Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Dr. Rémi Jaoui — Wintersemester 2021/2022

Bewertete Körper
Blatt 8
Abgabe: 11.01.2022

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Sei p eine Primzahl.

(a) Zeige, dass $\mathbb{Z}$ dicht in $\mathbb{Z}_p$ ist. Schließe daraus, dass jede abgeschlossene Untergruppe von $(\mathbb{Q}_p, +)$ unter Multiplikation von Elementen aus $\mathbb{Z}_p$ abgeschlossen ist.

HINWEIS: Wenn X abgeschlossen ist, so ist die Menge

$$\{z \in \mathbb{Q}_p \mid z \cdot Y \subset X\}$$

auch abgeschlossen für Y eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{Q}_p$.

(b) Beschreibe alle abgeschlossenen Untergruppe von $(\mathbb{Z}_p, +)$.

(c) Sei nun eine abgeschlossene Untergruppe H von $(\mathbb{Q}_p, +)$ derart, dass die Menge $\{\nu_p(h)\}_{h \in H}$ kein Minimum besitzt. Was ist der Index von H in $(\mathbb{Q}_p, +)$?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Betrachte zwei angeordneten abelschen Gruppen Γ_1 und Γ_2 mit $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$, sowie eine konvexe Untergruppe H von Γ_1.

(a) Beschreibe die dividierbare Hülle $\mathrm{Div}_{\Gamma_1}(H)$. Schließe daraus, dass $\mathrm{Div}_{\Gamma_2}(H) \cap \Gamma_1 = H$.

(b) Wir nehmen nun an, dass die Quotientengruppe Γ_2/Γ_1 nur aus Torsionselementen besteht. Zeige, dass $\mathrm{Div}_{\Gamma_2}(H)$ eine konvexe Untergruppe von Γ_2 ist.

Gilt dies auch, wenn die Gruppe Γ_2/Γ_1 nicht rein Torsion ist?

Insbesondere ist die Abbildung
$$\begin{array}{ccc} \{\text{Konvexe Untergruppen von } \Gamma_2\} & \to & \{\text{Konvexe Untergruppen von } \Gamma_1\} \\ \Delta & \mapsto & \Delta \cap \Gamma_1 \end{array}$$
surjektiv, wenn Γ_2/Γ_1 eine Torsionsgruppe ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**
Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss des Körpers K positiver Charakteristik $p > 0$. Beachte, dass der Frobeniushomomorphismus
$$\mathrm{Fr}: \begin{array}{ccc} \overline{K} & \to & \overline{K} \\ x & \mapsto & x^p \end{array}$$
ein Ringisomorphismus ist.

(a) Zeige, dass jedes irreduzible Polynom $f(T)$ mit Koeffizienten aus K sich als $g(T^{p^n})$ für ein n aus $\mathbb{N}$ schreiben lässt, wobei $g(T)$ ein separables Polynom mit Koeffizienten aus K ist.

HINWEIS: Ein irreduzibles Polynom ist genau dann separabel, wenn die formale Ableitung nicht-trivial ist.

Bitte wenden!!

Eine algebraische Körpererweiterung $K \subset L$ ist *rein inseparabel*, falls für jedes x aus L es ein n aus $\mathbb{N}$ derart gibt, dass $x^{p^n} = \underbrace{\mathrm{Fr} \circ \cdots \circ \mathrm{Fr}}_{n}(x)$ in L liegt. Setze nun

$$K^{ins} = \{\alpha \in \overline{K} \mid \alpha^{p^n} \in K \text{ für ein } n \text{ aus } \mathbb{N}\}.$$

(b) Zeige, dass α aus $\overline{K}$ genau dann in K^{ins} liegt, wenn sein Minimalpolynom über K eine einzige Nullstelle in $\overline{K}$ besitzt. Schließe daraus, dass ein Element aus $\overline{K}$ genau dann in K^{ins} liegt, wenn es von jedem Element σ aus $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ fixiert wird.

(c) Zeige, dass die Körpererweiterung $K^{ins} \subset \overline{K}$ separabel ist. Zeige überdies, dass $K^{sep} \subset \overline{K}$ rein inseparabel ist, wobei K^{sep} der separable Abschluss von K in $\overline{K}$ ist.

HINWEIS: Teilaufgabe (a) sowie die Tatsache, dass $\overline{K}$ algebraisch abgeschlossen ist.

(d) Beschreibe den Durchschnitt $K^{sep} \cap K^{ins}$. Zeige, dass der von $K^{sep} \cup K^{ins}$ erzeugte Körper $K^{sep}K^{ins}$ gleich $\overline{K}$ ist.

HINWEIS: Bestimme den Grad einer endlichen algebraischen Körpererweiterung, welche sowohl separabel als auch rein inseperabel ist.

BONUS Zeige, dass K^{sep} und K^{ins} linear disjunkt über K sind.

HINWEIS: Der Satz des primitiven Elementen, sowie Vandermondematrizen.