} g_i(x) & \text{, wenn } g_i(x) \in (i^{-1}, 1 - i^{-1}) \\ i^{-1} & \text{, wenn } g_i(x) \le i^{-1} \\ i - i^{-1} & \text{, wenn } g_i(x) \ge 1 - i^{-1} \end{cases}$$

Die f_i sind stetige Funktionen, die gegen gf konvergieren. Die Funktionen $g^{-1}f_i$ konvergieren gegen f.

Übung: Zeige, daß der gleichmäßige Limes einer Folge von 2-Borel meßbaren Funktionen wieder 2-Borel meßbar ist.

<u>Satz 6</u>

$f:X \to \mathbb{R}$ ist genau dann 2-Borel meßbar, wenn man für jedes $\varepsilon > o$ eine Folge von abgeschlossenen Mengen $F_o, F_1, \dots$ mit $X = \bigcup\{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $|f[F_i]| < \varepsilon$ finden kann.

($|A|$ ist der Durchmesser $\sup\{|a - b| \mid a,b \in A\}$ von A.)

Beweis:

f sei 2-Borel meßbar und $\varepsilon > o$. Wir überdecken R mit offenen Mengen $G_o, G_1, \dots$ von kleinerem Durchmesser als ε. Jede Menge $f^{-1}(G_i)$ ist Vereinigung von abgeschlossenen Mengen $F_i^o, F_i^1, \dots$ Dann ist $X = \bigcup\{F_i^j \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ und $|f[F_j^i]| < \varepsilon$.

Wir nehmen nun an, daß f die Bedingung von Satz 6 erfüllt. Für jedes $i > o$ wählen wir eine Zerlung von X in abgeschlossene Mengen $F_o^i, F_1^i, \dots$ mit $|f[F_j^i]| < i^{-1}$. Sei $x \in f^{-1}(G)$; für genügend großes i liegt die i^{-1}-Kugel um $f(x)$ in G. Es gibt also ein j mit $f[F_j^i] \subset G$, $x \in F_j^i$. Das zeigt, daß $f^{-1}(G)$ Vereinigung von gewissen der F_j^i ist, also eine F_σ-Menge ist.

Wir beweisen nun eine Richtung des <u>Satzes von Baire</u>.

X sei separabel, $f:X \to \mathbb{R}$ erfülle die Bedingung von Satz 1.

Wir geben uns ein $\varepsilon > o$ vor. Wir definieren uns eine absteigende Folge $X = A_o \supset A_1 \supset \dots \supset A_\alpha \supset \dots$, α Ordinalzahl, von abgeschlossenen Mengen: Wenn λ eine Limesordinalzahl ist, nehmen wir für A_λ den Durchschnitt aller $A_\alpha, \alpha < \lambda$. Wenn A_α bereits definiert ist, unter-scheiden wir zwei Fälle. Ist A_α leer, setzen wir $A_{\alpha+1} = \emptyset$. Sonst finden wir ein $x \in A_\alpha$ bei dem $f|_{A_\alpha}$ stetig ist. Wir wählen eine offene Umgebung U_α von x mit $|f[U_\alpha \cap A_\alpha]| < \varepsilon$ und setzen $A_{\alpha+1} = A_\alpha \cap U_\alpha$.

Aus dem nächstem Lemma folgt, daß $A_\beta = \emptyset$ für eine abzählbare Ordinalzahl β. Es dann $X = \bigcup\{U_\alpha \cap A_\alpha \mid \alpha < \beta\}$. Die $A_\alpha \cap U_\alpha$ sind aber F_σ-Mengen. Die Voraussetzung von Satz 6 sind damit erfüllt. f ist 2-Borel meßbar.

<u>Lemma 7</u>

X sei separabel. $A_o \supset A_1 \supset \dots \supset A_\alpha \supset \dots$ eine absteigende transfinite Folge von abgeschlossenen Teilmengen. Dann ist $A_{\beta+1} = A_\beta$ für eine abzählbare Ordinalzahl β.

Beweis: Sei $(G_i \mid i \in I)$ eine Basis von X . Angenommen die Behauptung des Lemmas ist falsch . Dann gibt es für jede abzählbare Ordinalzahl β ein $i_\beta \in I$ mit $G_{i_\beta} \cap A_\beta \neq \emptyset$ und $G_{i_\beta} \cap A_{\beta+1} = \emptyset$. Weil die Indices i_β alle verschieden sind , folgt daß I überabzählbar ist. X hätte also keine abzählbare Basis.

Für die andere Richtung von Satz 1 brauchen wir den Baireschen Kategoriesatz .

Definition

$A \subset X$ heißt nirgends dicht, wenn das Innere von $\bar{A}$ leer ist. A heißt von erster Kategorie, wenn A Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen ist ; sonst ist A von zweiter Kategorie.

Satz 8

X sei vollständig.Dann ist das Innere jeder Menge der ersten Kategorie leer.

Beweis

Sei $A \subset X$ von erster Kategorie , also $A = \bigcup\{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, F_i nirgends dicht. Wir können annehmen, daß die F_i abgeschlossen sind. Dann sind die $O_i = X \setminus A_i$ offen und dicht (d.h. $\bar{O}_i = X$). Wir müssen zeigen, daß $\bigcap\{O_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dicht ist.

Sei U_o offen und nicht leer, und sei die nicht-leere offene Menge U_i bereits definiert. Weil O_i dicht ist, ist $U_i \cap O_i \neq \emptyset$. Es gibt also eine nicht-leere offene Menge U_{i+1} mit $\bar{U}_{i+1} \subset U_i \cap O_i$ und $d(U_{i+1}) < (i+1)^{-1}$. (d(B) ist der Durchmesser $\sup\{d(a,b) \mid a,b \in B\}$)

Weil X vollständig ist, gibt es ein x in $\bigcap\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Also ist $U_o \cap \bigcap\{O_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ nichtleer.

Beweis von Satz 1:

X sei vollständig , $f: X \to \mathbb{R}$ von Baire Klasse 1.

1) Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist von erster Kategorie:

$n > 0$ sei eine natürliche Zahl . Die Menge

$A_n = \{x \mid |f[U]| \geq n^{-1}$ für jede Umgebung U von $x\}$ ist abgeschlossen.

V sei eine nicht-leere offene Menge. Weil f 2-Borel meßbar ist, gibt es eine Zerlegung $X = \bigcup\{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ in abgeschlossene Mengen F_i mit $|f[F_i]| < n^{-1}$. Nach Satz 8 hat für ein i $\overline{V \cap F_i}$ nicht leeres Inneres. Es gibt also eine nicht leere offene Menge $U \subset V \cap F_i$. Offenbar ist $U \cap A_n = \emptyset$, also $V \not\subset A_n$.

Die A_n sind nirgends dicht. Die Vereinigung der A_n ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f . Aus Satz 8 folgt, daß die Menge der Stetig - keitsstellen von f dicht liegt.

2) Sei nun A eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von X . A ist wieder ein vollständiger metrischer Raum , $f|_A$ von der Baire Klasse 1. Es gibt also eine Element von A bei dem $f|_A$ stetig ist.

Folgerung X sei ein separabler metrischer Raum. $A \subset X$ ist genau dann sowohl F_σ als auch G_δ Menge, wenn in jedem nichtleeren abgeschlossenen Unterraum F von X, $A \cap F$ oder $F \setminus A$ einen inneren Punkt hat.

Zum Beweis bemerkt man, daß die charakteristische Funktion von A genau dann 2-Borel meßbar ist, wenn A sowohl F_σ als auch G_δ ist.

II G_δ-Mengen in vollständigen Räumen

X,Y seinen metrische Räume

Satz 1 (Alexandroff)

Jeder G_δ-Unterraum eines vollständigen metrischen Raumes läßt sich vollständig metrisieren.

Zum Beweis brauchen wir das folgende Lemma

Lemma 2

Wenn A G_δ-Unterraum von X ist, ist A zu einem abgeschlossenen Unterraum von $X \times \mathbb{R}^N$ homeomorph.

Beweis: $X \setminus A$ sei Vereinigung der abgeschlossenen Mengen F_i. Wir definieren $f: A \to X \times \mathbb{R}^N$ durch

$f(a) = (a, d(F_o,a)^{-1}, d(F_1,a)^{-1}, \ldots)$.

Offenbar ist f ein Homeomorphismus von A auf $f[A]$.

Sei $(f(a_j))$ konvergent. Dann konvergiert a_j gegen ein $x \in X$ und es ist $d(F_i,x) \neq o$ für alle i. Daraus folgt $x \in A$. $f[A]$ ist also abgeschlossen.

Wenn X vollständig ist, ist $X \times \mathbb{R}^N$ vollständig metrisierbar. Also ist auch jeder abgeschlossenen Unterraum von $X \times \mathbb{R}^N$ und damit jeder G_δ-Unterraum von X vollständig metrisierbar.

Satz 1 läßt sich umkehren. Dazu beweisen wir das folgende Lemma

Lemma 3

Sei A Unterraum von X und $f:A \to Y$ eine stetige Abbildung von A in den vollständigen metrischen Raum Y. Dann läßt sich f fortsetzen zu einer stetigen Abbildung $g:B \to Y$ auf einer G_δ - Menge B.

Beweis: Setze $B = \{x \in \bar{A} \mid$ für alle n ex. Umgebung $U \ni x$ mit

$$d(f[U \cap A]) \leq (n+1)^{-1}\}$$

Für alle $b \in B$ gibt es genau ein $g(b)$ in $\bigcap \{ \overline{f[U \cap A]} \mid U \ni x\}$

Offensichtlich ist $g:B \to Y$ die gesuchte Abbildung.

Defnition Ein metrischer Raum heißt absolut G_δ, wenn jeder zu ihm homöomorphe Unterraum eines metrischen Raumes G_δ in diesem Raum ist.

Satz 4 A sei ein metrischer Raum. Es sind äquivalent:

a) A ist absolut G_δ

b) A ist homöomorph zu einem G_δ-Unterraum eines vollständigen metrischen Raumes.

c) A ist vollständig metrisierbar.

Beweis: a) $\to$ b) : A ist G_δ in der Vervollständigung von A.

b) $\to$ c) : nach Satz 1 Um c) $\to$ a) zu zeigen, können wir A als vollständig annehmen. A sei Unterraum des metrischen Raumes X. Wir müssen zeigen, daß A G_δ in X ist. Nach Lemma 3 gibt es eine G_δ-Menge $A \subset B \subset \bar{A}$ und eine Fortsetzung $G: B \to A$ von id_A. Sei $b \in B$ und (a_i) eine Folge aus A, die gegen b konvergiert. Dann konvergiert $(a_i) = (g(a_i))$ gegen $g(b)$. Also ist $b = g(b) \in A$. $A = B$ ist also G_δ.

Lemma 3 hat eine zweite wichtige Konsequenz:

Satz 5 (Lavrientieff)

X, Y seine vollständig, $f: A \to B$ ein Homöomorphismus zwischen Unterräumen von X und Y. F läßt sich zu einem Homöomorphismus zweier G_δ Unterräume von X und Y fortsetzen.

Beweis: h sei eine Fortsetzung von f^{-1} auf einen G_δ Unterraum C von Y. C ist vollständig metrisierbar, also gibt es eine Fortsetzung $g: D \to E \subset C$ von f auf eine G_δ-Menge $D \subset X$. Wir können annehmen, daß $D \subset \bar{A}$ Sei $d \in D$ Limes der Folge (a_i) aus A. Dann ist $g(d)$ Limes der Folge $(f(a_i))$, und also $hg(d)$ Limes der Folge (a_i). Es folgt $hg = id_D$. g ist also ein Homöomorphismus von D auf $g[D]$. $g[D]$ ist wie D absolut G_δ.

III Polnische Räume

Ein separabler vollständiger metrischer Raum heißt Polnischer Raum. (Eigentlich meinen wir einen separablen, vollständig metrisierbaren topologischen Raum)

Ein Raum ist perfekt, wenn er keine isolierten Punkte hat.

Beispiele

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Der $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie. Der Bai re-Raum $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (mit der Produkttopologie von $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots$). Der Cantorraum $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$ (2 ist der diskrete Raum $\{0,1\}$).

Jedes abzählbare Produkt von polnischen Räumen ist wieder ein polnischer Raum.

Jeder G_δ-Unterraum eines polnischen Raumes ist ein polnischer Raum.

$\mathbb{N}$ und 2 sind nicht perfekt.

$\mathcal{C}$ ist auf natürliche Weise ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{N}$.

$\mathcal{N}$ kann auf die folgende Weise vollständig metrisiert werden:

$d(\alpha, \beta) = (1 + \min\{i \mid \alpha(i) \neq \beta(i)\})^{-1}$.

Für jede endliche Folge $s \in {}^{k}\mathbb{N}$ setzen wir

$Ns = \{\alpha \mid s \subset \alpha \}$.

Die Ns, $s \in {}^{k}\mathbb{N}$ bilden eine Basis von $\mathcal{N}$.

Satz 1 Jeder überabzählbare polnische Raum läßt sich eindeutig in einen abgeschlossenen perfekten Unterraum und einen abzählbaren Unterraum zerlegen.

Beweis: X sei ein polnischer Raum. (Die Vollständigkeit braucht man nurbeim Beweis der Eindeutigkeit)

Existenz: 1. Variante:

Y sei die Menge der Kondensationspunkte von X, das sind alle Elemente, die nur überabzählbare Umgebungen haben. (G_i) sei eine abzählbare Basis von X. Zu jedem $x \notin Y$ gibt es ein abzählbares $G_{i(x)}$, $x \in G_{i(x)}$. $X \setminus Y$ ist die Vereinigung dieser $G_{i(x)}$, ist also abzählbar und offen. Y ist perfekt, weil jedes $y \in Y$ nur überabzählbare Umgebungen U hat, für die also auch $Y \cap U$ überabzählbar ist.

Existenz, 2.Variante (Cantor-Bendixson):

A' bezeichne die Ableitung von A (das ist die Menge der nicht-isolierten Pumkte von A). Wenn A abzählbare Basis hat, ist $A \setminus A'$ abz ählbar. Wir definieren eine transfinite Folge von Teilmengen von X $F_0 = X$, $F_{\alpha+1} = F_\alpha'$, $F_\lambda = \bigcap \{F_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$. Alle F_α sind abgeschlossen. Nach I Lemma 7 gibt es eine abzählbare Ordinahlzahl β mit $F_{\beta+1} = F_\beta$. Setze $Y = F_\beta$.

Die Eindeutigkeit der Zerlegung wird aus dem nächsten Lemma folgen.

Lemma 2 Jeder perfekte polnische Raum enthält einen zu $\mathcal{C}$ homöomorphen Unterraum.

Wir beschreiben zunächst ein allgemeines Verfahren stetige Abbildungen von abgeschlossenen Unterräumen von $\mathcal{C}$ (oder $\mathcal{N}$) in polnische Räume zu gewinnen.

Definition Ein reguläres System ordnet jeder endlichen Folge $s \in {}^{k}2$ (oder $s \in {}^{k}\mathbb{N}$) eine abgeschlossene Teilmenge As des vollständigen Raumes X zu, und erfüllt die folgenden Bedingungen:

i) $s \subset t \Rightarrow As \supset At$

ii) für alle $\alpha \in \mathcal{C}$ (oder $\alpha \in \mathcal{N}$) ist $d(A(\alpha|_i)) \longrightarrow 0$.

Sei (As) ein reguläres System und $F = \{\alpha \mid \forall s \subset \alpha \quad As \neq \emptyset\}$.
F ist abgeschlossen. Für jedes $\alpha \in F$ enthält $\bigcap\{As \mid s \subset \alpha\}$ genau einen Punkt $f(\alpha)$. f ist offenbar eine stetige Abbildung von F nach X.

Umgekehrt läßt sich auf diese Weise jede stetige Abbildung $f: F \to X$ einer abgeschlossenen Menge $F \subset \mathcal{N}$ in einen vollständigen Raum mit einem regulärem System gewinnen. Man setzt einfach $As = \overline{f[Ns \cap F]}$.

Nun zum Beweis von Lemma 2:

Sei X perfekter polnischer Raum. Wir konstruieren eine reguläres System (As), dessen Mengen As nichtleeres Inneres haben sollen. Wir beginnen mit $A\emptyset = X$. Wenn As bereits definiert sind, wählen wir zwei disjunkte Punkte x,y aus dem Inneren von As. Es gibt dann abgeschlossene Mengen $A(s^\frown\langle 0\rangle)$ und $A(s^\frown\langle 1\rangle)$, die in As enthalten sind, x bzw. y als innere Punkte enthalten und kleinere Durchmesser als $(|s|+1)^{-1}$ haben.

Dieses reguläre System definiert eine stetige Abbildung von $\mathcal{C}$ nach X. Weil für unvergleichbare s,t As und At disjunkt sind, ist f injektiv. f ist ein Homöomorphismus von $\mathcal{C}$ auf $f[\mathcal{C}]$, denn $\mathcal{C}$ ist kompakt.

Folgerung

a) Jeder perfekte polnische Raum hat die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$.

b) Jeder Überabzählbare polnische Raum hat die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$.

Beweis: Ein Raum mit abzählbarer Basis hat höchstens die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$, denn jeder Punkt ist durch die Basismengen, in denen er enthalten ist, bestimmt. Weil $\mathcal{C}$ die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ hat, hat jeder perfekte polnische Raum mindestens die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$. Jeder überabzählbare polnische Raum enthält nach Satz 1 (Existenz) einen perfekten polnischen Raum, hat also auch mindestens die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$.
(Für Lemma 2 wurde kein Gebrauch von der Separabilität von X gemacht.)

Beweis von Satz 1 (Eindeutigkeit)

Y_1 und Y_2 seien zwei abgeschlossene perfekte Unterräume von X, $X \setminus Y_i$ abzählbar und $Y_1 \not\subset Y_2$. Dann ist $Y_1 \cap (X \setminus Y_2)$ perfekt, abzählbar und G_δ, also polnischer Raum. Das widerspricht a) der letzten Folgerung.

Definition

Ein Raum heißt 0-dimensional, wenn er eine Basis aus offen-abgeschlossenen Mengen besitzt.

Satz 3

X sei ein metrischer Raum

a) X ist genau dann zu einem abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{N}$ homöomorph, wenn X ein o-dimensionaler polnischer Raum ist.

b) X ist genau dann zu $\mathcal{N}$ isomorph, wenn X o-dimensionaler polnischer Raum ist, und jede offene nichtleere Teilmenge von X Vereinigung von unendlich vielen nichtleeren disjunkten offen-abgeschlossenen Mengen ist.

c) X ist genau dann zu $\mathcal{C}$ homöomorph, wenn X o-dimensional, polnisch, perfekt und kompakt ist.

Beweis:

a) $\mathcal{N}$ ist o-dimensional, denn die $Ns \in {}^k\mathbb{N}$ bilden eine Basis aus offen abgeschlossenen Mengen. Mit $\mathcal{N}$ ist auch jeder Unteraum o-dimensional und jeder G_δ-Unterraum polnisch.
Sei umgekehrt X o-dimensionaler polnischer Raum. Wir konstruieren ein reguläres System (As), $s \in {}^k\mathbb{N}$ von offen-abgeschlossenen Teilmengen von X. Wir setzen $A\emptyset = X$ und wählen -wenn As definiert ist - eine Überdeckung von As mit offenen Mengen B_i, $i \in \mathbb{N}$, die kleineren Durchmesser als $(|s|+1)^{-1}$ haben. Wegen des nächsten Lemmas können wir die B_i als disjunkt, offen und also auch als abgeschlossen wählen. Wir setzen $A(s^\frown\langle i\rangle) = B_i$.
Für jedes k ist $X = \dot{\bigcup}\{As \mid s \in {}^k\mathbb{N}\}$. Die zum System gehörende stetige Abbildung $f : F \to X$ ist also eine Bijektion. f ist offen, weil für jedes s $f[Ns] = As$ offen ist.

Lemma 4 (Reduktion für offene Mengen)
$G^o, G^1, \ldots$ sei eine Folge von offenen Teilmengen des o-dimensionalen Raumes X. Dann gibt es eine Folge von disjunkten offenen Teilmengen $B^j \subset G^j$, deren Vereinigung gleich der Vereinigung der G^j ist.

Beweis: G^j sei Vereinigung der clopen F^j_i. Wir definieren B^j wie im

Beweis von I Lemma 4.

b) Jede offene nichtleere Teilmenge von $\mathcal{N}$ enthält eine Basismenge Ns. Ns ist disjunkte Vereinigung der offen-abgeschlossenen Mengen $N(s^\frown\langle i\rangle)$, $i \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe von Lemma 4 erkennt man nun leicht, daß $\mathcal{N}$ die angegebene Eigenschaft hat.
Wenn X umgekehrt die Bedingung erfüllt, konstruieren wir einen Homöomorphismus wie in a), wählen aber die As nicht leer.

c) We define for clopen subsets B of the compact space X
$d^*(B) = 2^{-i}(j+1)^{-1}j$, where i is the greatest i s.t. $d(B) \le 2^{-i}$ und j is the smallest number s.t. we can write B as the union of clopen $C_1, \ldots C_j$, $d(C_1) \le 2^{-i-1}$. f konstruieren wir aus einem regulären System von nichtleeren offen-abgeschlossenen Mengen As mit $A\emptyset = X$, $As = A(s^\frown\langle o\rangle) \dot{\cup} A(s^\frown\langle 1\rangle)$, $d^*(As) > d^*(A(s^\frown\langle i\rangle))$. Das gibt einen Homöomorphismus von $\mathcal{C}$ nach X.

Folgerung

a) Die Räume $\mathbb{N} \times \mathcal{N}$, $\mathcal{N}^k$, $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ sind homöomorph zu $\mathcal{N}$.
b) Für jede abzählbare Teilmenge A von $\mathcal{N}$ ist $\mathcal{N} \setminus A$ homöomorph zu $\mathcal{N}$.
c) Die Irrationalzahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind homöomorph zu $\mathcal{N}$.

Beweis von c): $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist G_δ in $\mathbb{R}$ und also polnischer Raum. Die Basis von Intervalle $(a,b) \setminus \mathbb{Q}$ mit rationalen a,b sind eine offen-abgeschlossene $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Jedes solche Intervall zerlegt man in unendlich viele nicht leere disjunkte offen abgeschlossene Teilmengen durch

$$(a,b) \setminus \mathbb{Q} = ((a+k^{-1},b) \setminus \mathbb{Q}) \dot{\cup} \dot{\bigcup}\{(a+(n+1)^{-1}, a+n^{-1}) \setminus \mathbb{Q} \mid n \ge k\}$$

für genügend großes k.

Satz 5

Jeder überabzählbare o-dimensionale Raum läßt sich in einen abzählbaren Teilraum und ein homöomorphes Bild von $\mathcal{N}$ zerlegen.

(Teil b) der letzten Folgerung zeigt, daß diese Zerlegung nicht eindeutig ist)

Beweis: Wegen Satz 1 können wir annehmen, das X perfekt ist. Um eine stetige Abbildung f von $\mathcal{N}$ nach X zu erhalten konstruieren wir auf folgende Weise ein reguläres System von nicht leeren offen abgeschlossenen Teilmengen von X: Wir setzen $A\emptyset = X$. Wenn As definiert ist, wählen wir wir ein $x_s \in As$. x_s ist nicht isoliert in As, also gibt es eine Umgebungsbasis $As = U_0 \supsetneqq U_1 \supsetneqq U_2 \ldots$ von x_s aus offen abgeschlossenen Mengen.
Wir können die U_i so wählen, daß $d(U_i \setminus U_{i+1}) \leq (|s| + 1)^{-1}$. Wir setzen
$A(s^\frown\langle i\rangle) = U_i \setminus U_{i+1}$.
f ist auf $\mathcal{N}$ definiert, Weil die As offen sind und
$As = \{x_s\} \cup \dot{\bigcup}\{A(s^\frown\langle i\rangle) \mid i \in \mathbb{N}\}$, ist f ein Homöomorphismus von $\mathcal{N}$ auf
$X \setminus \{x_s \mid s \in {}^{\omega}\mathbb{N}\}$.

Definition

$f: X \to Y$ ist ein $(1,2)$-Homöomorphismus, wenn f bijektiv, stetig und f^{-1} 2-Borelmeßbar ist.

Satz 6

Jeder polnische Raum ist $(1,2)$-homöomorphes Bild eines o- dimensionalen polnischen Raumes.

Beweis:

X sei polnisch. Wir definieren eine stetige Abbildung f eines abgeschlossenen Unterraums von $\mathcal{N}$ auf X durch Angabe eines regulären Systems As, das für alle k $X = \bigcup\{As \mid s \in {}^{k}\mathbb{N}\}$ erfüllt.
Wir setzen $A\emptyset = X$. Für $k \in \mathbb{N}$ seien alle As, $s \in {}^{k}\mathbb{N}$ definiert.

I Lemma 4 liefert uns F_δ - Teilmengen $Bs \subset As$ mit $X = \dot{\bigcup}\{Bs \mid s \in {}^{k}\mathbb{N}\}$.
Wir wählen nun die $A(s^\frown\langle i\rangle)$ so, daß $d(A(s^\frown\langle i\rangle)) \leq (|s| + 1)^{-1}$ und
$Bs = \bigcup\{A(s^\frown\langle i\rangle) \mid i \in \mathbb{N}\}$.
Die durch (As) definierte stetige Abbildung $f: F \to X$ ist injektiv, weil $A(s^\frown\langle i,i'\rangle) \cap A(s^\frown\langle j,j'\rangle) = \emptyset$, wenn $i \neq j$.
f ist surjektiv mit der Umkehrabbildung
$f^{-1}(x) = \bigcup\{s \mid \text{ex. } s' \supsetneqq s \quad x \in As'\}$.
Ebenso sieht man, daß $f[Ns] = \bigcup\{As' \mid s' \supsetneqq s\}$. f^{-1} ist also 2-Borel meßbar.

Satz 7

Jeder perfekte polnische Raum ist $(1,2)$ homöomorphes Bild von $\mathcal{N}$.

Beweis: Wir konstruieren uns eine stetige Abbildung $f: \mathcal{N} \to X$ durch ein reguläres Systen von perfekten Teilmengen von X. Die As sollen darüberhinaus $A(s^\frown\langle o\rangle) \subsetneqq A(s^\frown\langle 1\rangle) \subsetneqq A(s^\frown\langle 2\rangle) \subsetneqq \ldots$ erfüllen.
Wir brauchen dabei

Lemma 8

O sei eine offene Teilmenge $\neq \emptyset$ des perfekten polnischen Raumes Y, $\varepsilon > o$.
Dann gibt es eine Folge von abgeschlossenen perfekten Teilmengen $F_i \subset Y$ mit
$d(F_i) < \varepsilon$, $O = \bigcup\{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $F_i \not\subset \{F_j \mid j < i\}$.

Beweis: O ist ein perfekter polnischer Raum, enthält also nach Lemma 2 $\mathcal{C}$ bis auf Homöomorphie. Wir können annehmen, daß $d(\mathcal{C}) < \varepsilon$.
$\mathcal{C}$ ist Vereinigung der perfekten und abgeschlossenen
$G_i = \{\alpha \in {}^{\mathbb{N}}2 \mid \alpha(o) = \alpha(1) = \alpha(2) = \ldots = \alpha(i) = o \Rightarrow \alpha \text{ schließlich konstant}\}$.
$O \setminus \mathcal{C}$ ist Vereinigung einer Folge $\bar{H}_i$, H_i offen, nicht leer, $d(\bar{H}_i) < \varepsilon$.
Wir wählen die F_i geeignet aus den $G_i, \bar{H}_i$.

Beweis von Satz 7 : Wir setzen $A\emptyset = X$. Wir wenden Lemma 8 auf $X = Y = O$ an, und setzen $A\langle i\rangle = \bigcup\{F_j \mid j \leq i\}$. Wenn $A(s^\frown\langle o\rangle), A(s^\frown\langle 1\rangle), \ldots$ definiert sind, und $n \in \mathbb{N}$, wenden wir Lemma 8 auf $Y = A(s^\frown\langle n\rangle)$,
$O = A(s^\frown\langle n\rangle) \setminus A(s^\frown\langle n-1\rangle)$, $\varepsilon = (|s| + 1)^{-1}$ an und setzen
$A(s^\frown\langle n,i\rangle) = \bigcup\{F_j \mid j \leq i\}$.
Wie im Beweis von Satz 6 haben wir für alle k $X = \bigcup\{As \mid s \in {}^{k}\mathbb{N}\}$

und $A(s \frown \langle i,i' \rangle) \cap A(s^\frown \langle j,j' \rangle) = \emptyset$, $i \neq j$. Daraus folgt, daß f ein $(1,2)$ Homöomorphismus ist.

Folgerung

Zwei polnische Räume gleicher Mächtigkeit sind $(2,2)$-homöomorph.

Beweis: Wenn die polnischen Räume X, Y die gleiche endliche Mächtigkeit haben, sind sie diskret und homöomorph. Wenn X und Y abzählbar unendlich sind, ist jede Bijektion zwischen X und Y 2-Borel meßbar. Seien nun X und Y polnisch und überabzählbar. Nach Satz 1 gibt es abgeschlossene perfekte Teilräume $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ für die $Y \setminus Y_1$ und $X_1 \setminus X_1$ abzählbar sind. X_1 und Y_1 besitzen unendlich abzählbare, abgeschlossene Teilmengen F_1 bzw. F_2 (z.B. Folgen, die gegen einen Punkt konvergieren.) $X_2 = X_1 \setminus F_1$ und $X_2 = Y_1 \setminus F_2$ sind F_σ, G_δ und perfekt. f (g) sei ein $(1,2)$ Homöomorphismus von $\mathcal{N}$ auf X_2 (auf Y_2). Wir wählen eine Bijektion $h: X \to Y$, die auf X_2 mit gf^{-1} übereinstimmt. h und h^{-1} sind 2-Borel meßbar, denn wenn z.B. $G \subset Y$ offen ist, ist $g^{-1}(G \cap Y_2)$ offen in $\mathcal{N}$, $fg^{-1}(G \cap Y_2)$ F_σ in X_2. Für eine F_σ-Menge $A \subset X$ ist also $h^{-1}(G \cap Y_2) = A \cap X_2$. Weil X_2 F_σ ist, ist also auch $h^{-1}(G \cap Y_2)$ F_σ in X. $h^{-1}(G \setminus Y_2)$ ist abzählbar, also ist $h^{-1}(G) = h^{-1}(G \cap Y_2) \cup h^{-1}(G \setminus Y_2)$ F_σ.

Satz 9

Jeder (nichtleere) abgeschlossene Unterraum von $\mathcal{N}$ ist Retrakt von $\mathcal{N}$.

Beweis: Sei Y abgeschlossen in $\mathcal{N}$. Wir setzen

$$As = Ns \cap Y \text{, wenn } Ns \cap Y \neq \emptyset \text{, und}$$
$$= \{a\} \text{ für ein } a \in A(s|_{(|s|-1)}) \text{, sonst.}$$

(As) definiert eine stetige Abildung $f: \mathcal{N} \to Y$ mit $f|_Y = id_Y$.

Folgerung: Jeder polnische Raum ist stetiges Bild von $\mathcal{N}$.

Das läßt sich auch leicht direkt beweisen: Im Beweis von Satz 3 a) verzichtet man einfach auf die Disjunktheit der As. Ebenso zeigt man leicht, daß jeder kompakte polnische Raum stetiges Bild von $\mathcal{C}$ ist.

IV Die Baire-Eigenschaft

Definition (X sei ein metrischer Raum)

$f: X \to \mathbb{R}$ hat die Baire Eigenschaft, wenn für eine Menge A von 1. Kategorie $f|_{X \setminus A}$ stetig ist.

Satz 1 X sei polnischer Raum.

a) Stetige Funktionen $f: X \to \mathbb{R}$ haben die Baire Eigenschaft.

b) Wenn alle f_i die Baire Eigenschaft haben und (f_i) gegen f konvergiert, hat auch f die Baire Eigenschaft.

Beweis: a) ist klar. b): Es gibt Mengen A_i von erster Kategorie, für die $f|_{X \setminus A_i}$ stetig ist. Die Vereinigung der A_i ist wieder von 1-Kategorie. B sei ein F_σ-Menge von 1. Kategorie, die die Vereinigung der A_i enthält. Alle f_i sind auf $X \setminus B$ stetig. $X \setminus B$ ist wieder polnischer Raum. Nach dem Beweis von I Satz 1 (am Ende von I), ist die Menge C der Unstetigkeitsstellen von $f|_{X \setminus B}$ von 1. Kategorie in $X \setminus B$. C ist auch von erster Kategorie in X. $f|_{X \setminus (B \cup C)}$ ist stetig, $B \cup C$ von erster Kategorie.

Wir haben eben verwendet

Lemma Y sei Unterraum von X, A von erster Kategorie in Y, dann ist A von erster Kategorie in X.

Beweis: Wenn $B \subset Y$ nirgends dicht in Y ist, ist B auch nirgends dicht in X.

Definition

Die kleinste Klasse von Funktionen $f: X \to \mathbb{R}$, die alle stetigen Funktionen enthält und mit einer konvergenten Folge von Funktionen auch den Limes enthält, heißt die Klasse der Baire'schen Funktionen von X.

Folgerung Alle Baire'schen Funktionen haben die Baire Eigenschaft.

<u>Definition</u> (X sei ein metrischer Raum)

Eine Teilmenge von von X hat die Baire Eigenschaft, wenn für eine offene Menge $G \subset X$ $(C \triangle G)$ von 1.Kategorie ist.

<u>Bemerkung</u>($(A \triangle B)$ ist die symmetrische Differenz $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$)

Jede Menge C mit der Baire Eigenschaft bestimmt eindeutig eine regulär offene Menge G, für die $(C \triangle G)$ von 1.Kategorie ist(X vollständig).

C hat genau dann die Baire Eigenschaft, wenn für eine Menge A von 1.Kategorie $C \setminus A$ offen in $X \setminus A$ ist.

<u>Beweis</u>: Wenn G' offen und $(C \triangle G')$ von 1.Kategorie, ist $\mathring{\bar{G}}$ regulär offen und $(C \triangle \bar{G})$ von 1. Kategorie. Wenn G_1, G_2 regulär offen und $(C \triangle G_i)$ von 1.Kategorie, ist $(G_1 \triangle G_2)$ von erster Kategorie. Daraus folgt leicht $G_1 = G_2$.

Für den zweiten Teil der Bemerkung betrachte man

$C \cap (X \setminus A) = G \cap (X \setminus A) \iff (C \triangle G) \subset A$.

<u>Satz 2</u>

a) Offene Mengen und Mengen der 1.Kategorie haben die Baire Eigenschaft.

b) Wenn alle C_i die Baire Eigenschaft haben, hat auch $\bigcup\{C_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Baire Eigenschaft.

c) Wenn C die Baire Eigenschaft hat, hat auch $X \setminus C$ die Baire Eigenschaft.

<u>Beweis</u>: a) ist klar. b): Sei $(C_i \triangle G_i)$ von erster Kategorie für offene G_i. Dann ist $\bigcup\{G_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ offen und
$(\bigcup\{C_i \mid i \in \mathbb{N}\} \triangle \bigcup\{G_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \subset \bigcup\{(C_i \triangle G_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ von 1.Kategorie.
c) Wenn $(C \triangle G)$ von erster Kategorie, G offen, ist $(X \setminus C, X \setminus \bar{G})$ enthalten in $(C \triangle G) \cup (\bar{G} \setminus G)$, also von erster Kategorie.

<u>Bemerkung</u> Offen bar ist die Klasse der Mengen mit Baire Eigenschaft die kleinste Klasse, die Satz 2 erfüllt.

<u>Definition</u> (X metrischer Raum)

$\underline{B}(X)$ - die Klasse der Borelmengen - ist die kleinste Klasse von Teilmengen von X, die alle offenen Mengen enthält und unter Komplementbildung und abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist.

<u>Folgerung</u> Alle Borelmengen haben die Baire Eigenschaft.
(Wir werden später sehen, daß die Umkehrung nicht gilt)

<u>Satz 3</u>

Es gibt eine Menge von reellen Zahlen, die nicht die Baire Eigenschaft hat.

<u>Beweis</u>: Es gibt eine Menge $C \subset \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}\{C + q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ (dazu braucht man das Auswahlaxiom). Wenn C die Baire Eigenschaft hat, gibt es eine offene Menge, für die $(C \triangle G)$ von erster Kategorie ist. Für jedes $q \neq 0$ ist $(G+q) \cap G$ von erster Kategorie, also ist $G \cap (G+q)$ leer. Das geht nur, wenn G leer ist. C muß also selbst von erster Kategorie sein. $\mathbb{R}$ wäre also Vereinigung der Mengen von 1.Kategorie $C+q$, $q \in \mathbb{Q}$. C hat nicht die Baire Eigenschaft.

Man kann mit ähnlichen Beweisen zeigen, daß $\mathcal{N}$ und $\mathcal{C}$ Teilmengen ohne die Baire Eigenschaft haben.

<u>Satz 4</u>

a) $f: X \to \mathbb{R}$ hat genau dann die Baire Eigenschaft, wenn für jede offene Menge $G \subset \mathbb{R}$ $f^{-1}(G)$ die Baire Eigenschaft hat.

b) $A \subset X$ hat die Baire Eigenschaft gdw. χ_A die Baire Eigenschaft hat.

<u>Beweis</u>: a) f habe die Baire Eigenschaft, $G \subset \mathbb{R}$ sei offen. $f|_{X \setminus A}$ sei stetig für ein A von erster Kategorie. Dann ist $f^{-1}(G) \setminus A$ offen in $X \setminus A$. $f^{-1}(G)$ hat also die Baire Eigenschaft.
Umgekehrt habe nun $f^{-1}(G)$ die Baire Eigenschaft für jedes offene G.
Wir wählen eine Basis G_i, $i \in \mathbb{N}$, von R und Mengen A_i von erster Kategorie, für die $f^{-}(G_i) \setminus A_i$ offen in $X \setminus A_i$ ist. $A = \bigcup\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist von erster Kategorie und $f|_{X \setminus A}$ stetig.
b): Wenn A die Baire Eigenschaft hat, ist die Bedingung von a) erfüllt.

Denn $\chi_A^{-1}(G)$ ist eine Mengen $\emptyset, A, X \setminus A$, X. Wenn umgekehrt χ_A die Eigenschaft von Baire hat, hat $A = \chi_A^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$ die Eigenschaft von Baire.

Folgerung: Es gibt eine Funktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht die Eigenschaft von Baire hat.

V Die Borel Hierarchie

X sei metrischer Raum. Wir defininieren

$\Sigma_1(X)$ = Menge der offenen Mengen von X

$\Pi_1(X)$ = Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X,

und durch Rekursion für alle abzählbaren Ordinalzahlen $\eta > 1$

$\Sigma_\eta(X) = \{ \bigcup\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\} \mid P_i \in \bigcup\{\Pi_\xi(X) \mid \xi < \eta\} \}$ und

$\Pi_\eta(X) = \{ \bigcap\{S_i \mid i \in \mathbb{N}\} \mid S_i \in \bigcup\{\Sigma_\xi(X) \mid \xi < \eta\} \}$.

Schließlich setzen wir $\Delta_\eta = \Pi_\eta \cap \Sigma_\eta$.

$\Delta_1(X)$ ist die Menge der offen-abgeschlossenen Mengen von X. $\Sigma_2(X)$ sind die F_σ-Mengen, $\Pi_2(X)$ die G_δ-Mengen.

Schreibweisen:

$\Sigma_{<\eta}$ für $\bigcup\{\Sigma_\xi \mid \xi < \eta\}$, $\Pi_{<\eta}$ für $\bigcup\{\Pi_\xi \mid \xi < \eta\}$.

Wir werden später Σ^0_η statt Σ_η schreiben.

Wir fassen den Funktor Σ_η auch (etwas undeutlich) als Klasse aller Σ_η-Teilräume metrischer Räume auf.

In der Literatur finden sich für Σ_η noch die folgenden Bezeichnungen: "additiv der Klasse α", Σ^0_η, $\boldsymbol{\Sigma}^0_\eta$.

Lemma 1

a) $\xi < \eta \Rightarrow \Sigma_\xi(X) \cup \Pi_\xi(X) \subset \Delta_\xi(X)$

b) $S \in \Sigma_\eta(X) \iff X \setminus S \in \Pi_\eta(X)$

c) $\Sigma_{<\omega_1}(X) = \Pi_{<\omega_1}(X) = \Delta_{<\omega_1}(X) = \underset{\sim}{B}(X)$ (= die Borel mengen)

Beweis: Sei

a) Sei $\xi < \eta$.

Wenn $P \in \Pi_\xi$, ist $P = \bigcup\{P \mid i \in \mathbb{N}\} \in \Sigma_\eta$. Daraus folgt $\Pi_\xi \subset \Sigma_\eta$ und $\Sigma_\xi \subset \Pi_\eta$.

Für $\xi > 1$ folgt $\Sigma_\xi \subset \Sigma_\eta$, $\Pi_\xi \subset \Pi_\eta$ sofort aus der Definition.

Jeder offene Menge ist F_δ, also ist $\Sigma_1(X) \subset \Sigma_2(X) \subset \Sigma_\eta(X)$.

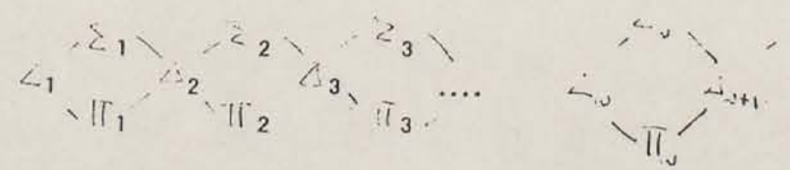
Ebenso ist $\Pi_1(X) \subset \Pi_\eta(X)$.

b) Durch Induktion nach η. Der Fall $\eta = 1$ ist klar. Sei $\eta > 1$ und $S = \bigcup\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $P_i \in \Pi_{<\eta}(X)$. Dann ist $X \setminus P_i \in \Sigma_{<\eta}(X)$ und $X \setminus S = \bigcap\{X \setminus P_i \mid i \in \mathbb{N}\} \in \Pi_\eta(X)$. Ebenso zeigt man, daß $X \setminus S \in \Pi_\eta(X) \Rightarrow S \in \Sigma_\eta(X)$.

c) Die Gleichheit der ersten drei Mengen folgt aus a).

Durch Induktion nach η zeigt man, daß $\Sigma_\eta(X) \subset B(X)$: Der Fall $\eta = 1$ ist klar. Sei $\eta > 1$ und $S \in \Sigma_\eta(X)$. S ist von der Form $\bigcup\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $P_i \in \Pi_{<\eta}(X)$. Die $X \setminus P_i$ sind in $\Sigma_{<\eta}(X)$ und also Borel, damit sind auch die P_i Borel. Also auch S.

Umgekehrt haben wir zu zeigen, daß jede Borelmenge in $\bigcup\{\Sigma_\eta(X) \mid \eta < \omega_1\}$ vorkommt, dazu genügt es zu wissen, daß $\bigcup\{\Sigma_\eta(X) \mid \eta < \omega_1\}$ alle offenen Mengen enthält und unter Komplementbildung und abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Komplement : $S \in \Sigma_\eta(X) \Rightarrow X \setminus S \in \Pi_\eta(X) \subset \Sigma_{\eta+1}(X)$. Abzählbare Vereinigung: Sei $S_i \in \Sigma_{\alpha_i}(X) \subset \Pi_{\alpha_i+1}(X)$. Es gibt eine abzählbare Ordinalzahl ξ, die größer als alle $\eta_i + 1$ ist, P ist nun Element von $\Sigma_\xi(X)$.



<u>Lemma 2</u>

a) Σ_η ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und abzählbaren Vereinigungen. Π_η ist abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen und abzählbaren Durchschnitten.

b) $f: X \to Y$ sei stetig . Wenn $S \in \Sigma_\eta(Y)$, ist $f^{-1}(S) \in \Sigma_\eta(X)$. Wenn $P \in \Pi_\eta(Y)$, ist $f^{-1}(P) \in \Pi_\eta$

c) $S \in \Sigma_\eta(X) \Leftrightarrow S \times Y \in \Sigma_\eta(X \times Y)$. $P \in \Pi_\eta(X) \Leftrightarrow P \times Y \in \Pi_\eta(X \times Y)$

d) $S \in \Sigma_\eta(X \times \mathbb{N}) \leftrightarrow \forall i\, S^{(i)} \in \Sigma_\eta(X)$, $P \in \Pi_\eta(X \times \mathbb{N}) \Leftrightarrow \forall i\, P^{(i)} \in \Pi_\eta(X)$.
Dabei ist $S^{(i)} = \{ x \mid (x,i) \in S \}$.

Beweis: a) Daß Σ_η unter abzählbaren Vereinigungen und Π_η unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen ~~it~~, ist trivial (für $\eta = 1$ und $\eta > 1$ aus verschiedenen Gründen). Sei S^0, S^1 aus Σ_η , und $S^j = \bigcup\{P_i^j \mid i \in \mathbb{N}\}$, $P_i^j \in \Pi_{<\eta}$. Weil $P_i^0 \cap P_k^1 \in \Pi_{<\eta}$, , ist $S^0 \cap S^1 = \bigcup\{P_i^0 \cap P_k^1 \mid i,k \in \mathbb{N}\} \in \Sigma_\eta$. Man zeigt , daß Π_η unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist, ebenso.

b) Beweis durch Induktion nach η . Der Fall $\eta = 1$ ist trivial. Wenn $S \in \Sigma_\eta(Y)$, ist $S = \bigcup\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $P_i \in \Pi_{<\eta}$. Es folgt $f^{-1}(S) = \bigcup\{f^{-1}(P_i) \mid i \in \mathbb{N}\} \in \Sigma_\eta(X)$, weil $f^{-1}(P_i) \in \Pi_{<\eta}$ (Y). Ebenso zeigt man $f^{-1}(P) \in \Pi_\eta(X)$.

c) Das folgt aus b) . Denn es ist $S \times Y = f^{-1}(S)$, $S = g_y^{-1}(S \times Y)$ für die stetigen Abbildungen $f(x,y) = x$ und $g_y(x) = (x,y)$.

d) Wenn $S \in \Sigma_\eta(X \times \mathbb{N})$, ist $S^{(i)} = g_i^{-1}(S) \in \Sigma_\eta(X)$ (g_i wie in c).)
Die Umkehrung zeigt man leicht durch Induktion nach η .

c) und d) erleichtern die Verwendung der <u>logischen Notation</u>. Wir fassen Teilmengen R von $X \times Y \times \mathcal{N}$ als dreistellige Relationen auf , und schreiben $R(x,y,\alpha)$ statt $(x,y,\alpha) \in R$. c) gibt zum Beispiel: Wenn $S(x,y)$ eine Σ_η-Relation und $T(y,\alpha)$ eine Σ_η-Relation, ist $S(x,y) \wedge T(y,\alpha)$ eine Σ_η-Relation.Wegen d) können wir eine Folge G_i offener Mengen als eine offene Relation $G(x,i)$ auffassen. a) und b) können wir nun so formulieren :

Σ_η-Relationen sind abgeschlossen unter $\wedge$, $\exists i$ (endlicher Konjunktion und Quantifizierung über natürliche Zahlen). Π_η sind abgeschlossen unter $\vee$, $\forall i$. Wenn $R(y)$ Σ_η-Relation (Π_η- Relation) und $f(x)$ stetig, ist $R(f(x))$ Σ_η-Relation (Π_η-Relation).
Beispiel: Jede Π_4-Relation ist von der Form $\forall i \exists j \forall k\, G(i,j,k,x)$, für eine offene Relation G.

Der nächste Satz vergleicht Borelmengen in verschiedenen Räumen.

<u>Satz 3</u>

a) ($\Gamma = \Sigma_\eta$, Π_η , $\mathcal{B}$) . Y sei Unterraum von X . Dann ist $\Gamma(Y) = \{ A \cap Y \mid A \in \Gamma(X)\}$.

b) ($\Gamma = \Sigma_\eta$, Π_ξ , Δ_ξ , $\xi \geq 2$, $\mathcal{B}$) . X sei separabel. $A \subset X$ ist genau dann in $\Gamma(X)$,wenn A lokal Γ ist, d.h. wenn jeder Punkt von A eine offene Umgebung G mit $A \cap G \in \Gamma(G)$ hat.

c) ($\Gamma = \Sigma_\eta$, $\eta \geq 2$, Π_ξ , Δ_ξ , $\xi \geq 3$, $\mathcal{B}$) . Sei X vollständig. A sei Unterraum von X und B einezu A homöomorpher Unterraum von Y. Dann ist $A \in \Gamma(X) \Rightarrow B \in \Gamma(Y)$.

c) zeigt, daß "Borel" innere Eigenschaft von Unterräumen ist. Ein metrischer Raum Y ist genau dann "absolut Borel", -d.h. homöomorph zu einem Borel-Unterraum eines vollständigen metrischen Raumes - , wenn für eine (oder jede) Basis (G_i) von Y $\{\{i \mid x \in G_i\} \mid x \in Y\}$ Borel in $2^{\mathbb{N}}$ ist (Übung).

<u>Beweis:</u>

a) Die Inklusionsabbildung $i: Y \to X$ ist stetig, also ist $A \cap Y = i^{-1}(A) \in \Gamma(Y)$, wenn $A \in \Gamma(X)$. Wir zeigen durch Induktion nach η , daß jede Menge aus $\Sigma_\eta(Y)$ ($\Pi_\eta(Y)$) von der Form $A \cap Y$, $A \in \Sigma_\eta(X)$ ($\in \Pi_\eta(X)$) ist. Der Fall $\eta = 1$ ist klar. $B \in \Sigma_\eta(Y)$ ist $\bigcup\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B_i \in \Pi_{<\eta}(Y)$ ($\bigcap\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B_i \in \Sigma_{<\eta}(Y)$) . Nach Induktionsvoraussetzung ist $B_i = A_i \cap Y$, $A_i \in \Pi_{<\eta}(X)$ ($\in \Sigma_{<\eta}(X)$). Dann ist $A = \bigcup\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ aus $\Sigma_\eta(X)$ ($A = \bigcap\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ aus $\Pi_\eta(X)$) und $B = A \cap Y$.

<u>Folgerung</u> Wenn $Y \in \Gamma(X)$, ist $\Gamma(Y) \subset \Gamma(X)$.

b) Notwendigkeit: setze $G = X$. Sei umgekehrt A lokal Γ , (G_i) eine abzählbare Basis von X. Wegen a) gibt es zu jedem $x \in A$ ein $i(x)$ mit $A \cap G_{i(x)} \in \Gamma(G_{i(x)})$. Weil $G_{i(x)} \in \Gamma(X)$, ist $A \cap G_{i(x)} \in \Gamma(X)$. Aus der Darstellung

$A = \bigcup \{A \cap G_{i(x)} \mid x \in A\} = \bigcap \{(A \cap G_{i(x)}) \cup (X \setminus G_{i(x)}) \mid x \in A\} \cap \bar{A}$

erkennt man, daß $A \in \Gamma(X)$.

c) Sei $f: A \to B$ ein Homöomorphismus und Y^* die Vervollständigung des metrischen Raumes Y. Nach Satz II 5 gibt es eine Fortsetzung $g: A' \to B'$ auf G_δ -Teilmengen von X und Y^* . Weil $A \in \Gamma(A')$, ist $B \in \Gamma(B') \subset \Gamma(Y^*)$. Also ist $B \in \Gamma(Y)$.

Universelle Mengen

Definition Sei

Γ eine "Punktklasse"(z.B. $\Pi_\eta, \Sigma_\eta, \Delta_\eta, \underline{B}$).

$U \subset X \times Y$ heißt Γ-universell , wenn $U \in \Gamma(X \times Y)$ und $\Gamma(X) = \{U^{(y)} \mid y \in Y\}$

Wir erinnern an die Definition $U^{(y)} = \{x \mid (x,y) \in U\}$. Wenn $U \in \Gamma(X \times Y)$, ist immer $U^{(y)} \in \Gamma(X)$.

Bemerkung 1

Es gibt keine universellen $\underline{B}$- oder Δ_η-Mengen in $X \times X$.

Beweis: Wäre z.B. $U \subset X \times X$ $\underline{B}$-universell, wäre die Borelmenge $A = \{x \mid (x,x) \notin U\}$ von der Form $U^{(y)}$. Das ergibt den Widerspruch $y \in A \leftrightarrow (y,y) \notin U \leftrightarrow y \notin U^{(y)} \leftrightarrow y \notin A$.

Bemerkung 2

$\{(i,\alpha) \mid \alpha(i) = 1\}$ ist Δ_1-universell in $\mathbb{N} \times \mathcal{C}$.

Satz 4

Für jeden separablen Raum X gibt es eine universelle Σ_η (Π_η) - Menge in $X \times \mathcal{C}$.

Beweis: (Wir identifizieren χ_A mit A). Sei (G_i) eine Basis von X .
$O(x,\alpha) \leftrightarrow \exists i\ (i \in \alpha \wedge x \in G_i)$ definiert offenbar eine Σ_1-universelle Teilmenge von $X \times \mathcal{C}$. $\neg O$ ist dann Σ_1-universell. Wir beweisen den Satz durch Induktion.
Sei für alle $\xi < \eta$ $P_\xi \subset X \times \mathcal{C}$ Π_ξ-universell .
Wenn η Limeszahl, sei (ξ_i) eine Aufzählung von $\{\xi \mid \xi < \eta\}$. Wenn $\eta = \xi + 1$, sei $\xi_i = \xi$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Nach III Satz 3 c) sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ homöomorph. Wir wählen einen Homöomorphismus $\alpha \to (\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots)$. (Ein solcher Homöomorphismus ist z.B. definiert durch $\alpha^{(j)}(i) = \alpha(\langle i,j \rangle)$; wobei $(j,i) \to \langle i,j \rangle$ eine Bijektion von $\mathbb{N}^2$ mit $\mathbb{N}$.)
Man sieht nun leicht, daß $S(x,\alpha) \leftrightarrow \exists i\ P_{\xi_i}(x, \alpha^{(i)})$ Σ_η-universell ist.
$\neg S(x,\alpha)$ ist dann Π_η-universell.

Folgerung

X sei separabel, überabzählbar und vollständig. Dann gibt es eine Σ_η- $(\Pi_\eta$-$)$ universelle Teilmenge von $X \times Y$.

Beweis:

Wir können annehmen, daß $\mathcal{C}$ Unterraum von Y ist, (III 1,2). Sei $U \subset X \times \mathcal{C}$ Σ_η- $(\Pi_\eta$-$)$ universell. Nach 3 a) gibt es eine Σ_η- $(\Pi_\eta$-$)$ Mengen $V \subset X \times Y$ mit $V \cap (X \times \mathcal{C}) = U$. Dann ist V Σ_η- $(\Pi_\eta$-$)$ universell.

Wichtigste Konsequenz von 4 ist

Satz 5 (Hierarchiesatz)

X sei ein überabzählbarer polnischer Raum , $\eta < \omega_1$. Dann ist $\Sigma_\eta(X) \setminus \Pi_\eta(X) \neq \emptyset$.
(Es folgt sofort, daß auch $\Pi_\eta(X) \setminus \Sigma_\eta(X) \neq \emptyset$.)

Beweis: $U \subset X \times X$ sei Σ_η-universell. Die Relation $U(x,x)$ ist in $\Sigma_\eta(X)$. Wäre

$U(x,x)$ in $\Pi_\eta(X)$, also $\neg U(x,x)$ in $\Sigma_\eta(X)$, wäre $\neg U(x,x) \leftrightarrow U(x,y)$ für ein $y \in Y$. Für $x = y$ ergibt sich ein Widerspruch.

Folgerung 1

X sei perfekt und vollständig. Dann ist für alle $\eta < \omega_1$ $\Pi_\eta(X) \setminus \Sigma_\eta(X) \neq \emptyset$.

Beweis:

Nach III 2 ist (bis auf Homöomorphie) $\mathcal{C}$ ein Unterraum von X . Wenn $P \in \Pi_\eta(\mathcal{C}) \setminus \Sigma_\eta(\mathcal{C})$, ist $P \in \Pi_\eta(X) \setminus \Sigma_\eta(X)$.

Folgerung 2

X sei überabzählbarer polnischer Raum , $\eta > 1$. Dann ist

$\Sigma_{<\eta}(X) \cup \Pi_{<\eta}(X) \neq \Delta_\eta(X)$.

Beweis:

1. $\eta = \xi + 1$. Wähle zwei disjunkte nichtleere Teilmengen $O_1, O_2 \subset X$ und $P \in \Pi_\xi(O_1) \setminus \Sigma_\xi(O_1)$, $S \in \Sigma_\xi(O_2) \setminus \Pi_\xi(O_2)$. Dann ist $S \cup P \in \Delta_\eta(X) \setminus (\Sigma_{<\eta}(X) \cup \Pi_{<\eta}(X))$.
2. η ist Limeszahl . Wir wählen eine Familie O_ξ, $\xi < \eta$, von nicht leeren , paarweise disjunkten, offenen Teilmengen von X und $P_\xi \in \Pi_\xi(O_\xi) \setminus \Sigma_\xi(O_\xi)$ für jedes $\xi < \eta$. Dann ist $\bigcup\{O_\xi \mid \xi < \eta\} \in \Delta_\eta(X) \setminus (\Sigma_{<\eta}(X) \cup \Pi_{<\eta}(X))$.

VI Reduktion, Separation, der Satz von Lebesgue

Definition

(Γ sei eine Punktklasse)

Γ hat die Reduktionseigenschaft (RE), wenn es zu jeder Folge (A^j) von Γ-Mengen eine Folge (B^j) von disjunkten Γ-Mengen mit $B^j \subset A^j$, $\bigcup\{B^j \mid j \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{A^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ gibt.

Satz 1

Es sei X separabel und nulldimensional oder $\eta > 1$. Dann hat $\Sigma_\eta(X)$ die Reduktionseigenschaft.

Beweis:

(S^j) sei eine Folge von Σ_η-Mengen. Wir können S^j schreiben als Vereinigung von $P_i^j \in \Delta_\eta(X)$, $i \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$T^j(x) \leftrightarrow \exists i\, (P_i^j(x) \wedge \forall k,l\, (\langle k,l\rangle < \langle i,j\rangle \to \neg P_k^l(x)))$.

($(k,l) \to \langle k,l\rangle$ ist unsere Bijektion von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$.)

T^j ist offenbar aus $\Sigma_\eta(X)$ und es ist $T^j \subset S^j$ und $\dot{\bigcup}\{T^j \mid j \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{S^j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Folgerung 1

X sei separabel und nulldimensional oder $\eta > 1$. Dann hat $\Pi_\eta(X)$ die Separationseigenschaft d.h. alle disjunkten $A,B \in \Pi_\eta(X)$ werden durch ein $C \in \Delta_\eta(X)$ "getrennt" , $A \subset C$, $C \cap B = \emptyset$.

Beweis:

$X \setminus A$, $X \setminus B$ sind aus $\Sigma_\eta(X)$. Wir wenden Reduktion an und erhalten disjunkte $D,C \in \Sigma_\eta(X)$ mit $D \subset X \setminus A$, $C \subset X \setminus B$ und $D \cup C = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X$. Dann ist $C = X \setminus D$ aus $\Delta_\eta(X)$ und trennt A,B.

Bemerkung

Wenn $\Pi_1(X)$ die Separationseigenschaft , oder wenn $\Sigma_1(X)$ die Reduktionseigenschaft hat, ist X nulldimensional.

Beweis:

Aus der Reduktionseigenschaft von $\Sigma_1(X)$ folgt (wie im Beweis der Folgerung 1) die Separationseigenschaft von $\Pi_1(X)$. Sei G eine offenen Umgebung von x. Wir separieren $\{x\}$ und $X \setminus G$ durch eine Π_1-Menge C . C ist eine offen-abgeschlossene Teilmenge von G ,die x enthält. Wir haben gezeigt, daß X eine Basis aus offen abgeschlossenen Mengen hat.

Übung

Wir werden sehen, daß Π_η i.A. nicht die Reduktionseigenschaft hat. Trotzdem gilt: Jede Σ_η-Menge, $\eta \geq 2$, ist disjunkte Vereinigung von abzählbare $\Pi_{<\eta}$-Mengen.

Folgerung 2

X sei separabel und nulldimensional oder $\eta > 1$, $Y \in \Pi_\eta(X)$. Dann ist

$\Delta_\eta(Y) = \{A \cap Y \mid A \in \Delta_\eta(X)\}$.

Beweis:
$A \in \Delta_\eta(Y) \Rightarrow A, Y \setminus A \in \Pi_\eta(Y) \subset \Pi_\eta(X)$. Wenn $C \in \Delta_\eta(X)$ A und $Y \setminus A$ trennt, ist $A = C \cap Y$.

Der nächste Satz ist eine Verschärfung von V 5, denn wenn $A, B \in \Sigma_\eta(X)$ nicht durch eine $\Delta_\eta(X)$-Menge trennbar sind, können A und B nicht zu $\Pi_\eta(X)$ gehören.

Satz 2

X sei perfekt und vollständig. Wenn $\eta = 1$, sei X separabel.

Dann hat $\Sigma_\eta(X)$ nicht die Separationseigenschaft. ($\Pi_\eta(X)$ hat also nicht die Reduktionseigenschaft.)

Beweis:
1. $X = \mathcal{C}$. $S(\beta, \alpha)$ sei Σ_η-universell. Wir wenden Σ_η-Reduktion auf $S(\beta, \beta^{(o)})$ und $S(\beta, \beta^{(1)})$ an und erhalten disjunkte Σ_η-Relationen $T^o(\beta)$, $T^1(\beta)$ mit $\neg T^1(\beta) \wedge S(\beta, \beta^{(1)}) \longrightarrow S(\beta, \beta^{(o)})$ und $\neg T^o(\beta) \wedge S(\beta, \beta^{(o)}) \longrightarrow S(\beta, \beta^{(1)})$.
T^1 und T^o lassen sich nicht durch eine Δ_η-Menge trennen.
Denn, wenn $C \in \Delta_\eta(X)$ T^o und T^1 trennt, gibt es ein $\alpha \in \mathcal{C}$ mit $C(\beta) \leftrightarrow S(\beta, \alpha^{(1)})$, $\neg C(\beta) \leftrightarrow S(\beta, \alpha^{(o)})$ für alle β.
Wenn $C(\alpha)$, folgt $\neg T^1(\alpha)$ und $S(\alpha, \alpha^{(1)})$, also $\neg C(\alpha)$. Ebenso führt man $\neg C(\alpha)$ zum Widerspruch.
2. Sei X nun beliebig, wir können annehmen, daß $\mathcal{C}$ Unterraum von X ist. T^1 und T^o seien wie in 1: aus $\Sigma_\eta(\mathcal{C})$ und nicht trennbar.
2.1. $\eta > 1$. Dann sind T^o, T^1 aus $\Sigma_\eta(X)$ und nicht durch ein $C \in \Delta_\eta(X)$ trennbar.
2.2. $\eta = 1$. Wenn $\Sigma_1(X)$ die Separationseigenschaft hat, ist X nulldimensional. $\Sigma_1(X)$ hat also die Reduktionseigenschaft. Es gibt $A^i \in \Sigma_1(X)$ mit $T^i = A^i \cap \mathcal{C}$. Wir separieren A^o, A^1 und erhalten disjunkte $B^i \in \Sigma_1(X)$ mit $T^i = B^i \cap \mathcal{C}$. B^1 und B^o sind nicht durch eine Δ_1-Menge trennbar.

Definition
1 $f: X \to \mathbb{R}$ ist von Baire Klasse o, wenn f stetig ist.

f hat die Baire Klasse η, wenn f Limes einer Folge von Funktionen der Baire Klasse $< \eta$ ist.

2 $f: X \to \mathbb{R}$ ist η-Borel meßbar, wenn $f^{-1}(G) \in \Sigma_\eta(X)$ für jedes offene $G \subset \mathbb{R}$.

f ist Borel meßbar, wenn f η-Borel meßbar für ein $\eta < \omega_1$ ist.

Einige leicht zu beweisende Eigenschaften:
1 Wenn f die Baire Klasse η hat, und $\eta < \xi$, hat f die Baire Klasse ξ.
2 f ist genau dann Bairesch, wenn f eine Baire Klasse $\eta < \omega_1$ hat.
3 χ_A ist genau dann η-Borel meßbar, wenn $A \in \Delta_\eta(X)$.
4 f stetig genau dann, wenn f 1-Borel meßbar ist.
5 (G_i) sei eine Basis von X. F ist genau dann η-Borel meßbar, wenn $f^{-1}(G_i) \in \Sigma_\eta(X)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
6 Borel meßbare Funktionen haben die Baire Eigenschaft. (IV 2,4)

Satz 3 (Lebesgue)

$f: X \to \mathbb{R}$ hat genau dann die Baire Klasse η, wenn f $\eta + 1$-Borel meßbar ist ($\eta < \omega_1$).

Beweis: (Der Satz ist trivial für $\eta = o$ und I 3 für $\eta = 1$. Wir können $\eta > 1$ annehmen.)
"$\Rightarrow$" (Induktion nach η, siehe Beweis von I 3'). Sei f von Baire Klasse η und $G \subset \mathbb{R}$ offen. f ist Limes einer Folge (f_i) von Funktionen der Klasse $< \eta$ und G Vereinigung einer Folge von offenen G_i mit $\bar{G}_i \subset G$. Es ist dann

$$x \in f^{-1}(G) \Longleftrightarrow \underbrace{\exists i, n \; \underbrace{\forall k \geq n \; \underbrace{f_k(x) \in \bar{G}_i}_{\bigcup\{\Pi_{\xi+1} \mid \xi < \eta\} \subset \Pi_\eta \quad \text{(Induktion)}}}_{\Pi_\eta}}_{\Sigma_{\eta+1}}$$

Für die andere Richtung brauchen wir ein Lemma

Lemma
Wenn f, g die Baire Klasse η haben, $r \in \mathbb{R}$, haben $f + g$, rf und $\max(f,g)$ die Baire Klasse η.

Beweis: Das Lemma ist bekanntlich richtig für $\eta = 0$. Daraus folgt die Behauptung leicht durch Induktion, denn $+, \cdot, \max$ vertauschen mit lim.

<u>Lemma</u> Jede $\eta+1$ - meßbare Treppenfunktion ist von Baireklasse η.

Beweis:

durch Induktion nach η. Wir können (wegen I) $\eta > 1$ annehmen.

Sei h $\eta+1$ - Borelmeßbare Treppenfunktion. Weil man h in der Form

$y_0\chi_{A_0} + y_1\chi_{A_1} + \dots + y_n\chi_{A_n}$, $A_i \in \Delta_{\eta+1}$, schreiben kann, können wir

$h = \chi_A$, $A \in \Delta_{\eta+1}$ annehmen (wegen unseres ersten Lemmas).

Sei $A = \bigcup\{S^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ und $X \setminus A = \bigcup\{T^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ für $S^j, T^j \in \Pi_\eta$.

Wir wählen die S^j und T^j so, daß $T^0 \subset T^1 \subset T^2 \subset \dots$ und $S^0 \supset S^1 \supset S^2 \supset \dots$.

<u>1.Fall</u> $\eta = \xi + 1$

Nach Satz 1,Folgerung 1 hat $\Pi_\eta(X)$ die Separationseigenschaft. Es gibt also $C^j \in \Delta_\eta$, $S^j \subset C^j$, $C^j \cap T^j = \emptyset$. Die χ_{C^j} sind η-meßbar, also von Baire Klasse ξ, und konvergieren gegen h.

<u>2.Fall</u> : η ist Limeszahl.

Wir schreiben S^j in der Form $\bigcap\{A_i^j \mid i \in \mathbb{N}\}$, $A_i^j \in \Delta_{<\eta}$, $A_0^j \supset A_1^j \supset \dots$ und T^j in der Form $\bigcap\{B_i^j \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B_i^j \in \Delta_{<\eta}$, $B_0^j \supset B_1^j \supset \dots$. Die Funktion

$$g_i^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A_i^j \\ 0, & \text{wenn } x \in B_i^j \setminus A_i^j \\ 2, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist } <\eta\text{-Borel meßbar.}$$

Es ist $$\lim_i g_i^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in S^j \\ 0, & \text{wenn } x \in T^j \\ 2, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Seien $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wählen $j_{x,n}$ und $i_{x,n} \in \mathbb{N}$ so, daß $j_{x,n} \leq n$, $i_{x,n} \leq n$, $g_{i_{x,n}}^{j_{x,n}}(x) = g_{i_{x,n}+1}^{j_{x,n}}(x) = \dots = g_n^{j_{x,n}}(x) \in \{0,1\}$ und $\langle i_{x,n}, j_{x,n}\rangle$ minimal mit dieser Eigenschaft ist, ($i_{x,n}, j_{x,n}$ existieren nicht immer.)

Wir setzen $f_n(x) = g_{i_{x,n}}^{j_{x,n}}(x)$, wenn $i_{x,n}, j_{x,n}$ existieren, sonst $f_n(x) = 2$.

Für $r = 0,1,2$ ist die Aussage $f_n(x) = r$ zu einer Boolschen Kombination der Aussagen $g_i^j(x) = t$; $t = 0,1,2$, $i \leq n$, $j \leq n$; äquivalent, also wieder aus $\Delta_{<\eta}$. Die Funktionen f_n sind also $<\eta$-Borelmeßbar und somit (Induktion) von Baire Klasse $<\eta$.

Behauptung: $\lim f_n = h$

Beweis: Sei $x \in X$ und z.B. $x \in X \setminus A$.

Es gibt $i,j \in \mathbb{N}$ mit $x \in T^j$ und $g_k^j(x) = 0$ für alle $k \geq i$. Wir wählen $\langle i,j\rangle$ minimal mit dieser Eigenschaft. Sei nun n so groß, daß für alle $\langle i',j'\rangle < \langle i,j\rangle$ ein $i' \leq m \leq n$ mit $g_m^{j'}(x) \notin \{0,1\}$ existiert. Es ist dann $i_{x,n} = i$, $j_{x,n} = j$ und $f_n(x) = 0$.

<u>Lemma</u> f sei gleichmäßiger Limes der Funktionen f^j. Wenn die f^j die Baire Klasse η haben, hat auch f die Baire Klasse η.

Beweis:

Schreibweise: $h\Big|_g^f$ ist die Funktion $\max(\min(h(x),f(x)),g(x))$.

Wir beweisen das Lemma durch Induktion über η. Für $\eta = 0$ kennt man die Behauptung: ein gleichmäßiger Limes von stetigen Funktionen ist stetig.

f^j sei eine Folge von Funktionen der Baire Klasse η und f gleichmäßiger Limes der f^j. Wir können annehmen, daß $|f^j - f| \leq 2^{-j-3}$. Wir stellen f^j als Limes der Folge $h_0^j, h_1^j, \dots$ von Funktionen der Baire Klasse $<\eta$ dar. Setze

$$g_k = h_k^k\Big|_{h_k^{k-1}-2^{-(k-1)}}^{h_k^{k-1}+2^{-(k-1)}}\Big|_{h_k^{k-2}-2^{-(k-2)}}^{h_k^{k-2}+2^{-(k-2)}} \dots \Big|_{h_k^0-1}^{h_k^0+1}.$$

Die g_k haben wieder die Baire Klasse $<\eta$. Wir zeigen, daß $g_k \to f$.

Sei dazu $x \in X$ und $l \in \mathbb{N}$. Wir wählen $l \leq k$ so groß, daß $|f^j - h_k^j| \leq 2^{-l-3}$ für $j = 0,1,..l$. Dann ist (alle Funktionen sind bei x ausgewertet)

$[h_k^{j+1}-2^{-(j+1)}, h_k^{j+1}+2^{-(j+1)}] \subset [h_k^j-2^{-j}, h_k^j+2^{-j}]$.

Also ist $g_k \in [h_k^l-2^{-l}, h_k^l+2^{-l}]$. Daraus folgt $|f - g_k| \leq 2^{-l+1}$.

<u>Lemma</u> ($\xi > 0$)

Jede beschränkte ξ-Borel meßbare Funktion ist gleichmäßiger Limes von ξ-Borel meßbaren Treppenfunktionen.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ und $\forall x \, \exists i \; |f(x) - y_i| < \varepsilon$ für $y_0, \dots y_n \in \mathbb{R}$.

Wir reduzieren die Σ_ξ- Mengen $S_j = \{x \mid |f(x)-y_j| < \varepsilon\}$ und erhalten $T_j \subset S_j$, $T_j \in \Sigma_\xi$, $\dot\bigcup\{T_j \mid j \in \mathbb{N}\} = X$. Die Treppenfunktion $h(x) = y_j$, $x \in T_j$, ist ξ-meßbar und $|f - h| < \varepsilon$.

Aus unseren Lemmas folgt : Jede beschränkte $\eta+1$-meßbare Funktion ist von Baire Klasse η . Wir deuten nur an, wie man man Satz 3 für unbeschränkte Funktionen beweisen kann:

Die Folge (f_i) konvergiert <u>*-gleichmäßig</u> gegen f , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ n \in \mathbb{N}\ \exists k\ \forall i \geq k\ (\forall x \in f^{-1}([-n,n])\quad |f(x) - f_i(x)| < \varepsilon\ ) .$$

Eine leichte Modifikation der Beweise der beiden letzten Lemmas ergibt:

Ein *-gleichmäßiger Limes von Funktionen der Baire-Klasse η hat die Baire-Klasse η.
Jede ξ-Borel meßbare Funktion ist *-gleichmäßiger Limes von ξ-Borel meßbaren Treppenfunktionen.

Daraus folgt unser Satz.

<u>Übung</u> (χ_A ist die charakteristische Funktion von A)

χ_A habe die Baire-Klasse $\eta > 1$. Dann ist χ_A Limes einer Folge von charakteristischen Funktionen kleinerer Baire-Klasse.

VII Parametrisierung von Borelmengen

<u>Definition</u>

Eine Funktion $f:X \to Y$ heißt
η-Borel meßbar , wenn $f^{-1}(G) \in \Sigma_\eta(X)$ für alle offenen $G \subset Y$;
Borel meßbar, wenn f für ein $\eta < \omega_1$ η-Borel meßbar ist;
(η, ξ)-Homöomorphismus , wenn f η-Borelmeßbar und f^{-1} ξ-Borel meßbar ist.

Diese Definition enthält die Definitionen von S.2,17,19,32 .

<u>Satz 1</u> ($\eta > 0$)

Y sei polnischer Raum. Jedes nichtleere $A \in \Sigma_\eta(Y)$ oder $A \in \Pi_{\eta+1}(Y)$ ist $(1,\eta)$-homöomorphes Bild eines (geeig neten) polnischen Raumes.

<u>Beweis</u>: durch Induktion nach η .

Für $\eta = 1$ folgt der Satz aus II 1 : G_δ-Unterräume polnischer Räume sind polnisch. Sei also $\eta > 1$.
Wenn $A \in \Sigma_\eta(Y)$, gibt es $B_i \in \Pi_{<\eta}(Y)$ mit $A = \bigcup\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. A ist disjunkte Vereinigung der $C_i = B_i \setminus (B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{i-1})$. Weil die C_i zu $\bigcup\{\Delta_{\xi+1}(Y) \mid \xi < \eta\} \subset \bigcup\{\Pi_{\xi+1} \mid \xi < \eta\}$ gehören, gibt es nach Induktionsvoraussetzung polnische Räume X_i und $(1, \xi_i)$-Homöomorphismen $f_i : X_i \to C_i$, $\xi_i < \eta$. Die disjunkte Vereinigung der X_i ist wieder ein polnischer Raum X. (Die Topologie auf X ist erklärt durch "D offen gdw. $\forall i$ $D \cap X_i$ offen in X_i".) Die Vereinigung der f_i ist eine Bijektion von X auf A. Weil alle f_i stetig sind, ist f stetig . Sei G offen in X_i. $f[G]$ gehört zu $\Sigma_{\xi_i}(C_i)$ und also nach V 3 - weil $C_i \in \Sigma_\eta(Y)$ - zu $\Sigma_\eta(Y)$. Das zeigt, daß f^{-1} η-Borel meßbar ist.
Sei nun $A \in \Pi_{\eta+1}(Y)$. Es gibt $B_i \in \Sigma_\eta(Y)$ mit $A = \bigcap\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wir haben eben bewiesen, daß es polnische Räume X_i und $(1,\eta)$-Homöomorphismen $f_i : X_i \to B_i$ gibt. Z sei das Produkt der X_i , $i = 0,1,2,\ldots$, ein polnischer Raum. p_i sei die Projektion von Z auf X_i . $X = \{z \mid \forall i\ f_i p_i(z) = f_o p_o(z)\}$ ist abgeschlossen in Z und daher polnischer Raum. $f = f_o p_o|_X$ ist der gesuchte $(1,\eta)$-Homöomorphismus von X auf A.

<u>Folgerung 1</u>

Jede nichtleere Borelmenge ist injektives stetiges Bild eines o-dimensionalen polnischen Raumes.

Beweis:
Die Borelmenge $A \subset Y$ ist injektives stetiges Bild eines polnischen Raumes X. X ist injektives stetiges Bild eines o-dimensionalen polnischen Raumes (III 6).

<u>Folgerung 2</u>

Man kann jede überabzählbare Borelmenge in ein injektives stetiges Bild von $\mathcal{N}$ und einen abzählbaren Unterraum zerlegen.

Beweis:
Die Borelmenge A sei injektives stetiges Bild polnischen Raumes X. Nach III 5 zerlegt sich X in ein homöomorphes Bild von $\mathcal{N}$ und einen abzählbaren Teilraum. Das ergibt die gewünschte Zerlegung von A.

<u>Folgerung 3</u> (Die Kontinuumshypothese für Borelmengen)

Jede überabzählbare Borelmenge (eines polnischen Raumes) enthält eine Kopie von $\mathcal{C}$, hat also die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$.

Beweis:

Die überabzählbare Borelmenge ist injektives stetiges Bild des überabzählbaren polnischen Raumes X. Nach III 2 enthält X eine isomorphe Kopie von $\mathcal{C}$. Die injektive stetige Abbildung ist eine homöomorphe Einbettung auf dem kompakten Raum $\mathcal{C}$.

<u>Folgerung 4</u>

Zwei Borelmengen (polnischer Räume) gleicher Mächtigkeit sind Borel-homöomorph.

Beweis:

Die Borelmengen A_i sind zu polnischen Räumen X_i Borel-homöomorph, $i=1,2$. Nach der Folgerung aus III 7 sind X_1 und X_2 Borel-homöomorph. Also sind auch A_1 und A_2 Borel-homöomorph.

<u>Satz 2</u>

X sei polnisch und Y separabel. Jedes $(1,\eta)$-homöomorphe Bild von X in Y gehört zu $\prod_{\eta+1}(Y)$ und der leeren Menge.

<u>Folgerung</u>

Y sei polnischer Raum. Dann besteht $\prod_{\eta+1}(Y)$ gerade aus den $(1,\eta)$-homöomorphen Bildern polnischer Räume.

<u>Beweis von Satz 2:</u>

Wir bilden den Beweis von II 4 nach.
$f: X \longrightarrow A \subset Y$ sei ein $(1,\eta)$-Homöomorphismus. $\underline{G}$ sei eine abzählbare Basis von X. Wir finden eine abzählbare Menge $\underline{S} \subset \sum_\eta(Y)$, die eine Basis von Y enthält, unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und für jedes $G \in \underline{G}$ ein S mit $f[G] = A \cap S$ enthält. Dann gilt für alle $y \in Y$

$$y \in A \longleftrightarrow \forall S \in \underline{S}\,(y \in S \rightarrow S \cap A \neq \emptyset) \wedge \forall n\, \exists S \in \underline{S}(y \in S \wedge d(f^{-1}(A \cap S)) < n^{-1})$$

(Aus dieser Darstellung folgt sofort unsere Behauptung)

Beweis: Sei $y \in A$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $G \in \underline{G}$ mit $f^{-1}(y) \in G$ und $d(G) < n^{-1}$. Wenn $f[G] = A \cap S$, ist $y \in S$, und $d(f^{-1}(A \cap S)) < n^{-1}$.
Sei nun umgekehrt die linke Seite für $y \in Y$ erfüllt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $S_n \in \underline{S}$ mit $y \in S_n$ und $d(f^{-1}(A \cap S_n)) < n^{-1}$. Weil $\underline{S}$ eine Basis von Y enthält und unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist, können wir annehmen, daß $d(S_n) < n^{-1}$ und $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots$. Nach Voraussetzung gibt es einen Punkt a_n in jedem $A \cap S_n$. (a_n) konvergiert gegen y. $(f^{-1}(a_n))$ ist eine Cauchyfolge. Wenn $(f^{-1}(a_n))$ gegen x konvergiert, ist $y = f(x) \in A$.

Satz 2 gestattet es uns die Bemerkung nach V 3 zu beweisen:

<u>Bemerkung</u> Y sei separabler metrischer Raum, (G_i) eine Basis von Y. Y ist genau dann absolut Borel d.h. homöomorph zu einem Borel-Unterraum eines polnischen Raumes, wenn $\{\{i \mid x \in G_i\} \mid x \in Y\}$ Borel in $2^{\mathbb{N}}$ ist.

<u>Beweis:</u>

X sei $\{\{i \mid x \in G_i\} \mid x \in Y\}$. Wir fassen X als Unterraum von $\mathcal{C}$ auf. $f(\alpha) = \bigcap\{G_i \mid i \in \alpha\}$ liefert einen $(1,2)$-Homöomorphismus von X auf Y, wie man leicht nachrechnet.
Sei $X \in \underline{B}(\mathcal{C})$. Nach Satz 1 ist X $(1,\eta)$-homöomorphes Bild eines polnischen Raumes Z, $\eta < \omega_1$. Y ist dann $(1,\eta+1)$-homöomorphes Bild von Z, also Borel in der Vervollständigung $\tilde{Y}$ nach Satz 2.

Sei umgekehrt Y Borelunterraum von $\tilde{Y}$. Wir wählen offene Mengen $H_i \subset \tilde{Y}$ mit $G_i = Y \cap H_i$, $i \in \mathbb{N}$. Es ist (in $\tilde{Y}$) $G_i \subset H_i \subset \bar{G}_i$. Z sei die Menge aller $y \in Y$, die eine Umgebungsbasis der Form $\{H_i \mid i \in I\}$ haben. W sei die Menge aller $\{i \mid y \in H_i\}$, $y \in Z$. Offenbar ist $Y \subset Z \subset \tilde{Y}$, $X \subset W \subset \mathcal{C}$ und $g(\alpha) = \bigcap\{H_i \mid i \in \alpha\}$ eine Fortsetzung von f zu einem $(1,2)$-Homöomorphismus von W auf Z. Die Darstellung

$$\alpha \in W \longleftrightarrow \forall n\, \exists i(i \in \alpha \wedge d(H_i) < n^{-1}) \wedge \forall i(i \in \alpha \longrightarrow H_i \neq \emptyset) \wedge$$
$$\forall i_1,\dots i_k(\{i_1,\dots i_k\} \subset \alpha \leftrightarrow \exists i(i \in \alpha \wedge \bar{H}_i \subset H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k}))$$

zeigt, daß W G_δ in $\mathcal{C}$ ist. Y ist Borel in Z, also ist X Borel in W. Mit der Folgerung aus V 3 schließen wir $X \in \underline{B}(\mathcal{C})$.

VIII Autonome Systeme

In diesem Kapitel stellen wir die Beweismethode, mit der wir II 4 zu VI 2 verallgemeinert haben, systematisch dar. Wir erhalten dabei neue Beweise für eine Reihe von Sätzen über die Borelhierarchie.

$X, Y, \ldots$ sind in diesem Kapitel immer polnische Räume.

Definition

Eine abzählbare Menge $\mathcal{A}$ von Borelmengen von X heißt autonomes System, wenn

a) $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter Komplementbildung und endlichen Durchschnitten ist,

b) $\mathcal{A}$ eine Basis von X enthält und

c) jede Menge aus $\mathcal{A} \cap \Sigma_\eta(X)$ abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A} \cap \Pi_{<\eta}(Y)$ ist, $\eta > 1$.

Jedes autonome System $\mathcal{A}$ ist -wegen a,b) - Basis einer Topologie auf X. Wir bezeichnen diesen topologischen Raum mit $(X,\mathcal{A})$.

Satz 1

$\mathcal{A}$ sei autonomes System auf X. Dann ist $(X,\mathcal{A})$ o-dimensionaler polnischer Raum.

Beweis:

$(X,\mathcal{A})$ ist o-dimensional, weil $\mathcal{A}$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist.

$\{A_i\}$ sei eine Aufzählung von $\mathcal{A}$. Wir betrachten die Abbildung
$f:(X,\mathcal{A}) \to X \times \mathcal{C}$, definiert durch $f(x) = (x, [i \mid x \in A_i])$.
f ist stetig, denn $f^{-1}(G \times Ns) = G \cap \bigcap\{Ai \mid i < k, s(i) = 1\} \cap \bigcap \{X \setminus A_i \mid s(i)=o\}$ ist $\mathcal{A}$-offen, wenn G offen und $s \in {}^k2$.
W sei das Bild von f.

f^{-1} ist stetig auf W, denn $f[A_i] = W \cap \{\alpha \mid \alpha(i) = 1\}$.
$(X,\mathcal{A})$ ist also zu W homöomorph und es genügt zu zeigen, daß W G_δ in $X \times \mathcal{C}$ ist; das zeigt aber die folgende Darstellung:
Sei η_i die kleinste Ordinalzahl > 1, für die $A_i \in \Sigma_{\eta_i}$, wir wählen für jedes i Elemente $A_{g(i,j)} \in \Sigma_{<\eta_i}$, mit $A_i = \bigcup\{X \setminus A_{g(i,j)} \mid j \in \mathbb{N}\}$.
O sei die Menge der i, für die A_i offen ist.
Dann gilt
$W = \{(x,\alpha) \mid \forall i(\alpha(i)=1 \leftrightarrow \exists j\, \alpha(g(i,j))=o) \wedge \forall i \in O\, (\alpha(i)=1 \leftrightarrow x \in A_i)\}$.
W ist offenbar in der rechten Seite enthalten. Wir nehmen nun umgekehrt an, daß (x,α) zur rechten Seite gehört. Wir haben zu zeigen, daß für alle $i \in \mathbb{N}$ $x \in A_i \leftrightarrow \alpha(i)=1$. Für offene A_i ist das klar. Wenn unsere Behauptung schon für alle $A_i \in \Sigma_{<\eta}$ gezeigtist, schließen wir so:
Sei $A_i \in \Sigma_\eta$. Dann ist $x \in A_i \leftrightarrow \exists j\, x \notin A_{g(i,j)} \leftrightarrow$ (nach Voraussetzung, denn $A_{g(i,j)} \in \Sigma_{<\eta_i} \subset \Sigma_{<\eta}$) $\exists j\, \alpha(g(i,j))=o \leftrightarrow \alpha(i)=1$.

Zum beseeren Verständnis des nächsten Satzes eine Vorbemerkung

Lemma 2

$\mathcal{A} \subset \Delta_\eta(X)$ sei autonom. Dann ist $\Sigma_{1+\xi}(X,\mathcal{A}) \subset \Sigma_{\eta+\xi}(X)$.

Beweis:

$f: X \to Y$ ist η-Borel meßbar, wenn $Y = (X,\mathcal{A})$ und $f = id_X$. Man zeigt leicht durch Induktion nach ξ, daß $A \in \Sigma_{1+\xi}(Y) \to f^{-1}(A) \in \Sigma_{\eta+\xi}(X)$ und $A \in \Pi_{1+\xi}(Y) \to f^{-1}(A) \in \Pi_{\eta+\xi}(X)$. Das gilt für beliebige X, Y und η-Borel meßbare $f: X \to Y$.

Satz 3 Sei $\eta \geq 2$.

Zu jeder abzählbaren Familie $B_i \in \Sigma_{\eta+\xi_i}(X)$ gibt es ein autonomes System $\mathcal{A} \subset \Delta_\eta(X)$ mit $B_i \in \Sigma_{1+\xi_i}(X,\mathcal{A})$ für alle i.

Beweis:

I) Jede abzählbare Menge $\mathfrak{B} \subset \Delta_\eta(X)$ ist in einem autonomen System $\mathcal{A} \subset \Delta_\eta(X)$ enthalten.

Setze $\underline{B}_o = \mathfrak{B}$. Sei $\underline{B}_{2i} \subset \Delta_\eta(X)$ defniert. Wir wählen für alle $1 < \xi \leq \eta$, $S \in \underline{B}_{2i} \cap \sum_\xi(X)$ eine Familie $\{P_j\} \subset \prod_{<\xi}(X)$ mit $S = \bigcup\{P_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. $\underline{B}_{2i+1}$ sei die Vereinigung von $\underline{B}_{2i}$ mit der Menge aller dieser P_j. Wenn $\underline{B}_{2i}$ abzählbar ist, ist $\underline{B}_{2i+1}$ wieder abzählbar. Wenn $\underline{B}_{2i+1}$ definiert ist, nehmen für $\underline{B}_{2i+2}$ den Abschluß von $\underline{B}_{2i+1}$ unter Komplement und endlichen Durchschnitten. Das gesuchte monotone System ist $\bigcup\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

II) Zu jeder abzählbaren Menge $\mathfrak{B} \subset \Delta_\eta(X)$ und jeder Menge $B \in \sum_{\eta+\xi}(X)$ gibt es ein autonomes System $\mathfrak{B} \subset \mathcal{A} \subset \Delta_\eta(X)$ mit $B \in \sum_{1+\xi}(X,\mathcal{A})$.

Beweis durch Induktion über ξ.

$\xi = o$: Wenn $B = \bigcup\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B_i \in \prod_{<\eta}(X)$. Wir wählen für $\mathcal{A} \subset \Delta_\eta(X)$ ein autonomes System, das $\mathfrak{B} \cup \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ enthält.

$\xi > o$: Es sei $B = \bigcup\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $P_i \in \prod_{\eta+<\xi}(X)$. Setze $\underline{B}_o = \mathfrak{B}$. Sei $\underline{B}_k \subset \Delta_\eta(X)$ definiert und abzählbar. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein autonomes System $\underline{B}_k \subset \underline{B}_{k+1} \subset \Delta_\eta(X)$ mit $X \setminus P_k \in \sum_{1+<\xi}(X,\underline{B}_{k+1})$. Das gesuchte monotone System ist $\bigcup\{\underline{B}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Beweis des Satzes: Setze $\underline{B}_o = \emptyset$. Sei $\underline{B}_k \subset \Delta_\eta(X)$ definiert und abzählbar. Nach II gibt es ein autonomes System $\underline{B}_k \subset \underline{B}_{k+1} \subset \Delta_\eta(X)$ mit $B_k \in \sum_{1+\xi_i}(X,\underline{B}_{k+1})$. Das gesuchte autonome System ist $\bigcup\{\underline{B}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Wir geben eine Reihe von Anwendungsbeispielen.

Beispiel 1 (siehe VI 1)

$\sum_\eta(X)$, $\eta > 1$, hat die Reduktionseigenschaft.

Beweis:

(A^j) sei eine Folge von $\sum_\eta$-Mengen. Es gibt ein monotones System $\mathcal{A} \subset \Delta_\eta(X)$ mit $A^j \in \sum_1(X,\mathcal{A})$. Nach III 4 gibt es disjunkte $B^j \subset A^j$, $B^j \in \sum_1(X,\mathcal{A})$, deren Vereinigung gleich der Vereinigung der A^j ist. Nach Lemma 2 ist $B^j \in \sum_\eta$.

Beispiel 2 (siehe VI 3)

Jedes $\eta+1$-Borel meßbare $f:X \to \mathbb{R}$ ist Limes einer Folge von η-meßbare Funktionen.

Beweis: (Wegen I 3 können wir $\eta \geq 2$ annehmen)

(G_i) sei eine eine Basis von $\mathbb{R}$, $\mathcal{A} \subset \Delta_\eta(X)$ ein autonomes System mit $f^{-1}(G_i) \in \sum_2(X,\mathcal{A})$ für alle i. $f:(X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ ist 2-Borel meßbar und nach I 3 Limes einer Folge von stetigen Funktionen $f_i:(X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$. Die f_i sind η-meßbar nach Lemma 2.

Beispiel 3 (VII 1)

Jedes nichtleere $A \in \prod_{\eta+1}(X)$ ist $(1,\eta)$-homöomorphes Bild eines geeigneten polnischen Raumes.

Beweis: (Wegen II 1 können wir $\eta \geq 2$ annehmen.)

$\mathcal{A} \subset \Delta_\eta(X)$ sei ein autonomes System mit $A \in \prod_2(X,\mathcal{A})$. Nach II 1 ist $A^* =$ A mit der Unterraumtopologie von $(X,\mathcal{A})$ polnischer Raum. Die Identität ist ein $(1,\eta)$-Homöomorphismus von A^* auf A.

Beispiel 4 (siehe VII 2)

$A \subset Y$ sei $(1,\eta)$-homöomorphes Bild von X. Dann ist $A \in \prod_{\eta+1}(Y)$.

Beweis: (Wegen II 4 können wir $\eta \geq 2$ annehmen.)

$f:X \to A$ sei $(1,\eta)$-Homöomorphismus, $\mathcal{A} \subset \Delta_\eta(Y)$ ein autonomes System, für das $f:X \to (Y,\mathcal{A})$ stetig ist. Nach II 4 ist $A \in \prod_2(Y,\mathcal{A})$, also $A \in \prod_{\eta+1}(Y)$.

Beispiel 5

A sei Unterraum von X und $f:X \to Y$ η-meßbar. Dann läßt sich f zu einer η-meßbaren Abbildung auf einem $\prod_{\eta+1}$-Unterraum von X fortsetzen.

Beweis: (Wegen II 3 können wir $\eta \geq 2$ annehmen.)

G_i sei eine Basis von Y. S_i Mengen aus $\sum_\eta(X)$ mit $f^{-1}(G_i) = A \cap S_i$. Wenn $\mathcal{A} \subset \Delta_\eta(X)$ ein monotones System ist, für das $S_i \in \sum_1(X,\mathcal{A})$, ist f stetig auf $A^* =$ A+Unterraumtopologie von $(X,\mathcal{A})$. Mit II 3 setzen wir f zu einer stetigen Abbildung g auf einem G_δ-Unterraum $B^* \subset (X,\mathcal{A})$ fort. B ist $\prod_{\eta+1}$, g η-meßbar auf B.

Beispiel 6

A_i seinen Unteräume von X_i, $f:A_1 \to A_2$ ein Borelhomöomorphismus. f läßt sich zu einem Borelhomöomorphismus zweier Borelunterräume $B_i \subset X_i$ fortsetzen.

Kurat. S. 436

Beweis: (Wegen

$\underline{B}_i^o$ sei ein autonomes System von X_i, die autonomen Systeme $\underline{B}_i^j$, $i=1,2$, seien definiert. Weil f Borelhomöomorphismus ist, können wir zu jedem $A \in \underline{B}_1^j$ eine Borelmenge $A^2 \subset X_2$ mit $f[A_1 \cap A] = A_2 \cap A^2$ und zu jedem $A \in \underline{B}_2^j$ eine Borelmenge $A^1 \subset X_1$ mit $f^{-1}(A_2 \cap A) = A_1 \cap A^1$ finden. Wir wählen für $\underline{B}_i^{j+1}$ ein autonomes System, das $\underline{B}_i^j$ und alle $A^i, A \in \underline{B}_{3-i}^j$ enthält. Die Vereinigung der $\underline{B}_i^j$, $j=o,1,..$ ist ein autonomes System $\mathcal{A}_i$; $i=1,2$.
Wenn $C \subset X_i$, meinen wir mit C^* C als Unterraum von $(X_i, \mathcal{A}_i)$.

Nach Konstruktion ist $f:A_1^* \to A_2^*$ ein Homöomorphismus. Satz II 5 liefert uns eine Fortsetzung g von f zu einem Homöomorphismus von zwei G_δ-Unterräumen $B_i^* \subset X_i^*$. Man sieht leicht, daß B_i Borelunterraum von X_i und g ein Borelhomöomorphismus von B_1 und B_2 ist.

Folgerung: Wenn A_1 Borel ist, ist auch A_2 Borel.

IX Δ_η-Mengen

X, Y, .. bezeichnen polnische Räume.

Es gibt keine universellen $\underline{B}$ - oder Δ_η- Mengen (Bemerkung 1 vor V 4).
B ist aber Vereinigung einer ω_1-langen Kette von Punktklassen (z.B. Σ_η, $\eta < \omega_1$) für die es universelle Mengen gibt. Wir wollen eine ähnliche Darstellung für Δ_η angeben.

Definition X sei polnischer Raum, Γ eine Punktklasse.

Eine Kette von Γ-Mengen ist eine Familie $(A_\xi)_{\xi < \alpha}$, wobei α eine gerade Ordinalzahl $< \omega_1$, $A_\xi \in \Gamma(X)$, $\xi < \eta \to A_\xi \supset A_\eta$.
$\bigcup\{A_{<\eta} \setminus A_\eta \mid \eta \text{ ungerade} < \alpha\}$ ist die alternierende Summe von $(A_\xi)_{\xi<\alpha}$; dabei ist $A_{<\eta} = \bigcap\{A_\beta \mid \beta < \eta\}$.

Die alternierende Summe von $(A_\xi)_{\xi<\alpha}$ läßt sich auch in der Form $\bigcup\{A_\xi \setminus A_{\xi+1} \mid \xi \text{ gerade}, \xi+1 < \alpha\}$ darstellen.

Satz 1

Die Δ_2-Teilmengen von X sind gerade die alternierenden Summen von Ketten von abgeschlossenen Mengen

Beweis:
$(F_\xi)_{\xi<\alpha}$ sei eine Kette von abgeschlossenen Mengen. Die $F_{<\eta}$ sind abgeschlossen, die $F_{<\eta} \setminus F_\eta$ also aus Δ_2. Die alternierende Summe A von (F_ξ) gehört somit offenbar zu Σ_2. Dasselbe Argument zeigt, daß
$X \setminus A = \bigcup\{F_{<\eta} \setminus F_\eta \mid \eta \text{ gerade} \leq \alpha\}$ (dabei sei $F_\alpha = \emptyset$, Konvention: $F_{<0} = X$) zu Σ_2 gehört.

Sei $A \in \Delta_2(X)$.
Wähle A_i, B_i abgeschlossen mit $A = \bigcup\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $X \setminus A = \bigcup\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Wir definieren F_ξ , $\xi < \omega_1$, rekursiv. (U läuft über offene Teilmengen von X.)

$$F_\xi = \begin{cases} \{ x \mid \forall i \, \forall U \ni x \quad (U \setminus B_i) \cap F_{<\xi} \neq \emptyset \} & , \ \xi \text{ gerade} \\ \{ x \mid \forall i \, \forall U \ni x \quad (U \setminus A_i) \cap F_{<\xi} \neq \emptyset \} & , \ \xi \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wenn $x \in F_\xi$, gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, und eine offene Umgebung U von x mit $(U \setminus B_i) \cap F_{<\xi} = \emptyset$ (bzw. $(U \setminus A_i) \cap F_{<\xi} = \emptyset$). Es ist dann $U \cap F_\xi = \emptyset$. Das zeigt, daß alle F_ξ abgeschlossen sind.
Weil offenbar $F_\xi \subset \overline{F_{<\xi}}$, ist $F_\xi \subset F_\eta$ für $\eta < \xi$.

Nach I 6 gibt es keine ω_1-lange echt absteigende Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X. Es muß also eine abzählbare Ordinalzahl α geben mit $F_\alpha = F_{\alpha+1} = F_{\alpha+2}$. Wir können α als gerade annehmen.

Behauptung: $F_\alpha = \emptyset$

Sei $x_0 \in F_\alpha$. Setze $U_0 = X$.

Sei $x_i \in F_\alpha$ und eine offene Umgebung U_i von x_i definiert.

1. i ist gerade = 2k . Weil $x_i \in F_{\alpha+2}$, gibt es $x_{i+1} \in (U_i \setminus B_k) \cap F_{\alpha+1}$. B_k ist abgeschlossen, wir finden also eine offene Umgebung U_{i+1} von x_{i+1} mit $\overline{U}_{i+1} \subset (U_i \setminus B_k)$ und $d(U_{i+1}) < (i+1)^{-1}$.
2. i ist ungerade = 2k+1 . Weil $x_i \in F_{\alpha+1}$ gibt es $x_{i+1} \in (U_i \setminus A_k) \cap F_\alpha$. Wir wählen U_{i+1} so, daß $\overline{U}_{i+1} \subset (U_i \setminus A_k)$ und $d(U_{i+1}) < (i+1)^{-1}$.

x liege in Durchschnitt der U_i. Weil aber $U_{2k+1} \cap B_k = \emptyset$ und $U_{2k+2} \cap A_k = \emptyset$, kann x weder in $X \setminus A$ noch in A liege, Widerspruch.

Folgerung: $X = \bigcup \{F_{<\eta} \setminus F_\eta \mid \eta \text{ ungerade} < \alpha\} \cup \bigcup \{F_{<\eta} \setminus F_\eta \mid \eta \text{ gerade} \leq \alpha\}$.

Behauptung: A ist die alternierende Summe von $(F_\xi)_{\xi<\alpha}$.

Sei $x \in F_{<\eta} \setminus F_\eta$, $\eta \leq \alpha$.
Wenn η ungerade ist, gibt es $i \in \mathbb{N}$, $U \ni x$ mit $(U \setminus A_i) \cap F_{<\eta} = \emptyset$. Es muß also $x \in A_i \subset A$ sein.
Wenn η gerade ist , schließt man ebenso , daß $x \in X \setminus A$.
Daraus folgt die Behauptung und Satz 1.

Satz 2

Die $\Delta_{\eta+1}$-Teilmengen von X sind gerade die alternierenden Summen von Ketten von Π_η-Mengen.

Beweis: (Wir können $\eta \geq 2$ annehmen.)
(A_ξ) sei eine Kette von Mengen aus $\Pi_\eta(X)$. Wir wählen ein autonomes System $\mathcal{A} \subset \Delta_\eta(X)$ mit $A_\xi \in \Pi_1(X,\mathcal{A})$,(VIII 3). Nach Satz 1 ist die alternierende Summe A von (A_ξ) in $\Delta_2(X,\mathcal{A})$, also nach VIII 2 in $\Delta_{\eta+1}(X)$.

Sei umgekehrt $A \in \Delta_{\eta+1}(X)$. Nach VIII 3 gibt es ein autonomes System $\mathcal{A} \subset \Delta_\eta(X)$ mit $A \in \Delta_2(X,\mathcal{A})$. Satz 1 liefert uns eine Darstellung von A als alternierende Summe einer Kette (A_ξ) von Mengen aus $\Pi_2(X,\mathcal{A}) \subset \Pi_\eta(X)$.

Definition (α gerade $< \omega_1$)

$A_{\eta,\alpha}(X)$ = die Menge der alternierenden Summen von Ketten von Π_η-Mengen der Länge α .

Satz 3 ($0 < \alpha$ gerade $< \omega_1$)

a) Wenn Y perfekt ist, gibt es eine universelle $A_{\eta,\alpha}$-Menge in $X \times Y$.

b) Wenn X perfekt ist, ist $A_{\eta,\alpha}(X) \neq A_{\eta,\alpha+2}(X)$.

Beweis:
a) O sei die Menge der Ordinalzahlen kleiner als α mit der diskreten Topologie. $V \subset (X \times O) \times Y$ sei Π_η-universell nach V 4. Dann ist $U(x,y) \longleftrightarrow \exists \xi \text{ ungerade} \in O \, (\forall \beta < \xi \; V(x,\beta,y) \wedge \neg V(x,\xi,y))$ die gesuchte universelle Menge.

b) $U \subset X \times X$ sei $A_{\eta,\alpha+2}$-universell. $U(x,x)$ gehört zu $A_{\eta,\alpha+2}(X)$ aber nicht zu $A_{\eta,\alpha}(X)$. Denn sonst würde -wie man leicht nachrechnet $\neg U(x,x)$ zu $A_{\eta,\alpha+2}(X)$ gehören , was aber wegen der Universalität von U nicht sein kann.

X Die Hierarchie der projektiven Mengen

X,Y,.. seien i mmer polnische Räume.

Definition

$\Sigma^1_o(X) = \Pi^1_o(X) = \underline{B}(X)$ – die Borelmengen von X ;

$\Sigma^1_{n+1}(X)$ ist die Menge der Prädikate $\exists\alpha\, P(x,\alpha)$, $P \subset \Pi^1_n(X \times \mathcal{N})$;

$\Pi^1_{n+1}(X)$ ist die Menge der Prädikate $\forall\alpha\, S(x,\alpha)$, $S \subset \Sigma^1_n(X \times \mathcal{N})$.

Die in einer der Mengn Σ^1_n , $\Pi^1_n(X)$ vorkommenden Mengen sind die projektiven Mengen von X ; $\underline{P}(X)$ sei die Menge der projektiven Mengen.

Notation: Σ^o_η $(\Pi^o_\eta, \Delta^o_\eta)$ statt wie früher $\Sigma_\eta (\Pi_\eta, \Delta_\eta)$.
$\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$.

Eigenschaften:

1.

$S \in \Sigma^1_n(X) \leftrightarrow X \setminus S \in \Pi^1_n(X)$.

Beweis: triviale Induktion über n.

2.(Borelsubstitution)

$f: Y \to X$ sei Borel meßbar, $S \in \Sigma^1_n(X)$; dann ist $f^{-1}(S) \in \Sigma^1_n(Y)$.

Beweis: Wenn S offen ist, ist $f^{-1}(G)$ Borel meßbar. Daraus ergibt sich durch Induktion nach η , daß $S \in \Sigma^o_\eta \to f^{-1}(S) \in \Sigma^o_\eta$. Also ist 2. richtig für n = o. Der Rest folgt durch Induktion nach n. Man beachtet dabei, daß durch $(y,\alpha) \to (f(y),\alpha)$ eine Borel Abbildung von $Y \times \mathcal{N}$ nach $X \times \mathcal{N}$ definiert ist.

3.

$S \in \Sigma^1_n(X) \longleftrightarrow S \times Y \in \Sigma^1_n(X \times Y)$

Beweis: sofort aus 2.

4.

$\Sigma^1_n \cup \Pi^1_n \subset \Delta^1_{n+1}$

Beweis: (Notation : $pr_1 : X \times Y \longrightarrow X$ ist die Projektion auf die erste Komponente.) Wenn $P \in \Pi^1_n$, ist $P = pr_1[P \times \mathcal{N}]$ aus Σ^1_{n+1} nach 3.. Daraus folgt $\Sigma^1_n \subset \Pi^1_{n+1}$. Insbesondere haben wir $\Sigma^1_o \subset \Sigma^1_1$ und $\Pi^1_o \subset \Pi^1_1$. Mit Induktion nach n folgt $\Sigma^1_n \subset \Sigma^1_{n+1}$ und $\Pi^1_n \subset \Pi^1_{n+1}$.

5.

$S \in \Sigma^1_n(X \times \mathbb{N}) \longleftrightarrow \forall i\; S^{(i)} \in \Sigma^1_n(X)$

Beweis:(Notation: $S^{(i)} = \{x \mid (x,i) \in S\}$) "$\longrightarrow$" folgt aus 2.. Die andere Richtung zeigt man leicht durch Induktion nach n. Für n=o folgt die Behauptung aus V 2 d .

6.

Σ^1_n ist unter abzählbaren Durchschnitten und Vereinigungen abgeschlossen.

Beweis:Induktion nach n. Für n=o ist die Behauptung klar. Nach 5. ist jede Folge von Σ^1_{n+1} – Mengen von der Form $S_i = \{x \mid \exists\alpha\, P(x,i,\alpha)\}$ für ein Π^1_n -Prädikat $P(x,i,\alpha)$. Nach Induktion ist $\exists i P(x,i,\alpha)$ ein Π^1_n-Prädikat. Also ist die Vereinigung der S_i , das Prädikat $\exists\alpha(\exists i P(x,i,\alpha))$, aus Σ^1_{n+1}. $\alpha \longrightarrow (\alpha^{(o)}, \alpha^{(1)}, \dots)$ sei ein Homöomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$. Dann ist $\forall i\, (\exists\alpha\, P(x,i,\alpha)) \longleftrightarrow \exists\alpha \forall i\, P(x,i,\alpha^{(i)})$. Nach 2. ist $P(x,i,\alpha^{(i)})$ ein Π^1_n-Prädikat , nach Induktion $\forall i\, P(x,i,\alpha^{(i)})$ ein Π^1_n-Prädikat. Also ist auch Der Durchschnitt der S_i aus Σ^1_{n+1}.

7.

$X \subset Y \longrightarrow \Sigma^1_n(X) = \underline{P}(X) \cap \Sigma^1_n(Y)$ und $\Pi^1_n(X) = \underline{P}(X) \cap \Pi^1_n(Y)$.

Beweis: Für n = o folgt die Behauptung aus V 3 c , denn $X \in \Pi^o_2(Y)$.
Beim Schluß von n auf n+1 ist der Fall von Σ^1_{n+1} leicht : $X \times \mathcal{N}$ ist Unter-

raum von $Y \times \mathcal{N}$. Sei schließlich $P \subset X$. Dann ist $P \in \Pi^1_{n+1}(X) \longleftrightarrow$
$X \setminus P \in \Sigma^1_{n+1}(X) \longleftrightarrow X \setminus P \in \Sigma^1_{n+1}(Y) \longleftrightarrow (Y \setminus (X \setminus P)) \in \Pi^1_{n+1}(Y) \longleftrightarrow P \in \Pi^1_{n+1}(Y)$.
Die letzte Äquivalenz folgt aus 6., weil $P = (Y \setminus (X \setminus P)) \cap X$ und
$(Y \setminus (X \setminus P)) = P \cup (Y \setminus X)$.

8.

A_i sei Unterraum von X_i, $i=1,2$, A_1 und A_2 Borel homöomorph. Dann gilt
$A_1 \in \Sigma^1_n(X_1) \to A_2 \in \Sigma^1_n(X_2)$ und $A_1 \in \Pi^1_n(X_1) \to A_2 \in \Pi^1_n(X_2)$.

Beweis: $g: A_1 \to A_2$ sei Borel homoöomorphismus. g hat eine Fortsetznug zu einem Borel homöomorphismus f zweier Borelmengen B_1, B_2, (   ). Y_i sei die disjunkte Vereinigung von X_i und $\mathcal{N}$. Nach   gibt es einen Borel homöomorphismus $h: (Y_1 \setminus B_1) \to (Y_2 \setminus B_2)$. $g \cup h$ ist ein Borelhomöomorphismus von Y_1 und Y_2, der A_1 in A_2 überführt. Wegen 7. ist $A_i \in \Sigma^1_n(X_i)$
$(\in \Pi^1_n(X_i))$ gdw. $A_i \in \Sigma^1_n(Y_i)$ $(\in \Pi^1_n(Y_i))$. Nach 2. ist $A_1 \in \Sigma^1_n(Y_1)$
$(\in \Pi^1_n(Y_1))$ gdw. $A_2 \in \Sigma^1_n(Y_2)$ $(\in \Pi^1_n(X_2))$.

9. $(n > o)$

$S \in \Sigma^1_n(X)$, $f: S \to Y$ Borel meßbar $\longrightarrow$ $f[S] \in \Sigma^1_n(Y)$

Beweis: Wir zeigen zuerst

$$P \in \Pi^1_{n-1}(Y \times Z) \to pr_1[P] \in \Sigma^1_n(Y).$$

Die Hilfsbehauptung (ein Sonderfall von 9.) folgt aus 6., wenn Z abzählbar ist. Sonst sind Z und $\mathcal{N}$ Borelhomöomorph. Dieser Borelhomöomorphismus ergibt einen Borelhomöomorphismus von $X \times Z$ und $Y \times \mathcal{N}$, der P in eine Π^1_{n-1}-Menge $\subset Y \times \mathcal{N}$ überführt, deren erste Projektion gleich $pr_1[P]$ ist.
Sei nun $S = pr_1[B]$, $B \in \Pi^1_{n-1}(X \times \mathcal{N})$. $g: B \to Y \times (X \times \mathcal{N})$, definiert durch $g(x,\alpha) = (f(x), x, \alpha)$, liefert einen Borelhomöomorphismus von B auf $P = g[B]$. Nach 8. ist $P \in \Pi^1_{n-1}(Y \times (X \times \mathcal{N}))$, also ist $S = pr_1[P]$ aus Σ^1_n.

Folgerung

Die Klasse der projektiven Mengen ist unter Komplementen, abzählbaren Vereinigungen, Durchschnitten, Borelsubstitution und Borelbildern abgeschlossen.

Universelle Mengen

Lemma 1

$$\Sigma^1_1(X) = \{pr_1(F) \mid F \text{ abgeschlossen in } X \times \mathcal{N}\}$$

Beweis:
Natürlich ist die rechte Seite in der linken enthalten. Sei $A \in \Sigma^1_1(X)$, also $A = pr_1[B]$ für eine Borelteilmenge B von $X \times \mathcal{N}$. Wir können B als nicht-leer voraussetzen. Nach III 9 und VII 1 ist B stetiges Bild von $\mathcal{N}$, sagen wir $B = f[\mathcal{N}]$. Der Graph $G_f = \{(\alpha, f(\alpha)) \mid \alpha \in \mathcal{N}\}$ von f und also auch G_f^{-1} sind abgeschlossen, A ist $pr_1[G_f^{-1}]$.

Folgerung

Y sei überabzählbar. Dann ist $\Sigma^1_1(X) = \{pr_1(B) \mid B \in \Pi^0_2(X \times Y)\}$.

Beweis: Y enthält - eine isomorphe Kopie von- $\mathcal{N}$. Wenn B abgeschlossen in $X \times \mathcal{N}$ ist, ist B G_δ in $X \times Y$.

Beispiel: Die Projektion einer abgeschlossenen Teilmenge von $X \times \mathcal{C}$ auf X ist wieder abgeschlossen.

Satz 2 $(n > o)$

Es gibt universelle Σ^1_n- und Π^1_n-Mengen in $X \times \mathcal{C}$.

Beweis:
$F(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \beta)$ sei Π^0_1-universell in $(X \times \mathcal{N}^n) \times \mathcal{C}$, (V 4).
Nach unserem Lemma ist dann

$\exists \alpha_1 \forall \alpha_2 \dots \exists \alpha_n F(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \beta)$, wenn n ungerade, und

$\exists \alpha_1 \forall \alpha_2 \dots \forall \alpha_n \neg F(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \beta)$, wenn n gerade,

Σ^1_n-universell in $X \times \mathcal{C}$. Die Komplemente dieser Mengen sind Π^1_n-universell.

Folgerung (Hierarchiesatz)

Wenn X überabzählbar ist und $n > o$, ist $\Sigma^1_n(X) \setminus \Pi^1_n(X) \neq \emptyset$.

Beweis: Wirkönnen $\mathcal{C} \subset X$ annehmen. Wenn $U \subset X \times \mathcal{C}$ Σ^1_n-universell ist, ist U auch als Teilmenge von $X \times X$ Σ^1_n-universell (siehe Eigenschaft 7.). $U(x,x)$ ist Σ^1_n, aber nicht Π^1_n. Denn sonst wäre für ein x_o $\neg U(x,x) \longleftrightarrow U(x,x_o)$.

XI Analytische Mengen

Wie immer in den folgenden Kapiteln bezeichnen $X,Y,..$ polnische Räume. Analytische Mengen heißen die Σ^1_1-Mengen.

Satz 1

Jede überabzählbare analytische Menge enthält eine Kopie von $\mathcal{C}$.

Lemma 2

Wenn das Bild der stetigen Abbildung $f:X \longrightarrow Y$ überabzählbar ist, gibt es in X eine Kopie von $\mathcal{C}$, auf der f injektiv ist.

Aus Lemma 2 folgt unser Satz. Denn wenn $f[X] \in \Sigma^1_1(Y)$, und wenn f injektiv auf $W \cong \mathcal{C}$, ist $f[W]$ zu $\mathcal{C}$ homöomorph. (W ist kompakt!)

Beweis des Lemmas

Wir konstruiereneine Einbettung $g:\mathcal{C} \longrightarrow X$ mit Hilfe eines regulären Systems (As), $s \in {}^{\omega}2$. Wir definieren die As rekursiv, wobei $f[As]$ überabzählbar. $A\emptyset = X$. Sei As definiert, $s \in {}^k2$:

$f[As]$ hat überabzählbar viele Kondensationspunkte, deren Umgebungen also alle überabzählbaren Schnitt mit $f[As]$ haben, (siehe III 1). x_i, $i=o,1$, seien zwei Kondensationspunkte und U_i zwei trennende Umgebungen. Weil f stetig ist, können wir $As \cap f^{-1}(U_i)$ mit abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen von kleinerem Durchmessser als $(k+1)^{-1}$ überdecken. $f[As \cap f^{-1}(U_i)] = As \cap U_i$ ist aber überabzählbar. Also gibt es abgeschlossene $As^\frown\langle i\rangle \subset As$, von kleinerem Durchmesser als $(k+1)^{+1}$, deren Bild $f[As^\frown\langle i\rangle]$ überabzählbar ist und in U_i lieget.

Die As sind alle nichtleer, unser reguläres System definiert also eine stetige Abbildung $g:\mathcal{C} \longrightarrow X$. Weil $f[As]$ und $f[At]$ für unvergleichbare s,t disjunkt sind, ist fg injektiv. D.h. f ist injektiv auf $g[\mathcal{C}]$ und $g:\mathcal{C} \longrightarrow X$ ist eine homöomorphe Einbettung.

Folgerung

Wenn $f:X \longrightarrow Y$ Borel meßbar und $f[X]$ überabzählbar ist, gibt es eine Kopie von $\mathcal{C}$ in X, auf der f injektiv ist.

Beweis: Wir wählen ein autonomes System $\mathcal{A}$ auf X, für das $f:(X,\mathcal{A}) \longrightarrow Y$ stetig ist. $(X,\mathcal{A})$ ist polnischer Raum. Nach unserem Lemma gibt es einen Unterraum W, auf dem f injektiv ist und der mit der Unterraumtopologie von $(X,\mathcal{A})$ versehen zu $\mathcal{C}$ homöomorph ist. W ist dann aber selbst -als Unterraum von X- zu $\mathcal{C}$ homöomorph.

Definition

(Fs) sei eine Familie von Teilmengen von X, die mit endlichen Folgen s von natürlichen Zahlen indiziert ist. $\mathcal{A}(Fs)$ -das Resultat der Anwendung der Operation $\mathcal{A}$ auf (Fs) ist die Menge $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{s \subset \alpha} Fs$,

Satz 3

Die analytischen Mengen sind die Mengen der Form $\mathcal{A}(Fs)$, (Fs) eine Familie von abgeschlossenen (offenen) Mengen.

Die eine Richtung von Satz 3 folgt aus

<u>Lemma 4</u>

Die nicht-leeren analytischen Mengen sind die stetigen Bilder von $\mathcal{N}$.

(Beweis: Nach X 1 ist jede analytische Menge stetiges Bild eines polnischen Raumes.)

denn, wenn $A = f[\mathcal{N}]$ für eine stetige Abbildung $f: \mathcal{N} \to X$, ist
$A = \mathcal{A}(Fs)$ für das zu gehörende reguläre System $Fs = \overline{f[Ns]}$.

Fs ist Durchschnitt einer Folge (G_s^1) von offenen Mengen. Setzt man
$Hs = G_s^0 \cap G_s^1 \cap \ldots \cap G_s^k$, $(s \in {}^k\mathbb{N})$, ist $A = \mathcal{A}(Hs)$.

Sei umgekehrt (Fs) eine Familie von abgeschlossenen (offenen) Mengen. Dann ist
$x \in \mathcal{A}(Fs) \longleftrightarrow \exists \alpha \, \forall i \; x \in F(\alpha \mid i)$.

Satz 3 folgt unmittelbar aus dieser Darstellung ($\alpha, i \mapsto \alpha|i$ ist stetig!)

<u>Satz 5</u>

a) Analytische Mengen haben die Baire Eigenschaft.

b) Analytische Mengen von reellen Zahlen sind Lebsgue meßbar.

(Π_1^1-Mengen sind also auch Lebesgue meßbar und haben die Baire Eigenschaft)

Zum Beweis einige Vorbemerkungen:

Borelmengen haben die Baire Eigenschaft und sind Lebesgue meßbar. Genauer:

A hat die Baire Eigenschaft gdw. es gibt eine Borelmengen B, für die
$A \triangle B$ von 1.Kategorie ist.(vgl. IV 2)

Bekanntlich gilt für Mengen von reellen Zahlen

A ist Lebesgue meßbar gdw. es gibt eine Borelmenge B, für die
$A \triangle B$ Nullmenge ist.

J_1 - die Menge der Mengen von erster Kategorie - und J_o - die Menge der Nullmengen - sind σ - Ideale in folgendem Sinn :

J heißt σ-Ideal, wenn $\emptyset \in J$ und $\bigcup \{N_i \mid i \in \mathbb{N}\} \in J$ gdw. $\forall i \; N_i \in J$.

<u>Bezeichnungen</u> $A =_J B$ heißt $A \triangle B \in J$; $A \subset_J B$ heißt $A \setminus B \in J$.

Wenn J ein σ-Ideal ist, sind $=_J$ und $\subset_J$ mit $'$, $\cap$, $\cup$ kompatibel. Z.B. ist $\bigcup\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} =_J \bigcup\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, wenn $\forall i \; A_i =_J B_i$.

<u>Definition</u>

Ein σ-Ideal J hat die $*$-Eigenschaft, wenn es zu jeder Menge A eine Borelmenge A^* gibt, so daß $A \subset_J B \leftrightarrow A^* \subset_J B$ für alle Borelmengen B.

A^* ist offenbar bis auf $=_J$ eindeutig bestimmt.

<u>Lemma</u>

J_o und J_1 haben die $*$-Eigenschaft.

Beweis:

J_1 : Setze $A^* = \{x \mid$ für alle Umgebungen U von x ist $U \cap A \notin J_1\}$.
A^* ist abgeschlossen. $A \setminus A^*$ ist abzählbare Vereinigung von Mengen der Form $U \cap A \in J_1$. Daraus folgt $A \subset_{J_1} A^*$. Sei $A \subset_{J_1} B$ Borel. B hat die Baire Eigenschaft, es gibt also eine abgeschlossene Menge F mit $B =_{J_1} F$.
aus $A \subset_{J_1} F$ folgt $(X \setminus F) \cap A \in J_1$, also $(X \setminus F) \cap A^* = \emptyset$
d.h. $A^* \subset F$ oder $A^* \subset_{J_1} B$.

J_o : Wir geben A^* nur an.
$$A^* = \{x \in \mathbb{R} \mid \liminf_{\varepsilon > 0} \frac{\mu^*([x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap A)}{2\varepsilon} = 1\}.$$

Satz 5 folgt nun aus dem nächsten Lemma

<u>Lemma</u>

J sei ein σ-Ideal mit $*$-Eigenschaft, A analytisch. Dann gibt es eine Borelmenge B mit $A =_J B$.

<u>Beweis:</u>

Sei $A = \mathcal{A}(Fs)$, Fs abgeschlossen. Wir betrachten die Mengen

$At = \bigcup\{\bigcap\{Fs \mid s \subset \alpha\} \mid t \subset \alpha\}$.

Aus

$At = \bigcup\{At^\frown\langle i\rangle \mid i \in \mathbb{N}\} \subset_J \bigcup\{(At^\frown\langle i\rangle)^* \mid i \in \mathbb{N}\}$ folgt

$(At)^* \subset_J \bigcup\{(At^\frown\langle i\rangle)^* \mid i \in \mathbb{N}\}$, und daraus

(i) $(A\emptyset)^* \subset_J \mathcal{A}((As)^*)$.

Denn für jedes Mengensystem (Gs) ist

$G\emptyset \setminus \mathcal{A}(Gs) \subset \bigcup\{Gs \setminus \bigcup\{Gs^\frown\langle i\rangle \mid i \in \mathbb{N}\} \mid s \in {}^{<\omega}\mathbb{N}\}$.

Aus $At \subset Ft$ folgt $(At)^* \subset_J Ft$, und daraus

(ii) $\mathcal{A}((As)^*) \subset_J \mathcal{A}(Fs) = A\emptyset$.

Denn für alle Mengensysteme (Gs) , (Hs) gilt

$\mathcal{A}(Gs) \setminus \mathcal{A}(Hs) \subset \bigcup\{Gs \setminus Hs \mid s \in {}^{\omega}\mathbb{N}\}$.

Aus (i) und (ii) folgt $A^* = (A\emptyset)^* \subset_J A\emptyset = A$, also $A^* =_J A$.

<u>Satz 6</u> (Suslin)

Zwei disjunkte analytische Mengen A,B lassen sich durch eine Borelmenge C trennen : $A \subset C$, $B \cap C = \emptyset$.

<u>Folgerung</u>

Δ^1_1-Mengen sind Borelmengen.

(Denn, wenn $D \in \Delta^1_1$ und die Borelmenge C D und $X \setminus D$ trennt, ist $C = D$.)

<u>Beweis:</u>

Wir können A,B als nicht leer annehmen. Sei also

$A = f[Y]$, $B = g[Z]$

für stetige Abbildungen $f:Y \to X$, $g:Z \to X$.

Wir zeigen:

Wenn A und B nicht (durch eine Borelmenge) trennbar sind, ist $A \cap B \neq \emptyset$.

Setze $F_1 = Y$ und $G_1 = Z$. Seien zwei abgeschlossene Mengen F_i, G_i schon so konstruiert, daß $f[F_i]$ und $g[G_i]$ untrennbar sind.

Wir zerlegen F_i in abgeschlossene Mengen $F_i = \bigcup\{H^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ mit $d(H^j) < i^{-1}$, Wenn B^j $f[H^j]$ und $g[G_i]$ trennt, trennt $\bigcup\{B^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ die Mengen $f[F_i]$ und $g[G_i]$. Es muß also ein j geben, für das $f[H^j]$ und $g[G_i]$ untrennbar sind. Setze $F_{i+1} = H^j$. Ebenso findet man eine abgeschlossene Teilmenge $G_{i+1} \subset G_i$, $d(G_{i+1}) < i^{-1}$, $f[F_{i+1}]$ und $g[G_{i+1}]$ untrennbar.

Die Konstruktion liefert zwei Punkte y,z $\{y\} = \bigcap\{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{z\} = \bigcap\{G_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wir zeigen $f(y) = g(z)$ $(\in A \cap B)$.

Wenn $f(y) \neq g(z)$, gibt es disjunkte Umgebungen $f(y) \in U$, $g(z) \in V$. Weil g, f stetig sind und die Durchmesser der F_i, G_i gegen o gehen, gibt es ein i mit $f[F_i] \subset U$, $g[G_i] \subset V$. U trennt $f[F_i]$ und $g[G_i]$. Wid.

<u>Folgerung</u>

(A_i) sei eine Folge von paarweise disjunkten analytischen Mengen. Dann gibt es eine Folge von paarweise disjunkten Borelmengen (B_i) mit $\forall i$ $A_i \subset B_i$.

<u>Beweis:</u>

Wir trennen A_i und A_j durch eine Borelmengen C_{ij} und wählen die C_{ij} so, daß $C_{ij} \cap C_{ji} = \emptyset$. Setze $B_i = \bigcap\{C_{ij} \mid j \neq i\}$.

Wir werden später einen zweiten Beweis für Satz 6 angeben.

Die nächste Folgerung aus Satz 6 wird später noch wesentlich verschärft

(siehe

XII Coanalytische Mengen

Siebe

Π^1_1- Mengen heißen coanalytisch.

Wir studieren zuerst eine besonders typische coanalytische Menge im polnischen Raum 2^{Q}. Vermöge einer Durchzählung von Q ist 2^{Q} zum Cantoraum 2^{N} homöomorph. Weiter können wir 2^{Q} mit der Potenzmenge von Q identifizieren, eine Menge ist gleich ihrer charakteristischen Funktion.

Definition

$\mathcal{W} = \{\alpha \subset Q \mid (\alpha, <) \text{ ist wohlgeordnet}\}$

Lemma 1

$\mathcal{W}$ ist Π^1_1.

Beweis:

Man erkennt die Richtigkeit der Behauptung aus der Darstellung

$\alpha \in \mathcal{W} \leftrightarrow \forall \beta\, (\beta \subset \alpha \wedge \exists r\; r \in \beta \rightarrow \exists r\; r = \min \beta)$

Dabei ist "$\beta \subset \alpha$" Π^0_1 :

$\beta \subset \alpha \leftrightarrow \forall r\; r \in \beta \rightarrow r \in \alpha$.

Und "$r = \min \beta$" ist Π^0_1 :

$r = \min \beta \leftrightarrow r \in \beta \wedge \forall s (s \in \beta \rightarrow s = r)$.

("$r \in \beta$" ist clopen.)

Wir ordnen nun jeder Teilmenge von Q eine Ordinalzahl zu.

Definition

Für $\alpha \subset Q$ sei $\|\alpha\| :=$ Ordnungstyp von $(\alpha, <)$, wenn $\alpha \in \mathcal{W}$;
ω_1 , wenn $\alpha \notin \mathcal{W}$.

Als Ordnungstypen kommen gerade alle abzählbaren Ordinalzahlen vor.

Definition

Für Ordinalzahlen $\eta, \xi \leq \omega_1$ definieren wir:

$\eta \leq^* \xi \leftrightarrow \eta \leq \xi \wedge \eta < \omega_1$.

Lemma 2

$\|\alpha\| < \|\beta\|$ und $\|\alpha\| \leq^* \|\beta\|$ sind Π^1_1 Relationen.

(Daraus folgt Lemma 1 , denn $\alpha \in \mathcal{W} \leftrightarrow \|\alpha\| < \omega_1$.)

Beweis:

$\|\alpha\| \not< \|\beta\| \leftrightarrow$
$\alpha \notin \mathcal{W} \vee$ es gibt eine isomorphe Einbettung $f:(\alpha,<) \rightarrow (\beta,<) \leftrightarrow$
$\alpha \notin \mathcal{W} \vee \exists f \in Q^{Q}\; \forall r [r \in \alpha \rightarrow (f(r) \in \beta \wedge \forall s < r\;\; s \in \alpha \rightarrow f(r) < f(s))]$

Die rechte Seite ist Σ^1_1 , denn $f(r)$ definiert eine stetige Abbildung von $Q^{Q} \times Q$ nach Q (Q trägt die diskrete Topologie.)

$\|\alpha\| \not\leq^* \|\beta\| \leftrightarrow \exists r\;\; r \in \alpha \wedge \|(-\infty,r) \cap \alpha\| \not< \|\beta\|$.

Die rechte Seite ist Σ^1_1 , denn $(-\infty,r) \cap \alpha$ definiert eine stetige Abbildung von $Q \times 2^{Q}$ nach 2^{Q} .

Folgerung

$\mathcal{W}$ ist Vereinigung von ω_1 vielen Borelmengen.

Beweis:

$\mathcal{W}$ ist Vereinigung der $\mathcal{W}_\eta$, $\eta < \omega_1$, wobei $\mathcal{W}_\eta = \{\alpha \mid \|\alpha\| < \eta\}$.
$\mathcal{W}_\eta$ ist offenbar Π^1_1 und wegen $\alpha \in \mathcal{W}_\eta \leftrightarrow \|\alpha\| \not\leq^* \eta$ auch Σ^1_1.
Nach XI 6 sind also alle $\mathcal{W}_\eta$, $\eta < \omega_1$, Borelmengen.

Bemerkung

Daß die $\mathcal{W}_\eta$ Borelmengen sind , kann man auch leicht durch Induktion nach η zeigen:

$\alpha \in \mathcal{W}_\eta \;\leftrightarrow\; \exists\, \xi < \eta\ \forall r (r \in \alpha \;\rightarrow\; (-\infty, r) \cap \alpha \in \mathcal{W}_\xi)$ -.

<u>Lemma 3</u>

$\mathcal{W}$ ist Durchschnitt von ω_1 vielen Borelmengen.

<u>Beweis:</u>

$\mathcal{W}$ ist Durchschnitt der Borelmengen

$B_\eta = \{ \alpha \mid \alpha \notin \mathcal{W}_{\eta+1} \rightarrow \exists r\ (-\infty, r) \cap \alpha \in \mathcal{W}_{\eta+1} \setminus \mathcal{W}_\eta \}, \quad \eta < \omega_1.$

Daß $\mathcal{W}$ in allen B_η enthalten ist, ist klar. Wenn $\alpha \notin \mathcal{W}$, wählt man $\eta < \omega_1$ so groß, daß für alle $r \in \mathbb{Q}$

$$\|(-\infty, r) \cap \alpha\| < \omega_1 \;\rightarrow\; \|(-\infty, r) \cap \alpha\| < \eta \quad .$$

Dann ist $\alpha \notin B_\eta$.

Wir führen nun die Untersuchung beliebiger Π^1_1-Mengen auf die Untersuchung von $\mathcal{W}$ zurück.

<u>Satz 4</u>

C sei Teilmenge des polnischen Raumes X. Es sind äquivalent

a) $C \in \Pi^1_1(X)$

b) $C = f^{-1}(\mathcal{W})$ für eine Borel meßbare Funktion $f : X \rightarrow 2^{\mathbb{Q}}$.

<u>Beweis:</u>

b) $\Rightarrow$ a) folgt aus X Eigenschaft 2.

Der Beweis der anderen Richtung braucht einige Vorbereitungen.

<u>Definition</u>

Eine Menge $T \subset {}^{\omega}\mathbb{N}$ von endlichen Folgen natürlicher Zahlen heißt Baum, wenn mit einer Folge auch jedes Anfangsstück zu T gehört.

Ein Baum ist fundiert, wenn jede nichtleere Teilmenge eine maximale Folge enthält. Das ist äquivalent zu jeder der beiden folgenden Bedingungen:

Es gibt keine unendliche echt aufsteigende Folge $t_1 \subsetneq t_2 \subsetneq t_3 \subsetneq \ldots$ von Elementen von T.

Es gibt kein $\alpha \in \mathcal{N}$ mit $\forall k\ \alpha{\restriction}k \in T$.

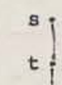
<u>Lemma 5</u>

Auf ${}^{\omega}\mathbb{N}$ gibt es eine lineare Ordnung ∇ mit:

Ein Baum T ist genau dann fundiert, wenn (T, ∇) wohlgeordnet ist.

Beweis: Wir nehmen für ∇ die Kleene-Brouwer Ordnung:

$s \nabla t \;\leftrightarrow\; t \subsetneq s$

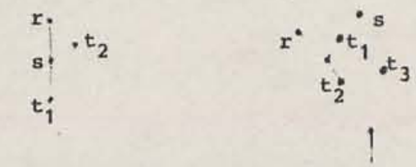


oder

es gibt $i \in \mathbb{N}$ mit $s(i) < t(i)$ und $s(j) = t(j)$ für alle $j < i$.

∇ ist offenbar total und irreflexiv, Die Transitivität macht man sich an den beiden folgenden Figuren klar, die alle Fälle enthalten:

$r \nabla s \nabla t \;\rightarrow\; r \nabla t$

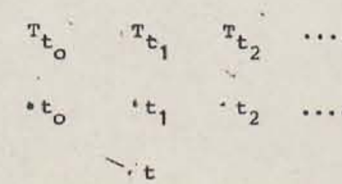


Wenn (T, ∇) wohlgeordnet ist, ist T fundiert. Denn ein ∇-minimales Element von S ist immer eine maximale Folge in S.

Sei umgekehrt T ein fundierter Baum.

Für $t \in T$ sei $T_t = \{ s \in T \mid t \subset s \}$. Wir müssen zeigen, daß $T = T_\emptyset$ bzgl. ∇ wohlgeordnet ist.

Wenn $T_\emptyset$ nicht wohlgeordnet ist, gibt es ein maximales $t \in T$, für das T_t nicht wohlgeordnet ist. $t_0 \nabla t_1 \nabla t_2 \nabla \ldots$ seien die unmittelbaren Nachfolger von t in T. Die T_{t_i} sind ∇-wohlgeordnet. Weiter ist (elementweise) $T_{t_0} \nabla T_{t_1} \nabla T_{t_2} \nabla \ldots \nabla t$. Also ist $T_t = T_{t_0} \cup T_{t_1} \cup T_{t_2} \cup \ldots \cup \{t\}$, als "wohlgeordnete Vereinigung von Wohlordnungen" wieder wohlgeordnet. Widerspruch.



Definition

Wir fixieren eine isomorphe Einbettung $\nu : ({}^{\omega}N, \nabla) \to (\mathbb{Q}, <)$.

Bemerkung:

Man kann ein solches ν explizit angeben:

$$\nu(k_1-1, k_2-1, \ldots, k_n-1) = -\left(\frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{k_1+\ldots+k_n}}\right)$$

Lemma

a) und b) von Satz 4 sind äquivalent zu

c) C ist definiert durch ein "Sieb" von abgeschlossenen (offenen) Mengen,

d.h. es gibt eine Familie $(S_r)_{r \in \mathbb{Q}}$ von abgeschlossenen (offenen) Mengen $S_r \subset X$ mit

$$x \in C \Leftrightarrow \{r \mid x \in S_r\} \in \mathcal{W} .$$

Beweis:

c) $\Rightarrow$ b)

C sei definiert durch das Sieb (S_r). Dann ist $C = f^{-1}(\mathcal{W})$, wobei

$f(x) = \{ r \mid x \in S_r \}$, $f: X \to 2^{\mathbb{Q}}$. Wenn die S_r aus Δ^0_2 sind, ist - wie man leicht nachrechnet, f 2-Borel meßbar.

a) $\Rightarrow$ c)

Wenn C coanalytisch ist, ist nach XI 3 $X \setminus C$ von der Form

(Fs) für eine Familie von abgeschlossenen (offenen) Mengen $Fs \subset X$, $s \in {}^{\omega}N$. Wir können annehmen, daß $Fs \subset Ft$ für $s \supset t$. Dann ist

$x \in X \setminus C \Leftrightarrow \{ s \mid x \in Fs$ enthält eine unendliche echt aufsteigende Folge $s_1 \subsetneq s_2 \subsetneq \ldots$

$\Leftrightarrow$ Der Baum $\{ s \mid x \in Fs$ ist nicht ∇-wohlgeordnet.

$\Leftrightarrow \nu(s) \mid x \in Fs \} \notin$.

$\Leftrightarrow r \mid x \in S_r \} \notin$

wobei $S_r = F_{\nu^{-1}(s)}$, wenn $r \in \nu[N]$; $S_r = \emptyset$ sonst.

Damit ist das Lemma und Satz 4 bewiesen.

Folgerungen

1 $\mathcal{W}$ ist nicht analytisch.

2 Jede coanalytische Menge ist Durchschnitt und Vereinigung von jeweils ω_1 vielen Borelmengen.

Beweis:

1 Sonst wäre nach unserem Satz jede coanalytische Menge analytisch. Das widerspricht aber X 2(Folgerung).

2 Jede coanalytische Menge ist von der Form $C = f^{-1}(\mathcal{W})$, f Borel meßbar. C ist Vereinigung der Borelmengen $f^{-1}(\mathcal{W}_\eta)$ und - wenn η Durchschnitt der Borelmengen B_η, $\eta < \omega_1$, ist - Durchschnitt der Borelmengen $f^{-1}(B_\eta)$.

Satz 6

Jede Σ^1_2-Menge ist Vereinigung von ω_1 vielen Borelmengen.

Beweis:

Die Σ^1_2-Mengen D ist von der Form

$x \in D \Leftrightarrow \exists \alpha \; C(x,\alpha)$

für eine coanalytische Teilmenge C von $X \times \mathcal{N}$. C sei Vereinigung der Borelmengen C_η, $\eta < \omega_1$; die analytischen Mengen

$x \mid \exists \alpha \; C_\eta(x,\alpha) \}$

Vereinigung der Borelmengenn B^ξ_η, $\xi < \omega_1$. Dann ist

$D = B^\xi_\eta \mid \eta, \xi < \omega_1 \}$.

Folgerung

Jede überabzählbare Σ^1_2-Menge hat die Mächtigkeit ω_1 oder 2^{ω_1} .

Definition

Die coanalytischen Menge C sei von der Form $f^{-1}(\ ')$, f Borel meßbar.

Die Borelmengen $C_\eta = f^{-1}(\ _\eta)$ sind "die" Konstituenten von C.

Satz 7 (Überdeckungssatz)

A sei eine analytische Teilmenge von 2^{Ω}. Wenn $A \subset W$, gibt es ein $\eta < \omega_1$ mit $A < W_\eta$.

Beweis:

Sonst wäre $\alpha \in W \leftrightarrow \exists \beta \;\; \beta \in A \wedge \|\beta\| \geq \|\alpha\|$

und W wäre analytisch.

Folgerung

C_η, $\eta < \omega_1$, seien die Konstituenten der coanalytischen Menge $C \subset X$, $A \subset X$ analytisch. Wenn $A \subset C$, gibt es ein $\eta < \omega_1$ mit $A \subset C_\eta$. Insbesondere ist C genau dann Borel, wenn $C = C_\eta$ für ein $\eta < \omega_1$.

Beweis:

Wenn $C_\eta = f^{-1}(W_\eta)$, f Borel meßbar, ist $f[A] \subset W$ analytisch. Es gibt also ein $\eta < \omega_1$ mit $f[A] \subset W_\eta$. Es folgt $A \subset C_\eta$.

Der Zusatz folgt aus XI 6.

Der folgende Satz verschärft XI 6 (disjunkte analytische Mengen lassen sich Borel trennen.). Wenn man voraussetzt, daß die $\;_\eta$ Borel sind, erhält man einen unabhängigen Beweis.

Satz 8

Zu jeder analytischen Menge A gibt es eine Folge $(A^\eta)_{\eta < \omega_1}$ von Borelmengen, so daß A von jeder disjunkten analytischen Menge durch eines der A^η getrennt wird.

Beweis:

(B_η), $\eta < \omega_1$, seien die Konstituenten von $X \setminus A$. Setze $A^\eta = X \setminus B_\eta$.

Die Behauptung folgt nun aus dem letzten Satz.

Normierte Mengen

Definition

Γ sei eine Punktklasse. C Teilmenge des polnischen Raumes X. Eine Γ-Norm für C ist eine Abbildung $|\;|: X \to \{\eta \mid \eta \leq \omega_1\}$, die

i) $x \in C \leftrightarrow |x| < \omega_1$

ii) $|x| < |y|$, $|x| \leq^* |y|$ sind Γ-Relationen.

erfüllt..

Anforderungen [illegible]
bei [illegible].
Jede Π^1 Norm [illegible] gibt
ein [illegible].

Satz 9

a) Jede Π^1_1-Menge hat eine Π^1_1-Norm.

b) Jede Σ^1_2-Menge hat eine Σ^1_2-Norm.

Beweis:

a) Für eine Borelfunktion $f: X \to 2^{\Omega}$ sei $C = f^{-1}(\;)$. $|x| = \|f(x)\|$ ist eine Π^1_1-Norm für C.

b) Die Σ^1_2-Menge D habe die Gestalt $x \in D \leftrightarrow \exists \alpha \; C(x,\alpha)$ für eine Π^1_1-Menge C. $|\;|^\circ$ sei eine Π^1_1-Norm für C. Dann ist

$$|x| = \min_\alpha |(x,\alpha)|^\circ$$

eine Σ^1_2-Norm für D. Denn:

$$|x| < |y| \leftrightarrow \exists \alpha \; \forall \beta \;\; |(x,\alpha)|^\circ < |(x,\beta)|^\circ$$

$$|x| \leq^* |y| \leftrightarrow \exists \alpha \; \forall \beta \;\; |(x,\alpha)|^\circ \leq^* |(x,\beta)|^\circ \; .$$

Satz 1o (Π^1_1 und Σ^1_2 haben die Reduktionseigenschaft)

(C_i) sei eine Folge von Π^1_1-Mengen (Σ^1_2-Mengen). Dann gibt es eine Folge (D_i) von disjunkten Π^1_1-Mengen (Σ^1_2-Mengen) mit

$D_i \subset C_i$ und $\bigcup\{D_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{C_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Beweis:

$|\ |_i$ sei Π^1_1-Norm (Σ^1_2-Norm) für C_i. Wir setzen

$$x \in D_i \leftrightarrow \forall j < i \ |x|_j > |x|_i \ \wedge \ \forall j > i \ |x|_i \leq^* |x|_j$$

Die D_i sind offensichtlich Π^1_1-Mengen (Σ^1_2-Mengen).

Wenn $x \in D_i$ ist $|x|_i \leq^* |x|_{i+1}$, also $|x|_i < \omega_1$ und $x \in C_i$.

Die D_i sind disjunkt, denn für $i < j$ kann nicht gleichzeitig $|x|_i < |x|_j$ und $|x|_i \leq^* |x|_j$ gelten.

Wenn $x \in \bigcup \{ C_i \mid i \in \mathbb{N} \}$, wählen wir das kleinste i mit $|x|_i = \alpha$, wobei $\alpha = \min\limits_j |x|_j$. Dann ist $x \in D_i$.

Folgerung

1 Zwei disjunkte Σ^1_1-Mengen lassen sich durch eine Δ^1_1-Menge trennen

2 Zwei disjunkte Σ^1_2-Mengen lassen sich durch eine Π^1_2-Menge trennen.

Beweis wie Satz VI 1 (Folgerung 1). 1 ist ein Sonderfall von XI 6.

Folgerung

3 Es gibt disjunkte Π^1_1-Mengen, die sich nicht durch eine Δ^1_1-Menge trennen lassen. (Also hat Σ^1_1 nicht die Reduktionseigenschaft)

4 Es gibt disjunkte Σ^1_2-Mengen, die sich nicht durch eine Δ^1_2-Mengentrennen lassen. (Also hat Π^1_2 nicht die Reduktionseigenschaft)

Beweis wie VI 2 aus X 2 und dem letzten Satz.

Zum Schluß des Kapitels verschärfen wir noch Satz 7.

Satz 11

$|\ |$ sei Π^1_1-Norm von C. $A \subset C$ analytisch. Dann ist $|\ |$ auf A durch eine abzählbare Ordinalzahl beschränkt.

Beweis:

Sonst wäre

$$\alpha \in \mathcal{W} \leftrightarrow \exists f \in X^{\Omega} \ \forall r \in \alpha (f(r) \in A \ \wedge \ \forall s < r \ |f(r)| \leq^* |f(s)|$$

und $\mathcal{W}$ also analytisch.

XII Uniformisierungssätze

(X,Y..bezeichnen polnische Räume)

Definition

R uniformisiert $B \subset X \times Y$, wenn $R \subset B$, $pr_1[R] = pr_1[B]$ und die erste Projektion pr_1 injektiv auf R ist. Anders ausgedrückt

i) $R(x,y) \rightarrow B(x,y)$

ii) $\exists y\, B(x,y) \rightarrow \exists y\, R(x,y)$

iii) $R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow y = z$

R ist der Graph einer Auswahlfunktion $f: pr_1[B] \rightarrow Y$, die für jedes $x \in pr_1[B]$ eineElement $f(x)$ aus $B^{(x)} = \{ y \mid (x,y) \in B \}$ auswählt.

Uniformisierungssätze behaupten die Existenz einfacher Uniformisierender. Zuerst ein einfaches Beispiel, das wir später noch verbessern werden,:

Satz 1

Jede Borelrelation ist durch eine Π^1_1-Relation uniformisierbar.

Lemma

$$T \rightarrow \tilde{T} = \{ \alpha \mid \forall k\ \alpha{\restriction}k \in T \} \quad \text{und}$$

$$F \mapsto \{ \alpha{\restriction}k \mid \alpha \in F \}$$

definieren eine Bijektion zwischen der Menge aller Bäume T ohne maximale Elemente und allen abgeschlossenen Teilmengen F von $\mathcal{N}$.

(Beweis klar)

<u>Lemma 2</u>

$g: \mathcal{N} \to X$ sei stetig. Dann gibt es eine Π^1_1-Menge $C \subset \mathcal{N}$, auf der g injektiv ist mit $g[\mathcal{N}] = g[C]$.

Beweis:

Wir müssen aus jeder der Mengen $g^{-1}(x)$ ein Element auswählen. Wenn $g^{-1}(x) = \tilde{T}$, wählen wir den "linkesten" Ast von T. Genauer

$\alpha \in C \quad \leftrightarrow \quad \forall \beta \quad g(\alpha) = g(\beta) \wedge \alpha \neq \beta \quad \to \quad \exists k \quad \alpha \restriction k \;\underset{\circ}{\nabla}\; \beta \restriction k$.

C ist offenbar coanalytisch. ($\underset{\circ}{\nabla}$ ist die Kleene-Brouwer Ordnung.)

<u>Beweis: von Satz 1:</u>

Wenn $B \subset X \times Y$ abzählbar ist, können wir die uniformisierende Relation R beliebig (Auswahlaxiom) wählen. Wenn B überabzählbar und Borel ist, gibt es einen Unterraum $B' \subset B$ mit $B \setminus B'$ abzählbar und einen $(1,\eta)$-Homöomorphismus $h: \mathcal{N} \to B'$. Mit Lemma 2 finden wir eine Π^1_1-Menge $C \subset \mathcal{N}$, auf der $pr_1 h$ injektiv ist, mit $pr_1[B'] = pr_1 h[C]$. $h[C]$ ist Π^1_1 (nach X Eigenschaft 8). Wir setzen $h[C]$ zu einer Uniformisierenden $R \subset B$ fort. Weil $R \setminus h[C]$ abzählbar ist, ist R Π^1_1.

<u>Diskussion</u>

1 Es gibt eine Borel Relation $B \subset X \times Y$, die nicht Σ^1_1-uniformisierbar ist.

2 Es gibt eine analytische Relation $B \subset X \times Y$, die nicht Π^1_1-uniformisierbar ist.

Beweis:

1 (Wenn X überabzählbar ist) gibt es analytische Mengen $C_1, C_2 \subset X$, die sich nicht nicht durch analytische Mengen reduzieren lassen. Wir schreiben

$x \in C_i \;\leftrightarrow\; \exists y \; E_i(x,y)$,

für geeignete Borel Relationen $E_i \subset X \times Y_i$. Y sei die disjunkte

Summe von Y_1 und Y_2. $E_1 \cup E_2$ läßt sich nicht durch eine Σ^1_1-Relation uniformisieren. Denn wenn R $E_1 \cup E_2$ uniformisiert, gilt für $D_i = \{ x \mid \exists y \in Y_i \; R(x,y) \}$

$D_i \subset C_i$ und $D_1 \dot{\cup} D_2 = C_1 \cup C_2$. Die D_i können nicht beide analytisch sein, R ist also nicht analytisch.

2 Die Π^1_1-Mengen C_1, C_2 seien disjunkt und nicht Δ^1_1-trennbar. Dann sind $X \setminus C_1$ und $X \setminus C_2$ nicht durch Π^1_1-Relationen reduzierbar. Die analytische Relation $B = (X \setminus C_1) \times \{1\} \cup (X \setminus C_2) \times \{2\} \subset X \times \mathbb{N}$ läßt sich nicht Π^1_1-uniformisier en. Denn wenn R B uniformisiert, gilt für $D_i = \{ x \mid R(x,i) \}$ $D_i \subset C_i$ und $D_1 \dot{\cup} D_2 = C_1 \cup C_2$. Die D_i und also R können nicht coanalytisch sein.

<u>Der Uniformisierungssatz von Lusin</u>

<u>Satz 3</u> (Lusin)

Jede Borelrelation $B \subset X \times Y$, deren "Fasern" $B^{(x)}$ alle abzählbar sind, ist durch eine Borelrelation uniformisierbar.

Daraus: [illegible] Satz : siehe [illegible]

<u>Folgerung</u>

Für jede Borelrelation $B \subset X \times Y$, deren Fasern abzählbar sind, ist $pr_1[B]$ Borel und gibt es eine Borel meßbare Funktion $f: pr_1[B] \to Y$ mit $f(x) \in B^{(x)}$.

(das folgt aus dem Satz mit XI 7 Folgerung 3)

<u>Folgerung</u> (Verallgemeinerung von XI 7 Folgerung 1)

A sei Borelunterraum von X, $f: A \to Y$ Borelmeßbar, alle Fasern $f^{-1}(y)$ seien abzählbar. Dann ist $f[A]$ Borel.

Beweis: $B = \{ (f(a), a) \mid a \in A \} \subset Y \times X$ ist zu A Borel homöomorph.und also Borel. Die $B^{(y)}$ sind alle abzählbar; wir schließen, daß $pr_1[B] = f[A]$ Borel ist.

Zu Beweis von Satz 3 brauchen wir den folgenden

<u>Satz 4</u>

$f: Z \to X$ sei eine stetige Abbildung. Dann gilt

a) $\{x \mid |f^{-1}(x)| \geq 2\}$ ist Σ^1_1

b) $\{x \mid |f^{-1}(x)| = 1\}$ ist Π^1_1

c) $\{x \mid f^{-1}(x)$ überabzählbar $\}$ ist Σ^1_1

d) $\{x \mid f^{-1}(x)$ nichtleer und abzählbar $\}$ ist Π^1_1.

Kur. I S 493 ff

Beweis:

a) Klar ersichtlich aus der Darstellung

$$|f^{-1}(x)| \geq 2 \leftrightarrow \exists z,y \quad z \neq y \wedge f(z) = x \wedge f(y) = x .$$

b) (G_i) sei eine Basis von Z. Wir betrachten die Π^1_1-Mengen

$$A_i = \{x \mid \forall z \quad f(z) = x \to z \in \overline{G}_i\}$$

$$B_i = \{x \mid \forall z \quad f(z) = x \to z \notin \overline{G}_i\} \quad , \quad i \in \mathbb{N} .$$

Nach XI 1o (Π^1_1-Reduktion) gibt es Π^1_1-Mengen $A'_i \subset A_i$, $B'_i \subset B_i$ $A'_i \cap B'_i = \emptyset$
mit $A'_i \cup B'_i = A_i \cup B_i$. Wir behaupten

$$\begin{aligned} |f^{-1}(x)| = 1 \leftrightarrow & \forall z\, [\exists i\, (x \notin B'_i \wedge z \notin \overline{G}_i) \to f(z) \neq x] \quad \wedge \\ & \forall z\, [\forall i\, (x \in A'_i \to z \in \overline{G}_i) \to f(z) = x] \quad \wedge \\ & \forall i_o, \dots i_k (\overline{G}_{i_o} \cap \dots \cap \overline{G}_{i_k} = \emptyset \to x \in B'_{i_o} \cup \dots \cup B'_{i_k}) \\ & \forall k\, \exists i\, (x \in A'_i \wedge d(\overline{G}_i) < k^{-1}) \end{aligned}$$

Sei einerseits $f^{-1}(x) = \{z_o\}$. Dann ist für alle i

$$z_o \in \overline{G}_i \leftrightarrow x \in A_i \leftrightarrow x \notin B_i \leftrightarrow x \in A'_i \leftrightarrow x \notin B'_i \quad .$$

Daraus folgt leicht die rechte Seite der behaupteten Äquivalenz.

Sei andererseits die rechte Seite wahr für $x \in X$.

Weil A'_i und B'_i disjunkt sind, folgt aus den letzten beiden Konjunktionsgliedern, daß $\{\overline{G}_i \mid x \in A'_i\}$ Subbasis eines Cauchyfilters

ist. Wenn $\{z_o\} = \bigcap\{\overline{G}_i \mid x \in A'_i\}$ ist $f(z_o) = x$ (zweites Konjunktionsglied). Sei $z \neq z_o$. Wir wählen ein i mit $x \in A'_i$ und $z \notin \overline{G}_i$. Dann ist $x \notin B'_i$ und – erstes Konjunktionsglied – $f(z) \neq z_o$.
Damit ist b) bewiesen, denn die rechte Seite unserer Äquivalenz ist offensichtlich Π^1_1.

c) Die Fasern $f^{-1}(x)$ sind abgeschlossen. Nach III 1 ist $f^{-1}(x)$ genau dann überabzählbar, wenn $f^{-1}(x)$ einen perfekten abgeschlossenen Unterraum enthält. Die abgeschlossenen perfekten Unterräume von X sind die Abschlüsse perfekter abzählbarer Unterräume. Also ist $f^{-1}(x)$ überabzählbar gdw.

$$\exists \alpha \in Z^{\mathbb{N}} \quad [\forall i \neq j \quad \alpha(i) \neq \alpha(j) \wedge f(\alpha(i)) = x) \wedge$$
$$\forall i \forall k \exists j \neq i \quad \alpha(i) \in G_k \to \alpha(j) \in G_k).$$

Daraus folgt die Behauptung.

d) (G_k) sei eine Basis von Z. Es ist

$$o < |f^{-1}(x)| \leq \aleph_o \leftrightarrow |f^{-1}(x)| \leq \aleph_o \wedge \exists k\, |(f|_{G_k})^{-1}(x)| = 1 \quad .$$

Die Behauptung folgt nun aus c) und b).

<u>Anmerkungen</u>

1 Satz 4 gilt für Borel meßbare $f: A \to X$, A Borel in Z.

2 Jede Π^1_1-Menge ist von der Form b). Kur. I, S 496

Beweis: Der Graph G_f ist Borel in $Z \times X$ (XI 7 Folgerung 3). Nach VII 1 gibt es eine stetige injektive Abbildung h eines polnischen Raumes W auf G_f. $pr_2 h$ ist stetig, $(pr_2 h)^{-1}(x)$ hat die gleiche Mächtigkeit wie $f^{-1}(x)$. 1 folgt also aus Satz 4.

Wenn $C \subset X$ Π^1_1 ist (o.E. $C \neq X$), bilden wir $\mathcal{N}$ durch g stetig auf $X \setminus C$ ab. Wir setzen $Z = X \dot{\cup} \mathcal{N}$ und $f = id_X \cup g$. Es ist dann

$$x \in C \leftrightarrow |f^{-1}(x)| = 1 \quad .$$ Weil f stetig ist, gilt 2.

<u>Folgerung</u>

$B \subset X \times Y$ sei Borel, alle Fasern $B^{(x)}$ abzählbar. Dann ist

$\{x \mid |B^{(x)}| = 1\}$ Borel.

Beweis: $\{x \mid |B^{(x)}| = 1\}$ ist Π^1_1 nach Satz 4 b (+Anmerkung). Für $C = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in B \wedge (x,z) \in B \wedge \neq z\} \subset X \times (Y \times Y)$ ist $|B^{(x)}| \neq 1 \leftrightarrow (C^{(x)}$ nicht leer und abzählbar$) \vee B^{(x)} = \emptyset$. Nach Satz 4 ist das Komplement von $\{x \mid |B^{(x)}| = 1\}$ auch Π^1_1. Aus XI 6 folgt die Behauptung.

<u>Beweis von Satz 3</u>

1 Wir nehmen zunächst B als abgeschlossen an. (G_k) sei Basis von $X \times Y$. Weil alle $B^{(x)}$ abzählbar und abgeschlossen sind, gibt es in jeder Faser einen isolierten Punkt. Wir wählen aus jedem $B^{(x)}$ den isolierten Punkt y, für den sich (x,y) von $\{x\} \times (B^{(x)} \setminus \{y\})$ durch ein G_k mit minimalem Index k trennen läßt. D.h. wenn wir setzen

$R(x,y) \leftrightarrow$

$$\exists i\, [(x,y) \in G_i \wedge |(G_i \cap B)^{(x)}| = 1 \wedge \forall j < i\, |(G_j \cap B)^{(x)}| \neq 1],$$

uniformiert R B. Nach der letzten Folgerung ist R Borel.

2 Sei nun B Borel. Es gibt eine injektive stetige Abbildung h eines polnischen Raumes Z auf B (denn wir können $B \neq \emptyset$ annehmen). h habe die Komponenten $(f(z), g(z)) = h(z)$, Wir betrachten

$$C = \{(f(z), z) \mid z \in Z\} \subset X \times Z.$$

C ist abgeschlossen. S sei Borel und uniformisiere C. Dann uniformisiert $hpr_2[S]$ unser B. $hpr_2[S]$ ist als injektives stetiges Bild von S Borel.

<u>Bemerkung</u>

Das Beispiel 2 in der Diskussion von Satz 1 gibt eine Σ^1_1-Relation, deren Fasern höchstens zwei-elementig sind, und die weder Π^1_1 noch

Σ^1_1-uniformisierbar ist.

Der folgende Satz klärt, welche Borel relationen abzählbare Fasern haben.

<u>Satz 5</u>

Alle Fasern der analytischen Relation $B \subset X \times Y$ seien abzählbar. Dann gibt es eine Folge von Borel meßbaren Funktionen $f_i : X \to Y$ mit $B \subset \bigcup\{G_{f_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

(Dieser Satz gilt nicht mehr für Π^1_1-Relationen. Denn sonst wäre mit B auch immer $pr_1[B] = \{x \mid \exists i\ f_i(x) \in B\}$ Π^1_1. Aus dem Uniformisierungssatz von Kondo wird aber folgen, daß es coanalytische B gibt, deren Fasern alle höchstens ein-elementig sind, und deren Projektion nicht coanalytisch ist.)

<u>Beweis:</u>

1 Zuerst nehmen wir an, daß alle Fasern von B abgeschlossen sind. (G_k) sei eine Basis von $X \times Y$. Wir definieren rekursiv eine absteigende Folge $(B_\eta)_{\eta<\omega_1}$. $B_o = B$; wenn alle B_ξ für $\xi < \eta$ definiert sind, uniformisiert die Borelrelation

$R_\eta = \{(x,y) \mid \exists i[(x,y) \in G_i \wedge |(G_i \cap B_{<\eta})^{(x)}| = 1 \wedge \forall j < i\, |(G_j \cap B_{<\eta})^{(x)}| \neq 1]\}$

$B_{<\eta} = \bigcup\{B_\xi \mid \xi < \eta\}$. Wir setzen $B_\eta = B_{<\eta} \setminus R_\eta$. Die Fasern von B_η sind wieder abgeschlossen.

Sei $x \in X$. $pr_1^{-1}(x) \cap B_\eta$ entsteht aus $pr_1^{-1}(x) \cap B_{<\eta}$ durch Entfernen eines Punktes (x,y), der von $(pr_1^{-1}(x) \cap B_{<\eta}) \setminus \{(x,y)\}$ durch ein G_i getrennt ist. Dabei kann -für festes x- jedes i nur ein mal vorkommen. Man sieht nun leicht, daß, wenn (x,y) isoliert in $pr_1^{-1}(x) \cap B_\eta$ ist, $(x,y) \in B_{\eta+\omega}$.

Offensichtlich ist -weil alle Fasern von B abzählbar sind- $B = \dot{\bigcup}\{R_\eta \mid \eta < \omega_1\}$. Wenn wir zeigen können, daß schon

$B = \{ R_\eta \mid \eta < \xi \}$ für ein $\xi < \omega_1$, sind wir fertig. Wir können nämlich alle R_η zu Graphen von Borel meßbaren Funktionen $f_\eta : X \to Y$ fortsetzen.

$|x,y|$ möge die kleinste Ordinahlzahl $\eta < \omega_1$ bezeichnen mit $(x,y) \notin B_\eta$. Wir führen die Annahme, daß beliebig große abzählbare Ordizahlen als Werte von $|\ \ |$ vorkommen zum Widerspruch. Dazu defnieren wir eine stetige Abbildung f von $\mathcal{C}$ nach $X \times Y$ mit Hilfe eines regulären Systems $(Fs)_{s \in {}^{\omega}2}$ von nicht leeren abgeschlossenen Teilmengen von $X \times Y$. Darüberhinaus soll für alle k gelten $\quad (\overset{\circ}{F} = \text{Inneres von } F)$

$$\forall \eta < \omega_1 \ \exists x \ \exists (y_s)_{s \in {}^k 2} \ \forall s \in {}^k 2 \quad (x, y_s) \in \overset{\circ}{F}s \ \wedge \ |x, y_s| > \eta .$$

Wegen unserer Annahme können wir $F\emptyset = X \times Y$ setzen.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ und Fs für alle $s \in {}^k 2$ definiert.

Für jedes $\eta < \omega_1$ gibt es ein x^η und eine Familie (y_s^η) mit $(x^\eta, y_s^\eta) \in \overset{\circ}{F}s$ und $|x^\eta, y_s^\eta| > \eta + \omega$, $s \in {}^k 2$. Nach unsere Vorbemerkung ist (x^η, y_s^η) nicht isoliert in $pr_1^{-1}(x) \cap B_\eta$. Es gibt also $y_{s,o}^\eta \neq y_{s,1}^\eta$ mit $(x^\eta, y_{s,i}^\eta) \in \overset{\circ}{F}s, |(x^\eta, y_{s,i}^\eta)| > \eta$. Wir trennen $y_{s,o}^\eta$ und $y_{s,1}^\eta$ durch zwei Basismengen $O_{s,o}^\eta$, $O_{s,1}^\eta$. Unsere Basis ist abzählbar, Also gibt es für alle $s \in {}^k 2$ zwei offene Mengen $O_{s,o}$, $O_{s,1}$, so daß für beliebig große $\eta < \omega_1$ $\quad O_{s,i} = O_{s,i}^\eta$. Wir können es so einrichten, daß $d(O_{s,i}) < k^{-1}$ und $\overline{O}_{s,o} \cap \overline{O}_{s,1} = \emptyset$. Nun setzen wir

$$Fs^\frown \langle i \rangle = \overline{O}_{s,i} .$$

Unsereregulären System definiert eine stetige Injektion f von $\mathcal{C}$ in $X \times Y$. Alle Fs enthalten Elemente von B, also gehört jedes $\{f(\alpha)\} = \bigcap \{Fs \mid s \subset \alpha\}$ zu B. Weiterhin ist $pr_1 f$ konstant. Denn, wenn $pr_1 f(\alpha_o) \neq pr_1 f(\alpha_1)$, müßte es $s_i \subset \alpha_i$ mit $pr_1(Fs_o) \cap pr_1(Fs_1) = \emptyset$ geben. Das widerspricht aber unserer Forderung an (Fs).

Damit ist gezeigt, daß B eine überabzählbare Faser hat . Wid.

2 Wie im Beweis von Satz 3 kann man nun das Ergebnis von 1 auf beliebige Borelrelationen B mit abzählbaren Fasern übertragen.

3 Wir nennen eine Relation $C \subset X \times Y$ klein, wenn C in einer Borelrelation mit abzählbaren Fasern enthalten ist. Wegen 2 genügt es zu zeigen, daß analytische Relationen mit abzählbaren Fasern klein sind.

<u>Definition</u>

Eine endliche Famlie $(B_i)_{i<n}$ von Relationen heißt groß, wenn es zu jeder Familie $(D_i)_{i<n}$ von Borel relationen $B_i \subset D_i$ ein x gibt, für das alle Fasern $D_i^{(x)}$ überabzählbar sind.

<u>Lemma</u>

a) $(B_i)_{i<n}$ sei eine große Familie von analytischen Relationen. Es gibt dann offene Mengen $O_{i,j}$, $i<n$, $j<2$, für die $(B_i \cap O_{i,j})_{i<n, j<2}$ groß ist, und für alle i $\quad O_{i,o} \cap O_{i,1} = \emptyset$.

b) $(B_i)_{i<n}$ sei eine große Familie, $B_i = \bigcup \{ B_i^j \mid j \in \mathbb{N} \}$. Es gibt dann eine Folge $(j_i)_{i<n}$, für die $(B_i^{j_i})_{i<n}$ groß ist.

<u>Beweis</u>

a) $(C_i^\eta)_{\eta<\omega_1}$ seien die Konstituenten von $(X \times Y) \setminus B_i$. Für $D_i^\eta = (X \times Y) \setminus C_i^\eta$ gilt: (XII 7 Folgerung)

$B_i \subset D_i^\eta \subset D_i^\xi$ für $\xi < \eta$; die D_i^η sind Borel ; zu jeder coanalytischen Obermenge C von B_i gibt es ein $\eta < \omega_1$ mit $D_i^\eta \subset C$.

Für jedes $\eta < \omega_1$ gibt es ein $x^\eta \in X$ für daß alle $D_i^{\eta (x^\eta)}$ überabzählbar sind. Wir finden für jedes i disjunkte offenenMengen $O_{i,o}^\eta$, $O_{i,1}^\eta$ aus einer festen abzählbaren Basis von $X \times Y$, für die die $(D_i^\eta \cap O_{i,j}^\eta)^{(x^\eta)}$ $\quad i<n, j<2$, überabzählbar sind . (Siehe III 1 Beweisvariantee 1). Für jedes $\eta < \omega_1$ gibt es nur abzählbare viele Möglichkeiten $(O_{i,j}^\eta)_{i<n, j<2}$ zu wählen. Es gibt also eine Familie $(O_{i,j})$, so daß $(O_{i,j}) = (O_{i,j}^\eta)$ für beliebig große $\eta < \omega_1$.

Für alle $\eta < \omega_1$ gibt es ein $x \in X$, für das alle $(D_i^\eta \cap O_{i,j})^{(x)}$ überabzählbar sind.

Um zu zeigen, daß $(B_i \cap O_{i,j})$ groß ist, geben wir uns eine Familie

$(D_{i,j})_{i<n,j<2}$ von Borelmengen $D_{i,j} \supset B_i \cap O_{i,j}$ vor. Wir können annehmen, daß $D_{i,j} \subset O_{i,j}$. $D_i = ((X \times Y) \setminus (O_{i,o} \cup O_{i,1})) \cup D_{i,o} \cup D_{i,1}$ ist Borel und Obermenge von B_i. Wirwählen $\eta < \omega_1$ so groß, daß $D_i^\eta \subset D_i$ für alle i. Es gibt nun ein $x \in X$, für das alle $(D_i^\eta \cap O_{i,j})^{(x)}$ überabzählbar sind. Für dieses x sind dann auch alle $(D_{i,j})^{(x)}$ überabzählbar.

b) Wäre die Behauptung falsch, gäbe es eine Familie $(D_{i,j})_{i<n,j \in \mathbb{N}}$ von Borelmengen $B_i^j \subset D_{i,j}$, sodaß für alle $j_o, \dots j_{n-1}$ eine der Fasern $D_{i,j_i}^{(x)}$ abzählbar ist. Die Borel mengen $D_i = \bigcup \{ D_{i,j} \mid j \in \mathbb{N} \}$ sind Obermengen der B_i. Es gibt also ein $x \in X$, für das alle $(D_i)^{(x)}$ überabzählbar sind. Für jedes i muß es dann ein j_i geben, $(D_{i,j_i})^{(x)}$ überabzählbar. Widerspruch.

4 Sei nun $B \subset X \times Y$ eine große analytische Relation. Wir zeigen, daß B eine überabzählbare Faser hat.

B ist von der Form $g[Z]$ für eine stetige Funktion $g: Z \to X \times Y$.

Wir definieren eine stetige Abbildung $f: \mathcal{C} \to Z$ mit Hilfe eines regulären Systems (Fs). $F\emptyset$ sei Z. Für $k \in \mathbb{N}$ seien die Fs, $s \in {}^k2$ schon so gewählt, daß $(g[Fs])_{s \in {}^k2}$ groß ist. Unser Lemma liefert uns offene Mengen $O_{s,j}$, $O_{s,o} \cap O_{s,1} = \emptyset$, $(g[Fs] \cap O_{s,j})_{s \in {}^k2, j<2}$ groß. Jedes $g^{-1}(O_{s,j}) \cap Fs$ ist Vereinigung einer abzählbaren Familie $(A_{s,j}^i)_{i \in N}$ von abgeschlossenen Mengen, die kleineren Durchmesser als k^{-1} haben. Unser Lemma liefert eine Folge $(i_{s,j})_{s \in {}^k2, j<2}$ für die $(g[A^i_{s,j}]])_{s \in {}^k2, j<2}$ groß ist. Wenn wir $Fs^\frown\langle j \rangle = A_{s,j}^{i_{s,j}}$ setzen, ist $Fs^\frown\langle j \rangle \subset Fs$, $g[Fs^\frown\langle o \rangle] \cap g[Fs^\frown\langle 1 \rangle] = \emptyset$, $d(Fs^\frown\langle j \rangle) < k^{-1}$ und $(g[Ft])_{t \in {}^{k+1}2}$ groß.

gf ist injektiv. Weiter ist $pr_1 gf$ konstant, denn wenn $pr_1 gf(\alpha_1) \neq prgf(\alpha_2)$, gibt es ein k und $s_i \in {}^k2$, $pr_1 g[Fs_1] \cap pr_1 g[Fs_2] = \emptyset$. $(g[Fs])_{s \in {}^k2}$ wäre dann nicht groß. Die Faser $B^{(x)}$, wobei $x = pr_1 gf[\mathcal{C}]$, ist überabzählbar.

Der Uniformisierungssatz von Kondo

Satz 6

Jede Π_1^1-Relation ist durch eine Π_1^1-Relation uniformisierbar

Folgerungen

a) Jede Σ_2^1-Relation ist durch eine Σ_2^1-Relation uniformisierbar.

b) Die Punktklassen Π_1^1 und Σ_2^1 haben die Reduktionseigenschaft. (XII 1o)

Beweis der Folgerungen:

a) Wir betrachten die Σ_2^1-Relation

$B(x,y) \leftrightarrow \exists \alpha\, C(x,y,\alpha)$,

$C \subset X \times (Y \times \mathcal{N})$ Π_1^1.

Wir nehmen uns eine Π_1^1-Relation $S \subset X \times (Y \times \mathcal{N})$ her, die C uniformisiert. Dann uniformisiert die Σ_2^1-Relation $R \subset X \times Y$

$R(x,y) \leftrightarrow \exists \alpha\, C(x,y,\alpha)$ das vorgegebene B.

b) (C_i) sei eine Folge von Π_1^1-Mengen (Σ_2^1-Mengen). Wenn dann $R(x,i)$ eine Π_1^1-Relation (Σ_2^1-Relation) ist, die

$B(x,i) \leftrightarrow x \in C_i$, $B \subset X \times \mathbb{N}$,

uniformisiert, reduziert die Folge der Π_1^1-Mengen (Σ_2^1-Mengen)

$D_i(x) \leftrightarrow R(x,i)$ die vorgegebene Folge der C_i.

Anmerkung

Der letzte Beweis zeigt, daß nicht jede Σ_2^1-Relation Σ_2^1-uniformisierbar ist. Denn Σ_2^1 hat nicht die Reduktionseigenschaft.

Das nächste Lemma verbessert XII 1o, denn aus der Folge der Abbildungen $| \;|_i$ erhält man eine Norm $| \;|$ für C, indem man $|x| = \sup_i |x|_i$ setzt.

Lemma 7

Zu jeder Π_1^1-Menge $C \subset X$ gibt es eine Folge von Abbildungen $| \;|_i : X \to \{\eta \mid \eta \leq \omega_1\}$, $i = o,1,2,\dots$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $|x|_i < |y|_i$ und $|x|_i \leq^* |y|_i$ sind Π_1^1-Relationen

2) $x \in C \rightarrow \forall i \ |x|_i < \omega_1$

3) Wenn (x^j) gegen x konvergiert und für jedes i die Folge $(|x^j|_i)_{j \in \mathbb{N}}$ schließlich konstant gleich η_i ist, ist für alle i $|x|_i \leq \eta_i$.

4) $| \ |_o$ ist Π^1_1-Norm für C.

Beweis:

C sei definiert durch das offene Sieb $(S_r)_{r \in \mathbb{Q}}$

d.h. $x \in C \leftrightarrow \{ r \mid x \in S_r \}$ wohlgeordnet.

Wir setzen $|x|_r = \| s \mid x \in S_s \cap (-\infty, r) \|$, $r \in \underline{Q} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

1) und 2) sind offenbar erfüllt. (Wir verzichten auf eine Umindizierung mit Hilfe einer Bijektion von $\mathbb{N}$ und $\underline{Q}$.) Weiter halten wir fest, daß

$|y|_r = \eta \leftrightarrow \forall s < r \ (y \in S_s \rightarrow |y|_s < \eta), \ \eta < \omega_1 , \ r \in \underline{Q}$.

(x^j) sei nun eine Folge, die gegen x konvergiert; alle $|x^j|_i$ seien schließlich gleich η_i. Wir zeigen durch Induktion nach η_r, daß für alle r $|x|_r \leq \eta_r$.

Wir halten $r \in \underline{Q}$ fest. (o.E. sei $\eta_r < \omega_1$.)

Sei $s < r$, $x \in S_s$. Für genügend große j ist $x^j \in S_s$, $|x^j|_s = \eta_s$ und $|x^j|_r = \eta_r$. Aus $x^j \in S_s$, $|x^j|_r < \omega_1$ folgt $|x^j|_s < |x^j|_r$, also ist $\eta_s < \eta_r$. Nach Induktionsvoraussetzung $|x|_s \leq \eta_s < \eta_r$. Damit ist gezeigt, daß $|x|_r \leq \eta_r$.

Beweis von Satz 6

$C \subset X \times Y$ sei eine Π^1_1-Relation. Wir verwenden eine Folge von Abbildungen $| \ |_i : X \times Y \longrightarrow \{ \eta \mid \eta \leq \omega_1 \}$ wie in Lemma 7. Wir können $Y = \mathcal{N}$ annehmen.

Sei $x \in pr_1[C]$.

Wir definieren

eine Folge $m_o, m_1, \ldots$ von natürlichen Zahlen , und

eine Folge $\eta_o, \eta_1, \ldots$ von abzählbaren Ordinalzahlen:

$m_o, \ldots m_{n-1}$ und $\eta_o, \eta_1, \ldots {}_{n-1}$ seien schon so gewählt, daß

$P_n = \{ \alpha \mid \forall i < n \ (\alpha(i) = m_i \ \wedge \ |x, \alpha|_i = \eta_i) \}$ nicht leer ist.

Dann setzen wir

$\eta_n = \min_{\alpha \in P_n} |x, \alpha|_n$

(Weil $\eta^n_o < \omega_1$ (n=o: weil $x \in pr_1[C]$) , ist $(\{x\} \times P_n) \cap C \neq \emptyset$. Also $\eta_n < \omega_1$

und $m_n = \min \{ \alpha(n) \mid \alpha \in P_n \ \wedge \ |x, \alpha|_n = \eta_n \}$.

Wir setzen nun $\alpha_x = (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $R = \{ (x, \alpha_x) \mid x \in pr_1[C] \}$.

Wir wollen zeigen, daß R eine Π^1_1-Uniformisierende von C ist.

Wir halten wieder $x \in X$ fest.

Aus jedem P_n wählen wir ein α_n. $(x \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen (x, α_x), für genügend große n ist $|x, \alpha_n|_i = \eta_i$ (für $n > i$). Also ist nach Lemma 7 $|x, \alpha_x|_i \leq \eta_i$. Insbesondere ist $|x, \alpha_x|_o$ abzählbar , d.h. $(x, \alpha_x) \in C$.

Wir haben damit gezeigt, daß R C uniformisiert.

Betrachten wir die Π^1_1-Relation $S \subset X \times \mathcal{N}$ defniert durch

$S(x, \alpha) \leftrightarrow$

$\forall n, s \in {}^n\mathbb{N}, \beta \in N_s \ [\beta(n) < \alpha(n) \rightarrow (x, \alpha) <_n (x, \beta) \ \wedge \ \alpha(n) \leq \beta(n) \rightarrow (x, \alpha) \leq^*_n (x, \beta)]$,

wo die Abkürzungen

$(x, \alpha) <_n (x, \beta) \leftrightarrow \exists h \leq n \ |x, \alpha|_h < |x, \beta|_h \ \wedge \ \forall i < h \ |x, \alpha|_i \leq^* |x, \beta|_i$ und

$(x, \alpha) =^*_n (x, \beta) \leftrightarrow (x, \alpha) <_n (x, \beta) \ \vee \ \forall h \leq n \ |x, \alpha|_h \leq^* |x, \beta|_h$ verwendet sind.

Zunächst sieht man, daß $S \subset C$.

Denn aus $S(x, \alpha)$ folgt (setze $n = \emptyset, \beta = \alpha$) $(x, \alpha) \leq^*_o (x, \alpha)$, also $|x, \alpha|_o < \omega_1$ und daher $C(x, \alpha)$.

Weiter ist S uniform.

Denn , wenn $S(x, \alpha)$ und $S(x, \beta)$ und $\alpha \neq \beta$, wählt man $s \in {}^n\mathbb{N}$ so, daß $\alpha, \beta \in N_s$ und $\alpha(n) \neq \beta(n)$. Dann ist , wenn z.B. $\alpha(n) < \beta(n)$, $(x, \beta) <_n (x, \alpha)$ und $(x, \alpha) \leq^*_n (x, \beta)$, was unmöglich ist.

Sei $x \in pr_1[C]$ Wir zeigen $S(x, \alpha_x)$. Daraus folgt $S = R$, R ist also coanalytisch.

Sei dazu $(m_o, \ldots m_{n-1}) \subset \beta$.

1.Fall Für alle $h \leq n$ $|x, \beta|_h = \eta_h$.

Hier ist $\forall h \leq n \ |x, \alpha_x|_h = \eta_h =^* |x, \beta|_h$, also $(x, \alpha_x) \leq^*_n (x, \beta)$.

Wenn $\beta(n) < m_n$, ist -weil $\beta \in P_n$,$|x,\beta|_n = \eta_n - |x,\alpha_x|_n < |x,\beta|_n$,
also $(x,\alpha_x) <_n (x,\beta)$.

2. Fall $h \leq n$ sei minimal mit $|x,\beta|_h \neq \eta_h$.

Weil dann $\beta \in P_h$ ist $\eta_h = |x,\beta|_h$.Also $|x,\alpha_x|_h \leq |x,\beta|_h$ und
daher $(x,\alpha_x) <_n (x,\beta)$.

Damit ist der Uniformisier ungssatz von Kondo bewiesen.