Satz: A_n ist einfach für $n \geqslant 5$

Beweis: Sei N ein nicht-trivialer Normalteiler der A_n. A_n wird als auf den n Elementen $\{1, \ldots, n\}$ operierende Permutationsgruppe angesehen. Die Elemente mit Fixpunkt i bilden dann eine zu A_{n-1} isomorphe Untergruppen U_i.

(1) Die U_i sind in A_n konjugiert, denn ein 3-Zykel, der j auf i abbildet, konjugiert U_i zu U_j.

(2) Spezialfall $n = 5$:

$|N|$ ist ein Teiler von $|A_5| = 60$. A_n enthält 20 Elemente der Ordnung 3 (3-Zykel), 24 Elemente der Ordnung 5 (5-Zykel) und 15 Elemente der Ordnung 2 (Doppeltranspositionen), sowie die Identität. Für jedes $p \in \{2, 3, 5\}$ enthält N entweder alle p-Sylow-Gruppen oder keine. Falls N also einen 3-Zykel (oder 5-Zykel) enthält, hat N mindestens 21 (bzw. 25) Elemente, also $|N| = 30$ und N enthält sowohl alle Elemente der Ordnung 3 als auch der Ordnung 5, d. h. $|N| \geqslant 1 + 20 + 24$: Widerspruch. Also ist $|N|$ ein Teiler von 4. Im Fall $|N| = 4$ wäre N eine 2-Sylow-Gruppe und müsste dann alle 2-Sylow-Gruppen enthalten: Widerspruch. Also $|N| = 2$: Dann liegt das nicht-triviale Element von N aber in einem U_i und ist zu anderen Elementen in $U_1, \ldots, U_5$ konjugiert: Widerspruch.

(3) Induktion von $n - 1$ nach n:

$N \cap U_i$ ist Normalteiler von $U_i \cong A_{n-1}$, das nach Induktion einfach ist.

(a) Falls $N \cap U_j = U_j$ für ein j, so enthält N nach (1) alle U_i. Es ist aber $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = A_n$ (da alle 3-Zykel enthalten sind, oder auch aus Kardinalitätsgründen): Widerspruch.

(b) Also ist $N \cap U_i = \{\mathrm{id}\}$ für alle i. Dann ist $|N| \leqslant n$ und besteht, abgesehen vom neutralen Element, nur aus fixpunktfreien Permutationen. Seien a, b, c, d, e, f sechs Elemente aus $\{1, \ldots, n\}$, σ ein nicht-triviales Elemnt aus N, das a auf b und c auf d abbildet und τ der 3-Zykel (cef). Dann gilt für $\varrho := \sigma^{-1} \circ \tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau \in N$, dass $\varrho(a) = a$ und $\varrho(f) = c$, d. h. $\mathrm{id} \neq \varrho \in N \cap U_a$: Widerspruch.