Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Rémi Jaoui

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2021/2022

Bewertete Körper

Blatt 3

Abgabe: 16.11.2021

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.**

Seien $(K, |\cdot|)$ ein vollständiger nichtarchimedischer normierter Körper mit assoziierter Bewertung ν und x ein Element aus $\mathfrak{M}_\nu$. Berechne das Inverse des Elementen $1-x$ in O_ν.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**

Sei R ein Integritätsbereich mit Eins und betrachte die Lokalisierung R_P von R auf das Primideal P aus R.

(a) Zeige, dass die Menge $IR_P = \{\frac{a}{b} \in \mathrm{Frac}(R) \mid a \in I \;\&\; b \notin P\}$ ein Ideal von R_P definiert, falls I ein Ideal von R ist. Zeige, dass IR_P genau dann echt ist, wenn $I \subset P$.

(b) Zeige, dass die Korrespondenz $I \mapsto IR_P$ eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen den Primidealen von R, welche in P enthalten sind, und den Primidealen der Lokalisierung R_P bestimmt. Schliesse daraus, dass R_P ein lokaler Ring mit maximalem Ideal PR_P ist.

(c) Sei nun $\mathfrak{M}$ ein maximales Ideal von R. Zeige, dass der Quotientenkörper $R_\mathfrak{M}/\mathfrak{M}R_\mathfrak{M}$ isomorph zum Körper $R/\mathfrak{M}$ ist.

HINWEIS: Es gibt einen kanonischen Ringhomomorphismus $R \to R_\mathfrak{M}/\mathfrak{M}R_\mathfrak{M}$.

(d) Beschreibe den Kern des Ringhomomorphismus $\Psi: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[T] & \to & \mathbb{Q} \\ P(T) & \mapsto & P(\frac{1}{3}) \end{array}$

Schliesse daraus, dass es einen Isomorphismus zwischen dem Ring $\mathbb{Z}[T]/\mathrm{Ker}(\Psi)$ und der Lokalisierung $S^{-1}\mathbb{Z}$, mit $S = \{3^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gibt.

HINWEIS: Mit Hilfe des Divisionsalgorithmus in $\mathbb{Q}[T]$, vergleiche dann die Koeffizienten.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $(K, |\cdot|)$ ein nichtarchimedischer normierter Körper.

(a) Gegeben x und y aus K mit $|x| \neq |y|$, zeige, dass $|x+y| = \max\{|x|, |y|\}$. Schließe daraus, dass jedes Dreieck gleichschenklig ist.

(b) Falls ein Dreieck nicht gleichseitig ist, dann hat die dritte Seite echt kleinere Länge als die anderen zwei Seiten.

(c) Drei verschiedene Punkte a, b und c aus K sind nie kollinear: $|a-b| < |b-c| + |c-a|$.

(d) Kann die Konklusion des Satzes von Pythagoras in $\mathbb{Q}_p$ gelten, das heißt, gibt es ein Dreieck derart, dass $a^2 = b^2 + c^2$?

(e) Zeige, dass jede Menge äquidistanter Punkte in $\mathbb{Q}_p$ Mächtigkeit höchstens p hat.

HINWEIS: Mit Hilfe affiner Transformationen können wir annehmen, dass zwei der Punkte 0 und 1 sind. Was ist der Restklassenkörper von $\mathbb{Q}_p$?

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.30 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 15 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden. Das Blatt kann zu zweit eingereicht werden.