Forcingerweiterungen

Lecture Notes, Freiburg WS 1996/97*

Martin Ziegler

Februar 1997

Inhaltsverzeichnis

1	**Spiele**	**2**
2	**Abzählbare Formeln**	**4**
3	**Abzählbare Modelle**	**5**
4	**Generische Erweiterungen**	**7**
5	$V \neq L$	**10**
6	**Die Kontinuumshypothese**	**11**
7	**Das Auswahlaxiom**	**13**
8	**Changing** 2^κ	**15**
9	**Produkte und Forcing mit Klassen**	**19**
10	**Der Satz von Easton**	**24**

*Version 28.2.2012

1 Spiele

$P = (P, \leq)$ sei eine partielle Ordnung mit kleinstem Element o.

Ein *Ideal* ist eine Teilmenge G von P, die o enthält, abwärts abgeschlossen

$$p \leq q \in G \Rightarrow p \in G$$

und aufwärts gerichtet ist:

$$\forall p, q \in G\ \exists r \in G\ \ p \leq r \wedge q \leq r$$

Sei nun F eine Eigenschaft (also eine Menge) von Idealen. Im Spiel $\mathcal{S}_{\mathsf{F}}$ wählen die Spieler I und II abwechselnd Elemente einer aufsteigenden Folge $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots$ aus P. I gewinnt die Partie $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots$, wenn das Ideal $G = \{q \mid \exists n\ q \leq p_n\}$ die Eigenschaft F hat. Sonst gewinnt die Spielerin II.

Eine Gewinnstrategie für I ist eine Familie $f_0, f_1, \ldots$ von Funktionen derart, daß der Spieler I jede Partie gewinnt, die er nach dieser Strategie spielt, wenn also $p_{2n} = f_n(p_1, p_3, \ldots, p_{2n-1})$ für alle n. Eine Gewinnstrategie für II besteht aus Funktionen (g_n) derart, daß II eine Partie gewinnt, wenn immer $p_{2n+1} = g_n(p_0, \ldots, p_{2n})$.

Definition *p erzwingt F, wenn der Spieler I eine Gewinnstrategie für $\mathcal{S}_{\mathsf{F}}$ hat, die mit $p = f_0$ beginnt. Notation:*

$$p \Vdash \mathsf{F}$$

Wenn $p \Vdash \mathsf{F}$, dann ist $q \Vdash \mathsf{F}$ auch für jede Erweiterung q von p. Wenn jede Erweiterung von p eine Erweiterung hat, die F erzwingt, ist $p \Vdash \mathsf{F}$. Das läßt sich so einsehen: Wir wählen für jede Erweiterung q von p eine Gewinnstrategie (f_n^q) für I die bei einer Erweiterung von q anfängt. $f_0 = p$ und $f_{n+1}(q, x, \ldots) = f_n^q(x, \ldots)$ ist dann eine Gewinnstrategie, die bei p anfängt.

Lemma 1.1 *Für alle $p \in P$ und alle F, F_i gilt*

$$p \Vdash \bigwedge_{i \in \omega} \mathsf{F}_i \iff \forall i \in \omega\ p \Vdash \mathsf{F}_i \tag{1}$$

$$p \Vdash \neg \mathsf{F} \implies \forall\, q \geq p\ q \not\Vdash \mathsf{F} \tag{2}$$

$$\forall\, q \geq p\, \exists\, i \in I\, \exists\, r \geq q\ \ r \Vdash \mathsf{F}_i \implies p \Vdash \bigvee_{i \in I} \mathsf{F}_i \tag{3}$$

Beweis:

(1) Eine I–Gewinnstrategie für $\mathcal{S}_{\bigwedge_{i \in \omega} \mathsf{F}_i}$ ist auch eine Gewinnstrategie für jedes der F_i. Wenn umgekehrt der Spieler I für jedes Spiel $\mathcal{S}_{\mathsf{F}_i}$ eine Gewinnstrategie $(f_n^i)_{n \in \omega}$ hat, die bei p anfängt, kann man mit dem folgendem Diagonalverfahren eine Strategie (f_n) für $\mathcal{S}_{\bigwedge_{i \in \omega} \mathsf{F}_i}$ konstruieren: Dann zerlegen wir $\omega \setminus \{0\}$ in

disjunkte unendliche Mengen A^i und wählen aufsteigende Aufzählungen $A^i = \{a_1^i, a_2^i, \ldots\}$. Wir setzen f_0=p. Wenn $n > 0$ und $n = a_k^i$, setzen wir

$$f_n(p_1, p_3, \ldots, p_{2n-1}) = f_k^i(p_{2a_1^i - 1}, p_{2a_2^i - 1}, \ldots, p_{2a_k^i - 1}).$$

Nehmen wir an, daß die Partie $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots$ nach dieser Strategie gespielt ist. Fixiere $i \in \omega$. Dann ist die Partie $p_0 \leq p_{2a_1^i - 1} \leq p_{2a_1^i} \leq p_{2a_2^i - 1} \leq p_{2a_2^i}, \ldots$ nach der Strategie $(f_n^i)_{n \in \omega}$ gespielt. Weil diese Partie dasselbe Ideal ergibt, wie $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots$, hat I gewonnen.

(2) Wenn $q \Vdash \mathsf{F}$ für ein $q \geq p$, hat die Spielerin II eine Strategie, mit der sie im Spiel $\mathcal{S}_{\neg\mathsf{F}}$ gegen I gewinnen kann, wenn I mit dem Zug p beginnt. Also ist $p \nVdash \mathsf{F}$.

(3) Aus der Voraussetzung folgt

$$\forall\, q \geq p\, \exists\, r \geq q \;\; r \Vdash \bigvee_{i \in I} \mathsf{F}_i.$$

Und aus der letzten Bemerkung vor dem Lemma: $p \Vdash \bigvee_{i \in I} \mathsf{F}_i$. □

Als ein Beispiel zeigen wir

Lemma 1.2 *Sei A aufwärts abgeschlossen, d.h. $q \geq p \in A \Rightarrow q \in A$. Dann ist*

$$p \Vdash \text{"} A \cap G \neq \emptyset \text{"} \iff \forall q \geq p\, \exists r \geq q\; r \in A$$

Beweis: Wenn die rechte Seite zutrifft, antwortet der Spieler I auf den ersten Zug q von Spielerin II mit einem r, das in A liegt. Damit gewinnt er das Spiel. Wenn die rechte Seite nicht zutrifft, wählt die Spielerin II als ersten Zug ein $q \geq p$, über dem kein Element von A liegt. Wenn ein Ideal G, das q enthält, ein Element $a \in A$ enthalten würde, hätten q und a eine gemeinsame Erweiterung (nämlich in G), die selbst in A liegen müßte. II hat das Spiel also schon gewonnen. □

Topologie

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *regulär offen*, wenn $A = \dot{\overline{A}}$. Wenn A offen ist, ist $\dot{\overline{A}}$ die kleinste regulär offene Menge, die A enthält. Die regulär offenen Mengen bilden eine vollständige Boolesche Algebra unter den Operationen

$$A \sqcap B = A \cap B \quad (4)$$
$$A \sqcup B = \dot{\overline{A \cup B}} \quad (5)$$
$$\neg A = (X \setminus A)^{\cdot} \quad (6)$$

Die nach oben abgeschlossenen Mengen sind die offenen Mengen einer Topologie von P. Man hat für Teilmengen A von P

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \{p \mid \exists q \geq p\; q \in A\} \\ \dot{A} &= \{p \mid \forall q \geq p\; q \in A\} \\ \dot{\overline{A}} &= \{p \mid \forall q \geq p\, \exists r \geq q\; r \in A\} \end{aligned}$$

Der Durchschnitt einer beliebigen Familie von (regulär) offenen Mengen ist wieder (regulär) offen.

Lemma 1.3 *Die regulär offenen Teilmengen von P sind genau die Mengen der Form*

$$\|\mathsf{F}\| = \{p \mid p \Vdash \mathsf{F}\}.$$

Beweis: Nach 1.2 ist für offene A

$$\|G \cap A \neq \emptyset\| = \dot{\overline{A}}.$$

Andererseits sind $\|\mathsf{F}\|$ offen und es ist klarerweise

$$\|\mathsf{F}\| = \|\,(G \cap \|\mathsf{F}\| \neq \emptyset)\,\|.$$

□

Lemma 1.1.1 besagt, daß

$$\|\bigwedge_{i\in\omega} \mathsf{F}_i\| = \prod_{i\in\omega} \|\mathsf{F}_i\|.$$

2 Abzählbare Formeln

Wir betrachten jetzt Eigenschaften von G, die sich durch abzählbare Boolesche Kombinationen Φ,Φ_i von atomaren Aussagen $p \,\epsilon\, G$ ausdrücken lassen. I ist in diesem Abschnitt eine abzählbare Indexmenge.

Lemma 2.1 *Für alle $p \in P$ und alle Φ,Φ_i gilt*

$$\begin{align} p \Vdash (s \,\epsilon\, G) &\iff \forall\, q \geq p\, \exists\, r \geq q \;\; s \leq r \tag{1}\\ p \Vdash \bigwedge_{i\in I} \Phi_i &\iff \forall i \in I \;\; p \Vdash \Phi_i \tag{2}\\ p \Vdash \neg\Phi &\iff \forall\, q \geq p \;\, q \nVdash \Phi \tag{3}\\ p \Vdash \bigvee_{i\in I} \Phi_i &\iff \forall\, q \geq p\, \exists\, i \in I\, \exists\, r \geq q \;\; r \Vdash \Phi_i \tag{4}\end{align}$$

Beweis:

(1) Wenn es ein $q \geq p$ gibt, das mit s *inkompatibel* ist (das heißt, daß q und s keine gemeinsame Erweiterung haben), gewinnt II das Spiel $\mathcal{S}_{s\,\epsilon\, G}$, wenn I mit p beginnt und II mit q antwortet. Sonst gewinnt I mit der Strategie $f_0 = p$ und $f_1(q) =$ eine Erweiterung von s, wenn $q \geq p$.

(2) folgt aus 1.1(1).

(3) Die Richtung von links nach rechts folgt aus 1.1(2). Die Umkehrung zeigen wir durch Induktion über den Aufbau von Φ. Es gibt drei Fälle:

$\Phi = (s \,\epsilon\, G)$: Wenn kein $q \geq p$ erzwingen kann, daß $s \in G$, müssen p und s inkompatibel sein. Es folgt $p \Vdash \neg s \,\epsilon\, G$.

$\Phi = \neg\Psi$: Wenn kein $q \geq p$ $\neg\Psi$ erzwingt, gibt es nach Induktionsvoraussetzung für alle $q \geq p$ ein $r \geq q$, das Ψ erzwingt. Also ist $p \Vdash \neg\Phi$.

$\Phi = \bigwedge_{i \in I} \Phi_i$: Wenn kein $q \geq p$ $\bigwedge_{i \in I} \Phi_i$ erzwingt, gibt es nach (2) für alle $q \geq p$ ein Φ_i, das von q nicht erzwungen wird. Wie wir gerade gesehen haben können wir annehmen, daß die Behauptung für $\neg\Phi_i$ gilt. Es gibt also für alle $q \geq p$ ein i und ein $r \geq q$, das $\neg\Phi_i$ erzwingt. Daraus folgt mit 1.1(4), daß $p \Vdash \bigvee_{i \in I} \neg\Phi_i$, das heißt $p \Vdash \neg\Phi$.

(4)

$$\begin{aligned}
p \Vdash \bigvee_{i \in I} \Phi_i \quad &\Leftrightarrow \quad p \Vdash \neg \bigwedge_{i \in I} \neg\Phi_i \\
&\Leftrightarrow \quad q \nVdash \bigwedge_{i \in I} \neg\Phi_i \text{ für alle } q \geq p \\
&\Leftrightarrow \quad \text{für alle } q \geq p \text{ gibt es ein } i \text{ mit } q \nVdash \neg\Phi \\
&\Leftrightarrow \quad \text{für alle } q \geq p \text{ gibt es ein } i \text{ und ein } r \geq q \text{ mit } r \Vdash \Phi_i
\end{aligned}$$

□

Topologie

Lemma 2.1 hat eine attraktive topologische Formulierung:

$$\|\bigwedge_{i \in I} \Phi_i\| = \bigsqcap_{i \in I} \|\Phi_i\| \tag{5}$$

$$\|\neg\Phi\| = \neg\|\Phi\| \tag{6}$$

$$\|\bigvee_{i \in I} \Phi_i\| = \bigsqcup_{i \in I} \|\Phi_i\| \tag{7}$$

3 Abzählbare Modelle

Wir halten im Folgenden ein abzählbares transitives Modell M von ZFC und eine partielle Ordnung $P = (P, \leq) \in M$ mit kleinstem Element o fest. Wir betrachten unendliche Boolesche Kombinationen Φ von Formeln der Form $p \,\epsilon\, G$, die zu M gehören.

Satz 3.1 *Die Relation $p \Vdash \Phi$ ist in M definierbar.*

Beweis: Weil Φ zu M gehört, ist Φ abzählbar. Lemma 2.1 liefert eine (absolute) rekursive Definition. Die Relation ist sogar Δ^1_{ZFC}. □

Wir wir in Abschnitt 1 gesehen haben ist eine Teilmenge D von P ist dicht, wenn sie zu jedem $p \in P$ eine Erweiterung enthält. Zum Beispiel ist für jedes $\Phi \in M$ die Menge

$$D_\Phi = \{p \in P \mid p \Vdash \Phi \text{ oder } p \Vdash \neg\Phi\}$$

dicht und gehört zu M (siehe 2.1(2)).

Definition *Ein Ideal G in P heißt generisch, wenn es jedes dichte $D \in M$ schneidet.*

Man beachte, daß o erzwingt, daß G generisch ist. Generische Mengen existieren also immer. Das kann man natürlich auch direkt so sehen: Man wählt eine Aufzählung (D_i) aller dichten Mengen, die zu M gehören. Dann konstruiert man eine aufsteigende Folge $p_0 \leq p_1 \leq \ldots$ mit $p_i \in D_i$. Das von den p_i erzeugte Ideal ist generisch. Tatsächlich ist jedes Element von P in einer generischen Menge enthalten.
D heißt *dicht über* p, wenn es zu jedem $q \geq p$ eine Erweiterung enthält. Wenn G generisch ist und $D \in M$ dicht über einem $p \in G$ ist, müssen D und G nicht–leeren Schnitt haben, weil $D' = D \cup \{q \mid q \text{ ist inkompatibel mit } p\}$ dicht ist.

Satz 3.2 *Wenn G generisch ist und $p \in G$ die Formel $\Phi \in M$ erzwingt, hat G die Eigenschaft Φ.*

Beweis: Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über den Aufbau von Φ. Es gibt vier Fälle:

$\Phi = (s \epsilon G)$: Wenn $p \Vdash \Phi$, ist $D = \{q \mid s \leq q\}$ dicht über p. Weil D und G sich schneiden, muß s zu G gehören.

$\Phi = (\neg s \epsilon G)$: p erzwingt Φ, wenn p und s inkompatibel sind. s kann also nicht zu G gehören.

$\Phi = \bigwedge_{i \in I} \Phi_i$: Wenn $p \Vdash \Phi$, erzwingt p auch alle Φ_i. Nach Induktionsvoraussetzung erfüllt G alle Φ_i, also auch Φ.

$\Phi = \bigvee_{i \in I} \Phi_i$: Nach 2.1(4) ist $D = \{r \mid \exists i \; r \Vdash \Phi_i\}$ dicht über p. G enthält also ein r, das ein Φ_i erzwingt. Nach Induktionsvoraussetzung erfüllt G die Formel Φ_i und damit auch Φ.

□

Man sieht übrigens leicht, daß ein Ideal G genau dann generisch ist, wenn es den letzten Satz erfüllt.

Folgerung 3.3 *Sei $\Phi \in M$.*

1. *Wenn G generisch ist, hat G die Eigenschaft Φ genau dann ,wenn G ein Element hat, das Φ erzwingt.*
2. *p erzwingt Φ genau dann, wenn alle generischen G, die p enthalten Φ erfüllen.*

Beweis:

1) Wenn $p \in D_\Phi \cap G$, gibt es zwei Möglichkeiten. Wenn $p \Vdash \Phi$, hat G die Eigenschaft Φ. Wenn $p \Vdash \neg\Phi$, hat G die Eigenschaft Φ nicht.

2) Wenn p die Formel Φ nicht erzwingt, erzwingt eine Erweiterung q die Negation. Ein generisches G, das q enthält, erfüllt Φ nicht. $\square$

4 Generische Erweiterungen

Wir fixieren wieder ein abzählbares transitives Modell M von ZFC und eine partielle Ordnung $P = (P, \leq) \in M$ mit kleinstem Element o.

Sei G eine Teilmenge von P. Jedes Element a von M kodiert eine Menge $\kappa_G(a)$ vermöge der folgenden rekursiven (über den Fundierungsrang rang(a)) Definition:

$$\kappa_G(a) = \{\kappa_G(b) \mid \exists p \in P \ \ p \in G \wedge \langle p, b \rangle \in a\}$$

Wir definieren $M[G]$ als die Menge aller $\kappa_G(a)$, $a \in M$. $M[G]$ ist offensichtlich transitiv. Definiert man $\hat{a}$ durch

$$\hat{a} = \left\{ \langle \mathrm{o}, \hat{b} \rangle \,\middle|\, b \in a \right\},$$

so ist $\kappa_G(\hat{a}) = a$. M ist also eine Teilmenge von $M[G]$. Man zeigt leicht, daß

$$\mathrm{rang}(\kappa_G(a)) \leq \mathrm{rang}(a).$$

Daraus folgt, daß $M[G]$ die gleichen Ordinalzahlen wie M hat. Setzt man

$$\widehat{G} = \{\langle p, \hat{p} \rangle \mid p \in P\},$$

wird $\kappa_G(\widehat{G}) = G$. Also ist $G \in M[G]$.

Sei $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ eine ZFC–Formel, $p \in P$ und $a_1, \ldots, a_n \in M$.

Definition *p erzwingt $\phi(a_1, \ldots, a_n)$, wenn p erzwingt, daß*

$$M[G] \models \phi(\kappa_G(a_1), \ldots, \kappa_G(a_n)).$$

Wir definieren dem entsprechend

$$\|\phi(a_1, \ldots, a_n)\| = \{p \mid p \Vdash \phi(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

Satz 4.1

1. *Für alle $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ ist die Menge*

   $$\{\langle p, a_1, \ldots, a_n \rangle \mid p \in P,\ a_1, \ldots, a_n \in M,\ p \Vdash \phi(a_1, \ldots, a_n)\}$$

   in M definierbar.

2. *Wenn G generisch ist, gilt $\phi(\kappa_G(a_1), \ldots, \kappa_G(a_n))$ genau dann in $M[G]$, wenn $\phi(a_1, \ldots, a_n)$ von einem Element von G erzwungen wird.*

BEWEIS: Wir beweisen 1. durch Induktion über den Formelaufbau. Gleichzeitig zeigen wir, daß $M[G] \models \phi(\kappa_G(a_1), \ldots, \kappa_G(a_n))$ zu einer abzählbaren Boolesche Kombination von Aussagen der Form $p \,\epsilon\, G$ äquivalent ist:

ϕ atomar:
Wir zeigen durch Induktion über den Fundierungsrang von a und b, daß sich $M[G] \models \kappa_G(a) \,\epsilon\, \kappa_G(b)$ und $M[G] \models \kappa_G(a) \doteq \kappa_G(b)$ durch unendliche Boolesche Kombinationen $\Phi(a,b)$ und $\Psi(a,b)$ von Aussagen der Form $p \,\epsilon\, G$ ausdrücken lassen, die zu M gehören:

$$\begin{aligned} \Phi(a,b) \quad &\Longleftrightarrow \quad \bigvee\{\Psi(a,c) \wedge p \,\epsilon\, G \mid \langle p,c\rangle \in b\} \\ \Psi(a,b) \quad &\Longleftrightarrow \quad \bigwedge\{p \,\epsilon\, G \to \Phi(c,b) \mid \langle p,c\rangle \in a\} \wedge \\ & \qquad\quad\; \bigwedge\{p \,\epsilon\, G \to \Phi(c,a) \mid \langle p,c\rangle \in b\} \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt jetzt aus 3.1 (oder 2.1), weil die beiden Abbildungen $x, y \mapsto \Phi(x,y), \Psi(x,y)$ in M definierbar sind.

$\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$:
Die Behauptung folgt aus der Induktionsvoraussetzung sofort mit 2.1.2.

$\phi = \neg\psi$:
Nach 2.1.3 ist

$$p \Vdash \phi(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow \forall\, q \geq p \;\; q \nVdash \psi(a_1, \ldots, a_n)$$

$\phi = \forall x_0 \psi$:
$M[G] \models \phi(\kappa_G(a_1), \ldots, \kappa_G(a_n))$ ist äquivalent zu

$$\bigwedge_{a_0 \in M} M[G] \models \psi(\kappa_G(a_0), \ldots, \kappa_G(a_n)).$$

Nach 2.1.2 ist also

$$p \Vdash \phi(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow \forall a_0 \in M \;\; p \Vdash \psi(\kappa_G(a_0), \ldots, \kappa_G(a_n))$$

2.. folgt aus 1. wie in Satz 3.2 und 3.3. $\square$

Wir definieren rekursiv für $x \in M$

$$\mathrm{rang}'(x) = \sup\{\mathrm{rang}'(y) + 1 \mid \exists p \in P \;\langle p, y\rangle \in x\}.$$

Lemma 4.2 *Für alle generischen G und alle $a \in M$ gilt:*

1. $\mathrm{rang}(\kappa_G(a)) \leq \mathrm{rang}'(a)$
2. *Es gibt ein $a' \in M$ mit* $\mathrm{rang}'(a') = \mathrm{rang}(\kappa_G(a))$ *und* $\kappa_G(a') = \kappa_G(a)$.

Beweis: 1. ist leicht zu sehen. Wir zeigen 2 durch Induktion über $\alpha = \operatorname{rang}(\kappa_G(a))$. Wir setzen

$$a' = \{\langle p, b'\rangle \mid p \Vdash b' \,\epsilon\, a, \;\; \operatorname{rang}'(b') < \alpha\}\,.$$

Sei $x \in \kappa_G(a)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $b' \in M$ mit $\operatorname{rang}'(b') = \operatorname{rang}(x) < \alpha$ und $\kappa_G(b') = x$. Für ein $p \in G$ ist $p \Vdash b' \in a$. Wir haben also $\langle p, b'\rangle \in a'$ und daher $x \in \kappa_G(a')$.
Wenn umgekehrt $x \in \kappa_G(a')$, ist $x = \kappa_G(b')$ für ein $\langle p, b'\rangle \in a'$ mit $p \in G$. Weil $p \Vdash b' \,\epsilon\, a$, ist $x \in \kappa_G(a)$. □

Satz 4.3 *Wenn G generisch ist, ist $M[G]$ ein Modell von* ZFC.

Beweis:

Extensionalitätsaxiom und *Fundierungsaxiom* gelten in $M[G]$, weil $M[G]$ transitiv ist. Weil $\omega \in M[G]$, gilt auch das Unendlichkeitsaxiom.

Für $\alpha \in M$ bezeichne $M[G]_\alpha$ die Menge aller Elemente von $M[G]$, deren Fundierungsrang kleiner als α ist. Wir zeigen, daß für alle Formeln $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ und $a_1, \ldots, a_n \in M$ die Menge

$$y = \{x \in M[G]_\alpha \mid M[G] \models \phi(x, \kappa_G(a_1), \ldots, \kappa_G(a_n))\}$$

zu $M[G]$ gehört. In der Tat, wenn

$$b = \{\langle p, a_0\rangle \mid p \Vdash \phi(a_0, \ldots, a_n), \;\; \operatorname{rang}'(a_0) < \alpha\}\,,$$

ist $\kappa_G(b) = y$.
Denn wenn $x \in \kappa_G(b)$, ist $x = \kappa_G(a_0)$ für ein a_0 mit $\operatorname{rang}'(a_0) < \alpha$, für das es ein $p \in G$ mit $p \Vdash \phi(a_0, \ldots, a_n)$ gibt. Es ist dann $x \in M[G]_\alpha$ und $M[G] \models \phi(\kappa_G(a_0), \ldots, \kappa_G(a_n))$, also $x \in y$.
Wenn umgekehrt $x \in y$, gibt es nach 4.2(2) ein $a_0 \in M$ mit $\operatorname{rang}'(a_0) < \alpha$ und $\kappa_G(a_0) = x$. Es gibt dann ein $p \in G$ mit $p \Vdash \phi(a_0, \ldots, a_n)$. Also ist $\langle p, a_0\rangle \in b$ und $x \in \kappa_G(b)$.
Aus dem eben bewiesenen folgen sofort das *Leere–Menge–Axiom*, das *Paarmengenaxiom*, das *Vereinigungsmengenaxiom* und das *Potenzmengenaxiom.*

Um das *Ersetzungsaxiom* zu zeigen, nehmen wir an, daß

$$M[G] \models \forall x \exists!\, y \phi(y, x, \kappa_G(a_1), \ldots, \kappa_G(a_n)).$$

Außerdem sei w ein beliebiges Element von $M[G]_\gamma$. Wir haben zu zeigen, daß $z = \{y \in M[G] \mid \exists x \in w\; \phi(y, x, \kappa_G(a_1), \ldots, \kappa_G(a_n))\}$ zu $M[G]$ gehört. Nun gibt es aber eine Schranke α, sodaß für alle p und alle $a \in M$ mit $\operatorname{rang}'(a) < \gamma$

$$\exists b \in M p \Vdash \phi(b, a, a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \exists b \in M \operatorname{rang}'(b) < \alpha, \; p \Vdash \phi(b, a, a_1, \ldots, a_n)$$

Daraus folgt, daß $z \subset M[G]_\alpha$. Nach der obigen Bemerkung folgt $w \in M[G]$.

Es bleibt das *Auswahlaxiom* zu zeigen: Sei $x \in M[G]_{\alpha+1}$ und $\prec \in M$ eine Wohlordnung von $\{b \in M \mid \operatorname{rang}'(b) < \alpha\}$. Die Funktion f, die jedem $y \in x$ das

$\prec$–kleinste $b \in M$ mit $\kappa_G(b) = y$ und $\mathrm{rang}'(b) < \alpha$ zuordnet, ist in $M[G]$ definierbar. Dann definiert

$$y < y' \leftrightarrow f(y) \prec f(y')$$

eine Wohlordnung auf x. $\square$

Bemerkung: Der Satz 4.1 bleibt wahr, wenn wir in der ZFC–Formel ϕ ein Prädikat $\mathcal{M}$ für M zulassen. Dazu bemerkt man, daß

$$p \Vdash \mathcal{M}(a) \Longleftrightarrow \forall q \geq p \, \exists r \geq q \, \exists b \in M_{(\mathrm{rang}'(a)+1)} \;\; r \Vdash a \mathrel{\mathring{=}} \hat{b}.$$

Es folgt, daß in $M[G]$ das Aussonderungsaxiom und das Ersetzungsaxiom auch für Formeln gelten, die $\mathcal{M}$ enthalten.

5 $\mathrm{V} \neq \mathrm{L}$

Eine partielle Ordnung $P \in M$ hat genau dann keine generische Menge, die zu M gehört, wenn es oberhalb von jedem p inkompatible Elemente gibt. Zum Beispiel hat

$$\mathrm{H}(\omega, 2) = \{f : x \to 2 \mid x \text{ endliche Teilmenge von } \omega\},$$

die Menge aller endlichen partiellen Abbildungen von ω nach $2 = \{0, 1\}$,durch Inklusion geordnet, diese Eigenschaft. Wir haben dann für generische G

$$M \subsetneqq M[G].$$

In $M[G]$ gilt $V \neq \mathrm{L}$, weil für $\alpha = \mathrm{On} \cap M$

$$\mathrm{L}_\alpha = \mathrm{L}^M = \mathrm{L}^{M[G]}.$$

Satz 5.1 *Wenn* ZFC *konsistent ist, ist auch* $\mathrm{ZFC} + \mathrm{V} \neq \mathrm{L}$ *konsistent.*

Beweis: Man überlegt sich zuerst, daß der Beweis von 4.3 das folgende liefert: Für jede endliche Teilmenge Δ von ZFC gibt es eine endliche Teilmenge Δ' von ZFC, sodaß für jedes abzählbare transitive Modell M von Δ' und jedes generische $G \subset \mathrm{H}(\omega, 2)$ $M[G]$ ein Modell von Δ ist.

Sei $(\mathfrak{M}, E)$ ein Modell von ZFC und Δ eine endliche Menge von ZFC–Axiomen. Der Reflexionssatz liefert ein $M \in \mathfrak{M}$, das in $\mathfrak{M}$ abzählbar und transitiv und ein Modell von Δ' ist. Sei $G \in \mathfrak{M}$ generisch in $\mathrm{H}(\omega, 2)^M$. Dann ist $M[G]$ ein Modell von Δ und $\mathrm{V} \neq \mathrm{L}$. $\square$

Definition $\mathrm{H}(A, B)$ *ist die durch Inklusion partiell geordnete Menge aller endlichen partiellen Abbildungen von A nach B.*

6 Die Kontinuumshypothese

Sei M ein abzählbares transitives Modell von ZFC. Wir beweisen in diesem Abschnitt den folgenden Satz

Satz 6.1 *Sei G generisch in $\mathrm{H}(\omega_2, 2)^M$. Dann ist $M[G]$ ein Modell von $2^\omega > \omega_1$.*

Folgerung 6.2 *Wenn* ZFC *konsistent ist, ist auch* $\mathrm{ZFC} + 2^\omega > \omega_1$ *konsistent.*

Definition *Sei P eine partielle Ordnung. Eine Antikette ist eine Teilmenge von P, deren Elemente paarweise inkompatibel sind. P erfüllt die* c.c.c, *die countable chain condition, wenn P keine überabzählbaren Antiketten hat.*

Lemma 6.3 *Wenn B höchstens abzählbar ist, erfüllt* $\mathrm{H}(A, B)$ *die* c.c.c.

Beweis: Sei I eine Antikette. Wir konstruieren eine aufsteigende Folge $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \ldots$ von höchstens abzählbaren Teilmengen von A und gleichzeitig eine Menge Folge (I_n) von abzählbaren Teilmengen von I. Wenn A_n konstruiert ist, wählen wir I_n so groß, daß es für jedes $p \in I$ ein $q \in I_n$ gibt mit $q \restriction A_n = p \restriction A_n$. Wir finden ein abzählbares I_n, weil es nur abzählbar viele $p \restriction A_n$ gibt. Dann setzen wir $A_{n+1} = \bigcup\{\mathrm{dom}(q) \mid q \in I_n\}$.
Schließlich zeigen wir, daß $I = \bigcup_{n \in \omega} I_n$: Sei $p \in I$. Dann gibt es einen Index n mit $\mathrm{dom}(p) \cap A_n = \mathrm{dom}(p) \cap A_{n+1}$. Es gibt ein $q \in I_n$ mit $q \restriction A_n = p \restriction A_n$. Weil $\mathrm{dom}(q) \subset A_{n+1}$, stimmen p und p auf $\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q) \subset A_n$ überein. p und q und sind also kompatibel und daher identisch. $\square$

(Reguläre) Kardinalzahlen in $M[G]$ sind auch (reguläre) Kardinalzahlen in M. Die Umkehrung gilt nur für besondere P. Wenn zum Beispiel G generisch in $P = \mathrm{H}(\omega, \omega_1)^M$ ist, ist $\bigcup G$ eine Funktion von ω nach ω_1^M, die surjektiv ist, weil alle $D_n = \{p \in \mathrm{H}(\omega, \omega_1)^M \mid n \in \mathrm{range}(p)\}$ dicht sind und zu M gehören. ω_1^M ist also in $M[G]$ abzählbar und keine Kardinalzahl mehr.

Lemma 6.4 *Wenn P in M die* c.c.c *erfüllt, ist jede (reguläre) Kardinalzahl in M auch eine (reguläre) Kardinalzahl in $M[G]$. Es folgt, daß die Kofinalitätsfunktionen* cf^M *und* $\mathrm{cf}^{M[G]}$ *übereinstimmen.*

Beweis: Sei κ eine reguläre Kardinalzahl in M. Wir können annehmen, daß κ (in M) überabzählbar ist. Sei $\alpha < \kappa$ und $F = \kappa_G(f)$ eine Funktion von α nach κ. Sei p_0 ein Element von G, das erzwingt, daß $\kappa_G(f)$ eine Funktion von α nach κ ist. Für jedes $\beta < \alpha$ ist die Menge

$$\Lambda_\beta = \{\lambda < \kappa \mid q \Vdash f(\hat{\beta}) = \hat{\lambda} \text{ für ein } q \geq p_0\}$$

abzählbar in M. Wenn wir nämlich für jedes $\lambda \in \Lambda_\beta$ ein $q_\lambda \geq p_0$ mit $q_\lambda \Vdash f(\hat{\beta}) = \hat{\lambda}$ wählen, bilden die q_λ eine Antikette. Weil κ regulär in M ist, hat die Vereinigung der Λ_β, $(\beta < \alpha)$ ein Supremum $\lambda < \kappa$. Es ist klar, daß λ alle Funktionswerte $F(\beta)$ beschränkt. Damit ist gezeigt, daß κ regulär in $M[G]$ ist.

Weil jede überabzählbare Kardinalzahl κ Supremum von regulären Kardinalzahlen ist, folgt, daß κ auch in $M[G]$ eine Kardinalzahl bleibt.

Im Allgemeinen gilt nur

$$\mathrm{cf}^{M[G]}(\kappa) = \mathrm{cf}^{M[G]}(\mathrm{cf}^M(\kappa)) \leq \mathrm{cf}^M(\kappa).$$

Wenn P die c.c.c erfüllt, ist bleibt aber $\mathrm{cf}^M(\kappa)$ in $M[G]$ regulär. Also ist $\mathrm{cf}^{M[G]}(\kappa) = \mathrm{cf}^{M[G]}(\mathrm{cf}^M(\kappa)) = \mathrm{cf}^M(\kappa)$ $\square$

Wir können jetzt 6.1 beweisen: Sei G generisch in $\mathrm{H}(\omega_2, 2)$ und (in M) $(\quad,\quad) : \omega_2 \times \omega \to \omega_2$ eine Bijektion. (Man nehme zum Beispiel $(\alpha, n) = \omega \cdot \alpha + n$.) Für je zwei $\alpha \neq \beta$ aus ω_2 ist die Menge

$$D = \{p \in \mathrm{H}(\omega_2, 2)^M \mid \exists n\, p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}$$

dicht. Daraus folgt, daß

$$\alpha \mapsto \{n \mid \bigcup G(\alpha, n) = 1)\}$$

eine injektive Abbildung von ω_2^M nach $\mathfrak{P}^{M[G]}(\omega)$ ist. Weil $\omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$, ist $\omega_2^{M[G]} \leq \left|\mathfrak{P}^{M[G]}(\omega)\right|^{M[G]}$.

Satz 6.5 *Sei G generisch in $\mathrm{H}(\omega_2, 2)^M$. Wenn $M \models 2^\omega \leq \omega_2$, ist $M[G]$ ein Modell von $2^\omega = \omega_2$.*

Weil die Kontinuumshypothese relativ konsistent ist, folgt

Folgerung 6.6 *Wenn* ZFC *konsistent ist, ist auch* $\mathrm{ZFC} + 2^\omega = \omega_2$ *konsistent.*

Der Satz folgt sofort aus dem folgenden Lemma.

Lemma 6.7 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl in M. Wenn P in M die* c.c.c *erfüllt, ist für alle generischen $G \subset P$*

$$(2^\kappa)^{M[G]} \leq (|P|^\kappa)^M.$$

Beweis: Wir arbeiten zuerst in M. Für alle a und $\alpha < \kappa$ sei

$$\Phi_{a,\alpha} = \|\hat{\alpha} \in a\|.$$

Sei R die Menge alle Mengen der Form $\|\Psi\|$, also die Menge aller regulär offenen Mengen nach 1.3. Aus Lemma 6.8 folgt, daß $|R| \leq |P|^\omega$. Definiert man

$$\Phi_a = (\Phi_{a,\alpha})_{\alpha<\kappa} : \kappa \to R,$$

so ergibt sich

$$|\{\Phi_a \mid a \in \mathrm{V}\}| \leq |R|^\kappa \leq |P|^\kappa.$$

Es ist klar, daß $\kappa_G(a) \cap \kappa$ eindeutig durch Φ_a bestimmt ist. Daraus folgt, daß

$$(2^\kappa)^{M[G]} \leq |\{\Phi_a \mid a \in \mathrm{V}\}|^M \leq ((|P|^\omega)^\kappa)^M = (|P|^\kappa)^M$$

$\square$

Lemma 6.8 *Sei $A \subset P$ regulär offen und I eine maximale Antikette in A. Dann ist*

$$A = \|I \cap G \neq \emptyset\| = \{p \mid \forall q \geq p\ \exists i \in I\ \ i \textit{ kompatibel mit } q\}.$$

Beweis: Wenn $p \in A$, gehört auch jedes $q \geq p$ zu A. Wäre q inkompatibel mit allen Elementen von I, wäre $I \cup \{q\}$ eine Antikette, was der Maximalität von I widerspricht.
Nehmen wir umgekehrt an, daß alle $q \geq p$ mit einem Element von I kompatibel sind. Wir setzen $B = \{r \mid \exists i \in I\ i \leq r\}$. Dann ist $B \subset A$ und wir haben

$$p \in \{p \mid \forall q \geq p\, \exists r \geq q\ r \in B\} = \dot{\overline{B}} \subset \dot{\overline{A}} = A.$$

□

7 Das Auswahlaxiom

Sei M ein abzählbares, transitives Modell von ZFC. $P \in M$ sei eine partielle Ordnung mit kleinstem Element o und $f \in M$ ein Automorphismus von P. Wenn $G \subset P$ generisch ist, ist auch $f[G]$ generisch. Das f–Bild eines Codes wird rekursiv definiert als

$$f'(a) = \{\langle f(p), f'(b)\rangle \mid \langle p, b\rangle \in a\}.$$

Man zeigt leicht, daß

$$\kappa_G(a) = \kappa_{f[G]}(f'(a))$$

und

$$p \Vdash \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow f(p) \Vdash \phi(f'(a_1), \dots, f'(a_n)).$$

Sei F eine Gruppe von Automorphismen von P. Ein Code a heißt F–invariant, wenn $f'(a) = a$ für alle $f \in F$. Ein Filter $\mathfrak{F} \in M$ von Automorphismengruppen ist eine Menge von Automorphismengruppen, die zu je zwei Gruppen aus $\mathfrak{F}$ eine gemeinsame Untergruppe enthält. Außerdem fordern wir, daß $\mathfrak{F}$ abgeschlossen ist unter Konjugation mit allen $f \in \bigcup \mathfrak{F}$.

Definition *Ein Code $a \in M$ heißt $\mathfrak{F}$–invariant, wenn*

a) es ein $F \in \mathfrak{F}$ gibt, für das a F–invariant ist,

b) für alle $\langle p, b\rangle \in a$ das Element b $\mathfrak{F}$–invariant ist.

Für eine generische Menge G sei

$$M_{\mathfrak{F}}[G] = \{\kappa_G(a) \mid a \text{ ist } \mathfrak{F} \text{ invariant}\}.$$

Satz 7.1 *$M_{\mathfrak{F}}[G]$ ist eine transitive Erweiterung von M und ein Modell von* ZF.

Beweis: Wir folgen dem Beweis von 4.3.

Daß $M_{\mathfrak{F}}[G]$ transitiv ergibt sich unmittelbar aus der Definition. Weil die Codes $\hat{a}$ unter allen Automorphismen invariant sind, ist $M_{\mathfrak{F}}[G]$ eine Erweiterung von M.

Wir brauchen folgende Version von 4.2: *Für jedes $\mathfrak{F}$–invariante a gibt es ein $\mathfrak{F}$–invariantes a' mit $\kappa_G(a') = \kappa_G(a)$ und* $\mathrm{rang}'(a) = \mathrm{rang}(\kappa_G(a))$.

Zum Beweis müssen wir nur zeigen, daß die Menge

$$a' = \{\langle p, b' \rangle \mid p \Vdash b' \,\epsilon\, a,\ \ b' \ \mathfrak{F}\text{–invariant},\ \ \mathrm{rang}'(b') < \alpha\}$$

$\mathfrak{F}$–invariant ist. Sei a invariant unter einem $F \in \mathfrak{F}$ und $f \in F$. Wenn dann $\langle p, b' \rangle \in a'$, folgt aus $p \Vdash b' \,\epsilon\, a$, daß $f(p) \Vdash f'(b') \,\epsilon\, a$. Weil $\mathfrak{F}$ unter Konjugation mit f abgeschlossen ist, ist mit b' auch $f'(b')$ invariant unter $\mathfrak{F}$. Es folgt $\langle f(p), f'(b') \rangle \in a'$. Also ist auch a' invariant unter F.

Wie im Beweis von 4.3 sieht man, daß es genügt zu zeigen, daß für jedes $\alpha \in M$, jede Formel $\phi(x_0, \ldots, x_m)$ und alle $\mathfrak{F}$–invarianten Parameter $a_1, \ldots, a_m$ die Menge

$$y = \big\{x \in M_{\mathfrak{F}}[G]_\alpha \;\big|\; M_{\mathfrak{F}}[G] \models \phi(x, \kappa_G(a_1), \ldots, \kappa_G(a_n))\big\}$$

zu $M_{\mathfrak{F}}[G]$ gehört. Weil $M_{\mathfrak{F}}[G]$ in $M[G]$ mit Parametern aus M, also $\mathfrak{F}$–invarianten Parametern, (und einem Prädikat für M) definierbar ist, können wir y schreiben als

$$\big\{x \in M_{\mathfrak{F}}[G]_\alpha \;\big|\; M[G] \models \psi(x, \kappa_G(b_1), \ldots, \kappa_G(b_n))\big\},$$

wobei ψ ein Prädikat für M enthalten darf.
Wenn man

$$b = \{\langle p, b_0 \rangle \mid p \Vdash \psi(b_0, \ldots, b_n),\ \ b_0 \ \mathfrak{F}\text{–invariant},\ \ \mathrm{rang}'(b_0) < \alpha\}$$

setzt, sieht man wie in 4.3, daß $\kappa_G(b) = y$. Es bleibt zu zeigen, daß b invariant unter $\mathfrak{F}$ ist. Sei $F \in \mathfrak{F}$ klein genug, sodaß alle b_i invariant unter F sind. Dann sieht man, wie eben, daß auch b invariant unter F ist. □

Sei nun $P = \mathrm{H}(\omega \times \omega \times \omega, 2)$. Wir lassen die Gruppe $F = \mathrm{Sym}(\omega)^\omega$ in folgender Weise als Gruppe von Automorphismen auf P operieren: Sei $f = (f_i)_{i \in \omega} \in F$ und $p \in P$. Setze dann

$$f(p)(i, j, n) = p(i, f_i^{-1}(j), n).$$

Für jede endliche Teilmenge b von ω definieren wir die Untergruppe

$$F_b = \{(f_i)_{i \in \omega} \mid \forall i \in b \ f_i = \mathrm{id}_\omega\}\,.$$

$\mathfrak{F} = \{F_b \mid b \text{ endliche Teilmenge von } \omega\}$ ist dann ein Filter von Automorphismengruppen.

Satz 7.2 *Sei G generisch in P. Dann gilt in $M_{\mathfrak{F}}[G]$ das Auswahlaxiom nicht.*

Beweis: $\bigcup G$ ist eine Funktion von ω^3 nach 2. Sei $S_{i,j} : \omega \to 2$ definiert durch $S_{i,j}(n) = (\bigcup G)\,(i,j,n)$. Man zeigt leicht, daß alle $S_{i,j}$ verschieden sind. Setze $S_i = \{S_{i,j} \mid j \in \omega\}$ und $S = (S_i)_{\in\omega}$. Man sieht leicht, daß es (kanonische) Codes $s_{i,j}$, s_i und s für $S_{i,j}$, S_i und S mit folgenden Eigenschaften gibt:

- $f'(s_{i,j}) = s_{i,f_i(j)}$
- $s_{i,j}$ ist $F_{\{i\}}$–invariant.
- s_i und s sind F–invariant
- $s_{i,j}$, s_i und s sind $\mathfrak{F}$–invariant.

Es folgt, daß S zu $M_{\mathfrak{F}}[G]$ gehört. Wir zeigen, daß S keine Auswahlfunktion in $M_{\mathfrak{F}}[G]$ hat.

Eine Auswahlfunktion für S ist eine auf ω definierte Funktion A mit $A(i) \in S_i$. Wenn A zu $M_{\mathfrak{F}}[G]$ gehört, gibt es einen $\mathfrak{F}$–invarianten Code a für A. Wenn also a F_b–invariant ist, wählen wir ein i aus $\omega \setminus b$. Sei $A(i) = S_{i,j}$ und $p \in G$ eine Bedingung mit

$$p \Vdash a(\hat{i}) \mathrel{\mathring{=}} s_{i,j}.$$

Weil wir f_i beliebig wählen können, läßt sich ein $f \in F_b$ finden, sodaß $f_i(j) = j' \neq j$ und $f(p) = p'$ mit p kompatibel ist. Man hat dann

$$p' \Vdash a(\hat{i}) \mathrel{\mathring{=}} s_{i,j'}.$$

Wenn q eine gemeinsame Erweiterung von p und p' ist, folgt

$$q \Vdash s_{i,j} \mathrel{\mathring{=}} s_{i,j'}.$$

Das ist aber unmöglich, weil

$$\mathrm{o} \Vdash s_{i,j} \mathrel{\mathring{\neq}} s_{i,j'}.$$

$\square$

8 Changing 2^κ

Für zwei transitive Modelle $M \subset N$ von ZFC und eine Kardinalzahl μ von M, sagen wir: N *hat keine neuen μ–Folgen*, wenn für alle $a \in M$ jede N–Funktion $f : \mu \to a$ schon zu M gehört. Das heißt also, daß

$$({}^{\mu}a)^M = ({}^{\mu}a)^N.$$

Wenn a eine Kardinalzahl in M ist und $(a^\mu)^M$ in N Kardinalzahl bleibt, folgt

$$(a^\mu)^M = (a^\mu)^N.$$

Definition *Wir betrachten*

$$\mathrm{H}_\kappa(A,B) = \{f : x \to B \mid x \subset A,\ \ |x| < \kappa\}$$

als durch Inklusion partiell geordnete Menge.

Sei M ein abzählbares transitives Modell und $\kappa \leq \lambda$ Kardinalzahlen in M. Wir zeigen in diesem Abschnitt den folgenden Satz:

Satz 8.1 *Sei G generisch in $\mathrm{H}_\kappa^M(\lambda, 2)$. Wenn*

1. *κ regulär in M*
2. *$(2^{\underset{\smile}{\kappa}})^M = \kappa$,*

haben M und $M[G]$ die gleichen Kardinalzahlen und die gleiche Kofinalitätsfunktion. Weiter gilt für alle Kardinalzahlen $\mu \in M$:

i. *Wenn $\mu < \kappa$, hat $M[G]$ keine neuen μ–Folgen. Für alle Kardinalzahlen $\nu \in M$ ist also*
$$(\nu^\mu)^M = (\nu^\mu)^{M[G]}.$$

ii. *Wenn $\kappa \leq \mu$ und $\lambda \leq (2^\mu)^M$, ist*
$$(2^\mu)^M = (2^\mu)^{M[G]}.$$

Falls zusätzlich $(\lambda^\kappa)^M = \lambda$, so gilt auch $(2^\kappa)^{M[G]} = \lambda$.

Allgemein gilt $\kappa < \mathrm{cf}(2^\kappa)$. Für reguläre κ ist das in folgendem Sinn die einzige Bedingung an 2^κ: Wenn M ein Modell von GCH ist und

$$M \models \kappa \text{ regulär } \wedge \ \kappa < \mathrm{cf}(\lambda),$$

gilt auch
$$M \models 2^{\underset{\smile}{\kappa}} \mathrel{\mathring{=}} \kappa \ \wedge \ \lambda^\kappa \mathrel{\mathring{=}} \kappa.$$
Der obige Satz liefert dann ein $M[G]$ mit den gleichen Kardinalzahlen und Kofinalitäten und
$$M[G] \models 2^\kappa \mathrel{\mathring{=}} \lambda.$$

Als Beispiel haben wir:

Folgerung 8.2 *Wenn* ZFC *konsistent ist, ist auch*

$$\mathrm{ZFC} \ + \ 2^{\omega_5} = \omega_{\omega_7}$$

konsistent.

Sei M ein Modell von GCH und $\kappa_0 < \kappa_1 < \ldots < \kappa_n$ eine Folge von regulären Kardinalzahlen aus M. Weiter sei eine Folge $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ von Kardinalzahlen aus M gegeben, für die $M \models \kappa_i < \mathrm{cf}(\lambda_i)$.

Für alle i ist also auch $(2^{\underset{\smile}{\kappa_i}})^M = \kappa_i$ und $(\lambda_i^{\kappa_i})^M = \lambda_i$. Wähle nun G_n generisch in $\mathrm{H}_{\kappa_n}^M(\lambda_n, 2)$. Dann gilt $(2^{\kappa_n})^{M[G_n]} = \lambda_n$ und, wegen i., ist $(2^{\underset{\smile}{\kappa_j}})^{M[G_n]} =$

$(2^{\underset{\smile}{\kappa_j}})^M = \kappa_i$ und $(\lambda_j^{\kappa_j})^{M[G_n]} = (\lambda_j^{\kappa_j})^M = \lambda_i$ für alle $j < n$.
Wenn man jetzt G_{n-1} generisch in $\mathrm{H}_{\kappa_{n-1}}^{M[G_n]}(\lambda_{n-1}, 2)$ wählt, gilt wieder

$$(2^{\kappa_{n-1}})^{M[G_n][G_{n-1}]} = \lambda_{n-1}$$

und außerdem, wegen ii.,

$$(2^{\kappa_n})^{M[G_n][G_{n-1}]} = (2^{\kappa_n})^{M[G_n]} = \lambda_n.$$

Fährt man so fort, erhält man mit

$$N = M[G_n][G_{n-1}] \dots [G_0]$$

eine Erweiterung von M, die die gleichen Kardinalzahlen und Kofinalitäten wie M hat und für die

$$N \models 2^{\kappa_0} \doteq \lambda_0 \ \wedge \ 2^{\kappa_1} \doteq \lambda_1 \ \wedge \ \dots \ \wedge \ 2^{\kappa_n} \doteq \lambda_n.$$

Beispiel:

Folgerung 8.3 *Wenn* ZFC *konsistent ist, dann auch*

$$\mathrm{ZFC} \ + \ 2^{\omega_4} = \omega_{17} \ + \ 2^{\omega_{16}} = \omega_{17}.$$

Zum Beweis des Satzes zeigen wir zuerst, daß $\mathrm{H}^M(\lambda, 2)$ in M die κ^+–Kettenbedingung erfüllt.

Definition *Ein partielle Ordnung P erfüllt die μ–Kettenbedingung, wenn P keine Antikette der Mächtigkeit μ hat.*

Lemma 8.4 *Wenn κ regulär ist und $|B| \leq 2^{\underset{\smile}{\kappa}}$, erfüllt $\mathrm{H}_\kappa(A, B)$ die $(2^{\underset{\smile}{\kappa}})^+$–Kettenbedingung.*

Beweis: Wie der Beweis von Satz 6.3:
Aus einer gegebenen Antikette I konstruieren wir eine stetige, aufsteigende Folge $(A_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von Mengen, die höchstens die Mächtigkeit $2^{\underset{\smile}{\kappa}}$ haben. Parallel dazu konstruieren wir eine Folge $(I_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von Teilmengen von I, die höchstens die Mächtigkeit $2^{\underset{\smile}{\kappa}}$ haben. Wenn A_α konstruiert ist, wählen wir I_α so groß, daß es für jedes $p \in I$ ein $q \in I_\alpha$ gibt mit $q \restriction A_\alpha = p \restriction A_\alpha$. Wir finden ein I_α, das höchstens die Mächtigkeit $2^{\underset{\smile}{\kappa}}$ hat, weil $|\mathrm{H}_\kappa(A_\alpha, B)| < 2^{\underset{\smile}{\kappa}}$[1]. Dann setzen wir $A_{\alpha+1} = \bigcup\{\mathrm{dom}(q) \mid q \in I_\alpha\}$.
Für jedes $p \in I$ gibt es $\alpha < \kappa$ mit $\mathrm{dom}(p) \cap A_\alpha = \mathrm{dom}(p) \cap A_{\alpha+1}$, weil κ regulär ist. Wie in 6.3 folgt, daß $p \in I_\alpha$. Also ist $I = \bigcup_{\alpha<\kappa} I_\alpha$ und folglich $|I| \leq 2^{\underset{\smile}{\kappa}}$. □

Lemma 8.5 *Sei M ein abzählbares transitives Modell von* ZFC *und κ eine Kardinalzahl in M. Sei G generisch in $P \in M$. Wenn P in M die κ^+–Kettenbedingung erfüllt, bleiben alle $\mu > \kappa$, die (reguläre) Kardinalzahlen in M sind, auch (reguläre) Kardinalzahlen in $M[G]$.*

[1] Weil κ regulär ist, ist $(2^{\underset{\smile}{\kappa}})^{\underset{\smile}{\kappa}} = 2^{\underset{\smile}{\kappa}}$.

Beweis: Wie der Beweis von 6.4:
Sei $\mu > \kappa$ eine reguläre Kardinalzahl in M. Sei $\alpha < \mu$ und $F = \kappa_G(f)$ eine Funktion von α nach μ. Sei p_0 ein Element von G, das erzwingt, daß $\kappa_G(f)$ eine Funktion von α nach μ ist. Wegen der κ^+–Kettenbedingung hat für jedes $\beta < \alpha$ die Menge

$$\Lambda_\beta = \{\lambda < \mu \mid q \Vdash f(\hat{\beta}) \mathrel{\mathring{=}} \hat{\lambda} \text{ für ein } q \geq p_0\}$$

in M höchstens die Mächtigkeit κ. Weil μ regulär in M ist, hat die Vereinigung der Λ_β, $(\beta < \alpha)$ ein Supremum $\lambda < \mu$. Es ist klar, daß λ alle Funktionswerte $F(\beta)$ beschränkt. Damit ist gezeigt, daß μ regulär in $M[G]$ ist. □

Lemma 6.7 verallgemeinert sich sofort zu

Lemma 8.6 *Sei μ eine unendliche Kardinalzahl in M. Wenn P in M die κ^+–Kettenbedingung erfüllt, ist für alle generischen $G \subset P$*

$$(2^\mu)^{M[G]} \leq (|P|^{\kappa\mu})^M.$$

□

Damit folgt Eigenschaft ii. des Satzes: Wenn $\kappa \leq \mu$ und $\lambda \leq 2^\mu$, ist

$$(2^\mu)^M \leq (2^\mu)^{M[G]} \leq |(\mathrm{H}_\kappa(\lambda, 2)|^{\kappa\mu})^M = (\lambda^{\overset{\kappa}{\smile}\mu})^M = (\lambda^\mu)^M = (2^\mu)^M.$$

Die erste Ungleichung gilt, weil $(2^\mu)^M$ in $M[G]$ Kardinalzahl bleibt.

Definition *Eine partielle Ordnung heißt κ–vollständig, wenn für jedes $\mu < \kappa$ jede aufsteigende Kette $(p_\alpha)_{\alpha<\mu}$ eine Schranke in P hat.*

Für reguläre κ ist $\mathrm{H}_\kappa(\lambda, 2)$ κ–vollständig. Aus dem nächsten Lemma folgt unter den Voraussetzungen des Satzes, daß M und $M[G]$ die gleichen Kardinalzahlen und Kofinalitäten haben und die Gültigkeit von Eigenschaft i.

Lemma 8.7 *Sei M ein abzählbares transitives Modell von* ZFC *und κ eine Kardinalzahl in M. Sei G generisch in $P \in M$. Wenn P in M κ–vollständig ist, hat $M[G]$ für alle $\mu < \kappa$ keine neuen μ–Folgen. Daraus folgt, daß alle $\nu \leq \kappa$, die in M (reguläre) Kardinalzahlen sind, auch in $M[G]$ (reguläre) Kardinalzahlen bleiben.*

Beweis: Sei $F = \kappa_G(f)$ ein Funktion von μ nach $a \in M$, die nicht zu M gehört. Sei p_0 ein Element von G, das erzwingt, daß $\kappa_G(f)$ eine Funktion von μ nach a ist und nicht zu M gehört. Wir konstruieren in M eine aufsteigende Folge $(p_\alpha)_{\alpha\leq\mu}$ von Bedingungen und eine Folge (b_α) von Elementen von a: Wenn p_α konstruiert ist, wählen wir eine Erweiterung $p_{\alpha+1}$, die $f(\hat{\alpha}) = \widehat{b_\alpha}$ für ein b_α erzwingt. Wenn die p_α für alle α unterhalb einer Limeszahl λ konstruiert sind, wählen wir eine obere Schranke p_λ. Wenn G' generisch und p_μ enthält, ist

$$\kappa_{G'}(f)(\alpha) = b \quad \Longleftrightarrow \quad p_\mu \Vdash f(\hat{\alpha}) \mathrel{\mathring{=}} \hat{b}.$$

Daraus folgt, daß $\kappa_{G'}(f) \in M$. p_μ erzwingt aber das Gegenteil.

Wenn $\nu \leq \kappa$ singulär in $M[G]$ ist, gibt es ein $\mu < \nu$ und in $M[G]$ eine kofinale Funktion $F : \mu \to \nu$. Weil aber F zu M gehören muß, ist ν auch singulär in M. $\square$

Es bleibt noch der letzte Teil des Satzes zu zeigen. Wie im Beweis von 6.1 liefert jede in M liegende Bijektion zwischen $\lambda \times \kappa$ und λ eine im $M[G]$ liegende injektive Abbildung von λ nach $\mathfrak{P}^{M[G]}(\kappa)$. Es ergibt sich $\lambda \leq (2^\kappa)^{M[G]}$.
Aus dem Beweis von ii. folgt andererseits $(2^\kappa)^{M[G]} \leq (\lambda^\kappa)^M$. Wenn $(\lambda^\kappa)^M = \lambda$, ist also $(2^\kappa)^M \leq \lambda$.

9 Produkte und Forcing mit Klassen

P und Q seien zwei partielle Ordnungen mit kleinstem Element. Das Produkt $P \times Q$ wird vermöge

$$(p, q) \leq (p', q') \iff p \leq q \wedge p' \leq q'$$

partiell geordnet.

Lemma 9.1 *Ein Ideal in $P \times Q$ ist immer das Produkt $G \times H$ von zwei Idealen in P und Q.*

Beweis: Das Ideal K von $P \times Q$ ist Produkt der beiden Ideale $G = \{p \mid (p, \mathrm{o}) \in K\}$ und $H = \{q \mid (\mathrm{o}, q) \in K\}$. Weil nämlich (p, q) das Supremum von (p, o) und (o, q) ist, ist

$$(p, q) \in K \iff (p, \mathrm{o}) \in K \wedge (\mathrm{o}, q) \in K$$

$\square$

Lemma 9.2 *Sei F eine Eigenschaft von Idealen G von P und sei*

$$G \times H \in \mathsf{F}' \Leftrightarrow G \in \mathsf{F}.$$

Dann ist

$$(p, q) \Vdash \mathsf{F}' \Leftrightarrow p \Vdash \mathsf{F}$$

Beweis: Trivial. $\square$

Sei R ein partielle Ordnung mit kleinstem Element o, P und Q Teilmengen die o enthalten. Wir sagen, daß R (inneres) direktes Produkt von P und Q ist, wenn die Abbildung

$$(p, q) \mapsto \sup(p, q)$$

einen Isomorphismus zwischen $P \times Q$ und R definiert.

Seien $M \subset N$ zwei abzählbare transitive Modelle von ZFC und $P \in M$ eine partielle Ordnung. Ein Ideal $G \subset$ kann generisch im Sinn von M oder im Sinn von N sein. Wir verwenden dazu die Sprechweise:

Definition *G ist M–generisch, wenn G alle dichten Teilmengen $D \subset P$ schneidet, die zu M gehören.*

Wenn M zwei partiellen Ordnungen P und Q enthält, kann man zuerst ein M–generisches Ideal G von P und dann ein $M[G]$–generisches Ideal H in Q wählen. Der nächste Satz besagt, daß die so entstehenden Erweiterungen $M[G][H]$ genau die Erweiterungen $M[K]$ für M–generische Ideale $K = G \times H$ von $P \times Q$ sind.

Satz 9.3 *$G \times H$ ist genau dann M–generisch, wenn G M–generisch und H $M[G]$–generisch ist.*

Beweis: Sei $G \times H$ M–generisch. Wenn $D \in M$ dicht in p ist, ist $D \times Q$ dicht in $P \times Q$. Es gibt also ein $(p,q) \in (D \times Q) \cap (G \times H)$, woraus $p \in D \cap G$ folgt. Um zu zeigen, daß H $M[G]$–generisch ist, nehmen wir ein dichtes $E = \kappa_G(e) \subset Q$ aus $M[G]$. Dann ist die Menge

$$F = \big\{(p,q) \;\big|\; p \Vdash (e \text{ ist nicht dicht in } \widehat{Q}) \;\text{ oder }\; p \Vdash \hat{q} \,\epsilon\, e\big\}$$

dicht in $P \times Q$. Sei $(p,q) \in F \cap G \times H$. Dann ist $p \nVdash$ (e ist nicht dicht in $\widehat{Q}$). Also ist $p \Vdash \hat{q} \,\epsilon\, e$, woraus $q \in E$ folgt.

Sei umgekehrt G M–generisch und H $M[G]$–generisch und $F \in M$ dicht in $P \times Q$. Sei

$$F[G] = \{q \in Q \mid \exists p \in G\ (p,q) \in F\}\,.$$

Man sieht leicht, daß

$$\mathrm{o} \Vdash F[G] \text{ dicht in } \widehat{Q}.$$

$F[G]$ ist also tatsächlich dicht in Q und es gibt ein $q \in F[G] \cap H$, und dazu ein $p \in G$ mit $(p,q) \in F$.
Man kann das Argument auch so fassen: Für alle q ist

$$D_q = \{p \mid \exists q' \geq q\ (p,q') \in F\}$$

dicht in P. Es gibt also für alle q ein $p \in G$ und ein $q' \geq q$ mit $(p,q') \in F$, was aber $q' \in F[G]$ bedeutet. Also ist $F[G]$ dicht. □

Wir betrachten jetzt Erzwingungsmodelle für partielle Ordnungen, die keine Element mehr von M sind, sondern nur noch Teilmengen von M. Man braucht allerdings, daß (M,P) ein Modell von ZFC ist.

Definition *$(M,P,\ldots)$ ist ein (transitives) Modell von* ZFC*, wenn M ein (transitives) Modell von* ZFC *ist und wenn zusätzlich das Aussonderungs– und Ersetzungsschema für Formeln gelten, in denen Prädikate für $P,\ldots$ vorkommen.*

Wenn $M[G]$ eines der bisher konstruierten Erzwingungsmodelle ist, ist zum Beispiel $(M[G],M)$ ein Modell von ZFC.

Sei nun $(P,\leq)$ ein partielle Ordnung und $(M,P,\leq)$ ein abzählbares Modell von ZFC.

Definition *Ein Ideal G in P heißt $(M, P, \leq)$–generisch, wenn G jede dichte Teilmenge von P schneidet, die in $(M, P, \leq)$ definierbar ist.*

Wenn G generisch ist, können wir wieder die Menge $M[G]$ konstruieren. Der Code $\hat{G}$ ist kein Element von M mehr. Im allgemeinen ist also G kein Element von $M[G]$, sondern nur eine Teilmenge von $M[G]$. Die gesamte Theorie geht wie zuvor mit einer, allerdings fatalen Ausnahme: Der Satz 3.1 ist nicht mehr beweisbar, weil man rekursiv keine Klassen definieren kann. (Ginge das irgendwie, gäbe es auch eine Wahrheitsdefinition in ZFC.)
Unter einer zusätzlichen Voraussetzung ist 3.1, und damit der Rest der Theorie, allerdings gültig.

Definition *P heißt lokal klein in M, wenn es für beliebig große Kardinalzahlen $\mu \in M$ gibt es eine Zerlegung $P = P_\mu \times P^\mu$ gibt mit*

a) P_μ gehört zu M und erfüllt in M die μ^+–Kettenbedingung.

b) P^μ ist in $(M, P, \leq)$ definierbar und ist in M μ^+–vollständig.

Außerdem fordern wir, daß es für jedes $A \in P$ ein $P_\mu = P_A$ gibt[2] *mit $A \subset P_A$. Die Abbildung $A \mapsto P_A$ soll in $(M, P, \leq)$ definierbar sein. Es ist bequem anzunehmen, daß $\mu < \mu' \Rightarrow P_\mu \subset P_\mu$.*

Satz 9.4 *Sei $P \subset M$ ein partielle Ordnung, $(M, P, \leq)$ ein abzählbares Modell von* ZFC *und P lokal klein in M. Dann gilt für alle Formeln $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, die Prädikate für M, P, $\leq$ und G enthalten,*

1. *Die Menge*

$$\{\langle p, a_1, \ldots, a_n\rangle \mid p \in P,\, a_1, \ldots, a_n \in M,\, p \Vdash \phi(a_1, \ldots, a_n)\}$$

   ist in $(M, P, \leq)$ definierbar.

2. *Wenn G generisch ist, gilt $\phi(\kappa_G(a_1), \ldots, \kappa_G(a_n))$ genau dann in $(M[G], M, P, \leq, G)$, wenn $\phi(a_1, \ldots, a_n)$ von einem Element von G erzwungen wird.*

3. *Wenn G generisch ist, ist $(M[G], M, P, \leq, G)$ ein Modell von* ZFC.

Beweis: Der Beweis von 1. und 2. geht genau wie der Beweis von 4.1, ohne daß man die Voraussetzung, die wir über P gemacht haben, verwenden muß. Nur beim Beweis der Definierbarkeit von

$$\{\langle p, a, b\rangle \mid p \in P,\, a, b \in M,\, p \Vdash a \,\epsilon\, b\}$$

und

$$\{\langle p, a, b\rangle \mid p \in P,\, a, b \in M,\, p \Vdash a \mathrel{\mathring{=}} b\}$$

[2] Wenn $\mu \subset P$, hat also P_μ zwei Bedeutungen.

muß man statt 3.1 das noch zu beweisende Lemma 9.5 verwenden.
Schließlich muß man noch die Definierbarkeit von

$$\{\langle p, a\rangle \mid p \in P,\, a \in M,\, p \Vdash G(a)\}$$

zeigen. Es ist aber

$$p \Vdash G(a) \iff \forall q \geq p\, \exists r \geq q\, \exists p'\, (p' \leq r \,\wedge\, r \Vdash a \mathrel{\mathring{=}} \widehat{p'})\,.$$

Nun zum Beweis von 3, der etwas schwerer ist als der Beweis von 4.3: Wir verwenden folgende Bezeichnungen: $G_\mu = P_\mu \cap G$ und $G^\mu = P^\mu \cap G$.

Sei A eine Teilmenge von P. Wir nennen $a \in M$ einen A–code, wenn a eine Menge von Paaren $\langle p, b\rangle$ ist, wobei $p \in A$ und b wieder ein A–code ist. Es ist klar, daß jedes Element von $M[G]$ von einem P_μ–code, für genügend großes μ, codiert wird. $M[G]$ ist also aufsteigende Vereinigung der transitiven Modelle $M[G_\mu]$. Daraus folgt, daß in $M[G]$ alle Π_2–Axiome von ZFC wie zum Beispiel das Paarmengenaxiom, das Vereinigungsmengenaxiom oder das Auswahlaxiom gelten. Zu zeigen sind noch das Potenzmengenaxiom, das Aussonderungsaxiom und das Ersetzungsaxiom.

Wir brauchen einen Hilfssatz:

Sei D dicht und offen[3] *in $P = P_\mu \times P^\mu$. Dann ist die Menge aller $q \in P^\mu$, für die*

$$D_q = \{p \in P_\mu \mid (p, q)\}$$

dicht in P_μ ist, dicht in P^μ.

Beweis: Wir nehmen das Gegenteil an. Sei $q_0 \in P^\mu$ so, daß kein D_q mit $q \geq q_0$ dicht ist. Wir definieren (in $(M, P, \leq)$) eine Folge $(p_\alpha)_{\alpha<\mu^+}$ von inkompatiblen Elementen von P_μ und eine aufsteigende Folge $(q_\alpha)_{\alpha<\mu^+}$ von Elementen von P^μ, sodaß $(p_\alpha, q_\alpha) \in D$. Das widerspricht dann der μ^+–Kettenbedingung für P_μ. Wenn die p_β und q_β für alle $\beta < \alpha$ schon konstruiert sind, wählen[4] wir q_α als obere Schranke der q_β. Weil D_{q_α} nicht dicht in P_μ ist, gibt es ein p_α, das keine Erweiterung in D_{q_α} hat. Wir können annehmen, daß $(p_\alpha, q_\alpha) \in D$; sonst ersetzen wir (p_α, q_α) durch ein Erweiterung. Weil D aufwärts abgeschlossen ist, gehören alle p_β zu D_{q_α} und sind daher inkompatibel mit p_α.

Potenzmengenaxiom:

Sei $x \in M[G]$. Wir müssen zeigen, daß $\mathfrak{P}(x)^{M[G]} \in M[G]$.

Sei $x = \kappa_G(a)$ und μ so groß gewählt, daß a ein P_μ–code ist und $\|a\|^M \leq \mu$. Weil $M[G_\mu]$ ein Modell von ZFC ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{P}(x)^{M[G]} \subset M[G_\mu]$.

Sei also $y = \kappa_G(b)$ eine Teilmenge von x. Wir wählen in M eine Aufzählung $(c_\alpha)_{\alpha<\mu}$ von

$$\mathrm{im}(a) = \{c \mid \exists p\, \langle p, c\rangle \in a\}.$$

[3] vgl. S. 3

[4] Hier scheinen wir ein "globales" Auswahlaxiom zu verwenden (s. 9.6). Das läßt sich leicht vermeiden, wenn man überlegt, daß man die q_α in einer (mit dem Reflexionssatz) von vornherein gewählten Menge wählen kann. In den Anwendungen (zum Beispiel im Beweis von 9.6) kann man übrigens für q_α häufig einfach die Vereinigung der q_β wählen.

Nehmen wir an, daß y nicht zu $M[G_\mu]$ gehört. Dann gibt es ein $r' \in G$, das diese Tatsache und außerdem $b \subset a$ erzwingt. Wir schreiben in der Zerlegung $P = P_\mu \times P^\mu$ als $r = (p', q')$. Nach dem letzten Hilfssatz gibt es ein $q_0 \geq q'$, sodaß die Menge aller $p \in P_\mu$, für die (p, q_0) entweder $c_0 \,\epsilon\, b$ oder $\neg c_0 \,\epsilon\, b$ erzwingt, dicht in P_μ. Dann finden ein $q_1 \geq q_0$, sodaß die Menge aller p, die $c_1 \,\epsilon\, b$ entscheiden, dicht ist, usw. Schließlich finden wir ein $q_\infty \geq q'$, sodaß für alle $\alpha < \mu$ die Menge aller $p \in P_\mu$, die $c_\alpha \,\epsilon\, b$ entscheiden, dicht ist. Sei jetzt G' eine generische Menge, die q_∞ enthält, dann ist

$$\kappa_{G'}(b) = \left\{\kappa_{G'}(c_\alpha) \mid \exists p \in G'_\mu \; (p, q_\infty) \Vdash c_\alpha \,\epsilon\, b\right\}$$

ein Element von $M[G'_\mu]$, was der Wahl von r' widerspricht.

Aussonderungsaxiom:

Wird wie das Potenzmengenaxiom bewiesen, wobei statt $c_a \,\epsilon\, b$ eine Formel $\phi(c_\alpha)$ erzwungen wird.

Ersetzungsaxiom:

Sei $x = \kappa_G(a)$ wie im Beweis der Potenzmengenaxioms und $\phi(Y, Z)$ eine Formel (mit Parametern), für die

$$M[G] \models \forall\, z \,\epsilon\, x \,\exists! y \;\phi(y, z).$$

Sei $r' = (p', q') \in G$ eine Bedingung, die das erzwingt. Wir finden wieder ein $q_\infty \geq q'$, sodaß für alle $\alpha < \mu$ die Menge aller $p \in P_\mu$, die entweder inkompatibel mit p' sind oder eine Formel der Form $\phi(y_p, c_\alpha)$ erzwingen, dicht ist. Wir können ruhig annehmen, daß $q_\infty \in G^\mu$. Wenn wir jetzt $\mu' \geq \mu$ so groß wählen, daß alle y_p $P_{\mu'}$–codes sind, ist $\{y \in M[G] \mid M[G] \models \exists z \in x \; \phi(y, z)\}$ eine Teilmenge von $M[G_{\mu'}]$, also ein Element von $M[G]$ nach dem Aussonderungsaxiom. □

Lemma 9.5 *Wenn P lokal klein ist, ist die Relation $p \Vdash \Phi$ zwischen Elementen p von P und unendlichen Booleschen Kombinationen $\Phi \in M$ von Formeln der Form $p' \,\epsilon\, G$ in $(M, P, \leq)$ definierbar.*

Beweis: Sei $A(\Phi)$ die Menge alle $p' \in P$, die in den Teilformeln $p' \,\epsilon\, G$ von Φ vorkommen. Dann gilt

$$p \Vdash \Phi \iff p \Vdash_{P_{A(\Phi)}} \Phi$$

nach 9.2. Daraus folgt die Behauptung mit 3.1. □

Als ein Beispiel betrachten wir ein abzählbares transitives Modell M und

$$P = \left\{f \in M \mid f \text{ ist eine Auswahlfunktion}^5\right\}.$$

P ist lokal klein, weil für alle $\beta \in M$

$$P = P_\beta \times P^\beta,$$

[5] Eine Auwahlfunktion f ist eine Funktion mit $f(x) \in x$ für alle $x \in \mathrm{dom}(f)$.

wobei

$$\begin{aligned} P_\beta &= \{f \in P \mid \mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{V}_\beta^M\} \\ P^\beta &= \{f \in P \mid \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{V}_\beta^M = \emptyset\}. \end{aligned}$$

P^β (ebenso wie P_β) ist schlechthin vollständig.

Wenn G generisch ist, gehören alle $G \cap P_\beta$ zu M. Daraus folgt $M = M[G]$. $\bigcup G$ ist eine globale Auswahlfunktion und $(M, \bigcup G)$ ein Modell von ZFC.

Folgerung 9.6 *Erweitert man* ZFC *um eine globale Auswahlfunktion*

$$F : \mathrm{V} \setminus \{\emptyset\} \to \mathrm{V}$$

und um Aussonderungs– und Ersetzungsschema für Formeln, die das Symbol F enthalten, erhält man eine konservative Erweiterung von ZFC.

10 Der Satz von Easton

Satz 10.1 *Sei M ein abzählbare transitives Modell von* ZFC+GCH. *Sei ferner für jedes reguläre $\kappa \in M$ ein $F(\kappa) \in M$ gegeben mit*

1. $\kappa < \mathrm{cf}^M F(\kappa)$
2. $\lambda < \kappa \Rightarrow F(\lambda) \leq F(\kappa)$

Dann gibt es eine klassengenerische Erweiterung N von M, die die gleichen Kardinalzahlen und Kofinalitäten wie M hat und in der

$$2^\kappa = F(\kappa)$$

für alle regulären $\kappa \in M$.

Wir argumentieren zunächst in M.

Sei R die Klasse aller auf Mengen von Ordinalzahlen definierten Abbildungen nach 2. Mit $F'(\kappa)$ bezeichnen wir das Ordinalzahlprodukt $F(\kappa)\kappa$. Beachte, daß $|F'(\kappa)| = F(\kappa)$. Die verwendete partielle Ordnung ist die Klasse

$$P = \{f \in R \mid |f \upharpoonright F'(\kappa)| < \kappa \text{ für alle regulären } \kappa\}.$$

Um zu zeigen, daß P lokal klein ist, definieren wir für reguläre κ

$$\begin{aligned} P_\kappa &= \{f \in P \mid \mathrm{dom}(f) \subset F'(\kappa)\} \\ P^\kappa &= \{f \in R \mid |f \upharpoonright F'(\lambda)| < \lambda \text{ für alle regulären } \lambda > \kappa\} \end{aligned}$$

Nach 8.4 erfüllt P_κ die κ^+–Kettenbedingung. P^κ ist κ^+–vollständig.

Lemma 10.2 $P \cong P^\kappa \times P_\kappa$

Beweis: Definiere für $f \in R$

$$\begin{aligned} f_\kappa &= f \upharpoonright F'(\kappa) \\ f^\kappa(\alpha) &= f(F'(\kappa)+\alpha) \end{aligned}$$

Dann ist die Abbildung $f \mapsto (f^\kappa, f_\kappa)$ der gesuchte Isomorphismus. Man beachte, daß die Abbildung $\alpha \mapsto F'(\kappa)+\alpha$ für alle $\lambda > \kappa$ eine Bijektion zwischen $F'(\lambda)$ und $F'(\lambda) \setminus F'(\kappa)$ definiert. □

Sei nun $G \subset P^M$ generisch und $N{=}M[G]$.

Wir zeigen zuerst, daß N und M die gleichen Kardinalzahlen und Kofinalitäten haben. Dazu seien $\kappa < \lambda$ zwei in M reguläre Kardinalzahlen. Wir G zerlegen in $G^\kappa \times G_\kappa$. Nach 9.4 ist G^κ $M-$generisch in $(P^k)^M$, G_κ ist $M[G^\kappa]-$generisch in $(P_\kappa)^M$ und $N = M[G^\kappa][G_\kappa]$.
$(P^\kappa)^M$ ist in M $(\kappa^+)^M$–vollständig. Also bleiben nach 8.7 alle (regulären) Kardinalzahlen $\nu \leq (\kappa^+)^M$ (reguläre) Kardinalzahlen in $M[G^\kappa]$. Außerdem gibt es für $\mu \leq \kappa$ keine neuen μ–Folgen, woraus erstens folgt, daß $\kappa < \mathrm{cf}^{M[G^\kappa]}(\lambda)$, und zweitens, daß $(2^\mu)^M = (2^\mu)^{M[G^\kappa]}$ und daher $\kappa = (2^{\smile\kappa})^M = (2^{\smile\kappa})^{M[G^\nu]}$.
Weil auch in $M[G^\kappa]$ alle Funktionen aus $(P_\kappa)^M$ kleinere Mächtigkeit als κ haben, erfüllt $(P_\kappa)^M$ auch in $M[G^\kappa]$ die $(\kappa^+)^{M[G^\kappa]}$–Kettenbedingung. Aus 8.5 folgt, daß alle Kardinalitäten und Kofinalitäten oberhalb von κ beim Übergang von $M[G^\kappa]$ zu N erhalten bleiben. Insbesondere ist

$$\kappa < \mathrm{cf}^{M[G^\kappa]}(\lambda) = \mathrm{cf}^N(\lambda).$$

Daraus folgt, daß λ regulär in N bleibt.

Schließlich zeigen wir noch, daß $(2^\kappa)^M = F(\lambda)$ für alle regulären κ. Zunächst ist nach 8.6

$$(2^\kappa)^N \leq (|(P_\kappa)^M|^\kappa)^{M[G^\kappa]} = (F(\kappa)^\kappa)^{M[G^\kappa]}.$$

Weil $M[G^\kappa]$ keine neuen κ–Folgen hat, ist

$$(F(\kappa)^\kappa)^{M[G^\kappa]} \leq (F(\kappa)^\kappa)^M = F(\kappa).$$

Umgekehrt liefert wie früher G_κ eine injektive Abbildung von $F(\kappa)$ nach $\mathfrak{P}(\kappa)$ und es folgt $F(\lambda) \leq (2^\kappa)^M$.

Änderungen

12.5.2005
Moritz Müller hat mich auf folgende Fehler aufmerksam gemacht: Die Zerlegung von P im Beweis von 9.6 war nicht korrekt. In der Definition auf Seite 21 war P_A nicht definiert. Der Beweis des Hilfssatzes auf Seite 22 war unvollständig.

28.2.2012 Heike Mildenberger verdanke ich den Hinweis auf eine Reihe von Druckfehlern im Beweis von Lemma 1.1 (1).