Lineare Algebra I,II (Sätze und Definitionen)

Martin Ziegler

Freiburg WS 93/94, SS 94[1]

[1]version11-4-g870cff2, Tue Oct 18 21:50:37 2011 +0200

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Der n-dimensionale euklidische Raum

1.1 Lineare Gleichungen

Eine *lineare Gleichung* (über $\mathbb{R}$) ist ein Ausdruck der Form

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta,$$

für reelle Zahlen α_i und β. Eine *Lösung* ist ein n-Tupel

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

von reellen Zahlen, das die Gleichung erfüllt.

Ein *lineares Gleichungssystem* G (in n Variablen) ist ein System

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ & & \vdots & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array}$$

von linearen Gleichungen. In Kurzform

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Die *Lösungsmenge* von G ist

$$\mathrm{L}(G) = \left\{ (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \ \xi_1, \ldots \xi_n \in \mathbb{R}, \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = \beta_i \quad (i = 1, \ldots, m) \right\}$$

,

G heißt *homogen*, wenn alle β_i gleich Null sind, und *quadratisch*, wenn $m = n$.

Eine *Zeilenoperation* macht aus G ein neues Gleichungssystem durch

Z_i^λ Multiplikation der i–ten Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$

$Z_{i,j}^\lambda$ Addieren des λ–fachen der i–ten Zeile zur j–ten Zeile ($i \neq j$).

Lemma 1.1.1 *Ein Gleichungssystem, das aus G durch Zeilenoperationen hervorgeht, hat die gleichen Lösungen wie G.*

Ein Gleichungssystem G' ist in *Normalform* , wenn es die Gestalt

$$\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & & & + & \alpha_{1,k+1}x_{k+1} & + & \cdots & \alpha_{1,n}x_n & = & \beta_1 \\
& x_2 & & + & \alpha_{2,k+1}x_{k+1} & + & \cdots & \alpha_{2,n}x_n & = & \beta_1 \\
& & \ddots & & & & \vdots & & & \vdots \\
& & x_k & + & \alpha_{k,k+1}x_{k+1} & + & \cdots & \alpha_{k,n}x_n & = & \beta_k \\
& & & & & & & 0 & = & \beta_{k+1} \\
& & & & & & & \vdots & & \vdots \\
& & & & & & & 0 & = & \beta_m
\end{array}$$

hat. k heißt der *Rang* von G'. Beachte, daß $0 \leq k \leq \min(m,n)$. Wenn $\beta_{k+1} = \ldots = \beta_m = 0$, ist die Lösungsmenge

$\{(\beta_1 - \alpha_{1,k+1}\xi_{k+1} \cdots - \alpha_{1,n}\xi_n\ , \ldots ,\ \beta_k - \alpha_{k,k+1}\xi_{k+1} \cdots - \alpha_{k,n}\xi_n,\ \xi_{k+1}\ , \ldots ,\ \xi_n) \mid \quad \xi_{k+1}\ , \ldots ,\ \xi_n \in \mathbb{R}\}$

$(n-k)$*-parametrig.*

Lemma 1.1.2 *Jedes lineare Gleichungssystem läßt sich durch Zeilenoperationen und Vertauschung von Variablen in Normalform bringen.*

Folgerung 1.1.3 *Sei k der Rang des in Normalform gebrachten Gleichungssystems G, m die Zahl der Gleichungen und n die Zahl der Variablen. Dann ist* $\mathrm{L}(G)$ *leer oder $(n-k)$-parametrig. Wenn $k = m$, gibt es immer eine Lösung. Wenn $k = n$, gibt es höchstens eine Lösung.*

Folgerung 1.1.4 *Ein Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Variablen hat keine oder unendlich viele Lösungen.*

1.2 Der $\mathbb{R}^n$

Das *Produkt* $X_1 \times \ldots \times X_n$ einer Folge von Mengen ist die Menge

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i (i = 1, \ldots, n)\}$$

aller n–Tupel, deren i–te Komponente aus X_i ist. X^n ist das n–fache direkte Produkt von X.

$$\mathbb{R}^n = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \ \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}\}$$

ist der *n-dimensionale euklidische Raum.*

Spezialfälle:	$\mathbb{R}^0$	wird als der *Nullraum* $\mathbf{0} = \{0\}$ vereinbart.
	$\mathbb{R}^1$	sind die reellen Zahlen selbst.
	$\mathbb{R}^2$	ist die euklidische Ebene.

Je nach Zusammenhang heißen die Elemente des $\mathbb{R}^n$ Punkte oder Vektoren.

Vektoren können addiert und mit reellen Zahlen (Skalaren) multipliziert werden. Seien $a = (\xi_i)$ und $b = (\zeta_i)$ Vektoren und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} a + b &= (\xi_i + \zeta_i) \\ \lambda a &= (\lambda \xi_i). \end{aligned}$$

Mit 0 bezeichnen wir den *Nullvektor* $(0, \ldots, 0)$.

Lemma 1.2.1 *Es gelten die folgenden Rechenregeln.*

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$
2) $x + 0 = 0 + x = x$
3) *Zu jedem* x *gibt es ein* y *mit* $x + y = 0$.
4) $x + y = y + x$
5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
8) $1x = x$

1.3 Geraden und Ebenen

Definition *Eine (affine) Gerade* g *in* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Menge der Form*

$$\{a + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = a + \mathbb{R}v,$$

wobei $v \neq 0$.

Der *Richtungsraum* $\mathbb{R}v$ ist durch g eindeutig bestimmt.

Lemma 1.3.1 *Zwei Geraden* $a + \mathbb{R}v$ *und* $b + \mathbb{R}w$ *sind genau dann gleich, wenn* $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ *und* $a - b \in \mathbb{R}v$.

Lemma 1.3.2 *Durch zwei verschiedene Punkte des* $\mathbb{R}^n$ *geht genau eine Gerade.*

Definition *Zwei Geraden heißen* parallel*, wenn sie die gleichen Richtungsräume haben.*

Verschiedene parallele Geraden können sich nicht schneiden.

Definition *Zwei Vektoren* v *und* w *heißen* linear abhängig*, wenn einer von beiden null ist oder wenn* v *ein Vielfaches von* w *ist, das heißt, wenn* $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$.

Definition *Eine affine Ebene* E *ist eine Menge der Form* $a + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$*, für linear unabhängige* v *und* w.

Der Richtungsraum $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ ist durch E eindeutig bestimmt.

Lemma 1.3.3 *Zwei nicht parallele Geraden, die in einer Ebene liegen, schneiden sich.*

1.4 Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $a = (\xi_i)$ und $b = (\zeta_i)$ ist

$$ab = \xi_1\zeta_1 + \ldots \xi_n\zeta_n.$$

Lemma 1.4.1 *Das* Skalarprodukt *ist eine symmetrische, positiv–definite Bilinearform . Das heißt*

- $(a + b)c = ac + bc$ *und* $a(b + c) = ab + ac$
- $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$
- $ab = ba$
- $a^2 \geq 0$
- $a^2 = 0$ *gdw.* $a = 0$.

Definition *Die Norm oder Länge von a ist*

$$\|a\| = \sqrt{a^2}.$$

Definition *Der Winkel α zwischen zwei nicht-trivialen Vektoren ist definiert durch $0 \leq \alpha \leq \pi$ und*

$$\cos(\alpha) = \frac{ab}{\|a\|\|b\|}$$

.

Lemma 1.4.2 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

$$|ab| \leq \|a\|\|b\|$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn a und b linear abhängig sind.

Lemma 1.4.3 (Dreiecksungleichung)

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

1.5 Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *linear*, wenn für reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n.$$

f heißt auch *Linearform.* Für die *kanonischen* Basisvektoren $e_i = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, wobei

$$\xi_j = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } j \neq i \\ 1 & \text{, wenn } j = i, \end{cases}$$

gilt $f(e_i) = \alpha_i$. Eine Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_m)$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ heißt *linear*, wenn alle Komponenten $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ linear sind. L$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, die Menge der linearen Abbildungen ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum unter wertweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren.

Eine m-n–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

ist eine mit Zahlenpaaren aus $\{1 \ldots m\} \times \{1 \ldots n\}$ indizierte Familie $(\alpha_{ij})_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}$. Mit elementweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren bildet die Menge $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ der m-n–Matrizen einen $\mathbb{R}$–Vektorraum. 1-n–Matrizen heißen *Zeilenvektoren*, m-1–Matrizen *Spaltenvektoren*.

Spezielle Matrizen: $\mathbf{0}$ ist die m-n–Matrix, deren Elemente Nullen sind. Die *Einheitsmatrix* $\mathbf{I}$ ist die m-m–Matrix (δ_{ij}), wobei $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad i \neq j \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$. (Man nennt δ_{ij} "Kroneckers Delta".) Eine n-n–Matrix heißt *quadratisch*. Wir schreiben $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ für $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Definition *Das Produkt $C = (\gamma_{hj})$ einer l-m–Matrix $A = (\alpha_{hi})$ und einer m-n–Matrix $B = (\beta_{ij})$ ist eine l-n–Matrix definiert durch $\gamma_{hj} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{hi}\beta_{ij}$.*

Eine m-n–Matrix A definiert eine lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch

$$f_A(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\xi_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj}\xi_j).$$

f_0 ist die Nullabbildung, f_I die identische Abbildung.

Satz 1.5.1

$$f_A \circ f_B = f_{AB}$$

Folgerung 1.5.2 *Das Matrizenprodukt ist assoziativ und bilinear. Es gilt $\mathbf{0}A = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{I}A = A\mathbf{I} = A$.*

Spaltenvektoren A entsprechen linearen Abbildungen $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, die wiederum gegeben sind durch den Vektor $a = f_A(1)$. Das liefert eine Entsprechung der Elemente von $\mathrm{M}_{1,m}(\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^m$. Hierbei entspricht der Vektor $f_B(a)$ der Spalte Ba.

Sei $\iota_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\iota_j(1) = e_j$ und $\pi_i : \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\pi_i(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, die Projektion auf die $i-$te Komponente. Dann wird $f_A \circ \iota_j$ gegeben durch die j-te Spalte von A und $\pi_i \circ f_A$ durch die i-te Zeile von A.

Lemma 1.5.3 *Seien z_i die Zeilen von A und s_i die Spalten von B $(i = 1, \ldots, m)$. Dann sind die z_iB die Zeilen und die As_i die Spalten von AB.*

Kapitel 2

Vektorräume

2.1 Gruppen

Eine zweistellige *Operation* auf X ist eine Funktion $f : X^2 \to X$. Man schreibt häufig xfy für $f(x, y)$.

Definition *Eine Gruppe ist ein Paar* $(G, \circ)$ *aus einer Menge* G *und einer zweistelligen Operation* $\circ$ *auf* G *mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *(Assoziativität):* $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ *für alle* $a, b, c \in G$
2. *Es gibt ein Element* $e \in G$ *mit*
   (a) *(linksneutral):* $e \circ a = a$ *für alle* $a \in G$.
   (b) *(Linksinverses): Zu jedem* a *gibt es ein* a' *mit* $a' \circ a = e$.

Lemma 2.1.1 *Sei* $(G, \circ)$ *eine Gruppe und* e *ein Element wie in der Definition. Dann gilt:*

1. *Ein Linksinverses von* a *ist auch Rechtsinverses.*
2. e *ist rechtsneutral.*
3. e *ist das einzige linksneutrale (rechtsneutrale) Element.*
4. a *hat nur ein Linksinverses (Rechtsinverses).*

Lemma 2.1.2 *Sei* $(G, \circ)$ *eine Halbgruppe (d.h.* G *ist eine nicht–leere Menge und* $\circ$ *ist eine zweistellige assoziative Operation). Dann ist* G *genau dann eine Gruppe, wenn für alle* $a, b \in G$ *die Gleichungen* $a \circ x = b$ *und* $y \circ a = b$ *lösbar sind.*

In einer Gruppe bezeichnen wir mit e das *neutrale* und mit a^{-1} das Inverse von a. e heißt auch *Einselement*.

Definition *Sei* n *eine positive natürliche Zahl.*

- $a^0 = e$
- $a^n = \underbrace{a \circ \cdots a \circ a}_{n \text{ Faktoren}}$

- $a^{-n} = (a^{-1})^n$

Lemma 2.1.3 *Sei G eine Gruppe. Dann gilt für alle $a \in G$ und $x, y \in \mathbb{Z}$*

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{xy} = (a^x)^y$
- $a^1 = a$

Definition *Ein Gruppe heißt abelsch oder kommutativ, wenn $ab = ba$ für alle $a, b \in G$.*

Die Gruppenoperation in abelschen Gruppen schreibt man häufig als $+$, das neutrale Element als 0 und das Inverse von a als $-a$. Statt a^z schreibt man dann za.

Lemma 2.1.4 *Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Dann ist G ein $\mathbb{Z}$–Modul . Das heißt, für alle $a \in G$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ ist*

1. $x(a + b) = xa + xb$
2. $(x + y)a = xa + ya$
3. $(xy)a = x(ya)$
4. $1a = a$.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *injektiv*, wenn $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ für alle $x_1, x_2 \in X$. f heißt *surjektiv* , wenn Y das *Bild*

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\}$$

von f ist. Eine injektive und surjektive Abbildung heißt *bijektiv* oder *Bijektion*. Die *Umkehrabbildung* f^{-1} einer Bijektion f ist bestimmt durch $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$. Eine Bijektion $f : X \to X$ heißt *Permutation* von X. (Zur Notation: $f \circ g$ ist die durch $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ definierte *Verknüpfung* oder *Komposition* von f und g. id_X bezeichnet die *identische* Abbildung von X nach X: Es ist $\mathrm{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$.)

Definition $\mathrm{Sym}(X)$=*Gruppe der Permutationen von X. (Symmetrische Gruppe)*
$\mathrm{S}_n = \mathrm{Sym}(1, \ldots, n)$

S_1 und S_2 sind kommutativ. S_3 und alle weiteren S_n sind nicht kommutativ.

Man schreibt $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ für das Element von S_n, das i die Zahl a_i zuordnet.

Definition *Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe von G ist eine Teilmenge von G, die e enthält und unter $\circ$ und $^{-1}$ abgeschlossen ist. U ist wieder eine Gruppe mit der eingeschränkten Operation $\circ \restriction (U \times U)$*

Die *Einschränkung* $f \restriction A$ einer Funktion $f : X \to Y$ auf eine Teilmenge A von X ist die auf A definierte Funktion, die auf A mit f übereinstimmt. Wenn man eine Funktion als eine Menge von Paaren auffaßt, ist also $f \restriction A = f \cap A \times Y$.

Definition *G und H seien Gruppen. Eine Abbildung $f : G \to H$ ist ein Homomorphismus, wenn $f(ab) = f(a)f(b)$ für alle $a, b \in G$.*

Für ein festes $a \in H$ ist $z \mapsto a^z$ ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach H. Die Abbildung, die jeder ganzen Zahl ihren Rest modulo n zuordnet, ist ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ in die Gruppe der Reste modulo n. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ definiert durch $x \mapsto e^x$ ist ein Isomorphismus (s.u.) zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen.

Lemma 2.1.5 *Das Bild eines Homomorphismus $f : G \to H$ ist eine Untergruppe von H.*

Ein bijektiver Homomorphismus heißt *Isomorphismus* zwischen Gruppen . Zwei Gruppen G und H, zwischen denen es einen Isomorphismus gibt, heißen *isomorph*: $G \cong H$.

Lemma 2.1.6 *Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation.*

Zum Begriff einer Äquivalenzrelation vergleiche Seite 14.

Satz 2.1.7 (Cayley) *Jede Gruppe G ist isomorph zu einer Untergruppe von $Sym(G)$.*

2.2 $\mathbb{R}$–Vektorräume

Definition *Ein $\mathbb{R}$–Vektorraum V ist ein $\mathbb{R}$–Modul. Das heißt: eine abelsche Gruppe V mit einer Multiplikation $\mathbb{R} \times V \to V$, sodaß für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$ die folgenden Rechenregeln gelten:*

1. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
2. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
3. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
4. $1u = u$

Es folgt $0u = 0$.

Definition

1. *Ein Unterraum U von V ist eine Untergruppe, die unter Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen ist.*
2. *Eine lineare Abbildung $f : V \to U$ ist ein Homomorphismus, der mit der Multiplikation mit Skalaren kommutiert: $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ für alle $v \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Eine bijektive lineare Abbildung heißt Isomorphismus.*

Lemma 2.2.1 *Die linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind genau die linearen Abbildungen im Sinn von Abschnitt 1.5.*

Definition *Eine Folge $v_1, \ldots, v_n$ heißt Basis von V, wenn sich jedes Element von V eindeutig in der Form $\sum_{j=1}^{n} \xi_j v_j$ schreiben läßt.*

Satz 2.2.2 *Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und $f_1, \ldots, f_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann ist die lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to V$, die eindeutig durch $g(f_j) = v_j$ bestimmt ist, ein Isomorphismus.*

Die Wahl einer Basis von V ist gleichbedeutend mit der Wahl eines Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und V.

Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $v_1, \dots, v_n$ und $u_1, \dots, u_m$ seien Basen von V und U. Wenn die Isomorphismen $\epsilon : \mathbb{R}^n \to V$ und $\delta : \mathbb{R}^m \to U$ die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ auf diese Basen abbilden, ist die lineare Abbildung $\delta^{-1} \circ f \circ \epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch eine m-n–Matrix $A = (\alpha_{ij})$ gegeben. Es gilt dann

$$f(\sum_{j=1}^{n} \xi_j v_j) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j) u_i.$$

Insbesondere ist

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i.$$

Oder in symbolischer Schreibweise

$$f(v_j) = (u_1 u_2 \dots u_m) \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$$

Zusammengefaßt:

$$(f(v_1) \dots f(v_n)) = (u_1 u_2 \dots u_m) A$$

$f \circ \delta = \epsilon \circ f_A$ bedeutet, daß das folgende Diagramm *kommutativ* ist:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & U \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\epsilon"] \arrow[r, "f_A"'] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

Wir sagen, daß f bezüglich der Basen (v_j) und (u_i) zur Matrix A gehört.

Definition *Eine Folge $a_1, \dots, a_n$ heißt Erzeugendensystem von V, wenn sich jedes Element von V in der Form $\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j$ darstellen läßt. Das heißt, daß $V = \mathbb{R}a_1 + \dots + \mathbb{R}a_n$. Eine endliche Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ heißt Erzeugendensystem, wenn $a_1, \dots, a_n$ ein Erzeugendensystem ist.*

Lemma 2.2.3 *Sei U der kleinste Unterraum, der $a_1, \dots, a_n$ enthält. Dann ist $a_1, \dots, a_n$ ein Erzeugendensystem von U.*

Der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} U_i$ einer beliebigen Familie von Unterräumen ist wieder ein Unterraum. Der Durchschnitt aller Unterräume, die A enthalten, ist der kleinste Unterraum, der A enthält.

Definition *V heißt endlich erzeugt, wenn V ein Erzeugendensystem hat.*

Definition *Eine Folge $a_1, \dots, a_n$ heißt linear unabhängig, wenn für alle $\xi_j \in \mathbb{R}$*

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j \quad \Longrightarrow \quad \xi_1 = \cdots = \xi_n = 0.$$

Wenn außerdem die a_j paarweise verschieden sind, heißt die Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ linear unabhängig.

Eine Folge, in der 0 oder zwei gleiche Vektoren vorkommen, ist linear abhängig.

Lemma 2.2.4

1. *Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.*
2. *Sei U eine linear unabhängige Teilmenge des Erzeugendensystems E. Dann gibt es eine Basis zwischen U und E.*

Jede unabhängige Teilmenge eines endlich erzeugten Vektorraums läßt sich also zu einer Basis erweitern und jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis. Jeder endlich erzeugte Vektorraum ist zu einem $\mathbb{R}^n$ isomorph.

Satz 2.2.5 (Steinitzscher Austauschsatz)
Sei $a_1, \dots, a_m$ ein Erzeugendensystem, $n \leq m$ und $u_1, \dots, u_n$ linear unabhängig. Dann kann man die a_i so umordnen, daß $u_1, \dots, u_n, a_{n+1}, \dots, a_m$ ein Erzeugendensystem ist.

Folgerung 2.2.6 *Eine linear unabhängige Menge hat höchstens so viel Elemente wie ein Erzeugendensystem.*

Folgerung 2.2.7 *Alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums V haben die gleiche Mächtigkeit: die Dimension* $\dim(V)$ *von V.*

Folgerung 2.2.8 *Ein Unterraum U eines endlich erzeugten Vektorraums V ist endlich erzeugt. Es gilt* $\dim(U) \leq \dim(V)$.

2.3 Unendlich dimensionale Vektorräume

Definition *Für eine Menge I sei $\mathbb{R}^{(I)}$ die Menge alle Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, die an fast allen Stellen (d.h. an allen bis auf endlich vielen) den Wert* 0 *hat. $\mathbb{R}^{(I)}$ ist ein Vektorraum mit wertweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren.*

Satz 2.3.1 *Jeder Vektorraum ist zu einem $\mathbb{R}^{(I)}$ isomorph.*

Zum Beweis verallgemeinert man den Begriff einer Basis, eines Erzeugendensystems und einer linear unabhängigen Menge auf unendliche Mengen. Man braucht das Zornsche Lemma.

Satz 2.3.2 (Zornsches Lemma) *Sei $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung. Wenn jede Kette in P eine obere Schranke hat, hat P ein maximales Element.*

Eine (reflexive) *partielle Ordnung* auf P ist eine zweistellige

reflexive:	$x \le x$,
transitive:	$x \le y$ & $y \le z \Rightarrow x \le z$ und
antisymmetrische:	$x \le y$ & $y \le x \Rightarrow x = y$

Relation. $<$, definiert durch

$$x < y :\Leftrightarrow (x \le y \,\&x \;\ne y),$$

ist dann eine irreflexive partielle Ordnung. Das heißt, $<$ ist irreflexiv ($x \not< x$) und transitiv. Eine partielle Ordnung läßt sich äquivalent durch ihre irreflexive Form angeben. In einer totalen (oder linearen) Ordnung sind alle Elemente x, y vergleichbar, das heißt $x \le y$ oder $y \le x$.

Eine Teilmenge A von P ist eine *Kette*, wenn A durch $\le$ linear geordnet ist.

$p \in P$ ist eine *obere Schranke* von A, wenn $a \le p$ für alle $a \in A$.

$a \in A$ ist ein *maximales* Element von A, wenn $a \le a' \Rightarrow a = a'$ für alle $a' \in A$.

a heißt *größtes* Element, wenn $a' \le a$ für alle $a' \in A$.

Eine (die) kleinste obere Schranke von A (falls vorhanden) heißt *Supremum* $\sup(A)$ von A. Das *Infimum* $\inf(A)$ ist eine größte untere Schranke.

2.4 Der Verband der Unterräume

Definition *Eine partielle Ordnung heißt Verband, wenn je zwei Elemente ein Supremum und ein Infimum haben.*

Satz 2.4.1 *Sei V ein Vektorraum. Dann bilden die durch Inklusion geordneten Unterräume von V einen Verband. Dabei ist $\sup(U_1, U_2) = U_1 + U_2$ und $\inf(U_1, U_2) = U_1 \cap U_2$.*

Das direkte Produkt $U_1 \times U_2$ zweier Vektorräume wird mit elementweisen Operationen Vektorraum, der *direkten Summe* $U_1 \bigoplus U_2$.

Lemma 2.4.2

$$\dim(U_1 \bigoplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

Zwei Unterräume U_1 und U_2 von V sind *unabhängig*, wenn $u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = 0$. Äquivalent ist: $U_1 \cap U_2 = 0$.

Satz 2.4.3 *Wenn U_1 und U_2 unabhängig, ist die lineare Abbildung von $U_1 \bigoplus U_2 \longrightarrow U_1 + U_2$, definiert durch $(u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$, ein Isomorphismus.*

Wenn U und U' unabhängig sind und $U + U' = V$, heißt U' *Komplement* von U in V.

Lemma 2.4.4 *Jeder Untervektorraum von V hat ein Komplement.*

Wenn U' und U'' zwei Komplemente von U sind, wird durch

$$f(u') = u'' \Leftrightarrow u' - u'' \in U$$

ein Isomorphismus $f : U' \to U''$ definiert.

Sei U ein Unterraum von V. Mengen der Form $v + U$ heißen *Nebenklassen* von U.

Lemma 2.4.5 *Nebenklassen von U sind gleich oder disjunkt. Es gilt $v_1 + U = v_2 + U \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U$.*

Definition $V/U = \{v + U \mid v \in V\}$ *heißt der Quotient von* V *nach* U.

Satz 2.4.6 *Durch* $(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U$ *und* $r(v + U) = rv + U$ *wird auf* V/U *eine Vektorraumstruktur definiert, die eindeutig dadurch bestimmt ist, daß die durch* $x \mapsto x + U$ *definierte Projektion* $\pi : V \to V/U$ *linear ist.*

Lemma 2.4.7 *Sei* U' *ein Komplement von* U *in* V. *Dann induziert* π *einen Isomorphismus* $U' \to V/U$.

Folgerung 2.4.8 *Wenn* V *endlichdimensional ist, ist* $\dim(U) + \dim(V/U) = \dim(V)$.

Die *Kodimension* $\operatorname{codim}_V(U)$ von U in V ist die Dimension von V/U.

Satz 2.4.9

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

Äquivalenzrelationen und Partitionen:

Sei X eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation* E ist eine zweistellige reflexive, transitive und symmetrische (d.h. $xEy \Rightarrow yEx$) Relation auf X. Eine *Partition* von X ist eine Teilmenge $\mathfrak{B}$ der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ von X, deren Elemente nichtleer, paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung X ist.

Äquivalenzrelationen und Partitionen entsprechen einander: Setzt man $x/E = \{y \in X \mid yEx\}$ für $x \in X$ und eine Äquivalenzrelation E, so ist $\mathfrak{B} = \{x/E \mid x \in X\}$ die zugehörige Partition von X. Wenn umgekehrt $\mathfrak{B}$ eine Partition ist, so erhält man mit

$$xEy \quad \Leftrightarrow \quad \exists B \in \mathfrak{B} \quad x \in B \;\&\; y \in B$$

die zugehörige Äquivalenzrelation.

Eine Unterraum U von V bestimmt auf V die Äquivalenzrelation $x - y \in U$ mit der Partition $\{v + U \mid v \in V\}$.

2.5 Körper

Ein *Ring* R ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$, wobei

- $(R, +)$ eine abelsche Gruppe,
- $(R, \cdot)$ eine Halbgruppe ist und
- die Distributivgesetze $x(y + z) = xy + xz$ und $(x + y)z = xz + yz$

gelten.

Ein *Einselement* 1, falls vorhanden, erfüllt $x1 = 1x = x$.
R ist *kommutativ*, wenn die Multiplikation kommutativ ist.
Ein *Körper* ist ein kommutativer Ring mit Einselement 1, in dem jedes von Null verschiedene Element ein Inverses bezüglich der Multiplikation besitzt. Außerdem fordert man, daß $0 \neq 1$.

Beispiele

$\mathbb{Z}$ ist ein kommutativer Ring mit 1.
$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Körper.

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist kommutativer Ring mit 1.
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn p eine Primzahl ist. Wir schreiben dann $\mathbb{F}_p$ dafür.

Eine $\mathbb{R}$–*Algebra* A ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit einer bilinearen Operation (der Multiplikation).

$\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ ist eine $\mathbb{R}$–Algebra der Dimension m^2.

Definition *Eine Abbildung $\mu : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_m \longrightarrow W$ ist multilinear, wenn für alle $i = 1, \ldots, m$ und für alle $v_1 \in V, \ldots, v_m \in V$ die Abbildung $\nu : V_i \to W$ definiert durch $\nu(x) = \mu(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_m)$ linear ist.*

Lemma 2.5.1 *Seien die B_i Basen von V_i. Dann ist eine multilineare Abbildung μ bestimmt durch die Werte $\mu(b_1, \ldots, b_m)$ für $b_i \in B_i$. Diese Werte lassen sich beliebig vorschreiben.*

Folgerung 2.5.2 *Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Für beliebige Vektoren a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ gibt es genau eine Algebren–Multiplikation auf V mit $b_i b_j = a_{ij}$.*

$\mathbb{R}^3$ wird mit dem *Kreuzprodukt* eine Algebra, wenn man die Produkte $e_i \times e_j$ der kanonischen Basisvektoren definiert durch

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} e_1 \times e_2 & = & e_3 & , & e_2 \times e_3 & = & e_1 & , & e_3 \times e_1 & = & e_2 \\ e_2 \times e_1 & = & -e_3 & , & e_3 \times e_2 & = & -e_1 & , & e_1 \times e_3 & = & -e_2 \\ e_1 \times e_1 & = & 0 & , & e_2 \times e_2 & = & 0 & , & e_3 \times e_3 & = & 0. \end{array}$$

Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ. Es handelt sich vielmehr um eine *Liealgebra*.

Folgerung 2.5.3 *Sei A eine $\mathbb{R}$–Algebra mit Basis $b_1, \ldots, b_n$. Dann ist*

1. *die Multiplikation assoziativ genau dann, wenn $b_i(b_j b_k) = (b_i b_j) b_k$ für alle i, j, k,*
2. *die Multiplikation kommutativ genau dann, wenn $b_i b_j = b_j b_i$ für alle i, j,*
3. *$\mathbf{1}$ ein Einselement genau dann, wenn $\mathbf{1} b_i = b_i \mathbf{1} = b_i$ für alle i.*

Die $\mathbb{R}$–Algebra $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen entsteht aus $\mathbb{R}^2$ durch folgende Multiplikation: (Die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ sei hier mit $\mathbf{1}, i$ bezeichnet.)

$$\mathbf{1}\mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1}i = i\mathbf{1} = i, \quad ii = -\mathbf{1}$$

Lemma 2.5.4
$\mathbb{C}$ ist ein Körper.

Wir fassen $\mathbb{R}$ vermöge der Einbettung ι_1 als Unterraum von $\mathbb{C}$ auf. Die kanonische Basis ist dann $1, i$.

Definition *Sei R ein Ring mit Einselement. Ein R–Modul ist eine abelsche Gruppe M mit einer Multiplikation $R \times M \to M$, die den folgenden Regeln genügt:*

1. *r(x+y)=rx+ry*
2. *(r+s)x=rx+sx*
3. *(rs)x=r(sx)*
4. *1x=x*

Wenn R ein Körper ist, nennt man einen R–Modul einen R–Vektorraum.

Alle Sätze des Kapitels gelten für beliebige K–Vektorräume.

Kapitel 3

Lineare Abbildungen

3.1 Der Noethersche Isomorphiesatz

Wir fixieren einen Körper K. Vektorraum heißt jetzt immer K–Vektorraum.
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Lemma 3.1.1 *Das Bild* $\mathrm{Im}(f) = f[A]$ *von* f *ist ein Unterraum von* W*. Der Kern*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

ist ein Unterraum von V*.*

f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(f) = 0$. Denn $f(v_1) = f(v_2) \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$

Notation
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, a ein Element von Y und A eine Teilmenge von Y. Dann bezeichnen wir mit $f^{-1}(a)$ und $f^{-1}(A)$ jeweils die Menge $\{x \mid f(x) = a\}$ bzw. $\{x \mid f(x) \in A\}$ der Urbilder von a bzw. A. (Wenn f eine Bijektion ist, hat $f^{-1}(a)$ zwei Bedeutungen!)

Offenbar ist $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0)$. Wenn $f(a) = b$, ist $a + \mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(b)$.

Satz 3.1.2 (Noetherscher Isomorphiesatz) f *induziert einen Isomorphismus*

$$\overline{f} : V/\mathrm{Ker}f \to \mathrm{Im}(f)$$

.

Folgerung 3.1.3

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Folgerung 3.1.4 *Sei* $f : V \to W$ *eine lineare Abbildung,* $\dim(V) = n$ *und* $\dim(W) = m$*.*

1. *Für alle* $b \in W$ *ist* $f^{-1}(b)$ *leer oder eine Nebenklasse von* $\mathrm{Ker}(f)$*.*
2. *Wenn* $m < n$*, ist* $\mathrm{Ker}(f) \neq 0$*.*
3. *Wenn* $m = n$*, so sind äquivalent:*
   (a) $\mathrm{Ker}(f) = 0$

(b) *f ist injektiv.*

(c) *f ist surjektiv.*

Folgerung 3.1.5 *Sei A eine m-n–Matrix und H die Menge der Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Dann gilt*

1. *Für alle Spaltenvektoren b der Länge m ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ leer oder eine Nebenklasse von H.*
2. *Wenn $m < n$, ist $H \neq \mathbf{0}$.*
3. *Wenn $m = n$, so sind äquivalent:*
   (a) *$H = \mathbf{0}$*
   (b) *Für alle b hat $Ax = b$ höchstens eine Lösung.*
   (c) *$Ax = b$ ist lösbar für alle b.*

Definition *Der Rang von f ist die Dimension des Bildes von f. Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten.*

Lemma 3.1.6 *Sei A eine m-n–Matrix und $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die dadurch definierte lineare Abbildung. Dann ist der Rang von A gleich dem Rang von f_A.*

3.2 Die lineare Gruppe

Ein *Endomorphismus* von V ist eine lineare Abbildung von V nach V. Ein bijektiver Endomorphismus heißt *Automorphismus* oder *regulär*. Ein Endomorphismus, der nicht regulär ist, heißt *singulärer Endomorphismus*. Die Automorphismen von V bilden mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe, die *lineare Gruppe* $\mathrm{Gl}(V)$ mit der identischen Abbildung id_V als neutralem Element. Die Endomorphismen von V bilden die K–Algebra $\mathrm{End}(V)$.

Lemma 3.2.1 *Sei V endlichdimensional und f ein Endomorphismus von V. Dann sind äquivalent:*

1. *f ist regulär*
2. *f ist injektiv*
3. *f ist surjektiv*

Eine n-n–Matrix A heißt *regulär* , wenn $f_A : K^n \to K^n$ regulär ist (sonst *singulär*). Die Menge $\mathrm{Gl}_n(K)$ der regulären n-n–Matrizen mit der Matrizenmultiplikation als Operation ist eine Gruppe. Die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ ist das Einselement. Identifiziert man n-n–Matrizen mit Endomorphismen von K^n, wird $\mathrm{Gl}_n(K) = \mathrm{Gl}(K^n)$.

Lemma 3.2.2 *Für eine n-n–Matrix A sind äquivalent:*

1. *A ist regulär*
2. *A hat Rang n.*
3. *A hat ein Linksinverses B: $BA = \mathbf{I}$*

4. A hat ein Rechtsinverses B: $AB = \mathbf{I}$

Es ist $\mathrm{Gl}_1(K) = K^\bullet$, die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen Elemente von K.

$\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_p)$ hat

$$(p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{n-1})$$

viele Elemente.

Die *Elementarmatrizen*

$$\mathrm{E}_{ij}^\lambda \quad (1 \le i \ne j \le n,\ \lambda \in K)$$

sind n-n–Matrizen, in deren Diagonalen Einsen stehen und deren andere Einträge Null sind. Nur an der Stelle (i,j) steht λ.

Die *Elementarmatrizen*

$$\mathrm{E}_i^\lambda \quad (1 \le i \le n,\ \lambda \in K^\cdot)$$

haben Einsen in der Diagonalen und Nullen sonst. Nur an der Stelle (i,i) steht λ.

Elementarmatrizen sind regulär. Es ist $(\mathrm{E}_{ij}^\lambda)^{-1} = \mathrm{E}_{ij}^{-\lambda}$ und $(\mathrm{E}_i^\lambda)^{-1} = \mathrm{E}_i^{\lambda^{-1}}$.

$\mathrm{E}_{ij}^\lambda A$ entsteht aus A durch Anwenden der Zeilenoperation Z_{ji}^λ, $\mathrm{E}_i^\lambda A$ durch Anwenden der Zeilenoperation Z_i^λ.

Satz 3.2.3 $\mathrm{Gl}_n(K)$ *wird von Elementarmatrizen erzeugt. Das heißt, daß sich jede reguläre Matrix als Produkt von Elementarmatrizen (und ihren Inversen) schreiben läßt.*

3.3 Basiswechsel

Seien $\mathfrak{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathfrak{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ zwei Basen von V. Der *Wechsel* von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}'$ wird durch die reguläre Matrix $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$ mit

$$b'_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i,$$

beschrieben. Die Koeffizienten eines Punktes

$$\xi_1 b_1 + \dots + \xi_n b_n = \xi'_1 b'_1 + \dots + \xi'_n b'_n$$

bezüglich der beiden Basen gehen durch

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi'_j$$

auseinander hervor.

In Matrizenschreibweise sehen die Gleichungen so aus:

$$(b'_1 \dots b'_n) = (b_1 \dots b_n) A \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix} .$$

Wenn die Isomorphismen ϵ und ϵ' die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ abbilden, haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & V & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\epsilon'"] \arrow[rr, "f_A"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

Satz 3.3.1 *U,V und W seien endlich–dimensionale Vektorräume mit ausgewählten Basen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.*

$f : V \to U$ und $g : W \to V$ seien lineare Abbildungen, die Matrizen B und C entsprechen. Sei nun durch A ein Basiswechsel von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}'$ gegeben. Dann gilt:

1. *Bezüglich der Basen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}'$ gehört zu f die Matrix*
$$BA.$$
2. *Bezüglich der Basen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}$ gehört zu g die Matrix*
$$A^{-1}C.$$

Folgerung 3.3.2 *Sei U ein endlich–dimensionaler Vektorraum mit ausgezeichneter Basis $\mathfrak{B}$. $f : U \to U$ sei ein durch die Matrix C beschriebener Endomorphismus. Wenn wir mit Hilfe der Matrix A zur Basis $\mathfrak{B}'$ übergehen, wird f durch die Matrix $A^{-1}CA$ beschrieben.*

Zwei quadratische Matrizen C und C' heißen *ähnlich* oder *konjugiert* , wenn $C' = A^{-1}CA$ für eine reguläre Matrix A.

Satz 3.3.3 *U und V seien Vektorräume der Dimension m und n, $f : V \to U$ eine lineare Abbildung vom Rang k. Dann kann man Basen in U und V so wählen, daß f durch die m-n–Matrix*

(*)
$$B = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

dargestellt wird, wobei I die k–dimensionale Einheitsmatrix ist.

In B stehen also bis auf k Einsen in der Diagonalen nur Nullen.

<u>Variante 1</u>

Eine m-n–Matrix B hat genau dann den Rang k, wenn es eine reguläre m-m–Matrix A und eine reguläre n-n–Matrix C gibt, sodaß ABC die Gestalt (*) hat.

<u>Variante 2</u>

Jede m-n–Matrix vom Rang k läßt sich durch Zeilen– und Spaltenoperationen auf die Gestalt (*) bringen.

Satz 3.3.4 *U und V seien Vektorräume der Dimension m und n, $f : V \to U$ eine lineare Abbildung vom Rang k. In V sei eine Basis $\mathfrak{B}$ fixiert. Dann kann man $\mathfrak{B}$ so zu einer Basis $\mathfrak{B}'$ umordnen und eine Basis $\mathfrak{A}$ von U so wählen, daß f bezüglich der Basen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{A}$ durch eine Matrix in* Normalform

$$\left(\begin{array}{c|c} I & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{3.2}$$

dargestellt wird, wobei I die k–dimensionale Einheitsmatrix und $*$ eine beliebige k-$(n-k)$–Matrix ist.

Als Folgerung erhält man noch einmal Lemma 1.1.2: Jede Matrix vom Rang k läßt sich durch Zeilenoperationen und Umordnen der Spalten in eine Matrix in Normalform vom Rang k bringen.

Kapitel 4

Determinanten

4.1 Die Signatur einer Permutation

Wir halten eine natürliche Zahl $n \geq 1$ fest und betrachten Elemente von S_n, der Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$.

Ein *Fehlstand* einer Permutation π ist eine Menge von zwei Zahlen, deren Ordnung von π umgedreht wird: Also eine Menge $\{i, j\}$ mit $i < j$ und $f(i) > f(j)$.

Lemma 4.1.1 *Sei F die Menge der Fehlstände von π und G die Menge der Fehlstände von σ. Dann ist*

$$\sigma^{-1}(F) \bigtriangleup G$$

die Menge der Fehlstände von $\pi \circ \sigma$.

Dabei ist $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symmetrische Differenz* von A und B.

π heißt *gerade* bzw. *ungerade*, wenn π eine gerade bzw. ungerade Zahl von Fehlständen hat. Die *Signatur einer Permutation*

$$\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^{(\text{Zahl der Fehlstände von f})}$$

einer geraden Permutation π ist also 1, die Signatur einer ungeraden Permutation ist -1.

Satz 4.1.2

$$\mathrm{sign} : \mathrm{S_n} \to \{1, -1\}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Eine Folge $a_1, \ldots, a_k$ von paarweise verschiedene Zahlen zwischen 1 und n definiert einen *Zyklus*

$$(a_1, \ldots, a_k).$$

Das ist die Permutation, die die Zahlen a_i (für $i < k$) auf a_{i+1} abbildet, a_k auf a_1 und alle anderen Zahlen zwischen 1 und n auf sich selbst abbildet. Ein Zyklus der Länge k hat die Signatur $(-1)^{k-1}$

Lemma 4.1.3 *Jede Permutation läßt sich (bis auf die Reihenfolge) eindeutig als Produkt von disjunkten Zyklen schreiben.*

Ein Zyklus der Länge zwei heißt *Transposition.*

Folgerung 4.1.4 *Jede Permutation ist Produkt von Transpositionen.*

4.2 k–Formen

Sei V ein K–Vektorraum.

Definition *Eine k–stellige multilineare Abbildung $\mu : V^k \to K$ (eine* Multilinearform*) heißt alternierend oder k–Form, wenn sie eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

1. *$\mu(a_1, \ldots, a_k) = 0$ für alle k–tupel $a_1, \ldots, a_k$, in denen ein Vektor zweimal vorkommt.*
2. *Für alle $a_1, \ldots, a_k \in V$, alle $1 \leq i \neq j \leq n$ und alle $\lambda \in K$ ist*

$$\mu(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k) = \mu(a_1, \ldots, a_i + \lambda a_j, \ldots, a_k)$$

Lemma 4.2.1

1. *Jede Linearkombination von k–Formen ist wieder eine k–Form.*
2. *Sei $\phi : V \to U$ eine lineare Abbildung und μ eine k–Form auf U. Dann ist μ^ϕ, definiert durch*

$$\mu^\phi(a_1, \ldots, a_k) = \mu(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_k))$$

eine k–Form auf V.

Lemma 4.2.2 *Sei μ eine k–Form auf V.*

1. *$\mu(a_1, \ldots, a_k) = 0$ für alle linear abhängigen k–tupel $a_1, \ldots, a_k$.*
2. *Für jede k–Form μ, alle $a_1, \ldots, a_k \in V$, und alle $1 \leq i < j \leq k$ ist*

$$\mu(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j \ldots, a_k) = -\mu(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i \ldots, a_k)$$

Wenn in K die Zahl 2 $(= 1 + 1)$ verschieden von Null ist (man sagt: Wenn K nicht die *Charakteristik* 2 hat), gilt eine Umkehrung: Multilinearformen, die 2 erfüllen, sind alternierend.

Im nächsten Lemma erweitern wir den Begriff der Signatur auf beliebige Abbildungen $\pi : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$: Die Signatur $\mathrm{sign}(\pi)$ von π ist 0, wenn π keine Permutation ist. Satz 4.1.2 gilt immer noch in der Form

$$\mathrm{sign}(\pi \circ \sigma) = \mathrm{sign}(\pi)\mathrm{sign}(\sigma)$$

für beliebige π und σ.

Lemma 4.2.3 *Sei μ eine k–Form auf V Dann ist für jede Abbildung $\pi : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ und alle $a_1, \ldots, a_k \in V$*

$$\mu(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(k)}) = \mathrm{sign}(\pi)\ \mu(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{k}).$$

Folgerung 4.2.4 *Sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Basis von V. Dann ist μ bestimmt durch die Werte $\mu(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ für alle $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.*

4.3 Determinanten

Satz 4.3.1 *Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und $\alpha \in K$. Dann gibt es genau eine n–Form μ mit $\mu(b_1, \dots, b_n) = \alpha$.*

Folgerung 4.3.2 *Sei V n–dimensional und μ_0 eine nicht–triviale n–Form auf V. Dann ist jede andere n–Form ein Vielfaches von μ_0.*

Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ und D die n-Form auf $\mathbb{R}^n$, für die $D(e_1, \dots, e_n) = 1$. Die *Determinante* einer n-n–Matrix A ist

$$\det(A) = D(s_1, \dots, s_n),$$

wobei $s_1, \dots, s_n$ die Spalten von A sind. Man schreibt auch $\|A\|$ für die Determinante von A.

Satz 4.3.3

1. $\det(A)$ *ist eine alternierende Multilinearform der Spalten von* A.
2. $\det(\mathbf{I}) = 1$
3. *Wenn* $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$, *ist*

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{sign}(\pi)\ \alpha_{\pi(\mathrm{j}),\mathrm{j}}.$$

Beispiele

$$\begin{aligned}
\det(a) &= a \\
\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} &= a_1b_2 - a_2b_1 \\
\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 \\
\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} &= \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n \\
\det(E_i^\lambda) &= \lambda \\
\det(E_{ij}^\lambda) &= 1
\end{aligned}$$

Matrizen der Form $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ heißen *Diagonalmatrizen.*

Satz 4.3.4

1. *Die Determinante von A ist genau dann* 0, *wenn A singulär ist.*
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Die n-n–Matrizen über K, deren Determinante 1 ist, bilden also eine Untergruppe $\mathrm{Sl}_n(K)$ von $\mathrm{Gl}_n(K)$, die *spezielle* lineare Gruppe.

Satz 4.3.5 (Die Cramersche Regel) *Sei $Ax = b$ ein quadratisches Gleichungssystem, $s_1, \dots, s_n$ die Spalten von A. Wenn A regulär ist, errechnet sich der Lösungsvektor als*

$$x_j = \frac{\det(s_1, \dots, s_{j-1}, b, s_{j+1}, \dots, s_n)}{\det(A)}.$$

Sei ϕ ein Endomorphismus des n–dimensionalen Vektorraums V und μ_0 eine nicht–triviale n–Form auf V. Dann ist nach 4.3.1 die n–Form μ_0^ϕ ein Vielfaches $\alpha\mu_0$ von μ_0. Der Faktor α hängt nicht von der Wahl von μ_0 ab und heißt die *Determinante* $\det(\phi)$ von ϕ. Es gilt also

$$\mu(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)) = \det(\phi)\mu(a_1, \dots, a_n)$$

für alle n–Formen μ und alle $a_1, \dots, a_n \in V$.

Lemma 4.3.6 *Es ist* $\det(f_A) = \det(A)$

Satz 4.3.7 $\det(\phi \circ \psi) = \det(\phi)\det(\psi)$

Definition *Die Transponierte einer m-n–Matrix $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}$ ist die n-m–Matrix*

$$A^\top = (\alpha_{ij})_{\substack{j=1\dots n\\ i=1\dots m}}$$

Es ist $(AB)^\top = B^\top A^\top$. A ist genau dann regulär, wenn $A^\top$ regulär ist.

Satz 4.3.8

1. $\det(A^\top) = \det(A)$
2. $\det$ *ist eine alternierende Multilinearform der Zeilen von A.*

4.4 Der Laplacesche Entwicklungssatz

Notation
Für eine n-n–Matrix A und zwei Indizes i und j bezeichnen wir mit A_{ij} die Matrix, die aus A entsteht, wenn man die i–te Zeile und die j–te Spalte streicht.

Satz 4.4.1 (Entwicklungssatz von Laplace)

Sei $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$ eine n-n–Matrix und j_0 ein Spaltenindex. Dann ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j_0} \alpha_{ij_0} \det(A_{ij_0}).$$

Definiere die *Adjunkte* $\mathrm{adj}(A) = (\beta_{ij})$ einer n-n–Matrix A durch

$$\beta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji}).$$

Satz 4.4.2 $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)\,\mathbf{I}$

Wenn A regulär ist, ist also

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}.$$

Kapitel 5

Endomorphismen

5.1 Diagonalisierbare Endomorphismen

V sei im Folgenden ein n–dimensionaler K-Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus von V

Definition *Ein Endomorphismus ϕ heißt diagonalisierbar, wenn ϕ bei geeigneter Basiswahl durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.*

Definition *Ein von Null verschiedener Vektor v heißt Eigenvektor, wenn $\phi(v)$ Vielfaches von v ist, wenn also*

$$\phi(v) = \lambda v$$

für ein $\lambda \in K$. Der Faktor λ heißt dann Eigenwert von ϕ.

λ ist genau dann Eigenwert von ϕ, wenn $\lambda \mathrm{id} - \phi$ singulär ist.

Eigenvektoren und Eigenwerte einer quadratischen Matrix A sind die Eigenvektoren und Eigenwerte von f_A.

Beispiel Die Eigenwerte einer *oberen Dreiecksmatrix*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Lemma 5.1.1 *ϕ ist genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren hat.*

Definition

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \phi(v) = \lambda v\}$$

heißt der Eigenraum von λ.

V_λ ist ein Unterraum, der von ϕ in sich abgebildet wird, ein sogenannter *ϕ–invarianter* Unterraum.

Satz 5.1.2 *ϕ ist genau dann diagonalisierbar, wenn V Summe von Eigenräumen ist.*

Lemma 5.1.3 *Wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschieden sind, sind die $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ unabhängig. Das heißt, daß eine Summe $v_1 + \cdots + v_k$ mit $v_i \in V_{\lambda_i}$ nur Null sein kann, wenn alle v_i Null sind.*

Die Summe U der Eigenräume $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ ist also *direkt*: Das heißt, daß sich jedes Element von U eindeutig als Summe $v_1 + \cdots + v_k$ $(v_i \in V_{\lambda_i})$ schreiben läßt.

Folgerung 5.1.4 *ϕ hat höchstens n Eigenwerte. Wenn ϕ n Eigenwerte hat, ist ϕ diagonalisierbar.*

5.2 Das charakteristische Polynom

Sei K ein Körper. Der *Polynomring* $K[x]$ ist ein kommutativer Oberring von K mit einem ausgezeichneten Element x, in dem sich jedes Element (*"Polynom"*) $p(x)$ eindeutig in der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

schreiben läßt. ($K[x]$ läßt sich als K–Algebra leicht mit den Methoden in 2.5 konstruieren.)

Der *Grad* $\operatorname{grad}(p)$ von $p(x)$ ist n, wenn $a_n \neq 0$. p heißt *konstant*, wenn $\operatorname{grad}(p) \leq 0$. (Das Polynom 0 hat den Grad $-\infty$. Ein nicht-konstantes Polynom p heißt *normiert*, wenn $a_n = 1$. Es ist immer $\operatorname{grad}(pq) = \operatorname{grad}(p) + \operatorname{grad}(q)$ und $\operatorname{grad}(p+q) \leq \max(\operatorname{grad}(p), \operatorname{grad}(q))$.

Sei R ein Oberring von K und r ein Element von R. Dann definiert die Abbildung

$$p(x) \longmapsto p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_0$$

einen *Homomorphismus* von $K[x]$ nach R, den sogenannten *Einsetzungshomomorphismus*. Es gilt also $(p+q)(r) = p(r) + q(r)$ und $(pq)(r) = p(r)q(r)$. r ist *Nullstelle* von p, wenn $p(r) = 0$.

$K[x]$ ist ein *Integritätsbereich*. Das ist ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$, der *nullteilerfrei* ist: $rs = 0 \Rightarrow r = 0 \,\text{oder}\, s = 0$. Ein Integritätsbereich R läßt sich immer in einen Körper Q, seinen *Quotientenkörper* einbetten. Man definiert auf der Menge aller Paare (r, s), $(r, s \in R, s \neq 0)$ eine Äquivalenzrelation durch $(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow rs' = sr'$ und setzt $Q = \{\frac{r}{s} \mid r, s \in R, s \neq 0\}$, wobei $\frac{r}{s}$ die Äquivalenzklasse von (r, s) bezeichnet. Mit den Operationen $\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs'+sr'}{ss'}$ und $\frac{r}{s}\frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'}$ wird Q zu einem Körper. Wenn man r mit $\frac{r}{1}$ identifiziert, erhält man R als Unterring. Der Quotientenkörper von $K[x]$ ist der *rationale Funktionenkörper* $K(x)$.

Lemma 5.2.1 *Sei $A(x)$ eine Matrix aus Polynomen, dann ist $\det(A(x))$ ein Polynom.*

Definition *Das charakteristische Polynom $\mathrm{P}_A(x)$ einer quadratischen Matrix A ist*

$$\mathrm{P}_A(x) = \det(xI - A).$$

Das charakteristische Polynom der oberen Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist $\prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$. Wir sagen $p(x)$ *zerfällt in Linearfaktoren.*

Weil ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben, kann man das charakteristische Polynom $\mathrm{P}_\phi(x)$ eines Endomorphismus durch das charakteristische Polynom einer zugehörigen Matrix definieren.

Lemma 5.2.2 *Sei ϕ Endomorphismus eines n–dimensionalen Vektorraums.*

1. $\mathrm{P}_\phi(x)$ *ist ein normiertes Polynom vom Grad n.*

2. *Die Eigenwerte von ϕ sind die Nullstellen von $\mathrm{P}_\phi(x)$.*

Die *Spur* $\mathrm{Tr}(A)$ einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente. Weil $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, haben ähnliche Matrizen dieselbe Spur und man kann die Spur $\mathrm{Tr}(\phi)$ eines Endomorphismus als die Spur einer zugehörigen Matrix definieren.

Wenn $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ das charakteristische Polynom von A ist, ist

$$\det(A) = (-1)^n a_0$$

und

$$\mathrm{Tr}(A) = -a_{n-1}.$$

Satz 5.2.3 *ϕ läßt sich bei geeigneter Basiswahl genau dann durch eine obere Dreiecksmatrix darstellen, wenn $p_\phi(x)$ in Linearfaktoren zerfällt.*

Man braucht zum Beweis einen Hilfssatz:

Satz 5.2.4 *Sei ϕ Endomorphismus des endlich–dimensionalen Vektorraums V und U ein ϕ–invarianter Unterraum. Durch*

$$\overline{\phi}(v + U) = \phi(v) + U$$

wird ein Endomorphismus von V/U definiert. Für die charakteristischen Polynome gilt

$$\mathrm{P}_\phi(x) = \mathrm{P}_{\phi \restriction U}(x)\mathrm{P}_{\overline{\phi}}(x).$$

(Das folgt aus der Gleichung

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0} & C \end{array}\right) = \det(A)\det(C).)$$

5.3 Haupträume

Im folgenden sei ϕ Endomorphismus des n–dimensionalen K–Vektorraums V und λ ein Element von K.

Definition *Der Hauptraum V'_λ von λ ist die Menge aller Vektoren, die von einer Potenz von $\phi - \lambda\mathrm{id}$ auf Null abgebildet werden.*

In der Folge $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien die ersten k Zahlen $= \lambda$ und $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ verschieden von λ. Dann wird der zu λ gehörende Hauptraum der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

von $e_1 \ldots, e_k$ aufgespannt.

Haupträume sind ϕ–invariante Unterräume. Es ist $V_\lambda \subset V'_\lambda$. Wenn $V'_\lambda \neq \mathbf{0}$, ist λ Eigenwert.

Lemma 5.3.1 *Wenn*

$$p_\phi(x) = \prod_{i=1}^{e} (x - \lambda_i)^{n_i},$$

wobei die λ_i paarweise verschieden sind, ist

$$\dim(V'_{\lambda_i}) = n_i.$$

Allgemeiner gilt: Die Dimension von V'_λ ist die *Vielfachheit von λ* in p_ϕ: das ist die größte Potenz von $(x - \lambda)$, die p_ϕ teilt.

Lemma 5.3.2 *Die Haupträume sind unabhängig.*

Folgerung 5.3.3 *Wenn*

$$p_\phi(x) = \prod_{i=1}^{e} (x - \lambda_i)^{n_i},$$

(die λ_i paarweise verschieden), ist V die direkte Summe der Haupträume V_{λ_i}

Wenn V direkte Summe von ϕ–invarianten Unterräumen $V_1, \dots, V_e$ ist, kann man Basen $\mathfrak{B}_i$ der V_i zu einer Basis $\mathfrak{B}$ von V zusammenfassen. Wenn die $\phi \upharpoonright V_i$ bezüglich der $\mathfrak{B}_i$ durch die Matrizen A_i dargestellt werden, wird ϕ bezüglich $\mathfrak{B}$ durch die *Blockmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_e \end{pmatrix}$$

dargestellt.

Folgerung 5.3.4 *Wenn*

$$p_\phi(x) = \prod_{i=1}^{e} (x - \lambda_i)^{n_i},$$

(die λ_i paarweise verschieden), kann ϕ bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix dargestellt werden, deren Blöcke A_i $(i = 1, \dots, e)$ n_i-n_i–Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

sind.

Lemma 5.3.5

1. *λ ist genau dann Nullstelle von $p(x)$, wenn $(x - \lambda)$ ein Teiler von $p(x)$ ist*
2. *Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen.*

Ein Körper heißt *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes nicht-konstante Polynom eine Nullstelle besitzt. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen. Jeder Körper läßt sich in einen algebraisch abgeschlossenen Körper einbetten.

Folgerung 5.3.6 *In einem algebraisch abgeschlossenen Körper zerfällt jedes normierte Polynom (eindeutig) in Linearfaktoren.*

5.4 Nilpotente Endomorphismen

Definition *Eine Endomorphismus ϕ heißt nilpotent, wenn eine Potenz ϕ^n Null ist. Eine quadratische Matrix A heißt nilpotent, wenn f_A nilpotent ist.*

Sei ϕ Endomorphismus eines endlich–dimensionalen Vektorraums V. Dann ist ϕ genau dann nilpotent, wenn $V = V'_0$. Der Hauptraum V'_λ ist der größte Unterraum von V, auf den eingeschränkt $\phi - \lambda\mathrm{id}$ nilpotent ist.

Lemma 5.4.1 *Sei ϕ Endomorphismus eines n–dimensionalen Vektorraums V. Dann sind äquivalent:*

1. *ϕ ist nilpotent*
2. *$\phi^n = 0$*
3. *Bei geeigneter Basiswahl läßt sich ϕ durch eine obere Dreiecksmatrix darstellen, in deren Diagonale nur Nullen stehen.*
4. *$\mathrm{P}_\phi(x) = x^n$*

Satz 5.4.2 *Sei ϕ nilpotenter Endomorphismus des endlich–dimensionalen Vektorraums V und v ein Element von V. Sei k die kleinste natürliche Zahl, für die $\phi^k(v) = 0$. Dann bildet die Folge*

$$v = \phi^0(v), \phi^1(v), \phi^2(v), \ldots, \phi^{k-1}(v) = 0$$

eine Basis eines ϕ–invarianten Unterraums U von V.

Man nennt U den von v *erzeugten zyklischen* Unterraum (der Ordnung k).

Satz 5.4.3 *Sei ϕ nilpotenter Endomorphismus des endlich–dimensionalen Vektorraums V. Dann ist V direkte Summe von zyklischen Unterräumen.*

Beweisskizze:

Die Räume $U_i = \mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi^i)$ bilden eine absteigende Folge

$$\mathrm{Ker}(\phi) = U^0 \supset U^1 \supset \ldots \supset U^n = 0$$

von ϕ–invarianten Unterräumen. Wir wählen eine Basis $a_1^n, \ldots, a_{m_n}^n$ von U^{n-1}. Dann erweitern wir diese Basis um $a_1^{n-1}, \ldots, a_{m_{n-1}}^{n-1}$ zu einer Basis von U^{n-2} und fahren so fort. Schließlich erhalten wir eine Basis (a_j^i), $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m_i)$ von $\mathrm{Ker}(\phi)$, sodaß jeweils $\left(a_j^{i'} \mid i < i';\ j < m_{i'}\right)$ eine Basis von U^i ist.
Dann wählen wir zu jedem a_j^i einen Vektor v_j^i mit $\phi^{i-1}(v_j^i) = a_j^i$. Jedes dieser v_j^i erzeugt einen zyklischen Unterraum V_j^i der Ordnung i. V ist die direkte Summe der V_j^i.

Im Folgenden verwenden wir die Notation B_λ^k für die k-k–Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Folgerung 5.4.4 *Ein nilpotenter Endomorphismus eines endlich–dimensionalen Vektorraums läßt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine aus Matrizen* B_0^k *zusammengesetzte Blockmatrix schreiben.*

Wie oft eine Matrix B_0^k in der Blockmatrix vorkommt hängt nicht von der Wahl der Basis ab.

Als letzte Folgerung ergibt sich der Satz von der *Jordan Normalform*

Satz 5.4.5 *Ein Endomorphismus eines endlich–dimensionalen Vektorraums dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, läßt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine aus Matrizen* B_λ^k *zusammengesetzte Blockmatrix schreiben.*

Wie oft eine Matrix B_λ^k in der Blockmatrix vorkommt hängt nicht von der Wahl der Basis ab.

Kapitel 6

Dualität

$\Re$R

6.1 Der Dualraum

Definition *Der Dualraum V^* eines K–Vektorraums V ist der Vektorraum alle linearen Funktionale $\lambda : V \to K$.*

In früherer Notation ist also $V^* = (V, K)$.

Identifiziert man den K^n mit dem Raum der n–dimensionalen Spaltenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

kann man $(K^n)^*$ als den Raum aller Zeilenvektoren

$$\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

auffassen, wobei

$$\lambda(x) = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von V. Die Funktionale $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, definiert durch

$$\lambda_i(x_j) = \delta_{ij},$$

bilden eine Basis von V^*, die sogenannte *duale* Basis.

Folgerung 6.1.1 *Wenn V endlich–dimensional ist, hat V^* die gleiche Dimension wie V.*

V und V^* sind also isomorph. Ein Isomorphismus f läßt sich zum Beispiel dadurch angeben, daß man die Elemente einer Basis $x_1, \ldots, x_n$ auf die Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der dualen Basis abbildet. f

hängt allerdings von der Wahl der Basis $x_1, \ldots, x_n$ ab. Man sagt, daß V und V^* nicht *kanonisch* isomorph sind.

Sei nun V beliebig (nicht notwendig endlich–dimensional). Jedes Element x von V definiert vermöge $\lambda \mapsto \lambda(x)$ eine lineare Abbildung x' von V^* nach K. $x \mapsto x' = \Phi(x)$ ist die "kanonische"Abbildung von $\Phi : V \to V^{**}$.

Lemma 6.1.2 *Die kanonische Abbildung Φ von V nach V^{**} ist eine injektive lineare Abbildung.*

Wenn V endlich dimensional ist, sind also V und V^{**} kanonisch isomorph.

Lemma 6.1.3 *Wechselt man eine Basis von V mittels der Matrix A, so wechseln die dualen Basen von V^* mit $(A^\top)^{-1}$.*

6.2 Duale Abbildungen

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ induziert vermöge

$$f^*(\lambda) = \lambda \circ f$$

eine lineare Abbildung $f^* : W^* \to V^*$, die *duale Abbildung.* f^* ist also charakterisiert durch das Bestehen der Gleichung $(f^*(\mu))(x) = \mu(f(x))$

Lemma 6.2.1 *Dualisieren ist ein kontravarianter, linearer Funktor: Es gilt*

1. $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$
2. *Wenn $f : U \to V$ und $g : V \to W$ linear sind, ist $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*
3. *Wenn f und g lineare Abbildungen von V nach W sind, ist $(f + g)^* = f^* + g^*$*
4. *Für alle $\alpha \in K$ ist $(\alpha f)^* = \alpha f^*$.*

Außerdem ist der Funktor treu*: $f^* = 0 \Rightarrow f = 0$.*
Für endlich–dimensionale Vektorräume ist der Funktor voll*: Für jedes $g : W^* \to V^*$ gibt es ein $f : V \to W$ mit $f^* = g$.*

Identifiziert man wie oben die Elemente von K^m und K^n mit Spaltenvektoren und die Elemente der Dualräume mit Zeilenvektoren, so wird für eine m-n–Matrix A die Abbildung $f = f_A : K^n \to K^m$ gegeben durch

$$f : x \mapsto Ax$$

und f^* durch

$$f^* : \lambda \mapsto \lambda A.$$

Daraus ergibt sich:

Satz 6.2.2 *V und W seien endlich–dimensional und $f : V \to W$ linear. Wenn f bezüglich der Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ durch die Matrix A gegeben ist, ist f^* bezüglich der dualen Basen durch die Transponierte $A^\top$ gegeben.*

Folgerung 6.2.3 *Für Endomorphismen von endlich–dimensionalen Vektorräumen gilt* $\det(\phi^*) = \det(\phi)$.

Lemma 6.2.4 *Der Dualraum einer direkten Summe läßt sich auf natürliche Weise mit der direkten Summe der Dualräume identifizieren:*

$$(V \oplus W)^* = V^* \oplus W^*.$$

Das Duale der Einbettung $V \to V \bigoplus W$ ist die Projektion $V^* \bigoplus W^* \to V^*$. Das Duale der Projektion $V \bigoplus W \to V$ ist die Einbettung $V^* \to V^* \bigoplus W^*$.

Folgerung 6.2.5 *Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:*

1. *f ist genau dann surjektiv, wenn f^* injektiv ist.*
2. *f ist genau dann injektiv, wenn f^* surjektiv ist.*
3. *Wenn W endlich–dimensional ist, haben f und f^* den gleichen Rang.*

6.3 Duale Paare

V und W seien endlich dimensionale K–Vektorräume und

$$(\ ,\ ) : V \times W \to K$$

bilinear.

Sei $\mathfrak{X} = (x_1, \dots, x_m)$ eine Basis von V und $\mathfrak{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ eine Basis von W. Nach Lemma 2.5.1 ist $(\ ,\ )$ durch die m-n–Matrix $B = (x_i, y_j)$ eindeutig bestimmt.

Die auf $K^m \times K^n$ bezüglich der kanonischen Basen durch B gegebene Bilinearform bezeichnen wir mit $(\ ,\ )_B$. Faßt man die Elemente von K^m und K^n als Spaltenvektoren auf, ist

$$(x, y)_B = x^\top B y.$$

Lemma 6.3.1 *Wenn man mit der Matrix D zur Basis $\mathfrak{X}'$ wechselt (siehe Abschnitt 3.3) und mit E von $\mathfrak{Y}$ zur Basis $\mathfrak{Y}'$, wird $(\ ,\ )$ bezüglich der neuen Basen durch*

$$B' = D^\top B E$$

beschrieben.

Der Rang der darstellenden Matrix von $(\ ,\ )$ hängt also von der Basiswahl nicht ab. Man nennt ihn den *Rang von* $(\ ,\ )$.

Definition *Das Tripel $V, W, (\ ,\ )$ heißt duales Paar, wenn* $\dim(V) = \dim(W) =$ *Rang von* $(\ ,\ )$.

Wenn V, W ein duales Paar sind, dann auch W, V. Dabei muß man natürlich von $(\ ,\ )$ zur Bilinearform $(y, x)' = (x, y)$ übergehen.

Setzt man für endlich–dimensionales W $\quad V = W^*$ und $(\lambda, x) = \lambda(x)$, bilden V und W ein duales Paar. Das nächste Lemma zeigt, daß jedes duale Paar so aussieht.

Lemma 6.3.2 *Bilineare Abbildungen $(\ ,\ ) : V \times W \to K$ und lineare Abbildungen $\Psi : V \to W^*$ entsprechen einander vermöge $\Psi(v)(w) = (v, w)$. Wenn W endlich–dimensional ist, ist bilden V und W genau dann ein duales Paar, wenn Ψ ein Isomorphismus ist.*

Wenn V und W ein duales Paar bilden gibt es zu jeder Basis $\mathfrak{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ von W eine Basis $\mathfrak{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ von V mit $(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. $\mathfrak{X}$ ist *dual* zu $\mathfrak{Y}$.

Sei nun (V, W) ein duales Paar und f ein Endomorphismus von W. Dann ist $f^t = \Psi^{-1} \circ f^* \circ \Psi$ der zu f *adjungierte* Endomorphismus von W. Wie in 6.2.2 wird f^t bzgl. der dualen Basis durch die transponierte Matrix dargestellt.

Lemma 6.3.3 *$f^t(x)$ ist bestimmt durch die Gültigkeit der Gleichung $(f^t(x), y) = (x, f(y))$ für alle $y \in W$.*

Für Endomorphismen f von V definiert man f^t analog durch Vertauschen von Rechts und Links. Man hat dann $f^{tt} = f$.

Für ein duales Paar V, W und Unterräume U von V definieren wir:

$$U^\perp = \{w \in W \mid \forall u \in U \ (u, w) = 0\}$$

Lemma 6.3.4

1. *$(U^\perp)^\perp = U$*
2. *Mit der Bilinearform*
$$[x + U, y] = (x, y)$$
wird $V/U, U^\perp$ zu einem dualen Paar. Es folgt $\dim U + \dim(U^\perp) = \dim V$.

Kapitel 7

Symmetrische Bilinearformen

7.1 Bilinearformen

Wir betrachten Bilinearformen $(\ ,\ ) : V \times V \to K$.

$(\ ,\ )$ heißt *regulär* oder *nicht ausgeartet*, wenn V, V zusammen mit $(\ ,\ )$ ein duales Paar ist.

Ein Automorphismus von $(V, (\ ,\ ))$ ist ein Automorphismus f von V, der mit $(\ ,\ )$ verträglich ist, für den also $(f(x), f(y)) = (x, y)$ für alle $x, y \in V$.

Lemma 7.1.1 *Sei V endlich–dimensional und $(\ ,\ )$ regulär. Dann ist f genau dann ein Automorphismus von $(V, (\ ,\ ))$, wenn $f \circ f^t = id_V$.*

Lemma 7.1.2 *Sei V endlich–dimensional und $(\ ,\ )$ regulär. Dann hat jede Bilinearform $[\ ,\ ]$ auf V die Gestalt*

$$[x, y] = (f(x), y)$$

für einen eindeutig bestimmten Endomorphismus f.

7.2 Symmetrische Bilinearformen

Im Folgenden sei K ein Körper, der nicht die Charakteristik 2 hat und V ein K–Vektorraum.

Definition *Eine Bilinearform $(\ ,\ ) : V \times V \to K$ heißt symmetrisch, wenn $(v, w) = (w, v)$ für alle $v, w \in V$.*

$(\ ,\ )_B$ ist genau dann symmetrisch, wenn $\beta_{i,j} = \beta_{j,i}$ für alle i, j (vgl. Folgerung 2.5.3). Quadratische Matrizen mit dieser Eigenschaft heißen *symmetrisch*.

Lemma 7.2.1 *Sei $(\ ,\ )$ eine symmetrische reguläre Bilinearform auf V und f ein Endomorphismus. Dann ist die Bilinearform $(f(x), x)$ genau dann symmetrisch, wenn $f = f^t$.*

Endomorphismen f mit $f^t = f$ heißen *selbstadjungiert*.

Sei (,) eine symmetrische Bilinearform auf V. Die Funktion $q : V \to K$, definiert durch

$$q(x) = (x, x),$$

nennt man die zu (,) gehörende *quadratische Form.* (,) läßt sich durch q ausdrücken:

$$(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4}.$$

Folgerung 7.2.2 *Eine symmetrische Bilinearform ist durch ihre quadratische Form eindeutig bestimmt.*

Satz 7.2.3 *Symmetrische Bilinearformen auf endlich–dimensionalen Vektorräumen lassen sich bei geeigneter Basiswahl durch Diagonalmatrizen darstellen.*

Eine andere Formulierung ist: Jeder endlich–dimensionale Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform hat eine *Orthogonalbasis.* Das ist eine Basis $a_1, \ldots, a_n$, deren Elemente paarweise *orthogonal* sind:

$$(a_i, a_j) = 0, \text{ wenn } \quad i \neq j.$$

Folgerung 7.2.4 *Wenn in K jedes Element Quadrat ist (wie zum Beispiel in $\mathbb{C}$), dann wird bei geeigneter Basiswahl jede symmetrische Bilinearform durch eine Matrix der Form*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

Die Zahl der vorkommenden Einsen ist der Rang der Bilinearform und also von der Wahl der Basis unabhängig.

Folgerung 7.2.5 *Über $\mathbb{R}$ läßt sich jede symmetrische Bilinearform bei geeigneter Basiswahl immer durch eine Diagonalmatrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

darstellen, in deren Diagonalen nur 1, -1 *und* 0 *vorkommen.*

Sei p die Zahl der vorkommenden Einsen, q die Zahl der Minuseinsen, und r die Zahl der Nullen, die in der Diagonalen dieser Matrix vorkommen.

Satz 7.2.6 (Sylvester) *p, q und r sind von der Wahl der diagonalisierenden Basis unabhängig.*

Man nennt $p-q$ die Signatur der Bilinearform. Weil $p+q$ der Rang der Bilinearform ist, ist der Satz von Sylvester äquivalent zur Invarianz der Signatur.

7.3 Euklidische Räume

Sei $(\ ,\ )$ eine symmetrische Bilinearform auf dem reellem Vektorraum V mit quadratischer Form q. $(\ ,\ )$ heißt *positiv semidefinit*, wenn $q(x)$ niemals negativ wird. Wenn sogar $q(x)$ für alle von 0 verschiedenen x positiv ist, heißt $(\ ,\ )$ *positiv definit*. Analog definiert man *negativ (semi)definit*. Symmetrische Bilinearformen, die nicht semidefinit sind, nennt man *indefinit*. Für eine Diagonalmatrix B ist $(\ ,\ )_B$ genau dann positiv (semi)definit, wenn alle Diagonalelemente von B positiv (nicht-negativ) sind.

Definition *Eine euklidische Bilinearform ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf einem endlich–dimensionalen reellen Vektorraum. Ein euklidischer Raum ist ein reeller Vektorraum mit einer euklidischen Bilinearform.*

Das in 1.4 definierte Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ ist euklidisch.

Aus 7.2.5 folgt:

Satz 7.3.1 *Jeder euklidische Vektorraum hat eine* Orthonormalbasis. *Das ist eine Basis $b_1, \ldots, b_m$, die zu sich selbst dual ist, für die also*

$$(b_i, b_j) = \delta_{ij}.$$

Es folgt, daß jeder euklidische Vektorraum V zu einem $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt isomorph ist. Insbesondere ist V regulär.

Ausgehend von einer Basis $a_1, \ldots, a_n$ von V läßt sich mit dem *Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren* eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ konstruieren: Wir setzen $b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1$ und für $i = 2, \ldots, n$

$$b_i' = a_i - (a_i, b_1)b_1 - \ldots - (a_i, b_{i-1})b_{i-1}$$

und

$$b_i = \frac{1}{\| b_i' \|} b_i'.$$

Wie in 1.4 ist dabei $\| a \|$ die Norm oder Länge $\sqrt{(a,a)}$ von a .

Lemma 7.3.2 *Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Orthonormalbasis. Dann ist für alle $a \in V$*

$$a = (a, b_1)b_1 + \ldots + (a, b_n)b_n.$$

Lemma 7.3.3 *Sei U ein Unterraum des euklidischen Raums V. Dann ist V direkte Summe von U und $U^\perp$.*

Daraus folgt, daß sich jedes orthonormale System von Vektoren zu einer Orthonormalbasis von V fortsetzen läßt.

Lemma 7.3.4 *Sei f ein Endomorphismus von V, der bezogen auf die Orthonormalbasis $\mathfrak{B}$ durch die Matrix A dargestellt wird. Dann wird der adjungierte Endomorphismus f^t durch die transponierte Matrix $A^\top$ dargestellt.*

Automorphismen eines euklidischen Vektorraums heißen *orthogonal*.

Lemma 7.3.5 *Sei f ein Endomorphismus des euklidischen Vektorraums V, der bezüglich einer Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_m$ durch die Matrix A dargestellt wird. Dann sind äquivalent:*

1. *f ist orthogonal.*
2. *$f \circ f^t = id_V$.*
3. *$AA^\top = \mathbf{I}$.*
4. *$f(b_1), \ldots, f(b_m)$ ist eine Orthonormalbasis.*

Folgerung 7.3.6 *Orthogonale Abbildungen haben die Determinante 1 oder -1.*

Die *reelle orthogonale Gruppe*

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid AA^\top = \mathbf{I}\right\}$$

ist die Gruppe aller orthogonalen n-n–Matrizen. Die orthogonalen Abbildungen mit Determinante 1 bilden die *spezielle* orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Sei V ein n–dimensionaler euklidischer Vektorraum. Eine n–Form μ heißt *normiert*, wenn

$$\mu(b_1, \ldots, b_m) \in \{-1, 1\}$$

für alle Orthonormalbasen $b_1, \ldots, b_m$.

Lemma 7.3.7 *Wenn $V \neq 0$, gibt es genau zwei normierte n–Formen: μ_0 und $-\mu_0$.*

Man nennt

$$\| \mu_0(a_1, \ldots, a_n) \|$$

das *Volumen* des Parallelepipeds $\{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \mid 0 \leq \alpha_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq \alpha_n \leq 1\}$.

Satz 7.3.8 (Gramsche Determinante) *Das Volumen des von $a_1, \ldots, a_n$ aufgespannten Parallelepipeds ist die Quadratwurzel der* Gramschen *Determinante*

$$\det \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \cdots & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \cdots & (a_2, a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & \cdots & (a_n, a_n) \end{pmatrix}$$

7.4 Die Hauptachsentransformation

Sei V ein euklidischer Vektorraum.

Satz 7.4.1 *Sei $[\ ,\ ]$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V, bezüglich der $[\ ,\ ]$ durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.*

Weil sich vermöge

$$[x, y] = (f(x), y)$$

symmetrische Bilinearformen und selbstadjungierte Endomorphismen entsprechen (7.1.2 und 7.2.1), ist der Satz gleichbedeutend mit

Satz 7.4.2 *Sei f ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.*

Für Matrizen formuliert:

Satz 7.4.3 *Zu jeder symmetrischen reellen Matrix A gibt es eine orthogonale Matrix D, sodaß $D^\top AD$ Diagonalgestalt hat.*

Eine Folgerung ist zum Beispiel:

Lemma 7.4.4 *Für jeden Endomorphismus f gibt es eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ von V, sodaß $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ paarweise orthogonal sind.*

Die Matrixformulierung: Jede quadratische Matrix läßt sich als Produkt O_1DO_2 schreiben, wobei O_1 und O_2 orthogonal sind und D eine Diagonalmatrix.

Sei nun bezüglich einer Orthonormalbasis die symmetrische Bilinearform $[x, y] = (f(x), y)$ durch die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ gegeben. Die λ_i sind als die Eigenwerte von f bestimmt. Der nächste Satz zeigt die Bedeutung der λ_i für die Bilinearform $[\ ,\ ]$. Wir können annehmen, daß $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

Satz 7.4.5

$$\lambda_m = \min \{\max \{[x, x] \mid x \in U,\ \| x \| = 1\} \mid U \leq V,\ \dim U = m\}$$

7.5 Unitäre Räume

Wir betrachten in diesem Abschnitt Vektorräume $U, V, \ldots$ über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $\overline{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

ist ein Automorphismus des Körpers $\mathbb{C}$, die *Konjugation*.

Definition *Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt semilinear, wenn*

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Der *konjugierte* Vektorraum $V^{(c)}$ hat die gleichen Elemente wie V und die gleiche Addition. Die Multiplikation $\cdot^{(c)}$ mit Elementen von $\mathbb{C}$ ist aber definiert durch $\alpha \cdot^{(c)} v = \overline{\alpha} v$.

Lemma 7.5.1 *Für eine Abbildung $f : U \to V$ sind äquivalent*

1. *f ist semilinear.*
2. *$f : U \to V^{(c)}$ ist linear.*
3. *$f : U^{(c)} \to V$ ist linear.*

Definition *Eine Sesquilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung $(\ ,\ ) : V^{(c)} \times V \to \mathbb{C}$.*

Sei $\mathfrak{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis von V. Dann ist die Sesquilinearform $(\ ,\ )$ durch die n-n–Matrix $B = (x_i, x_j)$ eindeutig bestimmt: Wenn für Spaltenvektoren ξ und ζ

$$x = (x_1 \ldots x_n)\xi$$

und

$$y = (x_1 \ldots x_n)\zeta,$$

ist

$$(x, y) = \xi^* B \zeta.$$

Hier steht A^* für die *adjungierte* Matrix $\overline{A}^\top$

Wenn $(\ ,\ )$ eine Sesquilinearform ist, ist auch

$$[x, y] = \overline{(y, x)}$$

sesquilinear.

Definition *Eine Sesquilinearform heißt hermitesch, wenn*

$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$

für alle x, y.

Eine bezüglich einer Basis durch die Matrix B gegebene Sesquilinearform ist genau dann hermitesch, wenn B *hermitesch* ist. Das heißt

$$B^* = B.$$

Wenn $(\ ,\ )$ hermitesch ist, ist $(x, x) \in \mathbb{R}$ für alle x.

Definition *Eine hermitesche Bilinearform heißt positiv definit, wenn $(x, x) > 0$ für alle von Null verschiedenen x. Eine unitärerVektorraum ist ein endlich–dimensionaler $\mathbb{C}$–Vektorraum mit einer positiv definiten hermiteschen Sesquilinearform.*

$\mathbb{C}^n$ mit der Standardsesquilinearform $\overline{\xi}\zeta$ ist unitär.

Wir setzen wieder $\| a \| = \sqrt{(a,a)}$. Es ist $\| a+b \| \leq \| a \| + \| b \|$ und $\| \lambda a \| = |\lambda| \, \| a \|$.

Lemma 7.5.2

1. *Unitäre Bilinearformen sind regulär.*
2. *Sei U ein Unterraum des unitären Raums V. Dann ist V direkte Summe von U und $U^\perp$.*
3. *Jeder unitäre Vektorraum V hat eine Orthonormalbasis. (Also ist V zum unitären Raum $\mathbb{C}^n$ isomorph.)*
4. *Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Orthonormalbasis. Dann ist für alle $a \in V$*

$$a = (b_1, a)b_1 + \ldots + (b_n, a)b_n.$$

Satz 7.5.3 *Sei V ein unitärer Vektorraum. Zu jedem Endomorphismus f von V gibt es einen durch $(f^t(x), y) = (x, f(y))$ eindeutig bestimmten* adjungierten *Endomorphismus f^t. Wenn f bezüglich einer Orthonormalbasis durch die Matrix A dargestellt wird, wird f^t durch die adjungierte Matrix A^* dargestellt.*

Sei V unitär. Dann entsprechen sich Sesquilinearformen und Endomorphismen von V vermöge

$$[x, y] = (f(x), y).$$

$[\ ,\ ]$ ist genau dann hermitesch, wenn f selbstadjungiert ist.

Automorphismen eines unitären Vektorraums heißen *unitär*.

Lemma 7.5.4 *Sei f ein Endomorphismus des unitären Vektorraums V, der bezüglich einer Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_m$ durch die Matrix A dargestellt wird. Dann sind äquivalent:*

1. *f ist unitär.*
2. *$f \circ f^t = id_V$.*
3. *$AA^* = \mathbf{I}$.*
4. *$f(b_1), \ldots, f(b_m)$ ist eine Orthonormalbasis.*

Folgerung 7.5.5 *Der Absolutbetrag einer Determinante einer unitären Abbildung ist* 1.

Die *unitäre Gruppe*

$$\mathrm{U}_n = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = \mathbf{I}\}$$

ist die Gruppe aller unitären n-n–Matrizen. Die unitären Abbildungen mit Determinante 1 bilden die *spezielle* Gruppe SU_n.

Definition *Ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums heißt normal, wenn $f \circ f^t = f^t \circ f$.*

Selbstadjungierte und unitäre Endomorphismen sind normal.

Satz 7.5.6 *f ist genau dann normal, wenn f eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren hat.*

Ein normaler Endomorphismus ist selbstadjungiert, wenn seine Eigenwerte reell sind. Und unitär, wenn die Eigenwerte den Betrag 1 haben.

Kapitel 8

Multilineare Algebra

In diesem Kapitel betrachten wir Vektorräume über einem beliebigen Körper K.

8.1 Tensorprodukt

U und V seien zwei Vektorräume. Ein Vektorraum T zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\otimes : U \times V \to T$ heißt *Tensorprodukt* von U und V, wenn sich jede bilineare Abbildung $(\ ,\ ) : U \times V \to W$ als Komposition von $\otimes$ mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $f : T \to W$ schreiben läßt.

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "(\ ,\ )"'] & T \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Satz 8.1.1 *Je zwei Vektorräume U und V haben ein Tensorprodukt $\otimes : U \times V \to T$. T ist eindeutig bestimmt in folgendem Sinn: Wenn $\otimes' : U \times V \to T'$ ein zweites Tensorprodukt ist, gibt es genau einen Isomorphismus $t : T \to T'$, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\otimes'"'] & T \arrow[d, "t"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Wir wählen für alle Paare U und V ein Tensorprodukt aus und bezeichnen es mit $U \bigotimes V$.

Aus dem Beweis des Satzes ergibt sich:

Folgerung 8.1.2 *Wenn $(a_i)_{i\in I}$ eine Basis von U und $(b_j)_{j\in J}$ eine Basis von V ist, ist $(a_i \otimes b_j)_{i\in I,\, j\in J}$ eine Basis von $U \bigotimes V$.*

Wenn U und V endlich–dimensional sind, ist also $\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V$.

Lemma 8.1.3 *Die kanonische Abbildung $K \bigotimes V \to V$ ist ein Isomorphismus.*

Für zwei lineare Abbildungen $f : U \to U'$ und $g : V \to V'$ definiert man die lineare Abbildung

$$f \otimes g : U \bigotimes V \to U' \bigotimes V'$$

durch $(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v)$. $\bigotimes$ wird auf diese Weise zu einem linearen Bifunktor:

Lemma 8.1.4

1. $\mathrm{id}_U \otimes \mathrm{id}_V = id_{U \bigotimes V}$
2. $(f \circ f') \otimes (g \circ g') = (f \otimes g) \circ (f' \otimes g')$
3. $(f + f') \otimes g = (f \otimes g) + (f' \otimes g)$
4. $(\alpha f) \otimes g = \alpha(f \otimes g)$

Beispiel

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Dann ist $\mathbb{C} \bigotimes V$ ein $\mathbb{C}$–Vektorraum mit der Skalarmultiplikation $\lambda(\alpha \otimes v) = (\lambda\alpha) \otimes v$.

Das Tensorprodukt einer endlichen Familie $V_1, \ldots, V_n$ von Vektorräumen ist ein Vektorraum

$$V_1 \bigotimes \ldots \bigotimes V_n$$

zusammen mit einer multilinearen Abbildung $\otimes : V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \bigotimes \ldots \bigotimes V_n$, so daß sich jede multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ eindeutig in der Form $f \circ \otimes$ für ein lineares $f : V_1 \bigotimes \ldots \bigotimes V_n \to W$ schreiben läßt. Existenz und Eindeutigkeit zeigt man wie oben.

Satz 8.1.5

1. *Durch $(u_1 \otimes \ldots \otimes u_m) \otimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \mapsto u_1 \otimes \ldots \otimes u_m \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ ist ein Isomorphismus zwischen $(U_1 \bigotimes \ldots \bigotimes U_m) \bigotimes (V_1 \bigotimes \ldots \bigotimes V_n)$ und $U_1 \bigotimes \ldots \bigotimes U_m \bigotimes V_1 \bigotimes \ldots \bigotimes V_n$ definiert.*
2. *$U \bigotimes V$ und $V \bigotimes U$ sind kanonisch isomorph. Der Isomorphismus wird durch $u \otimes v \mapsto v \otimes u$ gegeben.*

Sei $\bigotimes^0 = K$ und (für positive p) $\bigotimes^p V$ das Tensorprodukt von p Kopien von V. Dann ist nach dem vorhergehenden Satz für alle p und q eine bilineare Abbildung $\otimes : \bigotimes^p V \times \bigotimes^q V \to \bigotimes^{p+q} V$ definiert. Wenn p oder q Null sind, soll diese Abbildung Multiplikation mit Elementen von K sein.

Satz 8.1.6 *Die Abbildungen* $\otimes : \bigotimes^p V \times \bigotimes^q V \to \bigotimes^{p+q} V$ *machen*

$$\mathrm{T}(V) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigotimes^p V \right)$$

zu einer assoziativen Algebra mit Einselement, der Tensoralgebra von V.

Beispiel

$\mathrm{T}(K) \cong K[X]$

8.2 Tensorprodukt und Dualität

Die durch die bilineare Abbildung $(\lambda, x) \mapsto \lambda(x)$ definierte lineare Abbildung

$$\mathrm{v} : V^* \bigotimes V \to K$$

heißt *Verjüngung.*

Allgemeiner nennt man die durch $a_1 \otimes \ldots \lambda \otimes b_1 \otimes \ldots v \otimes \ldots c_1 \times \ldots \mapsto \lambda(v) a_1 \otimes \ldots b_1 \otimes \ldots c_1 \otimes \ldots$ definierte lineare Abbildung

$$A_1 \bigotimes \ldots V^* \bigotimes B_1 \bigotimes \ldots V \bigotimes \ldots C_1 \times \ldots \to A_1 \bigotimes \ldots B_1 \bigotimes \ldots C_1 \bigotimes \ldots$$

Verjüngung (über den Faktoren V^* und V).

Die Elemente von

$$V_p^q = (\bigotimes^p V) \bigotimes (\bigotimes^q V^*)$$

nennt man p–fach *kontravariante* und q–fach *kovariante* Tensoren (oder auch Tensoren der *Stufe* (p,q)). Tensorieren liefert eine lineare Abbildung

$$V_p^q \times V_{p'}^{q'} \to V_{p+p'}^{q+q'}.$$

Verjüngen über der i–ten Kopie von V und der j–ten Kopie von V^* liefert eine Abbildung

$$\Gamma_i^j : V_p^q \to V_{p-1}^{q-1}.$$

Die Verjüngung

$$U \bigotimes V^* \bigotimes V \to U$$

liefert für jedes $a \in U \bigotimes V^*$ eine lineare Abbildung $f_a : V \to U$, definiert durch $f_a(v) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{v})(a \otimes v)$.

Satz 8.2.1 *Die durch* $a \mapsto f_a$ *definierte Abbildung* $U \bigotimes V^* \to \mathrm{L}(V, U)$ *ist für endlich–dimensionale* V *ein Isomorphismus.*

Man kann daher (im endlich–dimensionalen) $U \bigotimes V^*$ und $\mathrm{L}(V, U)$ identifizieren. Dabei ergeben sich folgende Entsprechungen:

1. Matrizen:
   Sei (v_j) eine Basis von V, (u_i) eine Basis von U und die lineare Abbildung $f : V \to U$ gegeben durch die Matrix $(\alpha_{i,j})$. Sei (λ_j) die zu (v_j) duale Basis von V^*. Dann ist (bei der obigen Identifizierung)
   $$f = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}(u_i \otimes \lambda_j).$$

2. Komposition:
   Die Komposition von linearen Abbildungen ist eine bilineare Abbildung
   $$\circ : \mathrm{L}(V, W) \times \mathrm{L}(U, V) \to \mathrm{L}(U, W).$$
   Sie entspricht der Verjüngung
   $$(W \bigotimes V^*) \bigotimes (V \bigotimes U^*) \to W \bigotimes U^*.$$

3. Duale Abbildung:
   Die Dualisierung $\mathrm{L}(U, V) \to \mathrm{L}(V^*, U^*)$, definiert durch $f \mapsto f^*$ entspricht der Abbildung
   $$V \bigotimes U^* \to U^* \bigotimes V = U^* \bigotimes V^{**}$$
   aus Satz 8.1.5(2).

4. Die Spurabbildung:
   $\mathrm{Tr} : \mathrm{End}(V) \to K$ ist nichts anderes als die Verjüngung
   $$V \bigotimes V^* \to K.$$

Zweimalige Verjüngung
$$(\lambda \otimes \mu) \otimes (u \otimes v) \mapsto \lambda(u)\mu(v)$$
liefert eine bilineare Abbildung $(U^* \bigotimes V^*) \times (U \bigotimes V) \to K$.

Satz 8.2.2 *Wenn U und V endlich–dimensional sind, bilden $U^* \bigotimes V^*$ und $U \bigotimes V$ mit der eben definierten bilinearen Abbildung ein duales Paar.*

$(U \bigotimes V)^*$ kann also mit $U^* \bigotimes V^*$ identifiziert werden.

8.3 Die äußere Algebra

Sei V ein K–Vektorraum und p eine natürliche Zahl. Ein Vektorraum A zusammen mit einer (p–stelligen) multilinearen alternierenden Abbildung $\wedge^p : V^p \to A$ heißt *p-fache äußere Potenz* von V, wenn sich jede alternierende multilineare Abbildung $a : V^p \to W$ als Komposition von $\wedge^p$ mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $f : A \to W$ schreiben läßt.

$$
\begin{tikzcd}
V^p \arrow[r, "\wedge^p"] \arrow[dr, "a"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& W
\end{tikzcd}
$$

Wir schreiben

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p$$

für $\wedge^p(v_1, v_2, \ldots, v_p)$.

Satz 8.3.1 *V hat für alle p eine p–fache äußere Potenz $\wedge^p : V^p \to A$. A ist eindeutig bestimmt in folgendem Sinn: Wenn $\wedge' : V^p \to A'$ eine zweite p–fache äußere Potenz von V ist, gibt es genau einen Isomorphismus $a : A \to A'$, der das Diagramm*

$$
\begin{tikzcd}
V^p \arrow[r, "\wedge^p"] \arrow[dr, "\wedge'"'] & A \arrow[d, "a"] \\
& A'
\end{tikzcd}
$$

kommutativ macht.

Wir wählen für alle V und p eine p–fache äußere Potenz aus und bezeichnen sie mit $\bigwedge^p V$. Für $p = 0$ ist der Sinn der Definition nicht ganz klar; man vereinbart $\bigwedge^0 V = K$. Die Elemente von $\bigwedge^p V$ heißen die *p–Vektoren* von V.

Betrachtet man die Definition der äußeren Potenz im Fall $W = K$, sieht man, daß sich der Raum $\mathrm{A}^p V$ aller p–Formen auf V mit dem Dualraum $(\bigwedge^p V)^*$ identifizieren läßt: Jedes $\mu \in \mathrm{A}^p V$ läßt sich schreiben als $\mu(v_1, \ldots, v_p) = \lambda(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p)$ für ein $\lambda \in (\bigwedge^p V)^*$.

Sei $e_1, e_2, \ldots e_n$ eine Basis von V. Für alle p–elementigen Teilmengen I von $\{1, \ldots, n\}$ sei

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p},$$

wobei $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ eine monotone Aufzählung von I ist. Aus dem Beweis des Satzes ergibt sich:

Folgerung 8.3.2 *Die e_I bilden eine Basis von $\bigwedge^p V$.*

Wenn $\dim V = n$, ist also

$$\dim(\bigwedge^p V) = \binom{n}{p}.$$

Insbesondere ist $\dim(\bigwedge^n V) = 1$ und $\dim(\bigwedge^p V) = 0$ für alle $p > n$. $\bigwedge^1 V$ und V sind kanonisch isomorph.

Wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_p$ vermöge

$$(v_1 \ldots v_p) = (e_1 \ldots e_n)A$$

durch die n-p–Matrix A gegeben sind, ist

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = \sum_{|I|=p} \det(A_I)e_I.$$

Dabei besteht die p-p–Matrix A_I aus den Zeilen von A, deren Zeilennummern zu I gehören.

Lemma 8.3.3 *Zu jeder linearen Abbildung $\phi : V \to U$ gibt es eine lineare Abbildung $\wedge^p\phi : \bigwedge^p V \to \bigwedge^p U$, die eindeutig bestimmt ist durch*

$$\wedge^p\phi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) = \phi(v_1) \wedge \ldots \wedge \phi(v_p).$$

$\bigwedge^p$ wird dadurch zu einem linearen Funktor.

Lemma 8.3.4 *Wenn $\dim V = n$ und ϕ ein Endomorphismus von V ist, ist $\wedge^n\phi = \det(\phi)$.*

Man beachte, daß ein Endomorphismus eines eindimensionalen Raumes Multiplikation mit einem Körperelement ist.

Sei $e_1, \ldots, e_m$ eine Basis von U und $f_1, \ldots, f_n$ eine Basis von V. $\phi : V \to U$ sei durch die m-n–Matrix A gegeben. Dann ist

$$\wedge^p\phi(e_I) = \sum_J \det(A_{I,J})e_J.$$

Dabei ist für jede p–elementige Teilmenge I von $\{1, \ldots, m\}$ und J von $\{1, \ldots, n\}$ $A_{I,J}$ die Matrix der Elemente von A, deren Zeilenindex in I und deren Spaltenindex in J liegt.

Satz 8.3.5 *Für alle p und q gibt es eine bilineare Abbildung*

$$\wedge : \bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \to \bigwedge^{p+q} V,$$

gegeben durch $(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \wedge (v_{p+1} \wedge \ldots \wedge v_{p+q}) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{p+q}$.

Wenn p oder q gleich Null sind, nehmen wir für $\wedge$ die Multiplikation mit Elementen von K.

Sei $e_1, e_2, \ldots e_n$ eine Basis von V. Wenn I eine p–elementige Teilmenge und J eine q–elementige Teilmenge von $\{1, \ldots n\}$ ist, ist

$$e_I \wedge e_J = \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } \quad I \cap J \neq 0 \\ \epsilon_{I,J} e_{I \cup J} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist, wenn $i_1 < \ldots < i_p, \quad j_1 < \ldots < j_q$ und $k_1 < \ldots < k_{p+q}$ die aufsteigenden Aufzählungen von I, J und $I \cup J$ sind, $\quad \epsilon_{I,J}$ die Signatur der Permutation

$$\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q \\ k_1 \ldots k_{p+q} \end{pmatrix},$$

die $i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q$ der Reihe nach auf $k_1 \ldots k_{p+q}$ abbildet.

Folgerung 8.3.6 *Die direkte Summe*

$$\bigwedge V = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigwedge^p V \right)$$

wird durch die Abbildungen $\wedge$ zu einer assoziativen Algebra mit Einselement. Wenn $v \in \bigwedge^p V$ und $w \in \bigwedge^q V$, ist $v \wedge w = (-1)^{pq} w \wedge v$.

$\bigwedge V$ heißt die *äußere Algebra* von V.

Satz 8.3.7 *Sei $n = \dim(V)$ und $p + q = n$. Wenn wir einen Isomorphismus $\bigwedge^n V \cong K$ fixieren, werden $\bigwedge^p V$ und $\bigwedge^q V$ vermöge*

$$\wedge : \bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \to \bigwedge^n V \cong K$$

zu einem dualen Paar.

Folgerung 8.3.8 (Cramersche Regel) *Sei $n = \dim(V)$ und μ eine n–Form, dann ist für alle $v_1, \ldots, v_n$ und alle $x \in V$*

$$\mu(v_1, \ldots, v_n)x = \sum_{i=1}^{n} \mu(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n) v_i$$

Sei ϕ ein Endomorphismus von V und $\operatorname{adj}(\phi) : V \to V$ der zu $\wedge^{n-1}\phi : \bigwedge^{n-1} V \to \bigwedge^{n-1} V$ adjungierte Endomorphismus. $\operatorname{adj}(\phi)$ wird also bestimmt durch die Gültigkeit von

$$\operatorname{adj}(\phi)(v_1) \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_n = v_1 \wedge \phi(v_2) \wedge \ldots \wedge \phi(v_n)$$

für alle $v_1, \ldots, v_n$ aus V.

Lemma 8.3.9 *Wenn ϕ (bezüglich einer Basis von V) durch die Matrix A dargestellt wird, wird* $\operatorname{adj}(\phi)$ *durch die Adjunkte* $\operatorname{adj}(A)$ *dargestellt.*

Man nennt daher $\operatorname{adj}(\phi)$ die Adjunkte von ϕ.

8.4 Äußere Algebra und Dualität

V sei in diesem Abschnitt endlich–dimensional, $n = \dim V$.

Lemma 8.4.1 *Durch*

$$< \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_p, v_1 \wedge \ldots \wedge v_p >= \det \begin{pmatrix} \lambda_1(v_1) & \ldots & \lambda_1(v_p) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda_p(v_1) & \ldots & \lambda_p(v_p) \end{pmatrix}$$

wird eine bilineare Abbildung

$$< \, , \, >: \bigwedge^p V^* \times \bigwedge^p V \to K$$

definiert.

Der nächste Satz zeigt, daß man für endlich dimensionale V den Raum A^pV der p–Formen auf V mit $\bigwedge^p(V^*)$ identifizieren kann.

Satz 8.4.2 *Wenn V endlich–dimensional ist, bilden $\bigwedge^p V^*$ und $\bigwedge^p V$ vermöge der eben definierten bilinearen Abbildung ein duales Paar.*

Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V und $e_1^*, \ldots, e_n^*$ die duale Basis von V^*. Dann sind die Basen (e_I) und (e_I^*) (siehe 8.3.2) dual zueinander.

Die Algebrastruktur von $\bigwedge(V^*)$ übertragen wir auf die direkte Summe $\mathrm{A}V = \bigoplus_{p\geq 0} \mathrm{A}^pV$.

Satz 8.4.3 *Sei V endlich–dimensional, μ eine p–Form und ν eine q–Form auf V. Dann berechnet sich die $p+q$–Form $\mu \wedge \nu$ durch*

$$(\mu \wedge \nu)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum \epsilon_{I,J} \, \mu(v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}) \, \nu(v_{j_1}, \ldots, v_{j_q}).$$

Dabei wird über alle Zerlegungen von $\{1, \ldots, p+q\}$ in eine Menge $I = \{i_1 < \ldots < i_p\}$ und eine Menge $J = \{j_1 < \ldots < j_q\}$ summiert.

Wenn $p = 1$, d.h. $\mu \in V^*$, hat die Formel die einfache Gestalt:

$$(\mu \wedge \nu)(v_1, \ldots, v_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i-1} \mu(v_i) \nu(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{q+1}).$$

Dabei bedeutet $\hat{v}$, daß die Variable v ausgelassen wird.

Sei $\nu \in \bigwedge^p V^*$. Dann ist durch $\mu \mapsto \mu \wedge \nu$ eine lineare Abbildung $\bigwedge^q V^* \to \bigwedge^{p+q} V^*$ definiert. Die dazu duale Abbildung $\bigwedge^{p+q} V \to \bigwedge^q V$ nennen wir $\nu \lrcorner$, das *innere Produkt* mit ν.

Definition *Die bilineare Abbildung $\lrcorner : \bigwedge^p V^* \times \bigwedge^{p+q} V \to \bigwedge^q V$ ist definiert durch*

$$< \mu, \nu \lrcorner x > = < \mu \wedge \nu, x > .$$

<u>Spezialfälle</u>

$$\begin{array}{lrcl} p = 0: & \alpha \lrcorner x & = & \alpha x \\ q = 0: & \nu \lrcorner x & = & < \nu, x > \end{array}$$

Lemma 8.4.4 *Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V und $e_1^*, \ldots, e_n^*$ die duale Basis von V^*. Dann ist*

$$e_J^* \lrcorner e_H = \begin{cases} 0 & , \textit{ wenn } \; J \not\subset H, \\ \epsilon_{I,J} e_I & , \textit{ wenn } \; I \,\dot\cup\, J = H. \end{cases}$$

Satz 8.4.5

1. $(\mu \wedge \nu) \lrcorner x = \mu \lrcorner (\nu \lrcorner x)$

2. $<\mu, \nu \lrcorner x> = (-1)^{pq} <\nu, \mu \lrcorner x>$

3. *Wenn* $v_1, \ldots, v_{p+q} \in V$, *ist*

$$\nu \lrcorner (v_1 \wedge \ldots \wedge v_{p+q}) = \sum \epsilon_{I,J} <\nu, v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_q}> (v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_p}).$$

(Hier wird über alle Zerlegungen von $\{1, \ldots, p+q\}$ *in eine Menge* $I = \{i_1 < \ldots < i_p\}$ *und eine Menge* $J = \{j_1 < \ldots < j_q\}$ *summiert.)*

4. *Wenn* $\nu \in V^*$, $x \in \bigwedge^r V$ *und* $y \in \bigwedge^s V$, *ist*

$$\nu \lrcorner (x \wedge y) = (-1)^s (\nu \lrcorner x) \wedge y + x \wedge (\nu \lrcorner y).$$

Die Operation $\llcorner$ wird dual definiert:

Definition *Die bilineare Abbildung* $\llcorner : \bigwedge^{p+q} V^* \times \bigwedge^p V \to \bigwedge^q V^*$ *ist definiert durch*

$$<\mu \llcorner x, y> \quad = \quad <\mu, x \wedge y> .$$

Lemma 8.4.6 *Sei* $p + q = n = \dim V$, $\lambda \in \bigwedge^p V^*$, $x \in \bigwedge^q V$, $m \in \bigwedge^n V$ *und* $\mu \in \bigwedge^n V^*$. *Wenn* $<\mu, m> = 1$, *ist*

$$\lambda \lrcorner m = x \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \mu \llcorner x.$$

8.5 Die äußere Algebra eines euklidischen Raumes

Sei V ein n–dimensionaler euklidischer Vektorraum. Jedes lineare Funktional hat die Form $x \mapsto (a, x)$ für ein eindeutig bestimmtes $a \in V$. Wir können auf diese Weise V^* mit V identifizieren. Daraus ergibt sich auf natürliche Weise eine Identifizierung von $\bigwedge^p V^*$ und $\bigwedge^p V$. Es ist dann für $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p \in V$

$$<x_1 \wedge \ldots \wedge x_p, y_1 \wedge \ldots \wedge y_p> = \det \begin{pmatrix} (x_1, y_1) & \ldots & (x_1, y_p) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ (x_p, y_1) & \ldots & (x_p, y_p) \end{pmatrix}.$$

Lemma 8.5.1 *Die* $\bigwedge^p V$ *mit der Bilinearform* $< , >$ *sind euklidische Vektorräume.*

Lemma 8.5.2 *Für alle* $x \in \bigwedge^p$ *und* $\mu \in \bigwedge^{p+q}$ *ist* $x \lrcorner \mu = (-1)^{pq} \mu \llcorner x$.

Lemma 8.5.3 *Eine* n*–Form* $\mu \in \bigwedge^n V^* = \bigwedge^n V$ *ist genau dann normiert (im Sinn von Seite 38), wenn* $\parallel \mu \parallel = 1$.

Sei eine normierte n–Form μ festgehalten. Nach 8.3.7 werden $\bigwedge^p V$ und $\bigwedge^q V$ (wobei $p + q = n$) vermöge $x, y \mapsto (\mu, x \wedge y)$ zu einem dualen Paar. Es gibt also einen Vektorraumisomorphismus (die *Hodge–Abbildung*) $\overline{} : \bigwedge^p V \to \bigwedge^q V$, definiert durch

$$(\mu, x \wedge y) = (\overline{x}, y)$$

(für alle $y \in \bigwedge^q V$). Anders ausgedrückt:

$$\overline{x} = \mu \llcorner x.$$

Satz 8.5.4

1. $\overline{\mu} = 1$
2. *Wenn* $\overline{x} = y$, *ist* $x = (-1)^{pq}\overline{y}$.
3. $\overline{}$ *respektiert die euklidische Bilinearform:* $(\overline{x}, \overline{x'}) = (x, x')$
4. *Wenn* $e_1, \ldots, e_n$ *eine Orthonormalbasis von* V *ist, für die* $\mu(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = 1$, *ist*

$$\overline{e_I} = \epsilon_{I,J} e_J,$$

wenn $I \cup J = \{1, \ldots n\}$.

Sei schließlich V ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum mit einer einer ausgezeichneten normierten 3–Form μ. (Bis auf Isomorphie ist das der $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbilinearform und der Standarddeterminantenform mit $\mu(e_1, e_2, e_3) = 1$ für die kanonische Basis.)

Definition *Das Kreuzprodukt* $\times : V \times V \to V$ *ist definiert durch* $x \times y = \overline{x \wedge y}$.

Für den $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbilinearform und der Standarddeterminantenform stimmt das jetzt definierte Kreuzprodukt mit dem auf Seite 15 definierten Kreuzprodukt überein. Es folgt, daß $\times$ unter der Wirkung aller $\phi \in \mathrm{Sl}_3(\mathbb{R})$ invariant bleibt, daß also $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$.

$x \times y$ ist eindeutig bestimmt durch die Gültigkeit von

$$\mu(x, y, z) = (x \times y, z)$$

für alle $z \in V$. Die Operationen der äußeren Algebra von V lassen sich durch (,) und $\times$ ausdrücken. Zum Beispiel ist

Lemma 8.5.5 $x \times y = \overline{x} \llcorner y$.

Satz 8.5.6 *Für das Kreuzprodukt gelten folgende Rechenregeln:*

$$\begin{array}{llcl}
(1) & a \times b & = & -b \times a \\
(2) & (a \times b, c) & = & \mu(a, b, c) \\
(3) & (a \times b) \times c & = & (a, c)b - (b, c)a \\
(4) & ((a \times b), (c \times d)) & = & (a, c)(b, d) - (a, d)(b, c)
\end{array}$$

Index