Mémoire

de

Magistère de Mathématiques Fondamentales et Appliquées et d'Informatique (MMFAI)

Markus Junker

Université Paris 7 — École Normale Supérieure

Octobre 1993

Introduction aux géométries de Zariski

Les géométries de Zariski, qui forment mon domaine de recherche, sont des structures introduites par Hrushovski et Zil'ber en 1990 : Une géométrie de Zariski est un ensemble X et une collection de topologies noetheriennes τ_n sur X^n, compatibles dans un certain sens. (La définition exacte sera donnée plus tard). Les exemples principaux sont les variétés algébriques (lisses) munies des topologies de Zariski, d'où le nom de 'géométrie de Zariski'. Sous certaines hypothèses – des topologies assez riches et un bon comportement de la dimension – on a une réciproque :

Théorème (Hrushovski – Zil'ber) *Une géométrie de Zariski – irréductible, de dimension 1, lisse et très ample – est une courbe algébrique lisse sur un corps algébriquement clos t.q. les topologies de départ sont les topologies de Zariski.*

Ce théorème donne une caractérisation purement topologique des courbes algébriques lisses. Pourtant, il a été prouvé pour répondre à une question modèle-théorique :

Problème : *Sous quelles conditions une théorie $\aleph_1$-catégorique non localement modulaire est-elle bi-interprétable avec un corps algébriquement clos ?*

Ce mémoire se propose d'expliquer cette question et de montrer l'interêt du théorème en théorie des modèles. Une première section est consacrée aux fondements de la théorie des modèles. Puis je présente une branche particulière, la théorie de la classification, avec les idées principales et quelques résultats. En se spécialisant encore une fois, on arrive aux théories catégoriques et la 'classification fine'. C'est ici que des idées géométriques interviennent. Le problème auquel Hrushovski et Zil'ber répondent sera expliqué, avant que je donne la définition exacte des géométries de Zariski et une formulation plus précise de leur théorème. Ma propre approche ainsi que quelques petits résultats concluront le mémoire.

La théorie des modèles, comme la logique en général, débordent de notions et définitions peu connues aux mathématiciens non-logiciens. J'ai essayé de ne pas en donner trop, mais pas non plus le minimum, pour présenter une image plus variée et complète. Des exemples devraient rendre le texte plus lisible ; pour la même raison, il est plein d'"abus de langage" et souvent très simplificateur.

Les symboles '$-\triangleright$' et '$\triangleleft-$' encadrent l'équivalent du texte précédant en écriture mathématique.

Qu'est-ce qu'est la Théorie des Modèles ?

Si on tient à faire une distinction entre la logique (mathématique) et les mathématiques classiques, on pourrait dire que la logique tient compte du langage dans lequel on parle des mathématiques. On est tenté de voir deux directions possibles en logique : soit les langages sont des objets nouveaux d'une étude mathématique ('logique comme contenu des études') ; soit on utilise son savoir sur la force et les limites d'expression des langages pour examiner des structures mathématiques 'classiques' comme les groupes, les corps, des structures relationnelles, etc. ('logique comme technique'). La théorie des modèles fait partie du deuxième courant. Elle est une théorie générale de structures issue d'une synthèse de logique et algèbre.

Le reste de cette section présente les notions de base de la théorie des modèles[1] :

Avant de commencer d'examiner une structure, il faut fixer le langage dans lequel on la regardera : D'abord il faut convenir de la qualité du langage en question. Le plus souvent (et partout dans ce mémoire) c'est un langage du premier ordre : c'est là que la théorie des modèles est la plus forte et la plus élaborée (une raison pour ceci sera expliquée plus tard). Puis, pour pouvoir parler d'un groupe par exemple, il faut des

[1]Pour plus d'informations et une meilleure introduction voir [CK] ou [P]

symboles particuliers outre les symboles logiques : il faut un symbole de fonction binaire '$\circ$' pour la loi de composition et un symbole de constante 'e' pour l'élément neutre, et eventuellement un symbole de fonction unaire '$^{-1}$' pour l'inverse ou un symbole de relation unaire 'H' pour un sous-groupe particulier. Le choix du langage est important : il influence les notions de sous-structure, d'homomorphisme, etc. Une sous-structure d'un corps dans le langage $\{=,+,-,\cdot,^{-1},0,1\}$ est encore un corps, dans le langage $\{=,+,-,\cdot,0,1\}$ c'est seulement un sous-anneau.

En général, un langage $\mathcal{L}$ consiste en différents symboles de fonction[2] et de relation et du symbole '$=$' pour l'égalité $\multimap$ $\mathcal{L} = \{=, R_i, f_j | i \in I, j \in J\}$ $\multimapinv$. Les formules sur $\mathcal{L}$ sont construites à partir de ces symboles, des connecteurs booléens $\vee, \wedge, \neg$, des quantificateurs $\exists, \forall$ et d'un nombre infini (dénombrable) de variables v_i, en n'admettant que des disjonctions, conjonctions et quantifications finies. Modulo équivalence logique, ces formules constituent une algèbre de Boole $F(\mathcal{L})$; les formules à n variables libres forment une sous-algèbre $F_n(\mathcal{L})$. Si on se donne des symboles particuliers pour certains éléments d'une structure $\mathfrak{M}$ (on les appelera des 'PARAMÈTRES'[3]), on peut parler de ces éléments par des formules en remplaçant des variables libres par ces symboles. Le langage augmenté par des symboles pour les éléments dans $A \subseteq M$ est appelé $\mathcal{L}_A$.

- Une $\mathcal{L}$-STRUCTURE $\mathfrak{M}$ est un ensemble M muni d'une relation $R_i^{\mathfrak{M}} \subseteq M^{n_i}$ pour tout symbole de relation n_i-aire R_i et d'une fonction $f_j^{\mathfrak{M}} : M^{m_j} \to M$ pour tout symbole de fonction m_j-aire f_j de $\mathcal{L}$.
- Si une formule φ est vraie dans $\mathfrak{M}$ $\multimap$ $\mathfrak{M} \models \varphi$ $\multimapinv$ on dit que φ exprime une propriété élémentaire de $\mathfrak{M}$. L'ensemble des propriétés élémentaires de $\mathfrak{M}$ est appelé la THÉORIE ÉLÉMENTAIRE de $\mathfrak{M}$ $\multimap$ $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \{\varphi \in F_0(\mathcal{L}) | \mathfrak{M} \models \varphi\}$ $\multimapinv$ et $\mathfrak{M}$ est appelé MODÈLE de la théorie $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ $\multimap$ $\mathfrak{M} \models T$ $\multimapinv$.
- Deux structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont ÉLÉMENTAIREMENT ÉQUIVALENTES $\multimap$ $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ $\multimapinv$ si elles ont la même théorie élémentaire $\multimap$ $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})=\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ $\multimapinv$.
- $\mathfrak{M}$ est SOUS-STRUCTURE de $\mathfrak{N}$, ou $\mathfrak{N}$ EXTENSION de $\mathfrak{M}$ $\multimap$ $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ $\multimapinv$ si $M \subseteq N$ et si M porte la structure induite par $\mathfrak{N}$ $\multimap$ $R_i^{\mathfrak{M}} = R_i^{\mathfrak{N}} \cap M^{n_i}$ et $f_j^{\mathfrak{M}} = f_j^{\mathfrak{N}} \upharpoonright_{M^{m_j}}$ $\multimapinv$. (En particulier, M doit être clos pour les fonctions $f_j^{\mathfrak{N}}$)
- Un HOMOMORPHISME entre deux $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ est une application $h : M \to N$ qui respecte les relations et fonctions de $\mathcal{L}$ $\multimap$ $h(f_j^{\mathfrak{M}}(m_1, \dots, m_{n_j})) = f_j^{\mathfrak{N}}(h(m_1), \dots, h(m_{n_j}))$ et $h[R_i^{\mathfrak{M}}] \subseteq R_i^{\mathfrak{N}}$ $\multimapinv$.
- Une partie $D \subseteq M^n$ est A-DÉFINISSABLE (ou définissable à paramètres dans A) dans une structure $\mathfrak{M}$, s'il existe une formule φ dans $F_n(\mathcal{L}_A)$ t.q. D est l'ensemble des réalisations de φ dans $\mathfrak{M}$ $\multimap$ $D = \varphi[M] := \{\bar{m} \in M^n | \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})\}$ $\multimapinv$.
- $\mathfrak{M}$ est SOUS-STRUCTURE ÉLÉMENTAIRE de $\mathfrak{N}$, ou $\mathfrak{N}$ EXTENSION ÉLÉMENTAIRE de $\mathfrak{M}$ $\multimap$ $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ $\multimapinv$
  ssi $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ et $\forall n, \forall \bar{m} \in M^n, \forall \varphi \in F_n(\mathcal{L}) :\quad \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m})$
  ssi $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ pour le langage $\mathcal{L}_M$.
- h est une APPLICATION ÉLÉMENTAIRE si h est un homomorphisme qui respecte toutes les formules, $\multimap$ $\forall n, \forall \bar{m} \in M^n, \forall \varphi \in F_n(\mathcal{L}) :\quad \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(h(\bar{m}))$ $\multimapinv$ (ou encore si pour tout n-uplet de M^n, son type (sans paramètres) est le même que celui de son image).

(Les homomorphismes et les applications élémentaires font des $\mathcal{L}$-structures une catégorie. Le qualificatif 'élémentaire' renvoie à cette deuxième catégorie, p.ex. les sous-structures élémentaires sont bien les sous-structures dans cette catégorie.)

[2]Pour uniformiser les définitions, on regarde les constantes comme des fonctions 0-aires.

[3]D'habitude, on ne distingue pas syntaxiquement les symboles de leurs interprétations dans une structure. On écrit aussi bien 'a' pour un élément de M que pour le symbole qui le représente.

On appelle théorie un sous-ensemble consistant T de $\mathsf{F}_0(\mathcal{L})$. C'est le cas si le filtre engendré par T dans $\mathsf{F}_0(\mathcal{L})$ est propre. Une théorie maximale (ou complète) est donc un ultrafiltre dans $\mathsf{F}_0(\mathcal{L})$. Pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$, $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ est complète. Inversement, par le théorème de complétude de Gödel, toute théorie complète T admet un modèle $\mathfrak{M} \models \mathsf{T}$.

Il n'y a que les structures finies qui sont entièrement déterminées par leur théorie élémentaire : car le THÉORÈME DE LÖWENHEIM-SKOLEM affirme que pour toute structure infinie $\mathfrak{M}$ et tout cardinal $\kappa \geqslant \mathrm{card}(\mathsf{T})$[4], il existe une extension élémentaire ou une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{M}$ de cardinalité κ. Dans la suite, toutes les structures sont supposées infinies.

De façon analogue que pour les théories complètes, définissons le TYPE d'un n-uplet $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$ d'éléments de M (sur un ensemble de paramètres $A \subseteq M$) comme étant l'ensemble des formules à n variables libres (à paramètres dans A) satisfaites par $\bar{m}$ $-\!\triangleright$ $\mathfrak{tp}(\bar{m}/A) = \{\varphi(v_1, \dots, v_n) \mid \mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_n)\}$ $\triangleleft\!-$. Dans la théorie des corps algébriquement clos, le type d'un élément correspond à l'idéal engendré par le polynône minimal de cet élément dans l'anneau des polynômes[5]. $\mathfrak{tp}(\bar{m}/A)$ est un ensemble maximal consistant donc un ultrafiltre dans $\mathsf{F}_n(\mathcal{L}_A)$. Le THÉORÈME DE COMPACITÉ donne la réciproque : pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$, tout ensemble de paramètres $A \subseteq M$ et tout ultrafiltre $\mathfrak{u}$ dans $\mathsf{F}_n(\mathcal{L}_A)$ (on les appelle n-TYPES (COMPLETS) sur A), il existe une extension élémentaire $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ et des éléments $n_1, \dots, n_n \in N$ t.q. $\mathfrak{tp}((n_1, \dots, n_n)/A) = \mathfrak{u}$. On dit alors que $\mathfrak{u}$ est réalisé dans $\mathfrak{N}$. L'ensemble des n-types sur A $-\!\triangleright$ $S_n(A)$ $\triangleleft\!-$ est l'espace de Stone de l'algèbre de Boole $\mathsf{F}_n(\mathcal{L}_A)$ et donc un espace topologique totalement discontinu et compact : c'est cette compacité qui fait marcher le théorème.

On peut montrer un peu plus : Un modèle est κ-SATURÉ s'il réalise tout type sur moins de κ paramètres. Un modèle est SATURÉ s'il est κ-saturé et de cardinalité κ. Toujours dans la théorie des corps algébriquement clos, un modèle dénombrable saturé existe : c'est le corps de degré de transcendance $\aleph_0$. Les modèles saturés ont beaucoup de propriétés agréables (p.ex. deux modèles saturés élémentairement équivalents de même cardinalité sont isomorphes), mais ils n'existent pas toujours. Par contre, on peut plonger tout modèle $\mathfrak{M}$ dans une extension élémentaire κ^+-saturée de cardinalité au plus $|M|^\kappa$, ($|M|, \kappa \geqslant \mathrm{card}(\mathsf{T})$). Inversement, pour un modèle d'une théorie dénombrable et un ensemble de n-types maigre dans $S_n(\emptyset)$, on peut construire un modèle qui ne réalise pas ces types. (Théorème d'omission des types). Réalisation ou omission de types sont les moyens principaux de construire des modèles.

Deux formules φ et ψ de $\mathsf{F}_n(\mathcal{L})$ sont équivalentes modulo T $-\!\triangleright$ $\varphi \sim_{\mathsf{T}} \psi$ $\triangleleft\!-$ si $\mathsf{T} \vdash \forall v_1 \cdots \forall v_n (\varphi(v_1 \dots v_n) \leftrightarrow \psi(v_1 \dots v_n))$. C'est équivalent à dire que pour tout modèle $\mathfrak{M} \models \mathsf{T}$, $\varphi[M] = \psi[M]$. La relation $\sim_{\mathsf{T}}$ est une congruence sur l'algèbre de Boole $\mathsf{F}_n(\mathcal{L})$, le quotient $\mathsf{F}_n(\mathcal{L})/_{\sim_{\mathsf{T}}}$ est isomorphe à l'algèbre des parties $\emptyset$-définissables de M^n. On dit qu'une théorie T ou[6] une structure $\mathfrak{M} \models \mathsf{T}$ admet l'élimination des quantificateurs si toute formule est $\sim_{\mathsf{T}}$-équivalente à une formule sans quantificateurs (tout ensemble définissable est définissable par une formule sans quantificateurs). L'élimination des quantificateurs implique que les sous-structures et sous-structures élémentaires coïncident. Les corps algébriquement clos admettent l'élimination des quantificateurs (Tarski 1951), plus connu comme théorème de Chevalley : la projection d'un constructible dans la topologie de Zariski est encore un constructible.

La prédilection pour les langages du premier ordre s'explique maintenant par le théorème de Lindström : le langage du premier ordre est le seul qui permet les théorèmes de Löwenheim-Skolem et de compacité. Une vaste partie de la théorie des modèles consiste à démontrer que certaines propriétés (sous certaines

[4]La cardinalité d'une théorie est $\mathrm{card}(\mathsf{T}) = |\mathsf{F}(\mathcal{L})| = \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\}$.

[5]Je ne précise pas le langage pour les exemples que je donne, bien qu'ils en dépendent : on les regarde dans des langages habituels, plus ou moins 'naturels', décrits dans tout manuel de la théorie des modèles

[6]De façon générale, un qualificatif d'une théorie est appliqué à ses modèles et un qualificatif d'un modèle à sa théorie s'il est élémentaire, càd. s'il passe à tous les autres modèles.

hypothèses) s'expriment en premier ordre. Ceci sont plutôt des propriétés algébriques : le fait qu'un groupe soit abélien, ou d'exposant p, est une propriété élémentaire. Par contre, puisque la définition d'une topologie est du deuxième ordre (on quantifie sur des sous-ensemble), les structures analytiques sont peu accessibles par la théorie des modèles. L'extension d'un groupe topologique est un groupe, mais en général pas topologique. De même façon, la simplicité d'un groupe ne s'exprime par la théorie élémentaire que sous des fortes hypothèses supplémentaires.

Théorie de la Classification[7]

A nouveau, deux possibilités se présentent :

- Soit on applique ces techniques à des structures 'concrètes' comme des groupes, des modules – pour donner un exemple simple, les corps algébriquement clos de caractéristique fixée forment la classe des modèles d'une théorie complète. Toute propriété élémentaire de $\mathbb{C}$ est alors vraie dans n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique 0 : ceci permet entre autres de donner une démonstration simple du Nullstellensatz de Hilbert.
- Soit on examine des structures 'abstraites' : Pour un langage quelconque $\mathcal{L}$, quel rapport existe entre les propriétés d'une structure particulière (ou de sa théorie T) et la classe $\mathrm{Mod}(T)$ de ses modèles ? Cette deuxième approche correspond à ce qu'on nomme la théorie de la stabilité ou la théorie de la classification.

L'idée directrice est de chercher une caractérisation de tous les modèles d'une théorie élémentaire T, à savoir une sorte de 'dimension généralisée', un système d'invariants qui détermine le modèle à isomorphisme près. (S'il est question du nombre de modèles, il faut comprendre 'classe d'isomorphie d'un modèle' au lieu de 'modèle' tout court.) Exemples : Dans le cas de la théorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, qui est une théorie complète dans un langage approprié, c'est la dimension usuelle qui permet de caractériser les modèles : on a une correspondance biunivoque entre les cardinaux et les modèles. Dans la théorie d'une relation d'équivalence à une infinité de classes, c'est le nombre de classes et pour chaque classe sa cardinalité, donc une suite de cardinaux. Finalemant, pour la théorie d'une suite de relations d'équivalences, l'une plus fine que la précédante, les cardinalités de toutes les classes se rangent en forme d'un arbre. C'est un arbre de cardinaux 'raisonnablement petit' qu'on permet comme système d'invariants.

Le premier pas à faire est de classifier les extensions possibles de T à une théorie complète. Prenons la théorie CAC des corps algébriquement clos : les théories complètes qui la prolongent sont les théories CAC_p des corps algébriquement clos de caractéristique p (premier ou 0). En général, c'est assez difficile à faire, si possible ; mais pour l'approche théorique on peut admettre que T soit complète. Supposons pour la suite que les théories en questions soient dénombrables (les résultats sont plus compliqués et moins complets dans le cas général). Le théorème de Löwenheim-Skolem garantit l'existence d'un modèle de T de cardinalité κ pour chaque cardinal infini κ. Par conséquent, la cardinalité fera partie des invariants, et on peut se restreindre à considérer la classe des modèles de T de cardinalité κ —▷ $\mathrm{Mod}_\kappa(T)$ ◁—.

Un peu d'arithmétique des cardinaux montre que $|\mathrm{Mod}_\kappa(T)| \leqslant 2^\kappa$. Le problème de la classification a été résolu essentiellement par Saharon Shelah[8]. Il a trouvé une dichotomie, appelée "the main gap", parmi les théories élémentaires du premier ordre : ou bien T admet le nombre maximal de modèles, $|\mathrm{Mod}_\kappa(T)| = 2^\kappa$ pour tout $\kappa > \aleph_0$, et on ne peut les classifier par un système de cardinaux ; ou bien un tel système existe et le nombre de modèles d'une cardinalité donnée est souvent considérablement plus petit que le nombre

[7] Voir [L87] pour une brève introduction compétente ; une vaste partie de la théorie est traîtée dans [L86].
[8] Shelah, "Classification Theory", North Holland, 1978, 2^{e} 1990

maximal. (La démonstration comporte plusieurs centaines de pages d'une grande complexité).

Stabilité et rang de Morley

Shelah a défini plusieurs notions importantes d'un 'bon comportement' d'une théorie. L'idée principal est de pouvoir contrôler la complexité d'une structure par les espaces $S_n(A)$: grossièrement dit, peu de types correspondent à des structures plutôt simples et homogènes.

Une théorie est dite κ-STABLE si dans tout modèle il y a au plus κ n-types sur tout ensemble de κ paramètres. T est stable si elle est STABLE en un cardinal ; T est SUPERSTABLE si stable en tout $\kappa \geqslant 2^{\aleph_0}$. Alors il n'y a que quatre possibilités pour le SPECTRE DE STABILITÉ (= la classe des cardinaux en lesquels T est stable) :

caractère de stabilité	spectre de stabilité
T est instable	$\emptyset$
T est stable, non superstable	$\{\kappa \mid \kappa^{\aleph_0} = \kappa\}$
T est superstable, non $\aleph_0$-stable	$\{\kappa \mid \kappa \geqslant 2^{\aleph_0}\}$
T est $\aleph_0$-stable	$\{\kappa \mid \kappa \text{ infini}\}$

Il y a plusieurs façon de définir la stabilité d'une théorie[9], qui est donc une notion 'naturelle'. P.ex. une théorie est stable s'il n'y a pas d'ordre infini définissable dans la théorie : les ordres sont l'exemple standard de théories non-classifiables. Toutes les structures ordonnées ou définissablement ordonnables (p.ex. les corps formellement réels) sont instables ; tout théorie de modules est stable ; la théorie de $(\mathbb{Z}, +)$ est superstable. Une illustration de l'importance de la stabilité est le théorème suivant : pour tout cardinal non-dénombrable κ, T admet un modèle κ-saturé ssi T est κ-stable.

Le procédé de trouver une 'dimension' dans une théorie quelconque se règle beaucoup sur les espaces vectoriels (ou au corps algébriquement clos) où on définit une base comme un ensemble maximal d'éléments indépendants ; deux bases ont la même cardinalité, la dimension ; et une base engendre l'espace. Dans le cas général, c'est plus compliqué : stabilité permet de définir une notion d'indépendance, dans une théorie superstable on arrive à trouver une sorte de base et une dimension. La définition d'un modèle engendré par un ensemble A d'éléments pose des difficultés : il se peut qu'on a une chaîne descendante infinie de modèles $\mathfrak{M}_0 \succ \mathfrak{M}_1 \succ \cdots \succ \mathfrak{M}_n \succ \cdots$, tous contenant A, de façon que le MODÈLE MINIMAL sur A, l'intersection de tous les modèles contenant A, n'existe pas. Il convient de considérer le MODÈLE PREMIER sur A, qui est une sorte de modèle minimal à injection élémentaire près : $\mathfrak{M}$ est premier sur A, s'il contient A et s'il s'injecte élémentairement dans tout autre modèle contenant A. Dans les théories $\aleph_0$-stables, les modèles premiers existent sur tout ensemble A. Le "main gap" est situé entre les théories superstables et $\aleph_0$-stables, à condition que certaines autres conditions sont satisfaites.

Dans une théorie superstable, on peut trouver des fonctions de rang raisonnables sur les espaces de types, parmi lesquels, dans le cas d'une théorie $\aleph_0$-stables, se trouve le RANG DE MORLEY (RM). Ce rang se déduit du rang de Cantor-Bendixson sur les espaces $S_n(A)$. Ce dernier n'étant pas conservé par extensions élémentaires, on corrige le défaut en prenant une sorte de limite inductive. On peut passer du rang de Morley des types au rang de Morley pour les parties définissables d'un modèle : Le rang d'une formule φ (de l'ensemble qu'elle définit) est le maximum des rangs des types auxquels elle appartient ; dans l'autre sens, le rang d'un type t est le minimum des rang des formules appartenant à t $\multimap$ $\mathrm{RM}(\varphi) = \max_{\varphi \in t}\{\mathrm{RM}(t)\}$ et $\mathrm{RM}(t) = \min_{\varphi \in t}\{\mathrm{RM}(\varphi)\}$ $\triangleleft\!-$. Dans un modèle $\aleph_0$-saturé on peut calculer le rang de Morley de la façon

[9] D'où le nom, peu parlant, de 'théorie de la stabilité'.

suivante :

- $\mathrm{RM}(\emptyset) = -\infty$ (par définition)
- Si D ($\neq \emptyset$) est définissable, alors $\mathrm{RM}(D) \geqslant 0$
- $\mathrm{RM}(D) \geqslant n+1$ ssi D contient une réunion disjointe infinie d'ensemble de $\mathrm{RM} \geqslant n$

De plus, tout ensemble définissable de rang de Morley n se divise en une réunion disjointe finie maximale de d parties de même rang n, d est appelé le DEGRÉ DE MORLEY. Le rang de Morley donne une sorte de dimension pour les parties définissables d'une structure $\aleph_0$-stable qui ressemble beaucoup à la dimension en géométrie algébrique et qui coïncide dans le cas des espaces vectoriels avec la dimension du sous-espace engendré, ou dans le cas des corps algébriquement clos avec le degré de transcendance du sous-corps engendré. L'$\aleph_0$-stabilité est une condition assez forte : un corps $\aleph_0$-stable est algébriquement clos (théorème de Macintyre) ; Cherlin a conjecturé que les groupes $\aleph_0$-stables de RM fini sont essentiellement les groupes algébriques sur un corps algébriquement clos.

Théories catégoriques

Dans les cas 'simples', on cherche à trouver une classification plus explicite et structurelle : Si $|\mathrm{Mod}_\kappa(T)| = 1$, on dit que la théorie est κ-CATÉGORIQUE. Une théorie est TOTALEMENT CATÉGORIQUE si elle est catégorique en tout cardinal infini. C'est, par exemple, la théorie de $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^{\aleph_0}$. On sait caractériser les théories $\aleph_0$-catégoriques :

T ou $\mathfrak{M} \models T$ est $\aleph_0$-catégorique

$\iff$ pour tout n, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ n'a qu'un nombre fini d'orbites sur M^n

$\iff$ pour tout n, $F_n(\mathcal{L})$ est fini

$\iff$ pour tout n, $S_n(\emptyset)$ est fini.

Les ordres denses sans extrémités ou les algèbres de Boole sans atomes sont des examples de théories $\aleph_0$-catégoriques.

L'$\aleph_1$-catégoricité est une forte restriction : une structure $\aleph_1$-catégorique est $\aleph_0$-stable et de rang de Morley fini. Le célèbre théorème de Morley (1965), qui est au début de la théorie de la classification, affirme qu'une théorie qui est κ-catégorique pour un cardinal non-dénombrable κ, est catégorique en tout cardinal non-dénombrable. Baldwin et Lachlan ont démontré que si la théorie n'est pas totalement catégorique, alors il y a $\aleph_0$ modèles dénombrables $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_1 \prec \cdots \prec \mathfrak{M}_n \prec \cdots$: à tout modèle $\mathfrak{M}$ de T on peut associer un cardinal κ (sa dimension) t.q. deux modèles de même dimension sont isomorphes, un modèle se plonge dans tout modèle de dimension plus grande et $|M| = \max\{\dim(\mathfrak{M}), \aleph_0\}$. La démonstration utilise le fait qu'un modèle d'une théorie $\aleph_1$-catégorique est minimal sur un ensemble définissable de rang et degré de Morley 1 (ce qu'on appelle aussi un ensemble FORTEMENT MINIMAL) et que beaucoup de propriétés du modèle sont déterminées par celles des parties fortement minimales. On voit qu'une structure est fortement minimale ssi elle ne peut pas être divisée, même dans une extension élémentaire, en deux parties définissables infinies.

Encore quelques remarques sur les théories catégoriques[10] : Le début de l'étude 'fine' des théories catégoriques était la conjecture qu'une théorie totalement catégorique est finiment axiomatisable modulo les axiomes qui disent que la structure est infinie – démontré par Hrushovski (1989) après des résultats précédents de Zil'ber : une théorie totalement catégorique a la propriété du sous-modèle fini, i.e. toute

[10] Les résultats ici et dans la section suivante sont tirés de [CHL], [H89a], [H89b], [Z83]

propriété élémentaire d'un modèle est vraie dans une sous-structure finie, en particulier la théorie n'est pas finiment axiomatisable ; et Cherlin, Harrington, Lachlan, qui ont étendu le résultat de Zil'ber aux théories $\aleph_0$-catégoriques $\aleph_0$-stables. Par contre, il existe une théorie $\aleph_1$-catégorique et finiment axiomatisable.

Un groupe $\aleph_0$-catégorique stable est nilpotent par fini, un groupe $\aleph_0$-catégorique $\aleph_0$-stable, donc en particulier un groupe totalement catégorique, est abélien par fini (Baur, Cherlin, Macintyre). Un groupe simple de rang de Morley fini est $\aleph_1$-catégorique : les groupes algébriques sur des corps algébriquement clos sont les seuls exemples connus.

Théorie géométrique de classification

Les deux exemples standard de théories fortement minimales sont typiques : les corps algébriquement clos et les espaces vectoriels. Van der Waerden avait déjà remarqué la ressemblance entre dépendance linéaire et algébrique et il a abstrait la notion d'une prégéométrie : c'est un ensemble E muni d'une fonction de clôture $\mathrm{cl} : \mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}(E)$ vérifiant :

(clôture)	$X \subseteq \mathrm{cl}(X) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X))$
(monotonie)	$X \subseteq Y \Rightarrow \mathrm{cl}(X) \subseteq \mathrm{cl}(Y)$
(finitude)	si $a \in \mathrm{cl}(X)$, alors il existe F fini $\subseteq X$ t.q. $a \in \mathrm{cl}(F)$
(lemme de l'échange)	si $b \notin \mathrm{cl}(X)$ et $b \in \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$, alors $a \in \mathrm{cl}(X \cup \{b\})$

Dans une prégéométrie, on peut définir l'indépendance, base et dimension de la même façon que dans les espaces vectoriels. Les ensembles fortement minimaux sont naturellement munis d'une structure de prégéométrie : Dans un modèle quelconque, la CLÔTURE ALGÉBRIQUE de $A \subseteq M$ —▷ $\mathrm{acl}(A)$ ◁— est définie comme étant la réunion des réalisations des types algébriques sur A [11] ; un type est algébrique, s'il n'a (dans toute extension élémentaire de $\mathfrak{M}$) qu'un nombre fini de réalisations. (Typiquement, les racines d'un polynôme à coefficients dans A). Alors si $\mathfrak{M}$ est fortement minimal, (M, acl) est une prégéométrie.

On distingue quatre types de prégéométries :

	définition	exemples
TRIVIAL :	$\mathrm{cl}(X \cup Y) = \mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{cl}(Y)$ (pour tout $X, Y \subseteq E$)	E qq, $\mathrm{cl}(\{x\}) = \{x\}$
MODULAIRE :	$\dim(X \cup Y) + \dim(X \cap Y) = \dim(X) + \dim(Y)$ (pour tout X, Y clos $\subseteq E$)	espaces vectoriels, prégéométries triviales
LOCALEMENT MODULAIRE :	$\dim(X \cup Y) + \dim(X \cap Y) = \dim(X) + \dim(Y)$ (pour tout X, Y clos $\subseteq E$ t.q. $X \cap Y \neq \emptyset$)	espaces affines, prégéométries modulaires
NON LOCALEMENT MODULAIRE :	autres	corps algébriquement clos

Une prégéométrie est une géométrie si les points sont clos ; à toute prégéométrie est associée une géométrie en quotientant par la relation $x \sim y \iff \mathrm{cl}(\{x\}) = \mathrm{cl}(\{y\})$. Trois questions se posent :

- Quels types de prégéométries peuvent apparaître dans les structures $\aleph_1$-catégorique (plus généralement : dans des structures de $\aleph_0$-stables) ?
- Quel est le lien entre différentes prégéométries dans la même structure ?
- A quel point est-ce qu'elles déterminent la structure ?

[11] Dans un modèle $\mathfrak{M}$ assez saturé, c'est la réunion des orbites finies des automorphismes de $\mathfrak{M}$ qui fixent A.

Dans le cas d'une théorie totalement catégorique, l'image est assez complète : On trouve des parties fortement minimales définissables sans paramètres ; elles sont deux à deux définissablement isomorphes. Leurs prégéométries sont donc toutes du même type, de plus localement finies (la clôture d'une partie finie est finie) et homogènes (le groupe d'automorphismes de la prégéométrie est transitif au-dessus de toute partie close). En fait, elles sont toujours localement modulaires (Zil'ber, Cherlin, Mills). Si les prégéométries sont triviales, alors les géométries associées sont définissables avec paramètres dans un ensemble sans structure ("théorie de l'égalité"). Dans le cas de prégéométries modulaires non-triviales (localement modulaires non-modulaires), les géométries sont des espaces projectifs (affines) de dimension infinie sur un corps fini. Par contre, on ne contrôle pas très bien les différentes façons comment les modèles sont construits autour de leurs parties fortement minimales ("Problème des couvertures").

Dans le cas d'un modèle $\aleph_1$-catégorique, c'est plus difficile. On regarde une formule fortement minimale comme prégéométrie dans le modèle dénombrable saturé. Zil'ber a prouvé une trichotomie :

- Soit tous les sous-ensembles fortement minimaux représentent des prégéométries triviales : alors le modèle est la clôture algébrique de toute partie fortement minimale (le modèle est quasi-fortement minimal) et aucun groupe infini n'est interprétable[12] dans la structure.
- Soit toutes les prégéométries provenant des sous-ensembles fortement minimaux sont localement modulaires, non-triviales : les géométries associées sont toujours des espaces affines ou projectifs, mais sur un corps pas forcément commutatif. Eventuellement il y a des groupes infinis interprétables qui agissent au-dessus de ces géométries, ces groupes sont abéliens par fini. Exemples typiques sont les modules $\aleph_1$-catégoriques.
- Soit aucune des prégéométries est localement modulaire. C'est le cas des corps algébriquement clos. Zil'ber conjecturait que dans ce cas les prégéométries interprètent un corps algébriquement clos et qu'elles sont interprétables dans ce corps.

Hrushovski a construit un contre-exemple à la conjecture de Zil'ber ; cet exemple a été perfectionné en un plan projectif de rang de Morley 2 qui n'est pas desarguésien. Dans la suite, Zil'ber et Hrushovski cherchaient des conditions pour qu'une prégéométrie non localement modulaire soit bi-interprétable avec un corps algébriquement clos. En 1989/90 ils ont trouvés ce qu'ils appellent des 'géométries de Zariski' ([HZ]) ou des 'structures de type zariskien' ([Z]).

Les géométries de Zariski

Une géométrie de Zariski $\mathfrak{X}$ est un ensemble X et une topologie noetherienne τ_n sur X^n pour tout n t.q. :

(1) 'Séparée' : τ_n contient les diagonales '$x_i = x_j$'.

(2) Compatibilité : Les topologies sont compatibles, i.e. toute application $f = (f_1, \dots, f_n) : X^k \to X^n$ où les f_i sont soit des constantes, soit des projections sur une coordonnée, est τ_k-τ_n-continue.

(3) Élimination des quantificateurs : Pour tout fermé irréductible $F \subseteq X^k$ et toute projection $\pi : X^k \to X^n$, il existe un fermé propre F' de $\overline{\pi[F]}$ t.q. $\overline{\pi[F]} \setminus F' \subseteq \pi[F]$.

(4) Fortement minimale : X est (τ_1)-irréductible et de dimension 1. Pour tout k, tout fermé irréductible $F \subseteq X^k$ et toute projection $\pi : X^k \to X^{k-1}$, il existe un entier m t.q. pour tout $\bar{a} \in X^{k-1}$, soit $\pi^{-1}(\bar{a}) \cap F = \{\bar{a}\} \times X$, soit $|\pi^{-1}(\bar{a}) \cap F| \leqslant m$.

[12] 'Interprétable' veut dire définissable modulo des relations d'équivalences définissables. Les structures interprétables dans un modèle sont, pour ainsi dire, virtuellement présentes.

(5) Lisse : Toutes les composantes irréductibles de l'intersection d'un fermé irréductible $F \subseteq X^k$ avec une diagonale $\Delta_{ij} := \{\bar{x} \in X^k \mid x_i = x_j\}$ sont de dimension au moins $\dim F - 1$.

Ici, 'dimension' désigne la dimension topologique qui est définie comme étant la longueur maximale d'une chaîne d'irréductibles. Cette notion, comme celle des composantes irréductibles, est bien définie dans les espaces topologiques noetheriens. Une propriété des éléments d'un fermé irréductible F est génériquement vraie si l'ensemble des éléments, dites génériques, pour lesquels elle est vraie contient un ouvert non-vide de F.

Une géométrie de Zariski sera regardée dans le langage de tous les fermés (irréductibles). Alors $\mathfrak{X}$ admet l'élimination des quantificateurs, $\mathfrak{X}$ est une structure fortement minimale, et toute extension élémentaire de $\mathfrak{X}$ est encore une géométrie de Zariski, munie des topologies formées par les ouverts définissables à paramètres (voir plus tard).

On peut faire une distinction parmi les géométries de Zariski selon la richesse des topologies : une courbe est un fermé irréductible de dimension 1. Une famille définissable de courbes (planes) est un fermé irréductible $F \subseteq X^{n+2}$ t.q. pour $\bar{a} \in X^n$ générique, $F(\bar{a}) := \{\bar{x} \in X^2 \mid (\bar{a}, \bar{x}) \in F\}$ est une courbe (On peut penser à un polynôme où on fait varier un ou plusieurs coefficients). Il y a toujours les familles triviales où $F(a) = \{a\} \times X$ ou $X \times \{a\}$. Une géométrie de Zariski est DÉGÉNÉRÉE, s'il n'existe que des familles constantes de courbes outre les familles triviales. Elle est AMPLE s'il existe une famille définissable de courbes F t.q. pour deux points génériques dans X^2, il y a une courbe dans la famille qui passe par les deux points. Elle est dite TRÈS AMPLE, si en plus cette famille sépare les points du plan : pour tous deux points du plan, il y a une courbe dans la famille qui passe par un seul des deux points.

Tout type de prégéométrie peut provenir d'une géométrie de Zariski. Il y a la géométrie de Zariski triviale où tous les fermés sont définis par des formules '$x_i = \text{const}$' pour certaines coordonnées i : elle donne une prégéométrie triviale. L'espace affine sur un corps (les fermés sont donnés par des équations linéaires) est une géométrie de Zariski localement modulaire ; les courbes algébriques sont non localement modulaires. En fait, une géométrie de Zariski est non localement modulaire ssi elle est très ample (voir [H89a]).

Revenons aux résultats de Hrushovski-Zil'ber [HZ]. Un $\mathcal{Z}$-isomorphisme entre deux géométries de Zariski $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ est une application $f : X \to Y$ qui induit un homéomorphisme $f_n : X^n \to Y^n$ pour tout n.

Théorème A : Si $\mathfrak{X}$ est une géométrie de Zariski très ample, alors il existe un corps algébriquement clos K et une courbe algébrique lisse C sur K, interprétables dans $\mathfrak{X}$, t.q. X et C soient $\mathcal{Z}$-isomorphes ; C, munie des topologies de Zariski, vue comme géométrie de Zariski. Donc la structure de variété algébrique et de géométrie de Zariski coïncident.

K et C sont unique : Soient C_1, C_2 deux courbes lisses sur des corps algébriquement clos K_1, K_2 resp., $\mathcal{Z}$-isomorphes (en tant que géométries de Zariski) par h, alors h est un isomorphisme de variétés algébriques provenant d'un isomorphisme de corps entre K_1 et K_2.

Théorème B : Si $\mathfrak{X}$ est une géométrie de Zariski ample, mais pas très ample, alors il existe un corps algébriquement clos K et une surjection à fibres finies $f : X \to \mathbb{P}^1(K)$, 0-définissables, t.q. f envoie les constructibles de $\mathfrak{X}$ sur des Zariski-constructibles de $\mathbb{P}^1(K)$.

$\mathfrak{X}$ n'induit pas de structure supplémentaire sur $\mathbb{P}^1(K)$, mais K et f ne suffisent pas pour déterminer $\mathfrak{X}$: les fibres peuvent porter des structures différentes.

Théorème C : Il existe une géométrie de Zariski ample qui ne peut pas être interprétée dans un corps algébriquement clos : la classe des géométries de Zariski amples est plus grande que celles des courbes algébriques lisses.

La démonstration est très technique. L'idée principale est de prendre une famille définissable de courbes planes passant par un point P. Si les courbes sont localement des graphes de fonctions, on peut les composer. Dans le cas où la géométrie de Zariski est un corps K et la famille est assez riche, on retrouve le groupe multilicatif en quotientant par la relation d'être tangent en P. On peut 'composer' des courbes de degré supérieur à 1 comme 'multi-fonctions'. Hrushovski et Zil'ber sont arrivés à trouver une relation définissable entre les courbes qui est la généralisation appropriée de 'être tangent'. Puis une méthode de Hrushovski permet de retrouver un groupe ou un corps par ces données génériques.

Perspectives

Vu les théorèmes de Hrushovski-Zil'ber, les géométries de Zariski sont des structures assez interéssantes qui méritent plus d'attention. Plusieurs questions et possibilités d'une future recherche se posent :

- Qu'est-ce qu'on peut dire des géométries de Zariski en affaiblissant les axiomes ? Géométries de Zariski non-amples, non-lisses ? (L'interêt est d'inclure les courbes algébriques non-lisses.) Combien de géométrie algébrique peut-on faire dans ce contexte plus large ?
- On peut définir des géométries de Zariski de dimension supérieure à 1 comme des structures de rang de Morley fini t.q. les parties définissables sont exactement les constructibles d'une collection de topologies. D'après [HZ], dans une geométrie de Zariski très ample de dimension au moins 2, on trouve un ouvert qui est $\mathcal{Z}$-isomorphe à une variété algébrique. Mais la situation se complique considérablement, puisque plusieurs types de 'sous-géométries' – triviales, amples, très amples – peuvent coexister dans la même géométrie de Zariski de dimension supérieure.
- On peut essayer d'appliquer des techniques de la théorie des modèles aux variétés algébriques via les géométries de Zariski, pour arriver à des résultats en géométrie algébrique. Un premier pas est [H93] qui donne une démonstration modèle-théorique de la conjecture de Mordell-Lang pour les corps de fonctions.

Mon approche est pour l'instant un examen plutôt systématique des géométries de Zariski en partant d'un minimum d'axiomes. Le 'noyau' des géométries de Zariski est une collection de topologies noetheriennes, compatibles, contenant les diagonales – axiomes (1) et (2).Pour que les structures soient 'raisonnables' d'un point de vue modèle-théorique, on veut l'élimination des quantificateurs et qu'elles passent aux extensions élémentaires.

L'axiome (3) sur les images des fermés sous projections est nécessaire pour l'élimination des quantificateurs ; par contre, il n'est pas suffisant en général. Il faudrait montrer que pour tout constructible $Q \subseteq X^n$ et toute projection $\pi : X^n \to X^{n-1}$, $\pi(Q)$ est encore constructible. La démonstration marche par récurrence sur n et $\dim Q$, l'obstacle est le cas où $Q = C \setminus F$; C, F des fermés irréductibles génériquement finis sur $\overline{\pi[C]} = \overline{\pi[F]}$. Il faut des hypothèses supplémentaires qui empêchent cette anomalie : $\dim X^n = n$ suffit p.ex.

La forte minimalité, (4), est nécessaire pour qu'une extension élémentaire soit encore une collection de topologies noetheriennes. Si $\mathfrak{X} \preccurlyeq \mathfrak{Y}$, il y a des nouveaux paramètres qui interviennent et des nouvelles applications de compatibilité : la topologie qu'il faut considérer sur Y^n est donc $\tau'_n = \{U(\bar{x}; \bar{a}) \mid U \in \tau_{n+k}, \bar{a} \in Y^k\}$. Si $\mathfrak{X}$ n'est pas fortement minimale, disons $F(x, \bar{a}_m)$ a plus que m réalisations pour tout m, alors on peut réaliser le type $\{\bar{a} \mid F(x, \bar{a}) \neq X, F(x, \bar{a}) \text{ est infini}\}$ dans une extension élémentaire, ce qui contredit l'irréductibilité souhaitée pour Y. En fait, on peut même réaliser une chaîne infinie descendante de fermés, empêchant la noetherianité.

Si la collection de topologies noetheriennes est fortement minimale, on a l'équivalence entre plusieurs hypothèses supplémentaires qui permettent de prouver l'élimination des quantificateurs, à savoir :

- $\dim X^n = n$
- la dimension d'un constructible est la dimension de son adhérence
- toute chaîne maximale de fermés irréductibles a la même longueur
- tout fermé F contient une infinité de fermés de dimension $\dim F - 1$
- la dimension est additive : pour tout fermé irréductible F, toute projection π :
  $\dim F = \dim \pi[F] + \dim_{\substack{a \in \pi[F] \\ \text{générique}}} (\pi^{-1}(a) \cap F)$

J'appelle donc géométrie de Zariski une collection de topologies qui vérifie (1) à (4) et ces conditions équivalentes. Alors ces géométries de Zariski admettent l'élimination des quantificateurs et passent aux extensions élémentaires, le rang de Morley coïncide avec la dimension. Cette notion de géométrie de Zariski est plus faible que celle de [HZ] ; en fait tout constructible irréductible de dimension 1 dans une géométrie de Zariski faible en est encore une, ce qui n'est pas vrai pour les géométries de Zariski fortes.

Les questions qui m'intéressent en particulier sont les suivantes :
– trouver une classifications des géométries de Zariski (faibles) dégénérées
– résoudre la conjecture de Cherlin pour les géométries de Zariski faibles de dimension supérieure (est-ce qu'un groupe qui a une structure de géométrie de Zariski est un groupe algébrique ?).

Références

[Ba] Baldwin : *"Fundamentals of Stability Theorie"*, Springer, Berlin, 1988.

[CHL] Cherlin, Harrington, Lachlan : *"$\aleph_0$-categorical, $\aleph_0$-stable Structures"*, Annals of Pure and Applied Logic, 28, 1985.

[CK] Chang, Keisler : *"Model Theory"*, North Holland, Amsterdam 1973, 3ᵉ 1990.

[H89a] Hrushovski : *"Unidimensional Theories : An Introduction to Geometric Stability Theory"*, dans : Logic Colloquium '87, North Holland, Amsterdam 1989.

[H89b] Hrushovski : *"Totally Categorical Theories"*, Transactions of the AMS, 313, 1989.

[H93] Hrushovski : *"The Mordell-Lang Conjecture for Function Fields"*, preprint, 1993.

[HZ] Hrushovski, Zil'ber : *"Zariski Geometries"*, preprint, août 1993.

[L86] Lascar : *"Stabilité en Théorie des Modèles"*, Cabay, Louvain-la-Neuve 1986.

[L87] Lascar : *"Théorie de la Classification"*, séminaire Bourbaki, exposé 682, 1987.

[P] Poizat : *"Cours de Théorie des Modèles"*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne 1985.

[Z83] Zil'ber : *"The Structure of Models of Uncountably Categorical Theories"*, ICM-Proceedings, Varsovie 1983.

[Z92] Zil'ber : *"Talks on Zariski-type Structures"*, preprint, juillet 1992.