

Vorlesungsskript „Formale Logik“

Universität Freiburg
WS 2005/06 bis WS 2011/12

Markus Junker

Version vom 10. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Logikkalküle, Logiksysteme, „Logiken“	10
2	Aussagenlogik	17
2.1	Die aussagenlogische Sprache	18
2.1.1	Eindeutige Lesbarkeit	19
2.1.2	Andere Schreibweisen	21
2.2	Wahrheitswerte	22
2.2.1	Belegungen und Auswertungen von aussagenlogischen Formeln:	22
2.2.2	Modelle und Interpretationen:	23
2.3	Aussagen über Sätze und Metasprache	24
2.3.1	Zusammenhänge	25
2.3.2	Einige logische Gesetze	26
2.3.3	Fehlerquellen	29
2.4	Junktorensysteme	30
2.4.1	Disjunktive und konjunktive Normalform	30
2.4.2	Junktoren	32
2.4.3	Vollständige Junktorensysteme	35
2.5	Alternative Zugänge	36
2.5.1	Methoden zum Testen von Erfüllbarkeit	36
2.5.2	Einige traditionelle Schlußregeln	39
2.5.3	Beweiskalküle	40
2.6	Übersetzungen	42
3	Modallogik (aussagenlogisch)	47
3.1	Die modallogische Sprache	47
3.2	Modelle	48
3.3	Normale Systeme	50
3.3.1	Axiome	51
3.3.2	Beschränkungen der Zugangsrelation:	52
3.4	Modallogische Modellierungen	53
3.5	Verschiedene Anmerkungen	54
3.5.1	Entscheidbarkeit	54

3.5.2	Modalitäten	55
3.5.3	Beweiskalküle	55
3.5.4	Zur Geschichte der Modallogik	56
4	Prädikatenlogik	57
4.1	Die prädikatenlogische Sprache	57
4.2	Modelle prädikatenlogischer Sprachen	60
4.3	Auswertungen der Formeln in Modellen	61
4.4	Aussagen über Sätze	63
4.5	Eine Liste logischer Gesetze	64
4.6	Kalküle der Prädikatenlogik und Vollständigkeitssatz	66
4.7	Die Unvollständigkeitssätze der Prädikatenlogik	72

Kapitel 1

Einleitung

(Die Ausführungen in diesem und dem folgenden Abschnitt sind von allgemeinem Interesse, für das Verständnis der nachfolgenden Abschnitte aber nicht notwendig.)

Was ist „Logik“?

Es herrscht ebenso großer Meinungsstreit in betreff der Definition der Logik, wie in der Behandlung dieser Wissenschaft selbst.

There is as great diversity among authors in the modes which they have adopted of defining logic, as in their treatment of the details of it.

John Stuart Mill (1806–1873), *A system of logic* (1843), deutsch zitiert nach Husserl.

In diesem Sinne will ich mich nicht an einer Definition der Logik versuchen, sondern als Annäherung daran einige Zitate anführen:

(1) *Logik: Im weitesten Sinne die Lehre vom schlüssigen und folgerichtigen Denken und Argumentieren, insbesondere vom richtigen Schließen („Lehre vom Schluß“), das dadurch gekennzeichnet ist, daß es zu wahren Prämissen immer eine wahre Konklusion liefert. Gegenstand der Logik sind demnach Aussagen und deren Beziehungen zueinander, soweit diese für Wahrheit und Falschheit relevant sind.* (Brockhaus Enzyklopädie)

(2) *Logic is the systematic study of the structure of propositions and of the general conditions of valid inference by a method which abstracts from the content or matter of the propositions and deals only with their logical form.*

(Encyclopaedia Britannica 1967)

(3) *Diese Wissenschaft von den notwendigen Gesetzen des Verstandes und der Vernunft überhaupt, oder – welches einerlei ist – von der bloßen Form des Denkens überhaupt, nennen wir nun Logik.*

(Immanuel Kant, *Einleitung zur Logik*)

(4) *... die Grenze der Logik ist aber dadurch ganz genau bestimmt, daß sie eine Wissenschaft ist, welche nichts als die formalen Regeln alles Denkens (es mag a priori oder empirisch sein, einen Ursprung oder Objekt haben, welches es wolle, in unserem Gemüte zufällige oder natürliche Hindernisse antreffen) ausführlich darlegt und strenge beweiset.*

(Immanuel Kant, *Vorrede zur zweiten Auflage der Kritik der reinen Vernunft*.)

(5) *Die übliche Auffassung heute ist, daß es in der Logik um „die Prinzipien des gültigen Schließens“ geht.*

(Ernst Tugendhat, Ursula Wolf *Logisch-semantische Propädeutik*, Stuttgart: Reclam 1983.)

(6) *Im engeren Sinne verstehen wir unter Logik die „Lehre von der Folgerichtigkeit“.*
(Bochenski, Menne *Grundriß der Logistik*, Paderborn: Schöningh 1965.)

In diesen Zitaten drückt sich eine weitgehende Einigkeit aus, wobei sich allerdings zwischen „Folgerichtigkeit“ und „notwendigen Gesetzen des Verstandes“ eine Kluft im Absolutheitsanspruch öffnet.

Zur Veranschaulichung dieser Annäherung an eine Definition der Logik einige Beispiele. Ein vielzitiertes Beispiel einer gültigen Schlußweise ist folgende Variante¹ des klassischen Syllogismus „Barbara“.

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
Also ist Sokrates sterblich.

Nun hängt die Gültigkeit dieses Schlusses nicht von der inhaltlichen Bestimmung der Wörter „Mensch“, „sterblich“ und „Sokrates“ ab; ebenso gilt der Schluß im Beispiel von Ebbinghaus:

Alle Hydropteriden sind monopodial.
Azolla ist eine Hydropteride.
Also ist Azolla monopodial.

ohne daß man dazu wissen muß, was „Hydropteride“, „monopodial“ und „Azolla“ nun bedeutet. Es kommt also nur auf die Form dieser Aussagensätze an, damit der Schluß gültig ist. Halbformal kann man dafür auch

Alle A sind B .
 c ist ein A .
Also ist c ein B .

schreiben, wobei die Großbuchstaben für allgemeine Ausdrücke und die Minuskel für eine „Individuenbezeichnung“ steht. Gewissermaßen ist dies nichts Neues, denn wenn man nicht weiß, was „Hydropteride“, „monopodial“ und „Azolla“ nun bedeutet, kann man ebensogut „Hydropteride“ statt A schreiben, oder eben umgekehrt. Die obigen Syllogismen sind dann Beispiele für diese allgemeine Schlußform.

Man sieht hier schon bestimmte Schwierigkeiten: Zum einen muß man von grammatikalischen Phänomenen wie Beugung abstrahieren. Dem werden wir durch eine vollständige Formalisierung entgehen; später werden wir diesen Schluß folgendermaßen schreiben können:

$$\frac{\forall x(Ax \rightarrow Bx) \\ Ac}{Bc}$$

Eine andere Art der Schwierigkeit ist, daß *Azolla* die Bezeichnung einer Art, also eine Gattungsbezeichnung, ist, oben aber die Rolle einer individuellen Art im Verhältnis zur übergeordneten Familie spielt. Auch dieser Schwierigkeit werden wir durch die Konzepte von Modellen bzw. Interpretationen in den Griff bekommen.

Schließlich noch zwei weitere Beispiele für diese Schlußform:

Elefanten haben zwei Beine.
Sokrates ist ein Elefant.
Also hat Sokrates zwei Beine.

¹Bei Aristoteles waren keine Bezeichnungen für Individuen zugelassen, sondern nur Gattungsbezeichnungen; die Ausweitung der aristotelischen Schlußformen hierauf bildete ein großes Problem der scholastischen Logik.

Vögel können fliegen.
 Ein Pinguin ist ein Vogel.
 Also kann ein Pinguin fliegen.

Das erste Beispiel soll zeigen, daß die Gültigkeit des Schlusses nicht an der Gültigkeit der Einzelaussagen hängt. Im naheliegenden Verständnis wird aus zwei falschen Aussagen durch einen gültigen Schluß eine richtige Aussage gezogen. Allerdings könnte „Sokrates“ auch der Name eines bestimmten Elefanten sein. Dann würde der gültige Schluß aus einer falschen und einer richtigen Aussage eine falsche Aussage ziehen.

In beiden Beispielen sieht man die grammatikalischen Freiheiten, die hinter einer Schlußform stehen können. „Elefanten haben zwei Beine“ kann als „alle Elefanten sind Zweibeiner“, „Vögel können fliegen“ als „alle Vögel sind Flugwesen“ in der Form „alle A sind B “ aufgefaßt werden. (Zudem habe ich mit etwas Mühe im zweiten Satz die obige Form gewahrt: Eigentlich wäre „alle Pinguine sind Vögel“ naheliegender und man hätte einen klassisch-*aristotelischen* Syllogismus; hier tritt wieder das Problem der Individualisierung von oben auf.)

Da der Schluß stets gültig, im zweiten Beispiel die zweite Prämisse richtig, aber die Konklusion falsch ist, muß die erste Prämisse falsch sein: Es können nicht alle Vögel fliegen, nur die meisten. Der alltägliche Umgang mit Sprache würde aber unmöglich werden, wollte man alle wirklichen und denkbaren Ausnahmen auch stets ausdrücklich ausnehmen. Daran kann man erkennen, daß logische Schlußweisen im Alltag nur bedingt Anwendung finden.

Schließlich noch ein Beispiele für einen aus inhaltlichen, nicht aus formal-logischen Gründen gültigen Schluß (mit der Bitte, bei diesem und ähnlichen Beispielen die Ausnahmen zu vernachlässigen und die Intention dahinter zu erkennen):

Die Sonne scheint, also wird es warm.

Die Gültigkeit des „also“ hängt hier an der inhaltlichen Bestimmung von „Sonne“ und „warm“; ersetzt man „Sonne“ beispielsweise durch „Mond“, verliert der Schluß seine Gültigkeit; ihm liegt keine gültige formale Schlußweise „ A , also B “ zugrunde.

Was könnte Logik noch sein und was kann sie leisten? Aus der ersten Zitatsammlung gehen noch nicht die im Epigraph angedeuteten Meinungsverschiedenheiten hervor; daher hier eine weitere Reihe von Zitaten, in dem zum einen dargestellt wird, welche weiteren Arten von Logik es geben kann, welche Probleme manche mit ihr haben, und was sie dennoch zu leisten vermag:

(7) *Neben der Lehre vom Schluß kannte die traditionelle Logik noch die „Lehre vom Begriff“ (Klassifikation von Begriffen) und die „Lehre vom Urteil“ (Struktur und Klassifikation der Aussagen), die heute meist der logischen Propädeutik zugerechnet werden.* (Brockhaus Enzyklopädie)

(8) *Der Terminus „Logik“ wurde im Laufe der Zeit verschiedenartig gebraucht und gedeutet und deshalb oft mit erklärenden Zusätzen versehen. Im engeren Sinne verstehen wir unter Logik die Lehre von der Folgerichtigkeit. Da für die Folgerichtigkeit nicht die inhaltliche Bedeutung, sondern die syntaktische Form der Ausdrücke entscheidend ist, sprach man auch von formaler Logik. Erkenntnistheorie und Kritik, die sich mit der Art und Tragweite der Erkenntnis befassen, wurden demgegenüber gelegentlich als materiale Logik bezeichnet. In diese Rubrik würde auch die von Kant so benannte transzendente Logik gehören, die die vor aller Erfahrung liegenden Voraussetzungen aller Erkenntnis untersuchen soll. Auch Hegel. u.a. brauchen „Logik“ in einem abweichenden Sinne.*
 (Bochenski, Menne *Grundriß der Logistik*)

(9) *Die traditionellen und mit der Abgrenzung der Logik zusammenhängenden Streifragen sind folgende:*

1. Ob die Logik eine theoretische oder eine praktische Disziplin (eine „Kunstlehre“) sei.
2. Ob sie eine von den anderen Wissenschaften und speziell von der Psychologie oder Metaphysik unabhängige Wissenschaft sei.
3. Ob sie eine formale Disziplin sei, oder, wie es gefaßt zu werden pflegt, ob sie es mit der „bloßen Form der Erkenntnis“ zu tun oder auch auf deren „Materie“ Rücksicht zu nehmen habe.
4. Ob sie den Charakter einer apriorischen und demonstrativen oder den einer empirischen und induktiven Disziplin habe.

(Husserl, aus der Einleitung der *Logischen Untersuchungen*)

(10) *In der Logik kam es mir wunderbar vor, daß ich diejenigen Geistesoperationen, die ich von Jugend auf mit der größten Bequemlichkeit verrichtete, so aus einander zerren, vereinzeln und gleichsam zerstören sollte, um den rechten Gebrauch derselben einzusehen.*

(J.W. von Goethe in einem Brief)

(11) ... denn 1. kan die Logick als Denck Kunst zum ordnen und wohlreden dienen [...] 4. Daß durch die Logick nichts erfunden, kan ich nicht allerdings zugeben; alles was durch den verstand erfunden, ist durch die guten regeln der Logick erfunden, obschohn solche regeln anfangs nicht ausdrücklich aufgezeichnet oder zusammengeschrieben gewesen. [...] 5. Es ist kein zweifel daß der so die vorthteile der Vernunftkunst zu brauchen gewohnt, scharffsinniger als andere verfare. 6. Die Menschen sind vernünftig auch ohne beschriebene vernunftkunst, gleichwie sie singen können auch ohne Kunst der Musick. Wenn man aber so viel fleiß angewendet hätte die rechte vernunftkunst in übung zubringen als man auff die Singkunst gewendet, würden die Menschen wunderdinge geleistet haben,; allein das ist unterblieben, weil man wenig auf die dinge achtet, so nicht mit eußerlichen Sinnen zu bemercken. [...] 10. Die Logick hat viel schwehres und viel leichtes in sich, wie die Rechenkunst.

(Leibniz, Brief an Gabriel Wagner, Frankfurt am Main: Insel 1992)

(12) *Das Erkennen einer wissenschaftlichen Wahrheit durchläuft in der Regel mehrere Stufen der Sicherheit. Zuerst vielleicht aus einer ungenügenden Zahl von Einzelfällen errathen, wird der allgemeine Satz nach und nach sicherer befestigt, indem er durch Schlussketten mit andern Wahrheiten Verbindung erhält, sei es dass aus ihm Folgerungen abgeleitet werden, die auf andere Weise Bestätigung finden, sei es dass er umgekehrt als Folge schon feststehender Sätze erkannt wird. Es kann daher einerseits nach dem Wege gefragt werden, auf dem ein Satz allmählich errungen wurde, andererseits nach der Weise, wie er nun schließlich am festesten zu begründen sei [...] Die festeste Beweisführung ist offenbar die rein logische, welche, von der besonderen Beschaffenheit der Dinge absehend, sich allein auf die Gesetze gründet, auf denen alle Erkenntnis beruht.*

(Frege, Vorwort zur *Begriffsschrift*)

Zur Geschichte der Logik Das wahrscheinlich früheste Beispiel eines ausdrücklich formal-logischen Schlusses findet sich bei Platon *Theaitetos* 171a–b:

Sokrates: Hernach ist doch dieses das schönste bei der Sache. Er [= Protagoras] gibt gewissermaßen zu, daß die Meinung der entgegengesetzt Vorstellenden über seine Meinung, vermöge derer sie dafür halten, er irre, wahr ist, indem er ja behauptet, daß alle, was ist, vorstellen.

Theodoros: Allerdings.

Sokrates: So gäbe er also zu, daß seine eigene falsch ist, wenn er dafür eingesteht, daß die Meinung derer wahr ist, die dafür halten, er irre.

Theodoros: Notwendig.

Sokrates: Die andern aber geben von sich nicht zu, daß sie irren?

Theodoros: Ganz und gar nicht.

Sokrates: Er aber gesteht auch dieser Vorstellung wiederum zu, daß sie richtig sei, zufolge dessen, was er geschrieben hat.

Theodoros: So scheint es.

Sokrates: Von allen also, beim Protagoras angefangen, wird bestritten werden, oder vielmehr von ihm doch zugestanden, wenn er dem, der das Gegenteil von ihm behauptet, zugibt, er stelle richtig vor, dann muß auch Protagoras selbst einräumen, daß ...

Man sieht, daß hier ein Widerspruch aus rein formalen Gründen hergeleitet wird, ohne daß aus diesem Ausschnitt erkennbar wäre, worum es inhaltlich geht. Man sieht andererseits aber auch, wie mühsam und schwer nachvollziehbar dies ist. Im *Sophist* findet man Ansätze zu systematischen logischen Untersuchungen, aber erst Aristoteles (384–322) gilt, zu Recht, als der Begründer der Logik. Seine Werke zur Logik wurden später unter dem Titel *Organon* zusammengefaßt. Gut verstanden ist seine bereits weitgehend formalisierte Syllogistik, in der spezielle Schlußformen untersucht werden; über die Bedeutung anderer Teile wie seiner Modallogik herrscht nach wie vor Unklarheit. Bei Chrysippos (280–207) aus der megarisch-stoischen Schule findet sich dann die Aussagenlogik ausgebildet.

Im Mittelalter gibt es die sehr reichhaltige Entwicklung der scholastischen Logik, die sich bemüht, die aristotelische Syllogistik weiter zu systematisieren und auszudehnen. Aus moderner Sicht sind die Fortschritte allerdings gering; schon Kant urteilt in der Vorrede zur zweiten Auflage der KdRV: *Daß die Logik diesen sicheren Gang schon von den ältesten Zeiten her gegangen ist, läßt sich daraus ersehen, daß sie seit dem Aristoteles keinen Schritt rückwärts hat tun dürfen, wenn man ihr nicht etwa die Wegschaffung einiger entbehrlicher Subtilitäten [...] als Verbesserungen anrechnen will [...] Merkwürdig ist noch an ihr, daß sie auch bis jetzt keinen Schritt vorwärts hat tun können [...].* Diesem Urteil wird sich in der Regel angeschlossen.

Kants eigener, von ihm entsprechend hochgeschätzter Beitrag zur Entwicklung der Logik fällt allerdings in eine Reihe von traditionellen, aber „nicht-klassischen“ Logiken, die man aus heutiger Sicht nicht der Logik zuordnen würde. Diese beginnt mit Nicole Arnaulds *La logique ou l'art de penser*, der sogenannten „Logik von Port-Royal“ von 1664, in der es in Nachfolge von Descartes' *Regulae ad directionem ingenii* und seiner Logikkritik und Methodenlehre hauptsächlich um erkenntnistheoretische Fragen geht (sprachlich erkenntlich am Unterschied zwischen „penser“ und dem eigentlich logischen „raisonner“). Dazu gehört neben Kants „transzendentaler Logik“ (welche die apriorischen Bedingungen der Erkenntnis behandelt und somit der Wissenschaftslehre und Erkenntnistheorie zugehört) auch Hegels „dialektische Logik“. Noch Husserl in der Einleitung zu den *Logischen Untersuchungen* unterscheidet drei Hauptrichtungen der Logik: psychologisch, formal und metaphysisch.

Im neunzehnten Jahrhundert erfährt die Logik eine Neuschöpfung und einen großen Aufschwung; diese „moderne Logik“ wird und wurde mit verschiedenen Namen bezeichnet: formalisierte oder symbolische Logik, Logistik, Logikkalkül, Algebra der Logik. Wichtigster Vorläufer ist Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), der die Idee einer mathematisierten Logik aufbrachte – *[...] so mus ich zwar bekennen, daß alle unsre bisherigen Logicken kaum ein schatten deßen seyn, so ich wünschde [...].* Auch Jakob Bernoulli (1654–1705), einer der Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung, muß als Vorläufer der mehrwertigen und der modalen Logiken genannt werden. Schließlich ist der für so viele Entwicklungen zwischen Mathematik und Philosophie bedeutsame Bernhard Bolzano (1781–1848) zu nennen.

Als eigentlicher „Schöpfer“ der modernen symbolischen Logik wird gemeinhin George Boole (1815–1864) angesehen, der in seinen Werken *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) und *An investigation of the laws of thought* (1854) die Aussagenlogik neu schuf. Wichtige Beiträge kamen im Anschluß von Augustus de Morgan (1806–1878) und dem Begründer der Prädikatenlogik, Charles Sanders Peirce (1839–1914). Ernst Schröder (1841–1902) hat mit den drei Bänden *Vorlesungen über die Algebra der Logik* das Wissen seiner Zeit zusammengefaßt. In seiner berühmten *Begriffsschrift* von 1879 entwarf Gottlob Frege (1848–1925) einen ersten vollständigen Prädikatenkalkül, der aber in einer unhandlichen zweidimensionalen formalen Sprache verfaßt ist. Erst Guiseppe Peano (1858–1932) schuf eine handliche Symbolik. Frege versuchte

auch vergeblich, die gesamte Mathematik auf die Logik zu gründen. Ein weiterer Markstein in der Geschichte der Logik ist die heute völlig unlesbar gewordene *Principia Mathematica* (1910) von Alfred Whitehead (1861–1941) und Bertrand Russell (1872–1970). Die von David Hilbert (1862–1943) angestoßenen Entwicklungen der Logik erreichen ihre Höhepunkte in den Sätzen von Kurt Gödel (1906–1978) – dem Vollständigkeitssatz für die Prädikatenlogik und den berühmten Unvollständigkeitssätzen – sowie in Gerhard Gentzens (1909–1945) Konsistenzbeweis für die Arithmetik. Hierhin gehört auch Alfred Tarski (ursprünglich Teitelbaum, 1902–1983), eine Gründerfigur der mathematischen Logik, und sein Satz über die Unmöglichkeit von Wahrheitsdefinitionen. Aus späterer Zeit soll nur die Einführung von Semantiken für Modallogiken durch Saul Kripke (*1940) erwähnt sein. Im Verlauf des zwanzigsten Jahrhunderts zerfällt die Logik zunehmend in Einzeldisziplinen und –betrachtungen. Über den Wiener Kreis und Wittgenstein hat die Logik befruchtend auf die Philosophie gewirkt und die Entstehung der analytischen Philosophie/Sprachphilosophie bewirkt.

Weiterführende Literatur zur Geschichte der Logik:

- Heinrich Scholz *Abriß der Geschichte der Logik*, 3. Aufl., Freiburg i. Br.: Karl Alber 1967.
- Josef Bochenski *Formale Logik*, Freiburg i. Br.: Karl Alber 1956.

Zum Namen „Logik“ Das Wort „Logik“ kommt vom griechischen *λόγος*, was u.a. „Wort, Rede“ bedeutet. Der Gebrauch des Wortes bei Aristoteles scheint nicht vollkommen klar, dürfte aber so etwas wie „Aussage“ im modernen logischen Gebrauch beinhalten. Ein *Syllogismus* ist dann eine Zusammenfassung verschiedener Aussagen zu einer logischen Schluß. Die etymologisch korrektere Aussprache, deren sich manche befleißigen, wäre also mit einem kurzen *o*. Wer allerdings wie Menne meint:

Wer von ‘Lohgik’ und ‘lohgisch’ spricht, bekundet damit zumeist, daß er von Logik nicht viel versteht. (Einführung in die Logik, Bern: Francke Verlag 1966)

bekundet damit nur, nicht verstanden zu haben, worum es in der Logik eigentlich geht.

Das Wort „Logik“ für die Wissenschaftsdisziplin taucht bei Aristoteles nicht auf; es entwickelt sich erst allmählich aus dem Eigenschaftswort. Im Mittelalter begegnet man häufiger der Bezeichnung „Dialektik“ statt „Logik“. Als solche ist sie Teil des Triviums der sieben freien Künste². Im 18. Jahrhundert wurden kurzlebige Kunstübersetzungen wie „Vernunftlehre“ oder „Vernunftkunst“ geschaffen, und zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurde für die damals neuartige symbolische Logik der Begriff „Logistik“ eingeführt, dem man aber heute in diesem Sinne nur noch selten begegnet.

1.1 Logikkalküle, Logiksysteme, „Logiken“

(Viele Ausführungen in diesem Abschnitt werden besser verständlich, wenn man sich mit der Funktionsweise eines der Logiksysteme, am einfachsten der Aussagenlogik aus Abschnitt 2, vertraut gemacht hat.)

Leibniz spricht von der Logik als der „wahren Analyse der menschlichen Gedanken“, und Kant von den „notwendigen Gesetzen des Verstandes und der Vernunft überhaupt“. Darin drückt sich ein vormaliger Wahrheits- und Absolutheitsanspruch an die Logik aus, der in der hier vorgestellten Herangehensweise keineswegs ausgesprochen wird. Dadurch stellen sich viele Probleme das Verhältnis der Logik zur Welt und Wirklichkeit betreffend gar nicht; genauer gesagt verschieben sie sich auf die Frage der Anwendung und Anwendbarkeit der hier vorgestellten Logik.

Weiterhin ergibt sich daraus, daß es nicht *eine* Logik geben braucht, sondern durchaus verschiedene „Logiken“ geben kann. Es werden hier mehrere „Logiksysteme“ oder „Logikkalküle“ – auch kurz „Logiken“ genannt – vorgestellt oder angesprochen werden, die sich zum Teil ergänzen oder erweitern, zum Teil auch gegenseitig ausschließen. Jede solche Logik kann man sich als ein Modell für das Denken vorstellen, als eine Annäherung an gewisse Aspekte des Denkens, und

²Von denen sich eine allegorische Darstellung in der Torhalle des Freiburger Münsters findet.

zwar weniger als ein Modell dafür, wie menschliches Denken funktioniert, als eher dafür, wie ein Begriff von „Gültigkeit“ oder „Wahrheit“ sich verhalten soll, zum Beispiel in einer Wissenschaftsdisziplin. Man kann sich diese Logiken auch als ein Spiel oder Gedankenexperiment möglicher Welten vorstellen: Es ginge dann nicht darum festzustellen, was in unserer Welt der Fall ist, sondern die „möglichen Welten“ auszuwählen, die den zugrundegelegten Prinzipien dieser Logik (und somit eventuell Prinzipien unseres Denkens) widersprechen. Andererseits funktioniert das menschliche Denken im Alltag und zum Teil in den Wissenschaften offensichtlich nicht nur auf logische Art. Die Logik ist ein Prüfstein, dem man Erkenntnis unterwerfen kann und wissenschaftliche Erkenntnis unterwerfen sollte. Nicht-wissenschaftliche Erkenntnis, etwa religiöse, braucht logischen Prinzipien nicht zu gehorchen.³

Daher können wir jedes Logiksystem als etwas in sich Abgeschlossenes entwickeln, ohne Bezug nach außen, mit dem großen Vorteil, es ohne Verwirrung durch die andernorts häufige Hineinmischung von Fragen außerhalb der Logik tun zu können. Dies wird ab Abschnitt 2 auch geschehen. Natürlich soll dabei die beabsichtigte Bedeutung/Anwendung nicht außer Acht gelassen werden, zum einen um das Verständnis zu fördern, zum andern um nicht ins Leere hineinzuarbeiten.

Im Rest dieses Abschnittes 1.1 soll nun einiges zu diesen Fragen angedeutet und einige Begrifflichkeiten und persönliche Vorstellungen angesprochen werden, in der Hoffnung, dies möge dem allgemeinen Verständnis der hier entwickelten formalen Logik dienen. Allerdings ist eine Vorstellung davon, wie zum Beispiel die Aussagenlogik funktioniert, für das Verständnis der folgenden Absätze hilfreich.

Urteile, Aussagen und Sätze Im alltäglichen Umgang mit Sprache unterscheidet man zu meist nicht zwischen einer Äußerung und dem, was die Äußerung bezeichnet, und in der Regel ist mit einer Äußerung auch die Behauptung verbunden, diese Äußerung sei wahr. Will man eine Logik mit gleichzeitigem Bezug zur „Welt“ entwickeln, muß man hier sorgsame Unterscheidungen treffen. Im Wittgensteinschen Sinne, *Die Welt ist alles, was der Fall ist*, stehe „die Welt“ für die Ansammlung von nicht notwendig entscheidbaren oder nachprüfaren *Sachverhalten* („das, was ist“). Ein menschlicher Betrachter hält nun gewisse Sachverhalte für gegeben oder wahr und stellt damit ein *Urteil* auf („das, was man meint, was ist“). In der Kommunikation mit andern äußert man dann Urteile in *Aussagen* („das, was man behauptet, was sei“). Diese drei Instanzen, Sachverhalt, Urteil und Aussage, brauchen nicht übereinzustimmen. Schließlich findet die Aussage in einer mündlichen oder schriftlichen Niederlegung statt, dem *Aussagensatz* oder kurz *Satz*. Diese Niederlegung beruht auf reiner Übereinkunft; den Satz als solchen darf man ebensowenig mit seiner Bedeutung verwechseln wie einen Schauspieler mit seiner Rolle.

Unsere Logiksysteme werden sich nur in den letzten beiden Bereichen abspielen: Sätze, Aussagen, welche durch diese Sätze beschrieben werden, und Aussagen über diese Sätze. Wir werden also sorgsam zu unterscheiden haben zwischen (1) der Tätigkeit des „Äußerns“ eines Satzes, etwa durch Hinschreiben, (2) der „Aussage“, die der Satz beschreibt, also der Behauptung, das, was der Satz beschreibt, sei wahr, und (3) Aussagen *über* Sätze. In der natürlichen Sprache ist diese Unterscheidung bisweilen schwer. Üblicherweise bedeutet das Hinschreiben eines Satzes wie *Die Sonne scheint* auch die Behauptung, das mit diesem Satz Gemeinte sei wahr.⁴ Über Sätze spricht man eher selten; will man hier unterscheiden, hilft man sich im Mündlichen mit besonderer Betonung, im Schriftlichen mit Anführungszeichen oder besonderer Schrift. In der Aussage *Das Wort „Wort“ besteht aus vier Buchstaben* wird „Wort“ einmal in seiner Bedeutung, einmal in seiner sprachlichen Niederlegung gebraucht; in dem für die Aussage stehenden Aussagesatz werden zur Unterscheidung Anführungszeichen gesetzt. Ein entsprechendes Beispiel für Sätze ist *Der Satz „Dieser Satz besteht aus vier Wörtern“ besteht aus sechs Wörtern*. An diesem Beispiel sieht man auch, daß dem (zitierten) Aussagesatz als solchem keine Wahrheit oder Gültigkeit zukommen braucht und kann; der Gesamtaussage kommt ebensolche Gültigkeit zu wie der Aussage *Der Satz „Der Flügelflagel gaustert durchs Wiruwaruwolz“ besteht aus fünf Wörtern*. Vermischt man die Ebenen, können Paradoxien entstehen:

³Daher hat zum Beispiel der Begriff der „Wahrheit“ in dem aus dem Johannes–Evangeliums stammenden Leitspruch am KGI *Die Wahrheit wird euch frei machen* nichts mit dem Wahrheitsbegriff der Logik zu tun.

⁴Man denke aber an das berühmte Bild von Magritte *Ceci n'est pas une pipe*.

Der nachfolgende Satz ist wahr. Der voranstehende Satz ist falsch.

Will man es nach obigen Prinzipien auflösen etwa in: *Wahr ist der Satz „Der voranstehende Satz ist falsch“*, so muß man beide Sätze ungleich behandeln, einer wird zu einem Satzteil des anderen, kann somit keine Aussage mehr über diesen machen, wohingegen dieser einem Satz eine Eigenschaft zuweist, die nur einer Aussage zukommen kann.⁵

Formale Sprachen Die natürliche Sprache bietet noch andere Schwierigkeiten: etwa Mehrdeutigkeiten oder die schwierige Abgrenzung sinnvoller von nicht mehr sinnvollen Sätzen. Um all dem aus dem Weg zu gehen, werden wir mit formalen Sprachen arbeiten. Die betrachteten Aussagensätze sind dann Sätze dieser formalen Sprache. Dies werden Zeichenfolgen sein, welche wie mathematische Formeln anmuten, und daher auch „Formeln“ genannt werden. Aussagen über diese Sätze werden wir weitgehend in natürlicher Sprache formulieren, bisweilen auch abkürzend in Symbolen, bei denen man dann allerdings wieder sorgsam die Ebenen unterscheiden muß. Die hinter den Sätzen stehenden Aussagen (genau genommen wird dies nicht mehr eine Aussage sein, sondern ein ganzes Spektrum möglicher Aussagen) treten zurück; die Systeme werden extensional sein, nicht intensional (dazu mehr weiter unten).

Die formalen Sprachen bestehen zunächst aus einem *Alphabet*, also einem Zeichenvorrat, aus dem die Sätze gebildet werden. Sodann aus einer *Grammatik*, die Regeln vorgibt, wie die Sätze gebildet werden. Im Unterschied zur natürlichen Sprache werden diese Regeln genau entscheiden können, ob eine Zeichenfolge ein Satz der Sprache ist oder nicht. Je nach Aussagereichtum der Logik benutzt man ein größeres Alphabet und benötigt eine umfangreichere Grammatik. Während in der Aussagenlogik aus nicht weiter zerlegbaren *atomaren* Sätzen durch Bindeglieder, sogenannte *Junktoren*, komplexe Sätze entstehen, werden in der Prädikatenlogik die atomaren Sätze aus einer Art Wörtern zusammengesetzt.

Logische Systeme: Syntax und Semantik Eine Logik stellt für die Sätze der zugehörigen formalen Sprache einen Begriff *logischer Folgerung* zur Verfügung: Gewisse Sätze folgen logisch aus anderen, andere nicht. Ebenso gibt es einen Begriff des *allgemeingültigen Satzes*. Dies sind Sätze, die aus der internen Sicht der Logik stets gültig sind. (In unseren Systemen wird sich ein Begriff aus dem andern ergeben: Allgemeingültig ist ein Satz dann, wenn er aus allen anderen Sätzen folgt; umgekehrt folgt ein Satz logisch aus einem anderen, wenn ein bestimmter aus beiden gebildeter Satz, die *Implikation*, allgemeingültig ist.)

Diese Begriffe können im wesentlichen auf zwei verschiedene Weisen zur Verfügung gestellt werden: syntaktisch oder semantisch. Bei der syntaktischen Version spricht man auch von einem Kalkül: Es werden grundlegende Regeln für eine logisch gültige Ableitung gegeben, zum Beispiel der *Modus Ponens*, und ein Satz folgt dann logisch aus einem andern, falls er sich durch mehrfache Anwendung der grundlegenden Ableitungsregeln aus diesem ergibt.

Bei dem semantischen Zugang interpretiert man die Sätze in *Modellen*. Ein Satz folgt hierbei logisch aus einem anderen, falls in allen Modellen die Gültigkeit des ersten die Gültigkeit des zweiten mit sich bringt. Im einfachsten Fall erfolgt die Interpretation in Modellen durch die Zuordnung von Wahrheitswerten, in der Regel den beiden Werten „wahr“ und „falsch“.

Beim syntaktischen Kalkül spielt Bedeutung nur noch bei der Auswahl der als gültig anzusehenden Regeln eine Rolle; innerhalb des Kalküls wird alles zu einer Manipulation von Zeichen gemäß vorgegebener Regeln, zu einer Art abstraktem Spiel. Beim semantischen Zugang scheint zunächst die intendierte Bedeutung wichtig für die Möglichkeit der Interpretation in einem Modell zu sein; jedoch wird der Begriff eines Modells so allgemein gehalten sein, daß dies nicht nötig ist. Der sich ergebende Gültigkeitsbegriff für das logische System wird nicht mit einem äußeren, „absoluten“ Wahrheitsverständnis abgestimmt. Natürlich erwartet man von einem sinnvollen System, daß er dazu, sofern dieser existiert, nicht in Widerspruch steht (siehe dazu auch den folgenden Abschnitt).

⁵Man könnte Tarskis Satz dahingehend interpretieren, daß dieses Paradoxon in einem hinreichend mächtigen formalen System nicht auftauchen kann. Andererseits beruht der Beweis der Gödelschen Unvollständigkeitssätze gerade auf einer formalen Vermischung der Ebenen durch geschickte Codierung.

In diesem Sinne sind beide Zugänge *extensional* und nicht *intensional*: Die intendierte Bedeutung spielt für die Funktionalität der Systeme keine Rolle; vielmehr ergibt sich Bedeutung (innerhalb des Systems) aus der Art und Weise des Funktionierens. Dies schockiert zumeist vor allem bei der Implikation. Der Vorteil ist, daß man sehr leicht ein in sich schlüssiges System entwickeln kann, über dessen Anwendbarkeit dann Diskussionsbedarf besteht. So wünschenswert ein intensionales System wäre, so ist doch noch keines entwickelt worden, welches schlüssig und nachvollziehbar wäre. Scholz (a.a.O.) faßt die Vorteile des Zugangs der modernen formalen Logik in sieben Punkten zusammen:

- 1) stilistisch rein (kein „psychologischer Ballast“);
- 2) exakt (interpretiert erstmals unmißverständlich die klassische Logik);
- 3) streng synthetisch (vom einfachen zum komplizierten);
- 4) perfekt (vollständig);
- 5) experimentierend (nicht-klassische Logiken!)
- 6) befreiend
- 7) Widerspruchsfreiheit, Verneinungstechnik,...

Prinzipien und Anforderungen Verschiedene Logiken können sich zum einen dadurch ergeben, daß man formale Sprachen mit verschiedenen Ausdrucksstärken betrachtet – so wird zum Beispiel die Prädikatenlogik die Aussagenlogik erweitern – zum andern dadurch, daß man verschiedene Prinzipien zugrundelegt. Diese Prinzipien sollte man nach Möglichkeit aussprechen, analysieren und entweder aus grundsätzlichen Erwägungen oder in Hinblick auf eine bestimmte Anwendung akzeptieren. Sowohl die gewünschte oder erreichbare Ausdrucksstärke als auch die zugrundegelegten Prinzipien hängen mit den Anforderungen, die man an das System stellen möchte, zusammen.

Es folgt nun eine Ausführung einiger solcher Punkte. Dabei gibt es zwei Sichtweisen: eine systeminterne und eine den Bezug des logischen Systems zur „Außenwelt“ betreffende. Die ersten drei Paare an Anforderungen/Prinzipien sind so grundlegend, daß die Funktionsweise der hier vorgestellten klassischen Logiken auf der „Verinnerlichung“ dieser Prinzipien beruht, d.h. die interne Erfüllung dieser Prinzipien wird in die Konstruktion der Logiksysteme eingebaut.

- *Anforderung* „Widerspruchsfreiheit“ — *Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch*: „Eine Aussage kann nicht zugleich wahr und falsch sein“ oder „Es ist unmöglich, daß ein Sachverhalt zugleich der Fall und nicht der Fall ist“.

Das Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch erscheint den meisten Menschen als einsichtig und notwendig. Es ist aber nicht einfach, es überzeugend zu begründen, vor allem, weil man dabei nicht recht weiß, worauf man sich beziehen dürfte. Aristoteles hat versucht, sich dazu auf die Sprache zurückzuziehen und im wesentlichen zu argumentieren, daß ohne den Satz des ausgeschlossenen Widerspruchs eine sinnvolle Verständigung gar nicht möglich wäre. Beachten sollte man jedoch, daß unser Alltagsverhalten diesem Prinzip nicht unterliegt.⁶ Auch Schriftsteller brauchen sich in ihren Werken nicht daran zu halten.⁷ In den exakten Wissenschaften wird man es aber fordern.⁸

Als Anforderung an unsere Logiken heißt dies, daß mit in den Logiken gültigen Schlußmethoden kein Widerspruch hergeleitet werden darf: Im „Blick nach außen“ bedeutet dies, daß aus in einer Situation nachweislich wahren Aussagen nicht sowohl die Gültigkeit als auch die Ungültigkeit einer Aussage gefolgert werden darf; im „Blick nach innen“, daß ein Satz der Form „A und non A“, ($A \wedge \neg A$), logisch nicht herleitbar sein darf. Die hier behandelten Logiken werden alle semantisch eingeführt, also (im weitesten Sinne) durch die Betrachtung von Wahrheitswerten. Hierbei ist das Prinzip des ausgeschlossenen Widerspruchs bereits in die Vorgehensweise eingebaut, sofern wir seine Gültigkeit für die „Welt“ annehmen: Die Möglichkeit der Zuordnung von Wahrheitswerten beruht auf diesem Prinzip. (Es gibt Logiksysteme, zum Beispiel die „parakonsistenten

⁶Man denke nur an Beziehungsstreitigkeiten oder politische Diskurse, oder auch an das schöne Zitat von C.F.Meyer: „Ich bin kein ausgeklügeltes Buch, ich bin ein Mensch mit seinem Widerspruch.“

⁷Siehe etwa die Szenen 4 und 5 von Ionescos *La cantatrice chauve*.

⁸Der Teilchen-Welle-Dualismus in der Physik z.B. ist kein Widerspruch, da beides nicht sich widersprechende Eigenschaften der Elektronen sind, sondern nur sich widersprechende Modelle.

Logiken“, in denen dieses Prinzip nur eingeschränkt gilt.)

- *Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten*: „Eine Aussage ist wahr oder falsch“ oder „es ist unmöglich, daß ein Sachverhalt weder der Fall noch nicht der Fall ist“.

Dieses Prinzip ist angreifbarer als das vom ausgeschlossenen Widerspruch: Es ist einfacher, sich einen dritten Zustand der Unbestimmtheit neben „wahr“ und „falsch“ vorzustellen als beide gleichzeitig. Allerdings ist dies auch eine Frage der Formulierung des Prinzips: In der Form „Eine Aussage ist wahr oder nicht wahr“ erscheint es weniger angreifbar. Andererseits liegt der Gleichsetzung von „falsch“ und „nicht wahr“, die bei der jeweils zweiten Formulierung der beiden Prinzipien angewandt wurde, in einem gewissen Sinn bereits das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten zugrunde. Umgekehrt kann man dieses Prinzip zur Definition der Verneinung (oder der Funktion des Wortes „nicht“) benutzen. Zusammen mit dem Prinzip des ausgeschlossenen Widerspruchs – man kann beide in „Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch“ zusammenfassen – ermöglicht es, die Funktionsweise der Aussagenlogik auf die dadurch gewonnene Komplementarität der beiden Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ zu gründen. (Man erhält dann zum einen das Prinzip der sich aufhebenden doppelten Verneinung: „non non A ist logisch gleichwertig mit A “, $\neg\neg A \sim A$, und zum andern die logische Äquivalenz der beiden Ausschlußprinzipien: das erste kann man als $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$, das zweite als $\vdash (A \vee \neg A)$ formulieren, die Äquivalenz ergibt sich dann schnell mit den Regeln von de Morgan und der doppelten Verneinung. Ohne diese Regeln zu kennen, sieht man es so: Ist ein Sachverhalt „ S “ weder wahr noch falsch, so ist sein Gegenteil „non S “ sowohl wahr als auch falsch, denn wäre „non S “ nicht wahr, so wäre „ S “ wahr, wäre „non S “ nicht falsch, so wäre „ S “ falsch. Diese Dualität beruht aber auf der Komplementarität von Aussage und verneinter Aussage, die sich im Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten ausdrückt.

Weitere Anmerkungen:

(1) Das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten bedeutet nicht, daß der Wahrheitswert einer Aussage feststellbar sein muß, sondern nur, daß er irgendwo entschieden ist.⁹ Es bedeutet auch nicht, daß jede Aussage einen festen Wahrheitswert in sich trägt, sondern dieser wird im allgemeinen von den Umständen abhängen, nur muß er für alle denkbaren Umstände entschieden sein.

(2) Durch eine drei- oder mehrwertige Logik etwa mit Wahrheitswerten „wahr, falsch, vielleicht“ wird das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nur sehr oberflächlich durch ein „Prinzip des ausgeschlossenen Vierten“ ersetzt. Man kann alles, was man in dieser dreiwertigen Logik ausdrücken kann, auch in einer zweiwertigen erreichen. (Etwa, indem man eine starke Verneinung $\neg A$ für den Gegensatz von A einführt und die drei Wahrheitswerte „wahr, falsch, vielleicht“ in einem zweiwertigen System wiedergibt durch „ A wahr, $\neg A$ falsch“, „ A falsch, $\neg A$ wahr“ und „ A falsch, $\neg A$ falsch“.)

(3) Es gibt Ausrichtungen der Logik, zum Beispiel der Intuitionismus, in denen das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten abgelehnt wird. In diesem wird ein Wahrheitswert nur zugeteilt, wenn man tatsächlich die Gültigkeit der betreffenden Aussage entscheiden kann. Dadurch wird zum Beispiel eine Aussage „non non A “ schwächer als „ A “, denn einen Nachweis, daß „non A “ nicht sein kann, kann man ohne das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nicht notwendig in einen positiven Nachweis der Gültigkeit von „ A “ verwandeln (der Intuitionismus lehnt also die Methode des indirekten Beweises ab).

Diesbezüglich ist die Sprachregelung in diesem Skript etwas ungenau: Wenn von „Aussagenlogik“ die Rede ist, ist genauer die *klassische Aussagenlogik* auf Grundlage des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten gemeint. Daneben gibt es auch eine intuitionistische Aussagenlogik oder andere Aussagenlogiken

- *Anforderung „Schlüssigkeit“ (Soundness) — Prinzip des gültigen Schließens*: „Logische Folgerungen aus wahren Aussagen müssen wahr sein.“

Im „Blick nach außen“ bedeutet dies eine Überprüfbarkeit des logischen Systems in folgendem Sinne: Interpretiert man die Prämissen eines gültigen Schlusses durch nachprüfbar wahre Sätze,

⁹Man kann sich einen allwissenden „booleschen Dämon“ vorstellen.

so muß auch die Interpretation der Konklusion wahr sein (gewissermaßen ist dies eine Ausweitung des Prinzips des ausgeschlossenen Widerspruchs). Systemintern wird dieses Prinzip bei der Definition der logischen Folgerung und der Implikation eingebaut sein, indem $\vdash \neg(\top \rightarrow \perp)$ gelten wird.

- *Anforderung* „Vollständigkeit“

Dies ist gewissermaßen das Gegenstück zur „Schlüssigkeit“: Während dort gefordert wird, daß alles, was aus Wahrem logisch zu folgern ist, auch wahr sein soll, wünscht man hier, daß alles, was immer wahr ist, auch logisch gefolgert werden kann. In der Außenperspektive entzieht es sich einer Überprüfbarkeit durch die unbegrenzte Zahl an Interpretationsmöglichkeiten eines formalen Satzes wie auch durch das Problem einer näheren Bestimmung des verwendeten Wahrheitsbegriffs. Systemintern wird durch diese Forderung die Implikation weiter festgelegt, nämlich $\vdash (\top \rightarrow \top)$.

Von beiden Anforderungen, Schlüssigkeit und Vollständigkeit, spricht man meist dann, wenn ein logisches System sowohl auf syntaktischem Weg durch einen Kalkül als auch semantisch beschrieben wird. Dann verfügt man über einen Begriff der logischen Folgerung durch den Kalkül und über einen Begriff der „Wahrheit“ aus dem Verhalten in Modellen. Beide kommen dann zur Deckung und beschreiben somit die „gleiche“ Logik, wenn Schlüssigkeit und Vollständigkeit erfüllt sind. Statt an einem absoluten Wahrheitsbegriff mißt man den Folgerungsbegriff also an einem relativen Wahrheitsbegriff (der, je nach Weltbild, eine mehr oder minder sinnvolle oder exakte Annäherung an jenen darstellt). Sind die Logiken nur semantisch eingeführt, wie es hier der Fall sein wird, so bleibt von beiden Anforderungen nichts übrig als die dürftigen Anforderungen an die Implikation.

Es folgen nun noch zwei weitere Eigenschaften von vielen, die man betrachten oder um die man sich bemühen kann.

- *Anforderung* „Entscheidbarkeit“

Es wäre wünschenswert, ein Verfahren zu besitzen, mit dem man entscheiden kann, ob ein Satz aus einer Menge von Prämissen logisch folgt oder nicht. In der Aussagenlogik verfügt man über ein solches Verfahren; in aussagekräftigen Systemen, insbesondere bereits in der Prädikatenlogik, ist dies nicht möglich.

- *Anforderung* „möglichst große Aussagekraft“

Die Aussagenlogik bietet ein in sich schlüssiges System, das allen obigen Anforderungen genügt, aber eine geringe Aussagekraft bietet. Die Prädikatenlogik ist dagegen reichhaltig genug, um äußerst viel ausdrücken zu können, allerdings auf zum Teil unnatürliche Weise und unter Verlust einiger schöner Eigenschaften. Dazwischen und daneben gibt es eine unüberschaubare Vielfalt an logischen Systemen; manche haben ihre Existenzberechtigung darin, daß sie auf bestimmte Anwendungen zugeschnitten sind, etwa Zeitlogiken und deontische (juristische) Logiken, bei manchen anderen kann man berechtigte Zweifel am Interesse anmelden. Am bedeutsamsten dürften darunter die Modallogiken sein (man kann sowohl die Aussagenlogik als auch die Prädikatenlogik durch Modalitäten erweitern; bei der Semantik von Prädikaten-Modallogiken treten interessante philosophische Fragen auf). Andere Systeme geben hier zugrundegelegte Prinzipien auf, zum Beispiel mehrwertige Logiken wie Fuzzylogik, Intuitionismus, nicht-monotone Logiken, parakonsistente Logiken,...¹⁰

Weiterführende Literatur zu den eher philosophischen Aspekten:

- Ernst Tugendhat, Ursula Wolf *Logisch-semantische Propädeutik*, Stuttgart: Reclam 1983.
- *Handbook of philosophical logic*, herausgegeben von Dov Gabbay, vier Bände, 1983–89.

¹⁰Meines Erachtens ist die Grenze des Sinnvollen oft überschritten worden. Andererseits gibt es Meinungen wie folgende (November 2004, aus der Ankündigung einer neuen Buchreihe): „However, the editors of this series believe that formal techniques like, for example, independence friendly logic, dialogical logics, multimodal logics, game theoretic semantics and linear logics, have the potential to cast new light on basic issues in the discussion of the unity of science.“

Kapitel 2

Aussagenlogik

Die Aussagenlogik behandelt die möglichen Bezüge zwischen Aussagensätzen, also Sätzen, denen man sinnvollerweise die Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ zuordnen kann, in Hinblick auf diese Wahrheitswerte. Wichtig ist bei einer *formalen* Logik dabei nicht, ob konkrete Sätze in einer konkreten Situation gelten oder nicht, oder ob ihre Gültigkeit oder Ungültigkeit nachgeprüft werden kann, sondern allein die sinnvolle Möglichkeit der Zuordnung von Wahrheitswerten. Es ist daher günstig, vom konkreten Inhalt der Sätze zu abstrahieren und diese durch eine symbolhafte Schreibweise wiederzugeben, ebenso wie die möglichen Bezüge der Sätze untereinander durch besondere Symbole wiedergegeben werden. Mit diesen formelhaften Ausdrücken kann man dann „logisch rechnen“.

Der *klassischen Aussagenlogik* liegt eine Theorie von den beiden komplementären Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch“ zugrunde, wie sie durch die Prinzipien des ausgeschlossenen Widerspruchs und des ausgeschlossenen Dritten bestimmt ist: (1) eine Aussage kann nicht gleichzeitig wahr und falsch sein und (2) in einer Situation, in der einem Aussagensatz ein Wahrheitswert zugeordnet wird, muß es einer von beiden sein. Insbesondere gibt es daher zu jeder Aussage „A“ die *Verneinung* dieser Aussage „non A“, der genau dann der Wahrheitswert „wahr“ zugeordnet wird, wenn „A“ der Wert „falsch“ zugeordnet wird, und umgekehrt.

Literatur Üblicherweise behandelt jede Einführung in die formale Logik den Kernbestand der klassischen Aussagenlogik, mit der etwaigen Ausnahme von Werken, die einer Sonderrichtung der Logik anhängen (etwa dem Intuitionismus). Unter der Vielzahl der Bücher finden sich viele brauchbare, aber auch viele schlechte. Fühlen Sie sich ermuntert, in der Bibliothek zu stöbern und ein gutes und ihrem Geschmack entsprechendes Buch zu entdecken, aber lesen Sie mit kritischem Geist.

Zwei Warnungen sind angebracht. Die erste ist pädagogischer Art: Sowohl die Symbolschreibweise als auch die Begriffe in der Logik sind sehr uneinheitlich. Dieses Skript benutzt die Schreibweisen, die sich in der mathematischen Logik in den letzten Jahrzehnten weitgehend als Standardsprache durchgesetzt haben. Eher philosophisch orientierte Werke greifen oft auf historische Schreibweisen zurück, welchen meist den Nachteil geringerer Lesbarkeit anhängt. Dies erfordert für viele Bücher eine große Flexibilität bei der Lektüre. Die zweite Warnung ist grundlegenderer Art: Viele Bücher sind ungeeignet oder sogar schlecht. Seltener, aber dennoch erschreckend oft, weil die Autoren die Logik, die sie darstellen, nicht verstanden haben. Häufiger liegt das Problem jedoch darin, daß die Autoren die Leser für eine bestimmte Auffassung der Logik missionieren wollen, manchmal verbunden mit der Entwicklung eines eigenen, vermeintlich besseren Systems, oder sich in zweitrangige Fragen verirren und etwas in die Logik hineingeheimnissen wollen, was sich dort nicht befindet.

Brauchbare Bücher sind:

- Ansgar Beckermann *Einführung in die Logik*, 2. Auflage, Berlin: de Gruyter 2003.

Für Leser mit einem weitergehenden und mathematischen Interesse an der Logik empfehlen

sich die Einführungen:

- Ebbinghaus, Flum, Thomas *Einführung in die mathematische Logik*, 5. Auflage, Heidelberg: Spektrum 2007.
- Cori, Lascar *Logique mathématique*, Paris: Masson 1993.

Übersicht Zunächst wird in 2.1 die formale Sprache für die Aussagenlogik definiert. In 2.2 wird dann besprochen, wie man Sätzen in der aussagenlogische Sprache Wahrheitswerte zuordnet. Dies erlaubt es, in 2.3 den Begriff „logische Folgerung“ und verwandte Begriffe einzuführen. Dort findet sich auch eine Liste wichtiger logischer Gesetze. Abschnitt 2.4 begründet dann die Wahl der formalen Sprache und erläutert einiges über ihre Struktur. Schließlich geht es in 2.5 hauptsächlich um einen alternativen, „syntaktischen“ Zugang zur Aussagenlogik, und in 2.6 um die Möglichkeit der Übersetzung aus der natürlichen Sprache.

2.1 Die aussagenlogische Sprache

Eine formale Sprache besteht in der Regel aus zwei „Zutaten“: einem *Alphabet*, also einer Menge von erlaubten Zeichen oder Symbolen, und einer *Grammatik*, die erklärt, welche Zeichenfolgen Sätze der formalen Sprache sind. Wie in einer natürlichen Sprache, die beispielsweise Wörter, Neben- und Hauptsätze kennt, kann die Grammatik auf mehreren Stufen arbeiten. Dies ist aber in der Aussagenlogik nicht der Fall: Es gibt dort nichts den Wörtern entsprechendes. Im Gegensatz zu den natürlichen Sprachen sind die Regeln aber klar und streng: Man muß immer eindeutig entscheiden können, ob eine Zeichenfolge ein Satz der formalen Sprache ist oder nicht.

Das Alphabet Die aussagenlogische Sprache setzt sich aus folgenden Zeichen zusammen:

- den *Aussagenvariablen* A, B, C, \dots (lateinische Majuskeln)¹;
- den *logischen Zeichen* $\perp, \top, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- den *nicht-logischen Zeichen* (und), also öffnender und schließender Klammer.

Anmerkung: Bei anderen Autoren wird die formale Sprache für die Aussagenlogik meist anders aussehen. Zunächst kann man ebensogut auch andere Buchstaben oder Zeichen als Aussagenvariablen wählen; wichtig ist nur, daß man sie von den anderen verwendeten Zeichen klar unterscheiden kann. Dann gibt es eine Vielzahl anderer logischer Zeichen zum Teil mit gleicher Funktion wie die obigen, zum Teil mit anderer. Dazu später mehr. Auch gibt es formale Sprache, die mit anderen oder ohne nicht-logische Zeichen auskommen.

Die Grammatik Die *aussagenlogischen Sätze* oder auch *aussagenlogischen Formeln* (beide Ausdrücke werde ich synonym verwenden) werden nach bestimmten Regeln aus einfacheren aussagenlogischen Formeln aufgebaut. Einfachste, nicht mehr zerlegbare aussagenlogische Formeln sind die Aussagenvariablen und die *Aussagenkonstanten* \top und \perp . Zusammengesetzte Formeln werden aus einfacheren Formeln mit Hilfe der *Junktoren* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und \leftrightarrow gebildet. Dabei bewirken Klammern die Lesbarkeit der Formeln.

Die exakten Regeln sind wie folgt, dabei dienen \mathcal{S} und \mathcal{T} als Platzhalter für beliebige aussagenlogische Formeln²:

¹Eigentlich möchte man unbegrenzt viele Aussagenvariablen zur Verfügung haben; falls die 26 Buchstaben des lateinischen Alphabets nicht ausreichen, erlaubt man sich auch Varianten davon, etwa indizierte Buchstaben A_1, A_2 oder A', A'' u.ä.

²Und zwar in folgendem Sinne: Eine aussagenlogische Formel ist eine *Folge von Zeichen* aus dem Alphabet; wo nun in der folgenden Definition ein solcher Platzhalter für eine aussagenlogische Formel steht, soll man sich an seiner Stelle die durch ihn repräsentierte Zeichenfolge eingesetzt denken. Die beiden Zeichen „ \mathcal{S} “ und „ \mathcal{T} “ selbst sind nicht Teil des aussagenlogischen Alphabets.

- 1) Jede Aussagenvariable ist auch eine aussagenlogische Formel.³
- 2) \top und \perp sind jeweils eine aussagenlogische Formel.
- 3) Wenn \mathcal{S} eine aussagenlogische Formel ist, dann auch $\neg\mathcal{S}$.
(Genauer formuliert: Wenn eine Zeichenfolge eine aussagenlogische Formel bildet, dann auch die Zeichenfolge, die man durch Voransetzen eines Negationszeichens erhält.)
- 4) Wenn \mathcal{S} und \mathcal{T} aussagenlogische Formeln sind, dann ist auch jede der vier Zeichenfolgen $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$, $(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})$, $(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$ und $(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$ eine aussagenlogische Formel.
(Genauer formuliert: Wenn zwei Zeichenfolgen jeweils eine aussagenlogische Formel bilden, dann ist auch die Zeichenfolge eine aussagenlogische Formel, die man erhält, indem man erst eine öffnende Klammer, dann die eine Zeichenfolge, dann eines der Zeichen „ \wedge “, „ \vee “, „ \rightarrow “, „ \leftrightarrow “, dann die andere Zeichenfolge, dann eine schließende Klammer schreibt.)

Aussagenlogische Formeln sind nur diejenigen Zeichenfolgen, welche nach diesen Regeln gebildet werden können.

Beispiele: Aussagenlogische Formeln sind etwa

$$\begin{aligned}
 & A \\
 & \neg\neg C \\
 & (\neg A \vee B) \\
 & \neg(A \vee B) \\
 & (\top \wedge A) \\
 & (C \wedge A) \\
 & \neg(\neg\neg\neg\top \wedge \perp) \\
 & (((A \wedge A) \wedge A) \wedge A) \\
 & (\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg\neg B) \vee (A \wedge \neg\perp))
 \end{aligned}$$

Namen \top heißt das *Verum*, \perp das *Falsum*.

\neg heißt *Negationszeichen* oder *logisches Nicht*, $\neg\mathcal{S}$ die *Negation* oder *Verneinung* von \mathcal{S} , lies „non \mathcal{S} “ (oder „nicht \mathcal{S} “, was aber leicht zu Mißverständnissen führen kann).

\vee heißt *Disjunktionszeichen* oder *logisches Oder*, $(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})$ die *Disjunktion* von \mathcal{S} und \mathcal{T} , lies „ \mathcal{S} oder \mathcal{T} “.

\wedge heißt *Konjunktionszeichen* oder *logisches Und*, $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$ die *Konjunktion* von \mathcal{S} und \mathcal{T} , lies „ \mathcal{S} und \mathcal{T} “.

\rightarrow heißt *Implikationszeichen*, $(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$ die *Implikation*, lies „ \mathcal{S} impliziert \mathcal{T} “.

\leftrightarrow heißt *Bi-implikationszeichen*, die *Bi-implikation* von \mathcal{S} und \mathcal{T} , lies „ \mathcal{S} äquivalent \mathcal{T} “, „ \mathcal{S} und \mathcal{T} implizieren sich gegenseitig oder (mathematischer) „ \mathcal{S} genau dann, wenn \mathcal{T} “, „ \mathcal{S} dann und nur dann, wenn \mathcal{T} “.

Eselsbrücken: \neg ist einem Minuszeichen ähnlich. \top erinnert an das englische *True*, \vee an das lateinische *vel*. Die dazu „dualen“ Zeichen \perp und \wedge entstehen daraus durch Umklappen.

2.1.1 Eindeutige Lesbarkeit

Jede aussagenlogische Formel ist *eindeutig lesbar*, d.h. sie trägt die Information in sich, wie sie gebildet wurde. Dies ist keine Selbstverständlichkeit; zum Beispiel ist das Wort „Ersatzbusfahrer“ auf zwei Weisen lesbar: als Fahrer eines Ersatzbusses oder als Busfahrer, der einen Kollegen

³Eine ähnliche Doppelrolle gibt es in manchen natürlichen Sprachen – einzelne Buchstaben können auch Wörter sein. Oder bei der üblichen Dezimalschreibweise von Zahlen, wo einzelne Ziffern auch Zahlen darstellen.

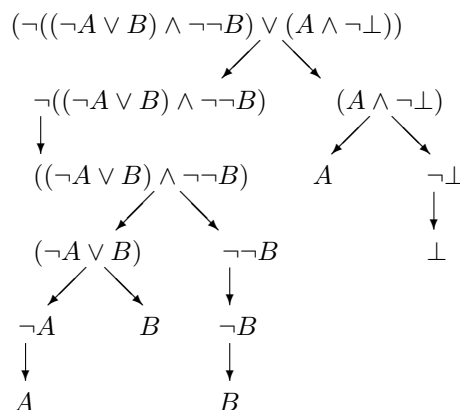
ersetzt. Korrekte Betonung bewirkt normalerweise immerhin eine „eindeutige Hörbarkeit“. Die eindeutige Lesbarkeit wird bei den Formeln durch die Klammersetzung bewirkt. Es gibt andere Klammersetzungsmethoden; die Wahl ist Geschmacksfrage und willkürlich, muß dann aber konsequent beachtet werden. Es gibt auch die klammerlose „polnische Notation“, siehe Seite 21.

Im Falle der letzten Formel unter den obigen Liste an Beispielen:

- $(\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg\neg B) \vee (A \wedge \neg\perp))$ entsteht aus $\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg\neg B)$ und $(A \wedge \neg\perp)$ mit Regel 4.
- $(A \wedge \neg\perp)$ entsteht aus A und $\neg\perp$ mit Regel 4; A ist eine aussagenlogische Formel nach Regel 1 und $\neg\perp$ entsteht mit Regel 3 aus \perp , was als aussagenlogische Konstante nach Regel 2 eine aussagenlogische Formel ist.
- $\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg\neg B)$ entsteht aus $((\neg A \vee B) \wedge \neg\neg B)$ mit Regel 3; $((\neg A \vee B) \wedge \neg\neg B)$ entsteht aus $(\neg A \vee B)$ und $\neg\neg B$ mit Regel 4.
- $\neg\neg B$ entsteht aus $\neg B$ mit Regel 3; dies wiederum aus B mit Regel 3, und B ist eine aussagenlogische Formel nach Regel 1.
- $(\neg A \vee B)$ entsteht aus $\neg A$ und B nach Regel 4; $\neg A$ wiederum aus A nach Regel 3; und A und B waren bereits als aussagenlogische Formeln gemäß Regel 1 identifiziert.

Dies kann man sich graphisch gut veranschaulichen in einem sogenannten Formelbaum in Abbildung 2.1.

Abbildung 2.1: Formelbaum



Im allgemeinen muß man den Aufbau einer Formel rückwärts nachvollziehen:

- Entweder sie besteht nur aus einem Zeichen und ist durch Regel 1 oder 2 gegeben.
- Oder das am weitesten links stehende Zeichen ist ein \neg und sie ist aus Regel 3 entstanden.
- Oder die Formel wird von einem Klammerpaar umfaßt: dann wurde sie mit Regel 4 gebildet. Welches der dafür richtige Junktors ist, erkennt man folgendermaßen: Bildet man die Regel zurück, zerlegt also die Formel durch Entfernen der äußersten Klammern und des Junktors in zwei Teile, so müssen in jedem Teil ebenso viele öffnende wie schließende Klammern verbleiben.

Beispiel: Die Formel $(\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg B) \vee A)$ kann nicht zuletzt durch Regel 4 aus $\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg B) \vee A$ entstanden sein, weil dann in den Einzelteilen die Klammerung nicht stimmt.

Die Zwischenstufen im Entstehungsprozeß einer aussagenlogischen Formel S , also die im Beispiel in dem Formelbaum auftretenden Formeln, heißen auch die *Teilformeln* oder *Subformeln* von S . Üblicherweise zählt man die Formel selbst auch zu ihren Teilformeln; will man sie ausschließen, spricht man auch von *echten* oder *eigentlichen* Teilformeln.

Beispiel: Die Subformeln von $((\neg A \vee B) \rightarrow \perp)$ sind $A, B, \perp, \neg A, (\neg A \vee B)$ und $((\neg A \vee B) \rightarrow \perp)$.

2.1.2 Andere Schreibweisen

Wie schon erwähnt, findet sich in der Literatur eine Fülle anderer Namen und Schreibweisen vor allem für die Junktoren, da es leider (noch) keine allgemein akzeptierte Standardsprache gibt. Dieser Abschnitt versucht, einige andere mehr oder weniger verbreitete Namen und Zeichen zu versammeln als Lesehilfe für andere Werke; er trägt nichts zum Verständnis des Skriptes bei. Mehr in:

- Carol Horn Greenstein *Dictionary of Logical Terms and Symbols*, New York: 1978.

Die Disjunktion wird hier für das einschließende Oder stehen; bei anderen Autoren steht dieser Begriff (etymologisch korrekter) für das ausschließende Oder, für das einschließende dann „Adjunktion“. Statt „Implikation“ bevorzugen einige „Subjunktion“ oder „Konditional“. Gebräuchlicher als „Bi-implikation“ ist „Äquivalenz“, führt aber leicht zu Verwechslungen mit der auf Seite 24 eingeführten logischen Äquivalenz zweier Formeln.

Es folgt eine Liste alternativer Zeichen für die Junktoren. Am wichtigsten ist sicherlich das Peanosche $(A \supset B)$ für die Implikation $(A \rightarrow B)$. Die Notationen von Łukasiewicz benutzen Großbuchstaben für die Junktoren, daher stehen dort p und q für Aussagenvariablen.

Verum	$\uparrow, 1, V, W$; fehlt auch oft
Falsum	$\downarrow, 0, \Lambda, F$; fehlt auch oft
Negation	$\sim A, \neg A, \bar{A}, A', Np$
Konjunktion	$(A \& B), (A \cdot B), (A \times B), (AB), (A \cap B), Kpq$
Disjunktion	$(A B), (A + B), (A \cup B), Apq$
Implikation	$(A \Rightarrow B), (A \supset B), (A : B), Cpq$
Bi-implikation	$(A \Leftrightarrow B), (A \equiv B), (A \supset \subset B), (A = B), (A \sim B), (A \sqcap B), Epq$

Klammern werden oft anders gesetzt. Zum Beispiel kann man bei Anwendung von Junktoren statt äußeren Klammern auch die zu verbindenden Teilformeln jeweils in Klammern fassen, also etwa $(S) \wedge (T)$ statt $(S \wedge T)$. Außerdem gibt es bei vielen Autoren Klammersparregeln, indem etwa äußere Klammern weggelassen werden oder eine Reihenfolge in der Bindungsstärke der Junktoren eingeführt wird.

Daneben ist auch die von Peano erfundene und in der *Principia Mathematica* verwendete Punkt-schreibweise verbreitet: Je mehr Punkte ein Junktor trägt, desto später kam er beim Aufbau der Formel hinzu. Beispiel: $A \cdot \rightarrow \cdot B \rightarrow C$ statt $((A \rightarrow B) \rightarrow C)$. Außerdem gibt es die klammerfreien Formelschreibweisen von Łukasiewicz: die polnische und die umgekehrt polnische Notation. Dabei werden die Junktoren vor bzw. hinter die durch sie verbundenen Teilformeln statt dazwischen geschrieben. Die Formel $(\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg \neg B) \vee (A \wedge \neg \perp))$ schreibt sich dann $\wedge \neg \wedge \vee \neg AB \neg \neg B \wedge A \neg \perp$ bzw. $A \neg B \vee B \neg \neg \wedge \neg A \perp \neg \wedge \vee$. Der Vorteil der Klammerfreiheit ist durch eine zwar noch eindeutige, aber dennoch offensichtlich mühsamere Lesbarkeit erkauft.

Das Problem der Klammerung entsteht dadurch, daß eine Formel eigentlich ein zweidimensionales Gebilde ist, welches am besten in der Form eines Baumes wie in Abbildung 2.1 dargestellt würde (was zum Beispiel Frege in seiner *Begriffsschrift* tut), mit den offensichtlichen Nachteilen. Das Herunterbrechen dieser zweidimensionalen Form in eine Folge von Zeichen ist nicht ohne Kompromisse möglich. Eine Mischform aus ein- und zweidimensionaler Schreibweise erhält man, wenn man die Negation durch einen Überstrich darstellt, im Beispiel: $((\overline{\overline{A} \vee B}) \wedge \overline{\overline{B}}) \vee (A \wedge \overline{\perp})$.

2.2 Wahrheitswerte

Bislang haben wir mit den aussagenlogischen Formeln lediglich bedeutungslose Zeichenfolgen geschaffen. Nun sollen ihnen Wahrheitswerte in Abhängigkeit von Wahrheitswerten für die darin auftauchenden Aussagenvariablen zugeordnet werden. Dies geschieht gemäß der Bildungsgesetze der Formeln. Die Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ werden mit W und F beschrieben.

Die logischen Konstanten \top und \perp bekommen unabhängig von den Wahrheitswerten der Aussagenvariablen stets den Wahrheitswert W bzw. F zugeordnet.

Als Wahrheitstafel:

\top	\perp
W	F

Die Negation: Ist \mathcal{S} eine aussagenlogische Formel, so bekommt $\neg\mathcal{S}$ den Wahrheitswert W zugeordnet, wenn \mathcal{S} den Wahrheitswert F erhält, und $\neg\mathcal{S}$ bekommt den Wahrheitswert F zugeordnet, wenn \mathcal{S} den Wahrheitswert W erhält.

Als Wahrheitstafel:

\mathcal{S}	$\neg\mathcal{S}$
W	F
F	W

Konjunktion und Disjunktion: Sind \mathcal{S} und \mathcal{T} aussagenlogische Formeln, so bekommt $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$ den Wahrheitswert W zugeordnet, wenn sowohl \mathcal{S} als auch \mathcal{T} den Wahrheitswert W erhalten, und F in allen anderen Fällen. $(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})$ bekommt den Wahrheitswert F zugeordnet, wenn sowohl \mathcal{S} als auch \mathcal{T} den Wahrheitswert F erhalten, und W in allen anderen Fällen.

Implikation: Sind \mathcal{S} und \mathcal{T} aussagenlogische Formeln, so bekommt $(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$ den Wahrheitswert F zugeordnet, wenn \mathcal{S} den Wahrheitswert W und \mathcal{T} den Wahrheitswert F erhält, und W in allen anderen Fällen.

Bi-implikation: Sind \mathcal{S} und \mathcal{T} aussagenlogische Formeln, so bekommt $(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$ den Wahrheitswert W zugeordnet, wenn \mathcal{S} und \mathcal{T} den gleichen Wahrheitswert erhalten, und $(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$ bekommt den Wahrheitswert F zugeordnet, wenn \mathcal{S} und \mathcal{T} verschiedene Wahrheitswert erhalten.

Als Wahrheitstafeln:

\mathcal{S}	\mathcal{T}	$(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$	$(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})$	$(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$	$(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

2.2.1 Belegungen und Auswertungen von aussagenlogischen Formeln:

Ist eine aussagenlogische Formel \mathcal{S} gegeben, so heißt jede Zuordnung von Wahrheitswerten zu den in der Formel auftretenden Aussagenvariablen eine *Belegung*. Da mit den Aussagenvariablen keine inhaltliche Bedeutung verknüpft ist, ist jede Belegung gleichermaßen sinnvoll. Bei n Aussagenvariablen gibt es also 2^n Belegungen. Durch die eindeutige Lesbarkeit liefert eine Formel ein Verfahren, wie ihr unter einer Belegung selbst ein Wahrheitswert zukommt. Dabei werden nach und nach die Teilformeln so ausgewertet, wie die Wahrheitstafeln der Junktoren es vorgeben. Man handelt sich gewissermaßen von „unten“, d.h. den Aussagenvariablen und – konstanten, den ganzen Formelbaum entlang nach „oben“, d.h. zu der gegebenen Formel. Das Ergebnis nennt man den *Wahrheitswertverlauf* der Formel, zusammen mit den Zwischenergebnissen die *vollständige Wahrheitstafel*.

Beispiel: \mathcal{S} sei die Formel $(\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg \neg B) \vee (A \wedge \neg \perp))$. Es folgt die vollständige Wahrheitstafel für \mathcal{S} ; den Wahrheitswertverlauf von \mathcal{S} findet man in der letzten Spalte:

A	B	$\neg A$	$(\neg A \vee B)$	$\neg B$	$\neg\neg B$	$((\neg A \vee B) \wedge \neg\neg B)$	$\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg\neg B)$	\perp	$\neg\perp$	$(A \wedge \neg\perp)$	\mathcal{S}
W	W	F	W	F	W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F	W	F	W	W	W
F	W	W	W	F	W	W	F	F	W	F	F
F	F	W	W	W	F	F	W	F	W	F	W

Eine kompaktere Schreibweise, welche das Aufführen sämtlicher Teilformeln vermeidet, aber weniger übersichtlich ist, besteht darin, die Wahrheitswerte jeweils unter den betreffenden Junktoren zu schreiben. Die Spalte, welche den Wahrheitswertverlauf für \mathcal{S} liefert, muß dann gesondert gekennzeichnet werden.

A	B	$(\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg\neg B) \vee (A \wedge \neg\perp))$												
W	W	F	F	W	W	W	W	F	W	W	W	W	F	
W	F	W	F	W	F	F	F	F	W	F	W	W	W	F
F	W	F	W	F	W	W	W	W	F	W	F	F	F	W
F	F	W	W	F	W	F	F	F	W	F	W	F	F	W

Man sieht, daß das Aufstellen einer vollständigen Wahrheitstafel für eine große Formel einen immensen Arbeitsaufwand bedeutet. Bei n Variablen und m Junktoren in der Formel, muß man $2^n \cdot m$ Wahrheitswerte hinschreiben, dies sind z.B. bei 10 Aussagenvariablen und 30 Junktoren bereits 30720 Einträge, wofür man bei einem Wert pro Sekunde über 8 Stunden braucht. Bei einer doppelt so großen Formel, 20 Aussagenvariablen und 60 Junktoren, bräuchte man bereits zwei Jahre! Um das Ergebnis unter einer einzigen Belegung zu erhalten, muß man dagegen nur die betreffende Zeile ausrechnen, was schnell geht.

Mit gewissen Überlegungen kann man etwas Arbeit sparen. Es ist klar, daß Aussagenvariablen, die in einer Formel nicht auftreten, für die Auswertung auch keine Rolle spielen. Im Beispiel hängen die Werte für $(A \wedge \neg\perp)$ nicht von B ab: Zwei Belegungen, die sich nur auf B unterscheiden, liefern den gleichen Wahrheitswert. Man kann sich für diese Teilformel also zwei Zeilen sparen. Ebenso kennt man das Gesamtergebnis einer Disjunktion oder Konjunktion, wenn für ein Disjunktions- bzw. Konjunktionsglied bereits ein Wahrheitswert W bzw. F vorliegt. Im Beispiel würden also folgende Wahrheitswerte genügen, wenn man bei jeder Disjunktion und Konjunktion zunächst die kürzere Seite auswertet (dazu muß man aber die Formel „von oben nach unten“ durchlaufen, wobei man leicht den Überblick verlieren kann – günstiger ist hier die Darstellung als Formelbaum):

A	B	$(\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg\neg B) \vee (A \wedge \neg\perp))$												
W	W									W				
W	F									W	W	W	W	F
F	W	F	W		W	W	F	W	F					
F	F	W			F	F	W	F	W	F	F			

Es gibt aber kein bekanntes Verfahren, und man vermutet stark, daß es keines geben kann, welches für eine beliebige Formel *schnell* entscheidet, ob sie einen gegebenen Wahrheitswertverlauf besitzt. In der zwischen mathematischer Logik und theoretischer Informatik angesiedelten Komplexitätstheorie bekommen diese Fragen eine präzise Bedeutung und spielen eine wichtige Rolle (sogenannten „P = NP“-Problem).

2.2.2 Modelle und Interpretationen:

Ein *Modell* \mathfrak{M} besteht aus

- 1) einem *Universum*, das ist ein festgelegter *Denk- oder Aussagenbereich*, auf den sich Aussagen beziehen werden, und
- 2) für jede auftretende Aussagenvariable aus der Wahl einer Aussage, welche in diesem Universum (zumindest theoretisch) als wahr oder falsch erkannt werden kann.

Ein Modell liefert also eine *Interpretation* jeder Aussagenvariablen durch eine Aussage und damit eine Belegung der Aussagenvariablen. Umgekehrt kann man leicht zu jeder Belegung ein Modell finden, welches diese Belegung liefert. Ein Modell ist somit eine Konkretisierung einer Belegung. Indem man den Aufbau einer Formel nachvollzieht, interpretiert das Modell auch jede aussagenlogische Formel durch eine Aussage. In einem Modell kann somit jeder aussagenlogischen Formel ein Wahrheitswert, W oder F, zugeordnet werden.

Man schreibt $\mathfrak{M} \models \mathcal{S}$, falls die aussagenlogische Formel \mathcal{S} in dem Modell \mathfrak{M} den Wert W zugeordnet bekommt, und sagt, \mathfrak{M} sei ein Modell von \mathcal{S} oder \mathfrak{M} erfüllt \mathcal{S} oder auch \mathcal{S} gilt in \mathfrak{M} . Ist \mathfrak{M} kein Modell von \mathcal{S} , d.h. bekommt \mathcal{S} in \mathfrak{M} den Wahrheitswert F zugeordnet, so schreibt man $\mathfrak{M} \not\models \mathcal{S}$. Entsprechend schreibt man $\mathfrak{M} \models \Sigma$ für eine Formelmenge Σ , falls jede Formel aus Σ in \mathfrak{M} gilt, und $\mathfrak{M} \not\models \mathcal{S}$, falls \mathfrak{M} kein Modell von \mathcal{S} ist. Dazu reicht es aus, daß eine Formel aus Σ in \mathfrak{M} nicht gilt!

Achtung: Weder der Buchstabe \mathfrak{M} noch das Zeichen \models sind Teil der aussagenlogischen Sprache. „ \mathfrak{M} “ ist eine Name für ein Modell, „ \models “ eine abkürzende Schreibweise für „ist Modell von“.

Beispiel: Das Universum des Modells sei Deutschland, die vorkommenden Aussagenvariablen A, B, C werden durch *Freiburg wurde von den Herzogen von Zähringen gegründet, In Freiburg gibt es eine Universität* beziehungsweise *Freiburg liegt an der Saane* interpretiert. Dann ist dies ein Modell von $((A \wedge B) \wedge \neg C)$. Wäre bei gleicher Interpretation der Aussagenvariablen das Universum die Schweiz, so hätte man kein Modell dieser Formel, aber ein Modell von $((A \wedge B) \wedge C)$.

2.3 Aussagen über Sätze und Metasprache

Eine aussagenlogische Formel heißt eine *Tautologie*, wenn ihr unter allen Belegungen der darin vorkommenden Aussagenvariablen der Wahrheitswert W zukommt, und *Antilogie*, wenn ihr unter allen Belegungen der darin vorkommenden Aussagenvariablen der Wahrheitswert F zukommt.

Eine aussagenlogische Formel \mathcal{S} (bzw. eine Menge Σ aussagenlogischer Formeln) heißt *erfüllbar* oder *konsistent*, wenn es mindestens eine Belegung der vorkommenden Aussagenvariablen gibt, unter der \mathcal{S} (bzw. alle Sätze in Σ) den Wahrheitswert W zugeordnet bekommen.

Eine aussagenlogische Formel \mathcal{T} folgt logisch aus einer aussagenlogischen Formel \mathcal{S} oder aus einer Menge Σ aussagenlogischer Formeln, falls \mathcal{T} wahr wird unter allen Belegungen der vorkommenden Aussagenvariablen, unter denen \mathcal{S} bzw. alle Formeln in Σ wahr werden.

Zwei aussagenlogische Formeln \mathcal{S} und \mathcal{T} heißen *logisch äquivalent*, wenn ihnen unter allen Belegungen der darin vorkommenden Aussagenvariablen der gleiche Wahrheitswert zukommt, und *logisch kontravalent*, wenn ihnen unter allen Belegungen der darin vorkommenden Aussagenvariablen verschiedene Wahrheitswerte zukommen.

Die Begriffe „Antilogie“ und „logisch kontravalent“ stehen mehr der Vollständigkeit halber hier; sie sind von geringerem Gebrauch.

Beispiele: $(A \vee \neg A)$ und $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$) sind Tautologien; $(A \wedge \neg A)$ eine Antilogie. $(A \wedge B)$ ist eine erfüllbare Formel, die keine Tautologie ist.

A ist logisch äquivalent zu $\neg\neg A$ und auch zu $(A \wedge A)$; $(A \wedge B)$ ist logisch äquivalent zu $(B \wedge A)$. A folgt logisch aus $(A \wedge B)$, aber nicht umgekehrt, wohingegen $(A \wedge B)$ logisch aus der Menge Σ , die aus A und B besteht, folgt.

Aus \perp folgt logisch jeder beliebige Satz; dual dazu folgt \top logisch aus jedem anderen Satz.

Kurzschreibweisen: Für „ \mathcal{S} ist eine Tautologie“ kann man abkürzend „ $\vdash \mathcal{S}$ “ schreiben. Für „ \mathcal{T} folgt logisch aus \mathcal{S} “ kann man „ $\mathcal{S} \vdash \mathcal{T}$ “ schreiben; entsprechend für eine Formelmenge Σ anstelle von \mathcal{S} . Schließlich stehe „ $\mathcal{S} \sim \mathcal{T}$ “ für „ \mathcal{S} und \mathcal{T} sind logisch äquivalent“.

Die Benutzung desselben Zeichens \vdash für Tautologien und logische Folgerung rechtfertigt sich folgendermaßen: In $\vdash \mathcal{S}$ steht links des Zeichens die leere Menge an aussagenlogischen Sätzen,

und ein Satz \mathcal{S} ist genau dann eine Tautologie, wenn \mathcal{S} logisch aus der leeren Menge aussagenlogischer Formeln folgt.

Für die anderen Begriffe werden hier keine eigenen Zeichen eingeführt. Man kann jedoch die „verneinten Zeichen“ $\not\sim$ und \approx einführen; dann kann man zum Beispiel $\not\sim \mathcal{S}$ dafür schreiben, daß \mathcal{S} erfüllbar ist, wie aus den unten ausgeführten Zusammenhängen hervorgeht.

Warnung! Die Zeichen \vdash und \sim sind nicht Teil der aussagenlogischen Sprache! Zum Beispiel sind $A \sim (A \vee A)$ und $\vdash (A \rightarrow A)$ keine aussagenlogischen Formeln, sondern Aussagen über aussagenlogische Formeln. Hier muß man sich die Erörterungen von Seite 11 in Erinnerung rufen:

Im Gegensatz zu den Gewohnheiten beim Gebrauch der natürlichen Sprache unterscheidet man in der formalen Logik genau zwischen einerseits rein syntaktischen Objekten (Zeichenfolgen), also den Formeln, die keine Bedeutung an sich tragen und die hinzuschreiben keine Aussage beinhaltet, und andererseits Aussagen über diese Objekte. Diese Unterscheidung ist schon deshalb notwendig, da in den aussagenlogischen Formeln in der Regel Aussagenvariablen vorkommen und der Wahrheitswert der Formel von der Belegung der Aussagenvariablen abhängt. Eine Aussage wie „ $(A \wedge B)$ ist wahr“ ist außerhalb eines Modelles sinnlos, also solange A und B nicht Wahrheitswerte oder Bedeutungen zugeordnet werden.

Die verschiedenen Ebenen, die man in der natürlichen Sprache durch den Gebrauch von Anführungszeichen kennzeichnen würde, werden in der Aussagenlogik zunächst dadurch transparent, daß die aussagenlogischen Sätze in der besonderen formalen Sprache geschrieben werden, die Aussagen über diese Sätze in natürlicher Sprache. Man kann sich bei einer Aussage über aussagenlogische Sätze also jeden solchen als in Anführungszeichen stehend vorstellen. Diese äußerliche Unterscheidung der verschiedenen Ebenen droht durch die Einführung der Zeichen \vdash und \sim zu verwischen; daher sollte man sie sparsam benutzen, zumindest, solange man noch unsicher im Umgang mit aussagenlogischen Formeln ist. \vdash und \sim kann man als Symbole einer anderen formalen Sprache (der Metasprache im Gegensatz zur aussagenlogischen Objektsprache) verstehen.

Der etwas unübliche Name „Bi-implikation“ anstelle des üblicheren „Äquivalenz“ soll auch sprachlich die Verschiedenheit von \leftrightarrow und \sim hervorheben. Wegen des Zusammenhangs zwischen logischer Äquivalenz zweier Formeln und ihrer Bi-implikation in 4) unten wäre es jedoch vergleichsweise unproblematisch, die Bi-implikation auch als Äquivalenz zu bezeichnen.

Andere Schreibweisen Das Tautologie- und Folgerungszeichen \vdash wurde von Frege in der *Begriffsschrift* eingeführt, der damit als erster eine klare notationelle Unterscheidung zwischen einem Satz und der durch den Satz beschriebenen Aussage einführte. Stattdessen steht oft auch \vDash , als Folgerungszeichen auch \Rightarrow .

Viele Autoren unterscheiden zunächst zwischen einer wie hier semantisch, d.h. über Modelle begründeten Folgerungsbeziehung, die dann mit \vDash bezeichnet wird, und einer syntaktisch, d.h. durch einen Beweiskalkül (siehe Abschnitt 2.5.3) begründeten Folgerungsbeziehung \vdash . Der Vollständigkeitssatz für den betreffenden Kalkül erlaubt es dann, beide zu identifizieren.

Für die logische Äquivalenz gibt es auch die Zeichen \Leftrightarrow , \vDash oder \vDash . Auch in der mathematischen Logik ist \sim kein Standardzeichen. (Das dort häufig benutzte \iff drückt in der Regel eine logische Äquivalenz zwischen Aussagen aus, also noch eine Ebene höher).

2.3.1 Zusammenhänge

Man kann jeden der Begriffe – Tautologie, Antilogie, Erfüllbarkeit, logische Folgerung, logische Äquivalenz – auf jeden der anderen zurückführen, ohne erneut über Wahrheitswerte sprechen zu müssen.

Zunächst ist zu bemerken, daß Tautologien Spezialfälle erfüllbarer Formeln darstellen; Antilogien sind genau die nicht erfüllbaren, d.h. inkonsistenten Sätze. Antilogie ist also ein Gegensatz

zu Tautologie, aber das Gegenteil einer erfüllbaren Formel.

- 1) \mathcal{S} ist dann und nur dann eine Tautologie, wenn $\neg\mathcal{S}$ eine Antilogie ist.
 \mathcal{S} ist dann und nur dann eine Antilogie, wenn $\neg\mathcal{S}$ eine Tautologie ist.
 \mathcal{S} ist dann und nur dann erfüllbar, wenn $\neg\mathcal{S}$ keine Tautologie ist.
- 2) \mathcal{S} ist dann und nur dann eine Tautologie, wenn \mathcal{S} und \top logisch äquivalent sind,
 und dann und nur dann, wenn \mathcal{S} logisch aus \top folgt.
 \mathcal{S} ist dann und nur dann eine Antilogie, wenn \mathcal{S} und \perp logisch äquivalent sind,
 und dann und nur dann, wenn \perp logisch aus \mathcal{S} folgt.
- 3) Eine aussagenlogische Formel \mathcal{T} folgt dann und nur dann logisch aus \mathcal{S} , wenn $(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$ eine Tautologie ist.
- 4) Zwei aussagenlogische Formeln \mathcal{S} und \mathcal{T} sind dann und nur dann logisch äquivalent, wenn $(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$ eine Tautologie ist.
- 5) Zwei aussagenlogische Formeln \mathcal{S} und \mathcal{T} sind dann und nur dann logisch äquivalent, wenn \mathcal{T} logisch aus \mathcal{S} folgt und \mathcal{S} logisch aus \mathcal{T} folgt.

Tabellarisch sei nun zusammengefaßt, wie man die Begriffe *Tautologie*, *Antilogie*, *logische Folgerung* und *logische Äquivalenz* auseinander erklären kann; dabei stehen in jeder Zeile drei verschiedene Weisen, den vorne stehenden Begriff in metasprachlicher Kurzschreibweise zu beschreiben:

Tautologie	$\vdash \mathcal{S}$	$\top \vdash \mathcal{S}$	$\mathcal{S} \sim \top$
Antilogie	$\vdash \neg\mathcal{S}$	$\mathcal{S} \vdash \perp$	$\mathcal{S} \sim \perp$
logische Folgerung	$\vdash (\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$	$\mathcal{S} \vdash \mathcal{T}$	$(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}) \sim \top$
logische Äquivalenz	$\vdash (\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$	$\top \vdash (\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$	$\mathcal{S} \sim \mathcal{T}$

Anmerkungen: Die obigen Sätze haben selbst die Form einer Äquivalenz. Setzt man in 4) A für „zwei aussagenlogische Formeln \mathcal{S} und \mathcal{T} sind logisch äquivalent“ und B für „ $(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$ ist eine Tautologie“, so hat der Satz die Form $(A \leftrightarrow B)$ und sagt $A \sim B$ aus.

Man beachte, daß in 4) drei verschiedene Arten der Äquivalenz auftreten: (a) die rein syntaktische Äquivalenz (Bi-implikation) im Zeichen \leftrightarrow ; (b) die logische Äquivalenz zwischen \mathcal{S} und \mathcal{T} , ausgedrückt im Zeichen \sim ; (c) schließlich die (ebenfalls logische) Äquivalenz des Gesamtsatzes, welche die Gleichwertigkeit von zwei Aussagen über aussagenlogische Sätze behauptet, ausgedrückt im „dann und nur dann, wenn“. (Für letzteres schreibt man in der Mathematik oft \iff für „dann und nur dann, wenn“. Noch kürzer könnte man 4) also als $\mathcal{S} \sim \mathcal{T} \iff \vdash (\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$ schreiben. Man sieht daran einerseits schön den Unterschied der drei Äquivalenzzeichen \leftrightarrow , \sim und \iff . Andererseits erkennt man an der ersten Anmerkung, daß die Frage, auf welcher Ebene man sich befindet, also welches Zeichen angebracht ist, keine absolute Antwort hat, sondern daß es nur um den relativen Bezug der Ebenen untereinander geht.)

2.3.2 Einige logische Gesetze

Durch Ausrechnen von Wahrheitstabellen kann man stets testen, ob zwei Formeln logisch äquivalent sind. Einfacher geht es aber oft, wenn man grundlegende Regeln kennt: Dann kann man manchmal leicht eine Formel in mehreren Schritten in eine andere, logisch äquivalente umformen. Es folgen eine umfangreiche Liste grundlegender Äquivalenzen (sowie einiger Tautologien und logischen Folgerungen), von denen manche auch ein eigenständiges Interesse haben, sowie zwei Substitutionsprinzipien, welche es erlauben, diese grundlegenden Äquivalenzen auch im Falle komplizierterer Formeln auszunutzen.

Die Austausch- oder Substitutionsregeln Zunächst sollte man sich folgendes überlegen: Wenn man in einer aussagenlogischen Formel eine Teilformel durch eine andere Formel ersetzt, dann entsteht insgesamt wieder eine aussagenlogische Formel. Es gelten nun die beiden wichtigen Regeln:

Uniforme Substitution: Wenn man in einer Tautologie (oder in zwei logisch äquivalenten Sätzen, oder in allen Sätzen einer logischen Folgerung $\Sigma \vdash \mathcal{S}$) jedes Vorkommen einer Aussagenvariablen durch dieselbe aussagenlogische Formel ersetzt, so erhält man wieder eine Tautologie (bzw. zwei logisch äquivalente Sätze oder eine Beziehung logischer Folgerung).

Äquivalente Substitution: Wenn man in einer Tautologie (oder in zwei logisch äquivalenten Sätzen, oder in allen Sätzen einer logischen Folgerung $\Sigma \vdash \mathcal{S}$) irgendeine Teilformel durch eine dazu logisch äquivalente Formel ersetzt, so erhält man wieder eine Tautologie (bzw. zwei logisch äquivalente Sätze oder eine Beziehung logischer Folgerung).

Beide Regeln ergeben sich daraus, daß die Konzepte Tautologie, logische Folgerung und logische Äquivalenz nur von den Wahrheitswertverteilungen abhängen.

Beispiele: a) Aus den beiden Sätzen $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C)$ folgt logisch $(A \rightarrow C)$. Ersetzt man A durch $(B \vee (D \rightarrow A))$ und gleichzeitig B durch $(A \wedge B)$, so erhält man, daß aus den beiden Sätzen $((B \vee (D \rightarrow A)) \rightarrow (A \wedge B))$ und $((A \wedge B) \rightarrow C)$ logisch der Satz $((B \vee (D \rightarrow A)) \rightarrow C)$ folgt.

b) $(A \vee \neg A)$ ist eine Tautologie. Ersetzt man das zweite A durch das logisch äquivalente $(A \wedge A)$, erhält man eine Tautologie $(A \vee \neg(A \wedge A))$.

Die nun folgenden Tautologien, logischen Folgerungen und Äquivalenzen beschreiben die wichtigsten Eigenschaften der Junktoren.

Eigenschaften von \top und \perp (siehe auch Seite 38)

Definition	$\vdash \top$	$\vdash \neg\perp$
Dualität	$\top \sim \neg\perp$	$\perp \sim \neg\top$
Neutralität	$(A \wedge \top) \sim A$	$(A \vee \perp) \sim A$
Absorption	$(A \vee \top) \sim \top$	$(A \wedge \perp) \sim \perp$
<i>verum ex quodlibet/ex falso quodlibet</i>	$A \vdash \top$	$\perp \vdash A$

Eigenschaften der Negation

Doppelnegationsregel	$\neg\neg A \sim A$
ausgeschl. Drittes/ausgeschl. Widerspruch	$\vdash (A \vee \neg A) \quad \vdash \neg(A \wedge \neg A)$
<i>reductio ad absurdum</i>	$(A \rightarrow \neg A) \sim \neg A \quad (\neg A \rightarrow A) \sim A$

Eigenschaften der Konjunktion und Disjunktion

Monotonie	$(A \wedge B) \vdash A$	$A \vdash (A \vee B)$
idempotent	$(A \wedge A) \sim A$	$(A \vee A) \sim A$
kommutativ	$(A \wedge B) \sim (B \wedge A)$	$(A \vee B) \sim (B \vee A)$
assoziativ	$((A \wedge B) \wedge C) \sim (A \wedge (B \wedge C))$	$((A \vee B) \vee C) \sim (A \vee (B \vee C))$
distributiv	$((A \wedge B) \vee C) \sim ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$	$((A \vee B) \wedge C) \sim ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$
<i>de Morgan</i>	$\neg(A \wedge B) \sim (\neg A \vee \neg B)$	$\neg(A \vee B) \sim (\neg A \wedge \neg B)$
Absorption	$(A \wedge (A \vee B)) \sim A$	$(A \vee (A \wedge B)) \sim A$

Eigenschaften der Implikation

Identität/—	$\vdash (A \rightarrow A)$	$(A \rightarrow \neg A) \sim \neg A$
Definition	$(A \rightarrow B) \sim (\neg A \vee B)$	$(A \rightarrow B) \sim \neg(A \wedge \neg B)$
Kontraposition	$(A \rightarrow B) \sim (\neg B \rightarrow \neg A)$	
	$(A \rightarrow \neg B) \sim (B \rightarrow \neg A)$	$(\neg A \rightarrow B) \sim (\neg B \rightarrow A)$
Fallunterscheidung	$\vdash ((A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow B))$	$\vdash ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow \neg B))$
Transitivität	$(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$	
(nicht assoziativ)	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \sim ((A \wedge B) \rightarrow C) \sim ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	
	$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \sim ((\neg A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$	
(Anti-)Distributivität	$(A \rightarrow (B \wedge C)) \sim ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$	$(A \rightarrow (B \vee C)) \sim ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))$
	$((A \wedge B) \rightarrow C) \sim ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$	$((A \vee B) \rightarrow C) \sim ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$

Eigenschaften der Bi-implikation

	$(A \leftrightarrow B) \sim ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \sim ((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \sim ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$
Identität/—	$\vdash (A \leftrightarrow A) \quad \vdash \neg(A \leftrightarrow \neg A)$
kommutativ/assoziativ	$(A \leftrightarrow B) \sim (B \leftrightarrow A) \quad ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \sim (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$
Kontraposition	$(A \leftrightarrow B) \sim (\neg A \leftrightarrow \neg B) \quad \neg(A \leftrightarrow B) \sim (\neg A \leftrightarrow B) \sim (A \leftrightarrow \neg B)$
Transitivität	$(A \leftrightarrow B), (B \leftrightarrow C) \vdash (A \leftrightarrow C)$
Kongruenz	$(A \leftrightarrow C), (B \leftrightarrow D) \vdash ((A \wedge B) \leftrightarrow (C \wedge D))$
	$(A \leftrightarrow C), (B \leftrightarrow D) \vdash ((A \vee B) \leftrightarrow (C \vee D))$
	$(A \leftrightarrow C), (B \leftrightarrow D) \vdash ((A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow D))$

Negationstechniken und Dualität Ist \mathcal{S} ein zusammengesetzter aussagenlogischer Satz, so kann man mit den logischen Gesetzen einen zur Negation $\neg\mathcal{S}$ logisch äquivalenten Satz finden, indem man die Negation „nach innen zieht“. Dazu braucht man die Regeln:

„Dualität“	$\neg\top \sim \perp$	$\neg\perp \sim \top$
Doppelnegation	$\neg\neg\mathcal{S} \sim \mathcal{S}$	
de Morgan	$\neg(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}) \sim (\neg\mathcal{S} \vee \neg\mathcal{T})$	
	$\neg(\mathcal{S} \vee \mathcal{T}) \sim (\neg\mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{T})$	
Verneinung der Implikation	$\neg(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}) \sim (\mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{T})$	
Verneinung der Bi-implikation	$\neg(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T}) \sim (\neg\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T}) \sim (\mathcal{S} \leftrightarrow \neg\mathcal{T})$	

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } \neg((A \rightarrow B) \wedge (\neg A \vee (\perp \leftrightarrow B))) &\sim (\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(\neg A \vee (\perp \leftrightarrow B))) \\ &\sim ((A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg A \wedge \neg(\perp \leftrightarrow B))) \\ &\sim ((A \wedge \neg B) \vee (A \wedge (\neg\perp \leftrightarrow B))) \\ &\sim ((A \wedge \neg B) \vee (A \wedge (\top \leftrightarrow B))) \end{aligned}$$

Dies könnte man noch weiter umformen zu $((A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) \sim (A \wedge (\neg B \vee B)) \sim A$.

Die de-Morganschen-Regeln kann man ausweiten zu einem allgemeineren Dualitätsprinzip: Wenn \mathcal{S} eine Formel ist, in der nur die Junktoren \neg, \wedge, \vee auftreten und die Negationszeichen \neg nur direkt vor Aussagenvariablen, so erhält man eine zu $\neg\mathcal{S}$ logisch äquivalente Formel dadurch, daß man alle Vorkommen von \wedge und \vee vertauscht, alle Negationszeichen löscht und alle Aussagenvariablen, die in \mathcal{S} ohne Negationszeichen standen, mit einem solchen versieht.

$$\text{Beispiel: } \neg((A \wedge (\neg C \vee B)) \vee ((C \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C))) \sim ((\neg A \vee (C \wedge \neg B)) \wedge ((\neg C \vee B) \wedge (\neg A \vee C)))$$

Dieses Dualitätsprinzip kann man auch auf die anderen Junktoren ausdehnen, sofern man alle denkbaren zweistelligen Junktoren zuläßt (siehe den betreffenden Abschnitt auf Seite 32). Dann sind dual zueinander:

\top und \perp	\wedge und \vee	\uparrow und \Downarrow
\leftrightarrow und \Leftrightarrow	\rightarrow und \Leftarrow	\leftarrow und \Rightarrow

2.3.3 Fehlerquellen

Auf die wichtigsten Fehlschlüsse wird in Abschnitt 2.5.2 hingewiesen: Meist wird dabei in der ein oder anderen, oft versteckten Weise aus einer Implikation ($A \rightarrow B$) die Gegenrichtung ($B \rightarrow A$) gefolgert, bisweilen aus einer Verwechslung der Implikation mit der Bi-implikation heraus (siehe dazu auch die Anmerkungen zu Implikation und Bi-implikation in Abschnitt 2.6).

Ein weiterer beliebter Fehler ist die Verwechslung von ein- und ausschließendem Oder, was, wie unten erläutert, gewissermaßen der gleiche Fehler ist.

Schließlich passieren gerne Fehler durch falsche Anwendung der Regeln von de Morgan, oder allgemeiner falschen Verneinungen zusammengesetzter Formeln, oder auch dadurch, daß man durch fehlerbehaftetes intuitives Verständnis logische Äquivalenzen vermutet, wo keine vorliegen. Etwa neigt man dazu, $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$ umzuformen in $((A \wedge B) \rightarrow C)$, es muß aber $((A \vee B) \rightarrow C)$ werden: Da die linke Seite einer Implikation gewissermaßen die verneinte Seite ist, dreht sich hier durch eine versteckte Anwendung der Regel von de Morgan das \wedge in ein \vee um.

Implikation und Disjunktion Die (klassische) aussagenlogische Implikation ($A \rightarrow B$) ist durch ihre Definition per Wahrheitstafel logisch äquivalent zu $(\neg A \vee B)$. Dadurch ergeben sich einige „Merkwürdigkeiten“: zum einen die sogenannten „Paradoxa der Implikation“, also die Regeln *ex falso quodlibet* und *verum ex quodlibet*, zum andern aber auch Konsequenzen für die Bi-implikation, die nämlich logisch äquivalent zum verneinten ausschließenden Oder wird: $(A \leftrightarrow B) \sim \neg(A \dot{\vee} B)$. Dies bringt zwei eigenständige logische Begriffe in unerwarteten Zusammenhang (der z.B. in der intuitionistischen Aussagenlogik nicht gilt). Da weiterhin $\neg(A \dot{\vee} B) \sim (\neg A \dot{\vee} B)$, erhält man die logische Äquivalenz von $(A \leftrightarrow B)$ und $(\neg A \dot{\vee} B)$, also die gleiche Darstellung wie bei der Implikation, aber mit ausschließendem statt einschließendem Oder. Somit ist der gängige Fehler, Implikation mit Bi-implikation zu verwechseln, derselbe wie einschließendes mit ausschließendem Oder zu verwechseln.

„Paradoxon der Disjunktion“ $((A \rightarrow B) \dot{\vee} (A \rightarrow \neg B))$ ist eine Tautologie; man muß sich aber vor der irrigen Übersetzung *Entweder B folgt logisch aus A oder $\neg B$ folgt logisch aus A* hüten, die im allgemeinen falsch ist. Der Grund ist, daß man hier das Distributivgesetz einmal richtig, und einmal falsch unter Verschiebung der Bedeutungsebenen verwendet.

Aus $\vdash (A \rightarrow \top)$, also $\vdash (A \rightarrow (B \dot{\vee} \neg B))$ folgt mit dem richtig verwendeten Distributivgesetz nämlich, daß $((A \rightarrow B) \dot{\vee} (A \rightarrow \neg B))$ eine Tautologie ist. Sprachlich ausgedrückt: $((A \rightarrow B) \dot{\vee} (A \rightarrow \neg B))$ ist wahr, d.h. bekommt stets den Wahrheitswert W zugeordnet, da entweder $(A \rightarrow B)$ wahr ist, d.h. den Wahrheitswert W bekommt, oder $(A \rightarrow \neg B)$. Die falsche Verwendung des Distributivgesetzes, die der irrigen Übersetzung zugrunde liegt, wäre nun, umgekehrt zu schließen: $((A \rightarrow B) \dot{\vee} (A \rightarrow \neg B))$ ist eine Tautologie, also ist entweder $(A \rightarrow B)$ eine Tautologie oder $(A \rightarrow \neg B)$. Das syntaktische Oder $\dot{\vee}$ verhält sich also distributiv zu „wahr sein“ im Sinne der Zuordnung des Wahrheitswertes W, nicht aber zu „wahr sein“ im Sinne des sich auf der übergeordneten Ebene befindlichen „eine Tautologie sein“. Diese Verwechslung liegt nahe, da man beim Lesen nicht unterscheidet zwischen „ $(S \vee T)$ ist eine Tautologie“, wofür das Distributivgesetz nicht gilt, und „S oder T ist eine Tautologie“, was gerade – die natürliche Sprache benutzt das Distributivgesetz! – „S ist eine Tautologie oder T ist eine Tautologie“ bedeutet. (Ob man hier das ausschließende oder das einschließende Oder versteht, spielt für diese Problematik keine Rolle.)

Ein einfacheres Beispiel, das daher aber weniger gefährlich ist, weil man es leichter durchschaut, ist die Tautologie $(A \vee \neg A)$. Liest man laut „A oder non A ist eine Tautologie“, so dürfte man bei einem metasprachlichen Oder das Distributivgesetz, das die natürliche Sprache benutzt, anwenden, und den Satz in „A ist eine Tautologie oder non A ist eine Tautologie“ auflösen. Da

es sich aber um ein objektsprachliches Oder handelt, darf man dies nicht: aus $\vdash (A \vee \neg A)$ folgt eben nicht $\vdash A$ oder $\vdash \neg A$.

2.4 Junktorensysteme

Die Regel $(A \rightarrow B) \sim (\neg A \vee B)$ zeigt, daß man auf den Junktor \rightarrow auch hätte verzichten können; andererseits hätte man auch einen weiteren Junktor \leftarrow einführen können mit der Eigenschaft, daß $(A \leftarrow B)$ logisch äquivalent zu $(B \rightarrow A)$ ist. Dieser Abschnitt soll unter anderem der Frage nachgehen, warum nicht andere Junktoren gewählt wurden und welche Möglichkeiten es dafür gegeben hätte; zunächst aber aufzeigen, daß keine weiteren Junktoren nötig sind.

2.4.1 Disjunktive und konjunktive Normalform

Ist ein Wahrheitswertverlauf gegeben, so kann man diesen in einer Formel beschreiben. Dazu gibt es zwei einfache Möglichkeiten: Man arbeitet entweder alle vorkommenden Wahrheitswerte W ab, oder alle vorkommenden Wahrheitswerte F . Die genauen Verfahren werden im Anschluß beschrieben: Das erste liefert eine Formel in sogenannter *disjunktiver Normalform* (DNF), das zweite in *konjunktiver Normalform* (KNF). Beide kommen mit den Junktoren \neg , \wedge , \vee sowie in Extremfällen \perp bzw. \top aus. Insbesondere wird damit gezeigt sein, daß bis auf logische Äquivalenz die bisher eingeführten aussagenlogischen Formeln alles ausdrücken können und keine weiteren Junktoren nötig sind.

Die Verfahren liefern insbesondere zu einer gegebenen aussagenlogischen Formel S logisch äquivalente Formeln in disjunktiver bzw. konjunktiver Normalform. Diese heißen dann auch disjunktive bzw. konjunktive Normalform von S . Beide benutzen nur die in der Ausgangsformel auftretenden Aussagenvariablen.

Das Verfahren für die disjunktive Normalform

- Für jede Zeile einer Wahrheitstafel kann man eine Formel angeben, welche nur in dieser Zeile den Wert W annimmt, und sonst stets F . Dazu nimmt man die Aussagenvariablen, die in dieser Zeile mit W belegt werden, und die Negate der Aussagenvariablen, die in dieser Zeile mit F belegt werden, und bildet die Konjunktion davon. (Bei n Aussagenvariablen also eine $(n - 1)$ -fache Konjunktion.)
- Für jede Zeile einer Wahrheitswertverteilung, in welcher W auftritt, nimmt man nun diese Formeln und bildet die Disjunktion all dieser Formeln: Dies ist die disjunktive Normalform.

Beispiel: Bei drei Aussagenvariablen ist eine Formel S mit der folgenden Wahrheitswertverteilung gesucht

A	B	C	S	$((A \wedge B) \wedge \neg C)$	$((A \wedge \neg B) \wedge C)$	$((\neg A \wedge B) \wedge \neg C)$
W	W	W	F	F	F	F
W	W	F	W	W	F	F
W	F	W	W	F	W	F
W	F	F	F	F	F	F
F	W	W	F	F	F	F
F	W	F	W	F	F	W
F	F	W	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Auf der rechten Seite sind die Konjunktionen für den ersten Schritt angegeben. Die Verteilung der Negationszeichen entspricht dabei genau den Wahrheitswerten der Zeile, in welcher sich W ergibt: Die Negationszeichen stehen bei den Aussagenvariablen, welche mit F belegt sind, und

nicht bei den andern. Im zweiten Schritt bildet man nun die Disjunktion dieser Konjunktionen, also

$$\mathcal{S} = (((A \wedge B) \wedge \neg C) \vee ((A \wedge \neg B) \wedge C)) \vee ((\neg A \wedge B) \wedge \neg C)$$

Das Verfahren für die konjunktive Normalform Dieses Verfahren arbeitet dual zum DNF-Verfahren; man vertauscht also überall W mit F und \wedge mit \vee :

- Für jede Zeile einer Wahrheitstafel kann man eine Formel angeben, welche nur in dieser Zeile den Wert F annimmt, und sonst stets W . Dazu nimmt man die Aussagenvariablen, die in dieser Zeile mit F belegt werden, und die Negate der Aussagenvariablen, die in dieser Zeile mit W belegt werden, und bildet die Disjunktion davon. (Bei n Aussagenvariablen also eine $(n - 1)$ -fache Disjunktion.)
- Für jede Zeile einer Wahrheitswertverteilung, in welcher F auftritt, nimmt man nun diese Formeln und bildet die Konjunktion all dieser Formeln: dies ist die konjunktive Normalform.

Im obigen Beispiel ergibt sich im ersten Schritt für die zeilenweisen Disjunktionen:

$((\neg A \vee \neg B) \vee \neg C)$	$((\neg A \vee B) \vee C)$	$((A \vee \neg B) \vee \neg C)$	$((A \vee B) \vee \neg C)$	$((A \vee B) \vee C)$
F	W	W	W	W
W	W	W	W	W
W	W	W	W	W
W	F	W	W	W
W	W	F	W	W
W	W	W	W	W
W	W	W	F	W
W	W	W	W	F

Die Verteilung der Negationszeichen entspricht dabei wieder genau den Wahrheitswerten der Zeile, in welcher sich F ergibt: Die Negationszeichen stehen bei den Aussagenvariablen, welche mit W belegt sind, und nicht bei den andern.

Im zweiten Schritt bildet man nun die Konjunktion dieser Disjunktionen, also $\mathcal{T} =$

$$((((\neg A \vee \neg B) \vee \neg C) \wedge ((\neg A \vee B) \vee C)) \wedge ((A \vee \neg B) \vee \neg C)) \wedge ((A \vee B) \vee \neg C) \wedge ((A \vee B) \vee C)$$

Extremfälle Falls eine Antilogie vorliegt, also die Wahrheitsverteilung nur aus F besteht, führt das Verfahren für die disjunktive Normalform zu keinen Konjunktionen, die in einer Disjunktion zusammengesetzt werden können. In diesem Fall wird \perp als die disjunktive Normalform gesetzt. Ebenso soll \top die konjunktive Normalform einer Tautologie sein.

Außerdem funktioniert das Verfahren nicht, wenn gar keine Aussagenvariablen auftreten. Dann handelt es sich entweder um eine Tautologie oder um eine Antilogie, und \top sei die Normalform solcher Tautologien und \perp die Normalform solcher Antilogien. Dahingegen lassen sich die disjunktive Normalform einer Tautologie mit Aussagenvariablen und die konjunktive Normalform einer Antilogie mit Aussagenvariablen nach der Methode konstruieren. Die disjunktive Normalform der Tautologie $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$ ist also $((((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)) \vee (\neg A \wedge B)) \vee (\neg A \wedge \neg B))$.

Beide Normalformen sind nicht eindeutig bestimmt: Weder die Reihenfolge der Aussagenvariablen noch die Reihenfolge der Zeilen der Wahrheitstafel noch die Reihenfolge, in welcher die Konjunktionen und Disjunktionen gebildet werden, ist festgelegt. Also wäre auch

$$\mathcal{S}' = ((B \wedge (\neg A \wedge \neg C)) \vee ((\neg B \wedge (A \wedge C)) \vee (B \wedge (A \wedge \neg C))))$$

eine disjunktive Normalform für den Satz \mathcal{S} . Es ist aber üblich, die Reihenfolge der Aussagenvariablen in jedem Disjunktionsglied beizubehalten.

Arbeitet man viel mit konjunktiven oder disjunktiven Normalformen, sollte man der Übersichtlichkeit halber Regeln einführen, die es gestatten, unnötige Klammern wegzulassen. Dann würde man z.B. $\mathcal{S} = ((A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C))$ schreiben.

Tabelle 2.1: alle zweistelligen Junktoren

A	B	\top	\vee	\leftarrow	A	\rightarrow	B	\leftrightarrow	\wedge	\uparrow	\leftrightarrow	$\neg B$	\nrightarrow	$\neg A$	\leftarrow	ψ	\perp
W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	F	F	F	F	F	F	F	F
W	F	W	W	W	W	F	F	F	F	W	W	W	W	F	F	F	F
F	W	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F
F	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F

2.4.2 Junktoren

\neg ist ein einstelliger, $\wedge, \vee, \rightarrow$ und \leftrightarrow sind zweistellige Junktoren. Allgemeiner ordnet ein n -stelliger *Junktor* jeder der 2^n möglichen Verteilungen von n Wahrheitswerten wieder einen Wahrheitswert zu.⁴ In diesem Sinne ist zum Beispiel \wedge der Junktor, der $W W$ den Wahrheitswert W zuordnet, $W F$ sowie $F W$ und $F F$ jeweils den Wahrheitswert F . Ist J ein zum Beispiel dreistelliger Junktor, so könnte man aus aussagenlogischen Formeln \mathcal{S}, \mathcal{T} und \mathcal{U} eine neue Formel $J(\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{U})$ bilden, der in Abhängigkeit von Wahrheitswerten für \mathcal{S}, \mathcal{T} und \mathcal{U} ein Wahrheitswert gemäß J zugeordnet werden könnte.

0-stellige Junktoren Der Vollständigkeit halber kann man die aussagenlogischen Konstanten \top und \perp als 0-stellige Junktoren auffassen; sie geben gewissermaßen einen Wahrheitswert als Ausgabe auch ohne Eingabe.

1-stellige Junktoren: Es gibt vier einstellige Junktoren: der Junktor, der stets W ausgibt, der Junktor, der stets F ausgibt, der „Identitäts-Junktor“, der seine Eingabe wieder ausgibt, und den Negations-Junktor, der W in F und F in W verwandelt. Aus einer Formel A machen diese Junktoren in gleicher Reihenfolge bis auf logische Äquivalenz die Formeln \top, \perp, A und $\neg A$. Zusammenfassend als Tabelle:

A	\top	A	$\neg A$	\perp
W	W	W	F	F
F	W	F	W	F

Die einstelligen Junktoren sind also in der hier vorgestellten Sprache alle abgedeckt, denn der „Identitäts-Junktor“ bedarf auf der Formelebene keines Zeichens.

2-stellige Junktoren Es gibt sechzehn zweistellige Junktoren, die in Tabelle 2.1 zusammengefaßt sind. Vier dieser Junktoren sind eigentlich einstellig, da sie nur vom ersten oder nur vom zweiten Wert abhängen, und zwei eigentlich nullstellig. Sie bekommen in der Tabelle kein eigenes Zeichen; stattdessen ist die Formal angegeben, die sich ergibt, wenn man aus A und B mit diesem Junktor eine neue Formel bildet – dies sind $A, B, \neg A$ und $\neg B$ – bzw. \top und \perp . Für vier der restlichen zehn Junktoren gibt es Zeichen; für die anderen sechs könnte man neue Zeichen einführen. In der Tabelle ist eine systematische Möglichkeit dazu angegeben: Dabei zeigt ein Strich durch einen Junktor den negierten Junktor an, also $(A \nrightarrow B) \sim \neg(A \rightarrow B)$, $(A \uparrow B) \sim \neg(A \wedge B)$ usw. Achtung: Diese Zeichen sind nicht Teil der für dieses Skript „offiziellen“ aussagenlogischen Sprache!

Insbesondere \uparrow und ψ sind keine Standardnotationen; üblich ist der *Sheffersche Strich* $(A|B)$ anstelle von $(A \uparrow B)$; ψ ist dann der duale Junktor $\neg(\neg A|\neg B)$, für den es keine übliche Notation gibt. Die negierte Äquivalenz \leftrightarrow funktioniert wie das *ausschließende Oder* und wird als solches oft $\dot{\vee}$ geschrieben.

⁴Genauer sind \neg usw. *Zeichen* für Junktoren; ebenso ist z.B. die Disjunktion zweier Sätze \mathcal{S} und \mathcal{T} eigentlich die Zusammenfassung beider durch den Junktor „Oder“, und $(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})$ nur eine zeichenhafte Darstellung dessen.

Abbildung 2.2: Der Verband der Formeln in zwei Aussagenvariablen A und B

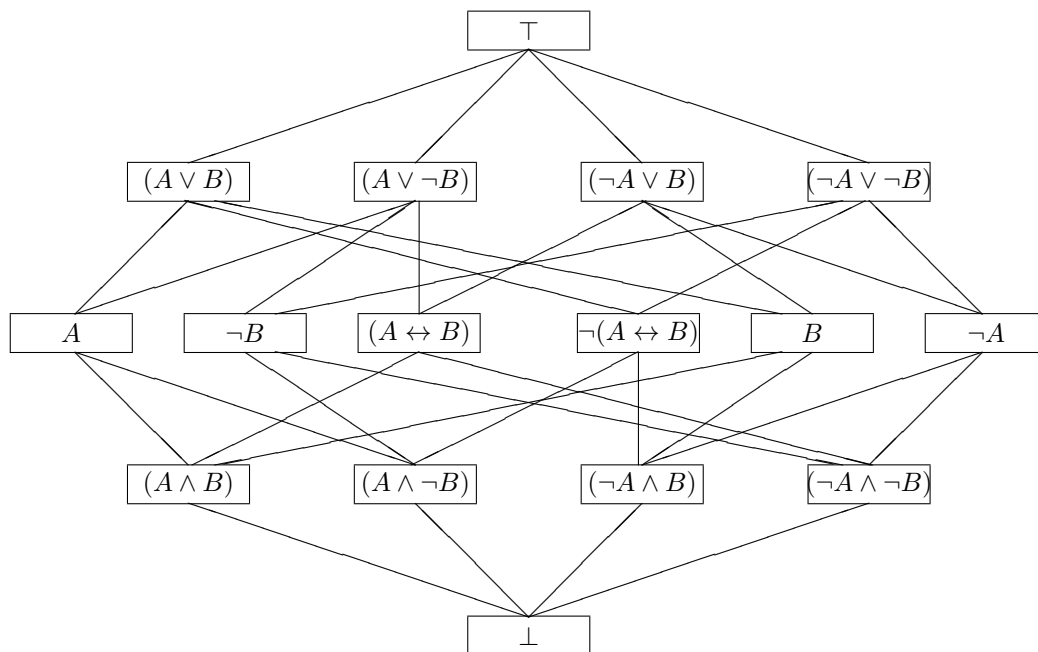


Tabelle 2.2 zeigt noch einmal alle möglichen zweistelligen Junktoren mit den zugehörigen konjunktiven und disjunktiven Normalformen sowie einer Auswahl dazu äquivalenter Formeln. Die Belegungen sind hier nun vertikal statt wie bislang horizontal notiert.

Bis auf logische Äquivalenz gibt es also genau 16 verschiedene Formeln mit zwei Aussagenvariablen. Diese kann man in einem Diagramm anordnen: siehe Abbildung 2.2. Zunächst sind sie in Schichten eingeteilt: In der obersten Schicht taucht viermal der Wahrheitswert W auf, in der zweiten dreimal, und so fort bis zum Falsum in der untersten Schicht. Die geraden Striche geben an, daß die oben stehende Formel (also die mit mehr Wahrheitswerten W) aus der unten stehenden logisch folgt: Eine Formel S folgt logisch aus T , wenn man von T anhand von nach oben laufenden geraden Strichen zu S gelangen kann.

Außerdem ist die Disjunktion zweier Formeln logisch äquivalent zu der „niedersten“ Formel, die aus beiden folgt, und die Konjunktion zu der „höchsten“, aus der beide folgen. Zum Beispiel gilt also $(A \vee (A \leftrightarrow B)) \sim (A \vee \neg B)$. Die Negation einer Formel S ist logisch äquivalent zu der einzigen Formel, die sich mit S erst in \perp und \top „trifft“.

(Die in dem Diagramm dargestellte Struktur wird in der Mathematik ein *Boolescher Verband* genannt, hier der von A und B frei erzeugte Boolesche Verband.)

3- und höherstellige Junktoren Diese haben üblicherweise keine besonderen Namen oder Zeichen. Die disjunktive (oder auch die konjunktive) Normalform zeigt, daß jeder höherstellige Junktoren bereits durch zweistellige Junktoren dargestellt werden kann.

Man beachte: es gibt 2^n Möglichkeiten, Verteilungen von n Wahrheitswerten zu erstellen. Hat man also n Aussagenvariablen in einer Formel, muß man eine Wahrheitstafel mit 2^n Zeilen aufstellen. Für jede dieser Zeilen kann man W oder F auswählen, um einen n -stelligen Junktoren zu bilden. Dies bedeutet, daß es 2^{2^n} viele n -stelligen Junktoren gibt: erhöht man die Stelligkeit um Eins, quadriert sich die Anzahl der Junktoren. Dies sind 256 3-stellige Junktoren, 65 536 4-stellige Junktoren, 4 294 967 296 5-stellige Junktoren...

Dies bedeutet auch, daß es bis auf logische Äquivalenz genau 256 Formeln mit drei festen Aussagenvariablen gibt, die man ebenso wie die Formeln in zwei Aussagenvariablen in einem Diagramm wie auf Seite 33 anordnen könnte.

Tabelle 2.2: Tabelle aller zweistelligen Junktoren

Belegung		Aussagenvariablen		
W	W	F	F	
W	F	W	F	
W	F	F	F	
		A	B	
Jkt	Verteilung	disjunktive und konjunktive Normalform		äquivalent
\top	W W W W	DNF $((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	KNF \top	$(A \vee \neg A), \neg(A \wedge \neg A)$ $(A \rightarrow A), (A \leftrightarrow A)$
\perp	F F F F	DNF \perp	KNF $((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)$	$(A \wedge \neg A), \neg(A \vee \neg A)$ $(A \rightarrow \neg A), (A \leftrightarrow \neg A)$
	W W F F	DNF $((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B))$	KNF $((A \vee \neg B) \wedge (A \vee B))$	$A, (A \wedge A), (A \vee A)$ $(\top \rightarrow A), (\top \leftrightarrow A)$
	W F W F	DNF $((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B))$	KNF $((\neg A \vee B) \wedge (A \vee B))$	$B, (B \wedge B), (B \vee B)$ $(\top \rightarrow B), (\top \leftrightarrow B)$
	F W F W	DNF $((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	KNF $((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B))$	$\neg B, (B \rightarrow \perp)$
	F F W W	DNF $((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	KNF $((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B))$	$\neg A, (A \rightarrow \perp)$
\vee	W W W F	DNF $((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$	KNF $(A \vee B)$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$
\leftarrow	W W F W	DNF $((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	KNF $(A \vee \neg B)$	$(B \rightarrow A)$ $\neg(\neg A \wedge B)$
\rightarrow	W F W W	DNF $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	KNF $(\neg A \vee B)$	$\neg(A \wedge \neg B)$
\leftrightarrow	W F F W	DNF $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	KNF $((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B))$	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ $\neg(A \dot{\vee} B), (\neg A \dot{\vee} B)$
\wedge	W F F F	DNF $(A \wedge B)$	KNF $((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B))$	$\neg(\neg A \vee \neg B)$
\uparrow	F W W W	DNF $((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	KNF $(\neg A \vee \neg B)$	$(A \rightarrow \neg B)$ $\neg(A \wedge B)$
\Leftrightarrow	F W W F	DNF $((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$	KNF $((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B))$	$(A \dot{\vee} B)$
\nrightarrow	F W F F	DNF $(A \wedge \neg B)$	KNF $((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B))$	$\neg(A \rightarrow B)$ $\neg(\neg A \vee B)$
\Leftarrow	F F W F	DNF $(\neg A \wedge B)$	KNF $((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee B))$	$\neg(B \rightarrow A)$ $\neg(\neg B \vee A)$
Ψ	F F F W	DNF $(\neg A \wedge \neg B)$	KNF $((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B))$	$\neg(A \vee B), \neg(\neg A \rightarrow B)$ $\neg(\neg B \rightarrow A)$

2.4.3 Vollständige Junktorensysteme

Eine Auswahl von Junktoren heißt *vollständiges Junktorensystem*, wenn zu jeder aussagenlogischen Formel eine logisch äquivalente Formel existiert, die nur diese Junktoren benutzt.

Die disjunktive Normalform zeigt, daß $\perp, \neg, \wedge, \vee$ ein vollständiges Junktorensystem bilden. Nun kann man \perp stets durch $(A \wedge \neg A)$ ersetzen; außerdem gilt mit den *de Morganschen Regeln* $(A \wedge B) \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$ und $(A \vee B) \sim \neg(\neg A \wedge \neg B)$. Damit kann man auch entweder auf \wedge oder auf \vee verzichten. Mit anderen Worten: \neg, \wedge ist ein vollständiges Junktorensystem, \neg, \vee ein anderes.

Ein weiteres vollständiges Junktorensystem ist \rightarrow, \perp . Dies gilt, da $\neg A \sim (A \rightarrow \perp)$ und $(A \vee B) \sim (\neg A \rightarrow B) \sim ((A \rightarrow \perp) \rightarrow B)$.

Kein einstelliger Junktor bildet ein vollständiges Junktorensystem, und es gibt nur zwei zwei-stellige Junktoren mit dieser Eigenschaft: dies sind \uparrow und ψ . Man sieht nämlich $\neg A \sim (A \uparrow A) \sim (A \psi A)$ und $(A \wedge B) \sim \neg(A \uparrow B) \sim ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B))$ bzw. $(A \vee B) \sim \neg(A \psi B) \sim ((A \psi B) \psi (A \psi B))$.

Warum wurde nun für die Sprache das vollständige Junktorensystem $\top, \perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ gewählt und nicht ein kleineres oder ein umfangreicheres? Diese Auswahl der Junktoren unterliegt einer gewissen Willkür, hat aber historische und systematische Gründe.

Zunächst sollte die Auswahl zweckgerichtet sein: Möchte man z.B. Theoreme über die Aussagenlogik beweisen, ist es geschickt, ein möglichst kleines Junktorensystem zu wählen, da man dann auch wenige Regeln hat. In der Informatik gibt es die sogenannte Curry–Howard–Korrespondenz, welche Computerprogramme mit Beweisen in Verbindung setzt. Dort arbeitet man gerne mit dem Junktorensystem \rightarrow, \perp , da diese Junktoren gut den benutzten Konzepten auf der anderen Seite der Korrespondenz entsprechen.

Wenige Junktoren führen aber zu langen und undurchschaubare Formeln: Ist man an Übersetzungen aus der natürlichen Sprache interessiert, ist es günstiger, viele Junktoren zu wählen, und zwar solche, die Ausdrücke der natürlichen Sprache wiedergeben. Für eine philosophisch orientierte formale Logik ist die Auswahl hier günstig, weil die gewählten Junktoren wichtige logische Konzepte auf dem syntaktischen Ebene widerspiegeln (siehe Tabelle 2.3). Sie bleibt daher in ihren Ausdrucksmöglichkeiten nahe an der Argumentation in natürlicher Sprache. Außerdem bietet sie dadurch die Chance, auch bei Erweiterungen der Aussagenlogik oder in nicht-klassischen Aussagenlogiken Bestand zu haben, in denen etwa die Regel $(A \rightarrow B) \sim (\neg A \vee B)$ nicht gilt und man nicht ohne Verlust \rightarrow aus dem Junktorensystem entfernen könnte.

Abbildung 2.3: Korrespondenz syntaktische Zeichen – logische Konzepte

Zeichen	logisches Konzept
\top	wahr (W), Tautologie
\perp	falsch (F), Antilogie
\neg	Verneinung
\wedge	Zusammenfassung einer Menge von Sätzen
\vee	Fallunterscheidung
\rightarrow	logische Folgerung, Schluß
\leftrightarrow	logische Äquivalenz

Mehr zur Dualität von \wedge und \vee : Warum aber ist das einschließende Oder der „richtige“ Junktor und nicht das ausschließende, wie man meinen könnte?

Ein Grund ist die Dualität von \wedge und \vee , welche auch dazu führt, daß \vee auf der einen Seite einer logischen Folgerung die Rolle spielt, welche \wedge auf der anderen einnimmt. Konkret:

$$\begin{aligned} ((\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}_1) \wedge (\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}_2)) &\sim (\mathcal{S} \rightarrow (\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2)) \\ ((\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{T}) \wedge (\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{T})) &\sim ((\mathcal{S}_1 \vee \mathcal{S}_2) \rightarrow \mathcal{T}) \end{aligned}$$

Oder als Schlußregeln (wobei diese in beide Richtungen, also auch von unten nach oben, gelesen werden können):

$$\frac{\mathcal{S}_1 \quad \vdash \quad \mathcal{T} \qquad \mathcal{S}_2 \quad \vdash \quad \mathcal{T}}{(\mathcal{S}_1 \vee \mathcal{S}_2) \quad \vdash \quad \mathcal{T}} \qquad \frac{\mathcal{S} \quad \vdash \quad \mathcal{T}_1 \qquad \mathcal{S} \quad \vdash \quad \mathcal{T}_2}{\mathcal{S} \quad \vdash \quad (\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2)}$$

Andererseits entspricht ein \wedge auf der linken Seite der Zusammenfassung einer Prämissenmenge: in $\Sigma \vdash \mathcal{T}$ kann man eine endliche Menge Σ , etwa aus $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ bestehend, durch die Konjunktion ihrer Elemente ersetzen. Das Dualitätsprinzip besagt dann, daß eine Menge von Konklusionen auf der rechten Seite als Disjunktion aufzufassen wäre, was man durch Anwendung der Kontraposition auch nachrechnen kann: aus $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \vdash \mathcal{T}$ erhält man $\neg \mathcal{T} \vdash (\neg \mathcal{S}_1 \vee \neg \mathcal{S}_2)$. Also kann man ergänzend auch die Regeln

$$\frac{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \quad \vdash \quad \mathcal{T}}{(\mathcal{S}_1 \wedge \mathcal{S}_2) \quad \vdash \quad \mathcal{T}} \qquad \frac{\mathcal{S} \quad \vdash \quad \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2}{\mathcal{S} \quad \vdash \quad (\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2)}$$

aufstellen. In beiden Fällen handelt es sich jedenfalls um ein einschließendes Oder, womit nachgewiesen ist, daß dies ein natürlicher Junktor ist.

Im Gegensatz dazu ist auf den zweiten Blick das hinter dem ausschließenden Oder stehende logische Konzept gar nicht so klar ist, wie man zunächst meinen könnte. In nicht-klassischen Logiken, z.B. im Intuitionismus, sind die beiden Formeln $((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$ und $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B))$ nicht mehr logisch äquivalent. Dies mag als ein Grund dienen, für das ausschließende Oder kein primitives Zeichen zu wählen. Zudem kann man in Situationen, in denen man im Alltag ein ausschließendes Oder verwendet, oft bemerken, daß man ebensogut ein einschließendes Oder hätte setzen können, weil die Ausschließlichkeit gar kein substantieller Teil der Aussage ist, sondern sich aus Zusatzwissen über das Modell, in dem wir uns bewegen, ergibt.

2.5 Alternative Zugänge

2.5.1 Methoden zum Testen von Erfüllbarkeit

Alle aussagenlogischen Fragen lassen sich auf Fragen der Erfüllbarkeit zurückführen. Zum Beispiel ist eine Formel genau dann eine Tautologie, wenn ihre Negation nicht erfüllbar ist. Man unterscheidet in der Regel drei Fragestellungen:

- 1) Das Entscheidungsproblem: Ist eine Formel erfüllbar oder nicht?
- 2) Das Konstruktionsproblem: Man finde zu einer Formel eine erfüllende Belegung.
- 3) Das Auflistungsproblem: Man finde zu einer Formel alle erfüllenden Belegungen.

Mit dem Erstellen von Wahrheitstafeln hat man eine Methode zur Hand, welche es gestattet, alle diese Fragen zu entscheiden. Allerdings handelt es sich schon beim Entscheidungsproblem um ein sogenanntes *NP-vollständiges Problem*, d.h. das Verfahren dauert in der Regel (bei großen Formeln) zu lange, um praktikabel zu sein. Dagegen geht es schnell zu entscheiden, ob eine Formel unter einer gegebenen Belegung erfüllbar ist.

Für die allgemeinen Probleme gibt es im wesentlichen keine anderen Verfahren, als die Wahrheitstafeln zu konstruieren. Es gibt aber viele verschiedene Arten, dies zu organisieren und aufzuschreiben, von denen manche geschickter und weniger aufwendig sind, als die gesamte Wahrheitstafel aufzuschreiben.

Bei bestimmten, einfachen Formeln, gibt es aber schnellere Verfahren. Dies wurde genau untersucht und man kennt genau die Arten von Formeln, welche schnellere Verfahren erlauben. Das Entscheidungsproblem läßt sich nicht schneller lösen als das Konstruktionsproblem: die

Verfahren, die man kennt, konstruieren auch immer eine erfüllende Belegung. Dagegen braucht das Auflistungsproblem mehr Zeit, allein deshalb, weil es so lange dauert, alle erfüllenden Belegungen niederzuschreiben. In einem technischen Sinn ist dies aber der einzige Grund (bis auf wenige merkwürdige Ausnahmen für spezielle Formeln, für die es schnelle Entscheidungs-, aber keine schnellen Auflistungsverfahren gibt).

Als Beispiel für solch eine einfache Formel mit schnellem Verfahren kann man eine der Form $(A \vee \mathcal{S})$ betrachten. Sie ist stets erfüllbar, was man sofort sieht, auch wenn \mathcal{S} sehr lang und kompliziert ist, und jede Belegung, welche A mit W belegt, ist erfüllend. Allerdings sieht man so noch nicht notwendig alle erfüllenden Belegungen! Es lohnt sich auf jeden Fall, eine Formel zunächst genauer anzuschauen, bevor man blind ein Verfahren anwendet, welches sich anschickt, die ganze Wahrheitstafel auszurechnen.

Im Rest des Abschnittes werden nun einige Arten vorgestellt, wie man das Erstellen der Wahrheitstafel organisieren kann. Allerdings hat jede Methode ihre Vor- und Nachteile, und keine funktioniert in jedem Fall besser als eine andere.

Wahrheitstafeln „vertikal“ Dies ist die bisherige Methode, Wahrheitstafeln Junktor um Junktor für alle Belegungen gleichzeitig abzuarbeiten. Vorteil: braucht in der kondensierten Version wenig Platz. Nachteil: dauert lange; stets muß die gesamte Wahrheitstafel abgearbeitet werden.

Wahrheitstafeln „horizontal“ Man kann die Wahrheitstafel auch Belegung um Belegung auswerten. Zusätzlicher Vorteil: Man kann aufhören, wenn eine Belegung W liefert, falls man auf Erfüllbarkeit testet, bzw. wenn eine Belegung F liefert, falls man auf Tautologie prüft. Nachteil: man muß sich stets neu überlegen, wie der Junktor funktioniert, falls man dies nicht auswendig weiß.

Formeln von „oben“ auswerten, *Tableau-Methode* Statt mit den Belegungen anzufangen, kann man auch vom Ergebnis her argumentieren: Man schaut sich im Formelaufbau den letzten hinzugekommenen Junktor an und bestimmt, welche Wahrheitswertverteilungen der dadurch verbundenen Teilformeln den Wert W liefern, und arbeitet sich so nach unten. Vorteil: liefert manchmal sehr schnell ein Ergebnis (wie in dem Beispiel $(A \vee \mathcal{S})$ oben). Nachteil: man verliert schnell den Überblick.

Es gibt verschiedene Varianten dieser Idee unter dem Namen *Tableau-Methode* oder *Baumkalkül*.

Umformung in Normalform Man ersetzt zunächst alle Junktoren \rightarrow und \leftrightarrow durch logisch äquivalente Ausdrücke in \neg , \wedge und \vee und formt dann unter Verwendung der Regeln von de Morgan und der logischen Gesetze für diese Junktoren in disjunktive oder konjunktive Normalform um (siehe Abschnitt 2.4.1). Die Formel ist erfüllbar, falls die konjunktive Normalform nicht \perp ist, und eine Tautologie, falls die disjunktive Normalform \top ist. Nachteil: sehr aufwendig. Vorteil: bietet sich für manche Formeln an, die bereits nahe an einer Normalform sind.

Für Formeln, die bereits in Normalform sind, kann man die meisten Fragen ganz schnell entscheiden, da man der Normalform den Wahrheitswertverlauf der Formel einfach ablesen kann.

Heuristische Methoden Man rät eine erfüllende Belegung und rechnet für diese eine Belegung den Wahrheitswert der Formel aus. Vorteil: ist bei kurzen oder überschaubaren Formeln oft die schnellste Variante. Nachteil: unsystematisch und damit unübersichtlich, falls kein schneller Erfolg gegeben ist. Funktioniert nur bei positiver Antwort auf die Frage nach Erfüllbarkeit und negativer Antwort auf die Frage nach Tautologie. Vom Komplexitätstheoretischen Standpunkt her ist dieses Verfahren übrigens ebenso gut wie andere.

Ebenfalls eine sinnvolle heuristische Herangehensweise ist das Vereinfachen einer Formel durch logische Umformungen, etwa das Weglassen von Doppelnegationen. Dies kann man auch zu einer formalen Methode ausbauen, siehe Abschnitt 2.5.3.

Abbildung 2.4: Ein Beispiel für die Methode von Quine

$$\begin{array}{c}
 (\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg\neg B) \vee (A \wedge \neg\perp)) \\
 \begin{array}{cc}
 \boxed{A: W} & \boxed{A: F} \\
 \hline
 (\neg((\neg\top \vee B) \wedge \neg\neg B) \vee (\top \wedge \neg\perp)) & (\neg((\neg\perp \vee B) \wedge \neg\neg B) \vee (\perp \wedge \neg\perp)) \\
 \sim \top & \sim \neg\neg B \\
 \hline
 \boxed{W} & \begin{array}{cc}
 \boxed{B: W} & \boxed{B: F} \\
 \hline
 \neg\neg\top & \neg\neg\perp \\
 \sim \perp & \sim \top \\
 \hline
 \boxed{F} & \boxed{W}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

In der Praxis wird eine Mischung aller Methoden das sinnvollste sein: zunächst ins Auge springende logische Vereinfachungen durchführen, dann eventuell eine Belegung raten, und/oder je nach Form der Formel eine der systematischen Methoden anwenden. Eine der besten ist:

Die Methode von Quine Sie arbeitet Aussagenvariable um Aussagenvariable ab. Belegungen werden zunächst für eine Variable festgelegt, und die Formel daraufhin vereinfacht. Man betrachtet also auf der einen Seite Belegungen, welche einer ausgewählten Aussagenvariablen, etwa B , den Wahrheitswert W zuordnen, und kann dann B durch das Verum \top ersetzen; auf der anderen Seite Belegungen, welche derselben Aussagenvariablen F zuordnen, weswegen man sie durch \perp ersetzen kann. Dann vereinfacht man die Formel anhand der nachfolgenden Rechenregeln für Verum und Falsum. Anschließend fährt man mit den verbleibenden beiden Formeln fort. Günstig ist es, stets mit der am häufigsten auftretenden Aussagenvariablen zu beginnen. Ein Beispiel findet sich in [Abbildung 2.4](#).

Vorteil: ist oft sehr schnell. Nachteil: man braucht viel Platz „in der Breite“; die Vereinfachungen sind langwierig, wenn man sie systematisch Schritt um Schritt durchführt.

Rechenregeln für \top und \perp :

$$\begin{array}{cc}
 \neg\top \sim \perp & \neg\perp \sim \top \\
 (A \wedge \top) \sim (A \wedge \perp) \sim A & (A \wedge \perp) \sim (\perp \wedge A) \sim \perp \\
 (A \vee \top) \sim (A \vee \perp) \sim A & (A \vee \perp) \sim (\perp \vee A) \sim A \\
 (A \leftrightarrow \top) \sim (A \leftrightarrow \perp) \sim \neg A & (A \leftrightarrow \perp) \sim (\perp \leftrightarrow A) \sim \neg A \\
 (A \rightarrow \top) \sim A & (A \rightarrow \perp) \sim \neg A \\
 (\top \rightarrow A) \sim A & (\perp \rightarrow A) \sim A
 \end{array}$$

Vennsche Diagramme Die Wahrheitswertverläufe von Formeln (mit wenigen Aussagenvariablen) kann man sich auch geometrisch in den sogenannten *Vennschen Diagrammen* herleiten. Dazu malt man zu jeder vorkommenden Aussagenvariable einen Kreis, wobei das Innere des Kreises gedanklich die Belegungen oder Modelle umfassen soll, in welchen diese Aussagenvariable mit W belegt ist, das Äußere des Kreises die andern. Die verschiedenen Kreise müssen so gezeichnet sein, daß alle Möglichkeiten für einen Punkt, innerhalb gewisser und außerhalb anderer Kreise zu liegen, auftreten. Bei n Aussagenvariablen müssen also 2^n kleinste Gebiete entstehen, die dann genau den Belegungen entsprechen. Dies geht bis $n = 3$ sehr gut, bei $n = 4$ passabel, ab 5 wird es unübersichtlich.

Nun kann man jeder Formel einen Bereich zuordnen (der den erfüllenden Belegungen entspricht): Für die Aussagenvariablen ist das gerade durch die Konstruktion geschehen. Dem Verum wird das Gesamtgebiet, dem Falsum die leere Menge zugeordnet. Die Junktoren entsprechen nun mengentheoretischen Operationen: Negation der Komplementbildung, Konjunktion dem Schnitt und Disjunktion der Vereinigung. Die Implikation ($\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$) ersetzt man am

besten durch $(\neg S \vee T)$; sie steht in Verbindung mit der Teilmengenbeziehung. Die Bi-implikation nimmt zum Schnitt noch das gemeinsame Äußere (d.h. die Schnitte der Komplemente) hinzu.

Eine arithmetische Methode Die folgende Methode hat wenig praktischen Nutzen, sondern sei nur interessehalber aufgeführt. Wenn oben öfters vom „Ausrechnen“ von Wahrheitswerten die Rede war, so kann man dies tatsächlich auch mit üblichen Rechenoperationen tun. Dazu identifiziert man den Wahrheitswert W mit der Zahl 1 und F mit 0. Möchte man den Wert einer Formel unter einer Belegung errechnen, so setzt man alle Aussagenvariablen, welchen die Belegung den Wahrheitswert W zuordnet, gleich 1, ebenso das Verum, und alle anderen Aussagenvariablen wie auch das Falsum gleich 0. Die Junktoren berechnen sich dann wie folgt:

$\neg S$	als	$1 - S$	
$(S \wedge T)$	als	$S \cdot T$	Man beachte, daß als Ergebnis stets wieder 0 oder 1
$(S \vee T)$	als	$S + T - S \cdot T$	herauskommt, wenn man nur 0 und 1 hineingibt, und
$(S \rightarrow T)$	als	$1 - S + S \cdot T$	daß die Operationen das gewünschte Ergebnis liefern!
$(S \leftrightarrow T)$	als	$1 - (S - T)^2$	

Beispielsweise übersetzt sich der Satz $(\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg \perp))$ in den arithmetischen Ausdruck $1 - ((1 - A + B - (1 - A) \cdot B) \cdot (1 - (1 - B))) + (A \cdot (1 - 0)) - (1 - ((1 - A + B - (1 - A) \cdot B) \cdot (1 - (1 - B)))) \cdot (A \cdot (1 - 0))$. Unter der Belegung $A: F, B: W$ ergibt sich also $1 - ((1 - 0 + 1 - (1 - 0) \cdot 1) \cdot (1 - (1 - 1))) + (0 \cdot (1 - 0)) - (1 - ((1 - 0 + 1 - (1 - 0) \cdot 1) \cdot (1 - (1 - 1)))) \cdot (0 \cdot (1 - 0)) = 0$.

2.5.2 Einige traditionelle Schlußregeln

Traditionell hat man logische Gesetze nicht als Tautologien oder logische Äquivalenzen beschrieben, sondern durch *Schlußweisen*, die meist in der Form

Prämisse 1
⋮
Prämisse n

Konklusion

notiert werden. Ein solcher Schluß (genauer die Schlußweise, also die Argumentation) heißt *korrekt* (engl. *valid*), falls die aussagenlogische Entsprechung

$$((\dots(\text{Prämisse 1} \wedge \text{Prämisse 2}) \wedge \dots \wedge \text{Prämisse } n) \rightarrow \text{Konklusion})$$

eine Tautologie ist. Der Schluß heißt *sound*, falls er nicht nur korrekt ist, sondern auch die Prämissen (in dem betrachteten Kontext) gelten bzw. wahr sind. Während die englischen Bezeichnungen *valid* und *sound* in dieser Bedeutung verbreitet und standardisiert sind, gilt dies nicht für vorgeschlagene deutsche Übersetzungen. Bisweilen liest man *gültig* für *valid* und *schlüssig* für *sound*, bisweilen aber auch andere Wörter oder sogar den umgekehrten Gebrauch.

Hier folgen nun einige korrekte Schlußweisen, die im Mittelalter betrachtet wurden und mit Namen versehen, sowie einige der häufigsten Fehlschlüsse, also nicht korrekte und daher zu vermeidende Schlußweisen. Die Listen sind natürlich nicht vollständig; vor allem nicht die Liste der zu vermeidenden Fehlschlüsse! Wichtig ist der erste Teil bis zur gestrichelten Linie.

Modus ponens	Modus tollens	Kontraposition
$\Sigma \vdash (A \rightarrow B)$	$\Sigma \vdash (A \rightarrow B)$	$\Sigma \vdash (A \rightarrow B)$
$\Sigma \vdash A$	$\Sigma \vdash \neg B$	-----
-----	-----	$\Sigma \vdash (\neg B \rightarrow \neg A)$
$\Sigma \vdash B$	$\Sigma \vdash \neg A$	$\Sigma \vdash (A \leftrightarrow B)$

		$\Sigma \vdash (\neg B \leftrightarrow \neg A)$

<p>nicht korrekt:</p> $\frac{\Sigma \vdash (A \rightarrow B) \quad \Sigma \vdash B}{\Sigma \vdash A}$	<p>nicht korrekt:</p> $\frac{\Sigma \vdash (A \rightarrow B) \quad \Sigma \vdash \neg A}{\Sigma \vdash \neg B}$	<p>nicht korrekt:</p> $\frac{\Sigma \vdash (A \rightarrow B)}{\Sigma \vdash (B \rightarrow A)}$ $\frac{\Sigma \vdash (A \rightarrow B)}{\Sigma \vdash (\neg A \rightarrow \neg B)}$
.....		
<p>Satz des Duns Scotus (Paradoxa der Implikation)</p> $\frac{\Sigma \vdash \neg A}{\Sigma \vdash (A \rightarrow B)}$ $\frac{\Sigma \vdash B}{\Sigma \vdash (A \rightarrow B)}$	<p>Satz des Petrus Hispanus</p> $\frac{\Sigma \vdash (A \wedge B)}{\Sigma \vdash A}$ $\frac{\Sigma \vdash A}{\Sigma \vdash (A \vee B)}$	<p>Indirekter Beweis (reductio ad absurdum)</p> $\frac{\Sigma, A \quad \vdash \perp}{\Sigma \quad \vdash \neg A}$ <p>Satz des Clavius</p> $\frac{\Sigma \vdash (A \rightarrow \neg A)}{\Sigma \vdash \neg A}$
<p>konstruktives Dilemma</p> $\frac{\Sigma \vdash (A \vee B) \quad \Sigma \vdash (A \rightarrow C) \quad \Sigma \vdash (B \rightarrow D)}{\Sigma \vdash (C \vee D)}$	<p>Fallunterscheidung</p> $\frac{\Sigma \vdash (A \vee B) \quad \Sigma \vdash (A \rightarrow C) \quad \Sigma \vdash (B \rightarrow C)}{\Sigma \vdash C}$	<p>destruktives Dilemma</p> $\frac{\Sigma \vdash (A \rightarrow C) \quad \Sigma \vdash (B \rightarrow D) \quad \Sigma \vdash (\neg C \vee \neg D)}{\Sigma \vdash (\neg A \vee \neg B)}$
<p>einfacher Syllogismus</p> $\frac{\Sigma \vdash (A \rightarrow B) \quad \Sigma \vdash (B \rightarrow C)}{\Sigma \vdash (A \rightarrow C)}$	<p>disjunktiver Syllogismus</p> $\frac{\Sigma \vdash (A \vee B) \quad \Sigma \vdash \neg B}{\Sigma \vdash A}$	<p>nicht korrekt:</p> $\frac{\Sigma \vdash (A \vee B) \quad \Sigma \vdash A}{\Sigma \vdash \neg B}$

2.5.3 Beweiskalküle

Bislang wurde der Folgerungsbegriff *semantisch* bestimmt: \mathcal{S} folgt logisch aus Σ , wenn in allen möglichen Modellen, d.h. unter allen möglichen Interpretationen, die Σ wahr machen, auch \mathcal{S} wahr wird. Diese Vorgehensweise hat mehrere Nachteile:

- (1) Sie ist weit entfernt von der üblichen Art und Weise zu argumentieren und unhistorisch.
- (2) Sie ist oft praktisch nicht durchführbar, etwa wenn man unendliche Formelmengen betrachtet, oder bei komplizierteren logischen Systemen, wo man vielleicht keinen Überblick über die möglichen Modelle hat oder man nicht mehr einfach auswerten kann, ob ein Satz in einem Modell gilt oder nicht.
- (3) Es könnte sein, daß man lieber eine nicht-klassische Logik erstellen möchte, die näher am natürlichen Argumentieren liegt, aber sich nicht durch Modellbeziehungen beschreiben läßt.

Daneben gibt es die Möglichkeit, den Folgerungsbegriff *syntaktisch* zu bestimmen. Dazu stellt man ein Regelwerk auf, das bestimmt, welche Formeln logisch aus einer Formelmenge folgen (sogenannte Axiome), und wie man aus Formeln, von denen man bereits weiß, daß sie logisch aus einer Formelmenge folgen, neue solche Formeln gewinnt (sogenannte Folgerungsregeln oder einfach Regeln). Ein solches Regelwerk nennt man auch einen *Beweiskalkül*. Ein Beweiskalkül besteht also aus einer Menge von Schlußweisen, die man als gültig akzeptiert. Man sieht, daß man, falls man mit der klassischen Logik nicht glücklich ist, einen Beweiskalkül leichter abändern kann, indem man zweifelhafte Schlußweisen entfernt oder durch akzeptierte Abschwächungen ersetzt.

Von jedem Beweiskalkül (für die klassische Aussagenlogik) muß man zeigen, daß er wunschgemäß arbeitet, also zum einen die *Korrektheit* des Kalküls: Wenn der Beweiskalkül eine logische

Folgerung aufzeigt, so soll sie auch gelten (d.h. mit Wahrheitswerten nachprüfbar sein); zum anderen die *Vollständigkeit* des Kalküls: alles, was logisch folgt, soll auch mit dem Beweiskalkül gefunden werden können. Die Korrektheit ist in allen Fällen hier leicht einzusehen; die Vollständigkeit ist schwieriger und wird hier nicht gezeigt werden.

Gentzen- oder *Regelkalküle* bestehen aus einem Axiom und vielen Regeln; *Hilbert-* oder *Axiomenkalküle* bestehen aus vielen Axiomen und einer Regel, dem Modus ponens.

Die Axiome und Regeln funktionieren folgendermaßen: über dem Strich stehen logische Folgerungen, die man bereits aus dem Kalkül abgeleitet hat. Ihre Reihenfolge spielt keine Rolle. Im Falle der Axiome braucht man keine vorherigen Ableitungen: es steht also nichts über dem Strich. Unter dem Strich steht dann eine neue erlaubte Folgerung.

Ein *Beweis* oder *Ableitung* in einem Kalkül ist nun eine Reihe von Folgerungen $\Sigma \vdash \mathcal{S}$, die entweder Axiome des Kalküls sind oder sich aus weiter vorne in der Reihe stehenden Folgerungen durch Anwenden einer Regel des Kalküls ergibt.

Ein Gentzen-Kalkül Dieser Kalkül arbeitet nur mit den Junktoren \neg und \vee . Entweder man versteht die anderen Junktoren als Abkürzungen, oder man muß den Kalkül um weitere Regeln für die anderen Junktoren erweitern.

Axiom: $\frac{}{\Sigma \vdash \mathcal{S}}$ falls der Satz \mathcal{S} in der Satzmenge Σ enthalten ist.

Regeln:

Monotonieregel: $\frac{\Sigma \vdash \mathcal{S}}{\Sigma' \vdash \mathcal{S}}$ falls Σ in Σ' enthalten, d.h. jeder Satz aus Σ auch in Σ' vorkommt.

Fallunterscheidungsregel: $\frac{\Sigma, \mathcal{T} \vdash \mathcal{S} \quad \Sigma, \neg \mathcal{T} \vdash \mathcal{S}}{\Sigma \vdash \mathcal{S}}$ Widerspruchsregel: $\frac{\Sigma, \neg \mathcal{S} \vdash \mathcal{T} \quad \Sigma, \neg \mathcal{S} \vdash \neg \mathcal{T}}{\Sigma \vdash \mathcal{S}}$

\vee -Einführung links: $\frac{\Sigma, \mathcal{S} \vdash \mathcal{T} \quad \Sigma, \mathcal{S}' \vdash \mathcal{T}}{\Sigma, (\mathcal{S} \vee \mathcal{S}') \vdash \mathcal{T}}$ \vee -Einführung rechts: $\frac{\Sigma \vdash \mathcal{S}}{\Sigma \vdash (\mathcal{S} \vee \mathcal{T})}$
 $\frac{\Sigma \vdash \mathcal{S}}{\Sigma \vdash (\mathcal{T} \vee \mathcal{S})}$

Die Korrektheit des Kalküls überprüft man leicht; die Vollständigkeit ist dagegen immer schwer und langwierig zu beweisen (einen Beweis findet man z.B. im Buch von Ebbinghaus, Flum, Thomas).

Beispiel einer Ableitung:

1)	$A, \neg A, \neg\neg\neg A \vdash A$	Axiom
2)	$A, \neg A, \neg\neg\neg A \vdash \neg A$	Axiom
3)	$A, \neg A \vdash \neg\neg A$	Widerspruchsregel auf 1) und 2)
4)	$A, \neg\neg A \vdash \neg\neg A$	Axiom
5)	$A \vdash \neg\neg A$	Fallunterscheidung auf 3) und 4)

Ein Hilbert-Kalkül Diese Version eines Hilbert-Kalküls arbeitet mit dem vollständigen Junktorensystem \neg und \rightarrow . Dem Vorteil der wenigen Axiome steht der Nachteil intuitiver Regeln und umständlicher Beweise entgegen.

Regel: Modus Ponens $\frac{\Sigma \vdash \mathcal{S} \quad \Sigma \vdash (\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})}{\Sigma \vdash \mathcal{T}}$

Axiome: 1) $\frac{}{\Sigma \vdash \mathcal{S}}$ falls \mathcal{S} in Σ vorkommt.

2) $\frac{}{\Sigma \vdash (\mathcal{S} \rightarrow (\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}))}$

3) $\frac{}{\Sigma \vdash ((\neg \mathcal{S} \rightarrow \neg \mathcal{T}) \rightarrow ((\neg \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{S}))}$

4) $\frac{}{\Sigma \vdash ((\mathcal{S} \rightarrow (\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U})) \rightarrow ((\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}) \rightarrow (\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{U})))}$

Beispiel einer Ableitung:

1) $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B)$	Axiom 1
2) $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (B \rightarrow C)$	Axiom 1
3) $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$	Axiom 2
4) $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	Modus Ponens 2), 3)
5) $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$	Axiom 4
6) $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	Modus Ponens 4), 5)
7) $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$	Modus Ponens 1), 6)

2.6 Übersetzungen

Wie schon in der Einleitung ausgeführt, ist die Aussagenlogik eine in sich geschlossene Theorie, über deren Anwendbarkeit man im Einzelnen nachdenken muß. Da diese „ideale“ Theorie aber einen Abstraktionsprozeß aus dem Wahrheitswertverhalten tatsächlich benutzter Sätze erwachsen sein dürfte, ist diese Anwendbarkeit prinzipiell gegeben. Dies bedeutet: Hinter einem Text, einer Argumentation usw. steht in der Regel eine logische Struktur, für die es eine (mehr oder minder aussagekräftige) aussagenlogische Annäherung gibt. Es folgen in diesem Abschnitt ein paar Anmerkungen über die Problematik, diese Struktur herauszuarbeiten.

Dieser Abstraktionsprozeß, also der Versuch, natürliche Sprache in aussagenlogischen Formeln wiederzugeben, ist die Umkehrung des Übersetzungsprozesses, den man bei der Konstruktion von Modellen und Interpretationen in Abschnitt 2.2.2 liefert. Dieser ist vergleichsweise unproblematisch; allerdings muß man im Auge behalten, bei der sprachlichen Wiedergabe der Junktoren nicht mehr in diese hineinzulegen als allein ihre logische Struktur.

Bei der Wiedergabe natürlicher Sprache in Aussagenlogik muß man folgende Punkte beachten:

- Viele Arten von Zusammenhängen zwischen Sätzen sind in Aussagenlogik nicht ausdrückbar (etwa kausale oder temporale Abhängigkeiten).
- Natürliche Sprache ist vieldeutig und Interpretationen unterworfen, auch bei der logischen Struktur (beispielsweise ist oft unklar, ob ein Oder ein- oder ausschließend gemeint ist).
- Logische Konzepte, die in aussagenlogischen Junktoren festgehalten sind, entsprechen nicht unbedingt dem Alltagsgebrauch dieser Konzepte (vergleiche z.B. Verneinung, Gegenteil, Gegensatz).
- Der Name eines logischen Junktors hat in der natürlichen Sprache meist mehrere oder andere Bedeutungen.

Die folgenden Anmerkungen liefern nur einen kleinen Ausschnitt dessen, was man zu Übersetzungsfragen sagen könnte. Viele sprachliche Wendungen, hinter denen aussagenlogische Junktoren stecken, sind nicht aufgeführt. Und da Übersetzungen immer auch Interpretationen sind, kann man bei manchen Beispielen durchaus anderer Auffassung sein als ich.

Anmerkungen zur Negation Eine logische gültige Verneinung einer Aussage erhält man stets durch Voranstellen einer Formulierung wie „*Es ist nicht der Fall, daß ...*“, was aber sprachlich meist unbefriedigend ist und selten vorkommt. Häufig erfolgt eine Verneinung durch ein Verneinungswort wie „nicht“, „kein“; in diesem Fall muß man aber genau prüfen, ob die gesamte Aussage verneint wird oder nur ein Satzteil. Außerdem muß man beachten, daß bisweilen ein zweites Verneinungswort verstärkend anstatt aufhebend hinzutritt.

Verneinungen können auch semantisch gebildet werden; dann ist allerdings große Vorsicht geboten, da oft das formal bestimmte „Gegenteil“ mit einem inhaltlich entgegengesetzten „Gegensatz“ verwechselt wird. In diesem Sinne des (nicht allgemeinen gültigen) Gebrauchs von „Gegenteil“ und „Gegensatz“ wäre *heiß* ein Gegensatz zu *kalt*, das Gegenteil dagegen *nicht kalt*. Mithin ist „*Das Wasser ist heiß*“ keine gültige logische Verneinung von „*Das Wasser ist kalt*“. Im Alltag funktionieren solche ungenauen Verneinungen dennoch oft, wenn der Zwischenbereich implizit ausgeschlossen ist.

Um korrekte semantische Verneinungen bilden zu können, braucht man Zusatzinformation: Nur dann ist „*Azolla ist polypodial*“ eine gültige Verneinung von „*Azolla ist monopodial*“, wenn „polypodial“ als „nicht monopodial“ definiert ist, d.h. es keine andere Möglichkeit für Azolla gibt, als mono- oder polypodial zu sein. So wird man „*Sokrates ist eine Frau*“ vor dem Hintergrund des Wissens, daß Sokrates ein Mensch ist, als Verneinung von „*Sokrates ist ein Mann*“ akzeptieren, nicht aber, falls mit „Sokrates“ der Name eines studentischen Austauschprogramms gemeint ist.

Anmerkungen zur Konjunktion Die Konjunktion kann sprachlich durch *und* wiedergegeben werden, es gibt aber viele andere Möglichkeiten (*sowie, auch...*; parataktisch oder als Relativsatz). Nicht jedes *und* fungiert als logischer Junktor, etwa in dem Satz „*Männer und Frauen sind gleichberechtigt*“ faßt das *und* nicht zwei Aussagen zu einer zusammen. Den ähnlich aussehenden Satz „*Männer und Frauen sind wahlberechtigt*“ kann man dagegen auflösen in „*Männer sind wahlberechtigt und Frauen sind wahlberechtigt*“.

Oft verbindet ein *und* zwei Teilsätze nicht nur im Sinne der logischen Konjunktion, sondern auch in konsekutiver, kausaler, konzessiver o.a. Hinsicht. Dies führt manchmal dazu, daß es nicht mehr kommutativ ist: Die Sätze „*Ich war hungrig und habe in der Mensa gegessen*“ und „*Ich habe in der Mensa gegessen und war hungrig*“ haben einen verschiedenen Sinn.

Anmerkungen zur Disjunktion Die Disjunktion wird sprachlich meist durch *oder* wiedergegeben. Allerdings kann *oder* sowohl für das einschließende Oder \vee (lateinisch *vel ... vel*) als auch für das ausschließende Oder $\dot{\vee}$ (lateinisch *aut ... aut*) stehen. Hier besteht eine große Fehler- und Irrtumsquelle! Ein logisches Oder kann auch hinter anderen sprachlichen Konstruktionen stehen, beispielsweise kann *es sei denn, daß ...* ein ausschließendes Oder bedeuten. Andererseits muß nicht jedes sprachliche *oder* die Rolle eines logischen Junktors übernehmen. Beispielsweis kann man „*Sein oder Nichtsein[, das] ist hier die Frage*“ kaum in „*Sein ist hier die Frage oder Nichtsein ist hier die Frage*“ auflösen. Allerdings ist es kein wirklich befriedigendes Beispiel, da der Satz korrekter „*Sein oder Nichtsein, das ist hier die Frage*“ lauten müßte. Ein anderes Beispiel findet sich bei Husserl: „*[...] nicht jedes richtige Urteil [...] ist ein Wissen vom Sein oder Nichtsein dieses Sachverhalts.*“ Auch den obigen Beispielsatz eines *und*, welches nicht für eine aussagenlogische Konjunktion steht, kann man merkwürdigerweise auch mit einer Wendung ausdrücken, welche *oder* benutzt: „*Alle Menschen sind gleichberechtigt, seien sie Männer oder Frauen.*“⁵

Es gibt eine vermutlich eine Tendenz, ein *oder* zunächst eher ausschließend aufzufassen, also als eine echte Fallunterscheidung. Dies mag daran liegen, daß in vielen Fällen der einschließende Fall gar nicht logisch ausgeschlossen ist, sondern durch Zusatzwissen oder -annahmen. Bei „*Heute abend gehe ich ins Kino oder Theater*“ faßt man das *oder* ausschließend auf, da man davon ausgeht, daß man den Abend nur mit einer Veranstaltung gestaltet.

Will man betonen, daß es sich um ein einschließendes Oder handelt, muß man den dritten Fall gesondert aufführen: „*Heute abend gehe ich ins Kino oder Theater oder mache beides*“. Mit

⁵Mitgeteilt von Olivier Roche.

Entweder ... oder kann man betonen, daß es sich um ein ausschließendes Oder handelt. Da im Deutschen eine Konstruktion wie *oder ... oder* fehlt, die es in vielen Sprachen gibt, benutzt man allerdings manchmal *entweder ... oder*, um darauf aufmerksam zu machen, daß die Auflistung zweier oder mehrerer Fälle folgt, wobei diese sich nicht notwendig ausschließen müssen.

Anmerkungen zu den de Morganschen Regeln Die Regeln von de Morgan bieten in der „Alltagslogik“ gewisse Schwierigkeiten, die zum Teil auch auf sprachlichen Ungenauigkeiten beruhen. Ein strenger Vegetarier müßte logisch korrekt sein Essen als „*nicht mit Fleisch oder mit Fisch*“ bestellen; der Variante „*nicht mit Fleisch und mit Fisch*“ dürfte man aber auch manchmal begegnen (wobei das weitere Problem auftritt, daß sich das *nicht* nur auf den ersten Teil beziehen könnte.) Sprachlich eleganter ist freilich „*weder mit Fleisch noch mit Fisch*“ – *weder ... noch ...* entspricht dem Junktorkonzept Ψ .

Auch die Unklarheit zwischen ausschließendem und einschließendem Oder birgt Schwierigkeiten: Wird man gefragt, ob man am Abend ins Kino oder ins Theater gehen möchte, und verneint dies, wird man kaum glücklich sein, wenn der Fragende Karten für beides besorgt. Wie oben erläutert, liegen die Umstände, welche einen dieses *oder* ausschließend auffassen lassen, außerhalb des Bereichs der Fragestellung.

Die duale Regel, also die Verneinung einer Konjunktion, tritt im Alltag seltener auf, da man üblicherweise angibt, welches Konjunktionsglied man verneint wissen möchte: Wenn man nicht *Zucker und Milch* möchte, liegt es in der Regel entweder daran, daß man keinen Zucker, oder daran, daß man keine Milch möchte. Daran liegt es wohl auch, daß es keine prägnante zu *weder ... noch ...* duale Formulierung, also für den Junktorkonzept \uparrow , gibt. Man muß sich mit Konstruktionen wie „*nicht gleichzeitig A und B*“ behelfen. Auch kann *es sei denn, daß ...* die Rolle dieses Junktors übernehmen, wenn es nicht als ausschließendes Oder aufgefaßt wird.

Kommas können sowohl für eine Konjunktion als auch für eine Disjunktion stehen, ersteres etwa im Satz „*Ich gehe gerne ins Kino, ins Theater, ins Konzert*“, letzteres etwa in der Frage „*Gehn wir morgen ins Kino, ins Theater, ins Konzert?*“. Eine Verneinung vertauscht hier wegen der Regeln von de Morgan *und* und *oder*: In „*Ich gehe ungern ins Kino, ins Theater, ins Konzert*“ müßte man die Kommas korrekterweise als Disjunktion auffassen.

Ein scheinbar falscher de Morgan tritt auf, wenn ein *und* zwei Teile zu einer festen Einheit verbindet, so wahrscheinlich in dem folgenden Beispiel. Oder kannte Aristoteles die Regeln von de Morgan nicht?⁶

Als ungerecht gilt, wer die Gesetze, wer die gleichmäßige Verteilung der Güter, die bürgerliche Gleichheit, mißachtet, und somit gilt offenbar als gerecht, wer Gesetz und wer bürgerliche Gleichheit achtet. Das Gerechte ist folglich die Achtung von Gesetz und bürgerlicher Gleichheit, das Ungerechte die Mißachtung von Gesetz und bürgerlicher Gleichheit. (Aus der Nikomachischen Ethik)

Anmerkungen zur Implikation und Bi-implikation Die Implikation ist der „umstrittenste“ Junktorkonzept, da man bei ihm üblicherweise die größten Schwierigkeiten hat, den Bezug zur Folgerungsbeziehung, wie wir sie im Alltag gebrauchen, zu sehen. Bei dieser erwartet man einen inhaltlichen, vielleicht sogar einen kausalen Bezug zwischen dem, was folgt, und dem, woraus es folgt. Im Alltag gelten die sogenannten Paradoxa der Implikation, also die Regeln *ex falso quodlibet* und *verum ex quodlibet* nicht. Daher verwendet manche Autoren gerne andere Bezeichnungen wie *Subjunktion* oder *Konditional* statt Implikation, oder die Implikation wird als *materiale Implikation* spezifiziert, um sie von dem intuitiven Implikationsbegriff zu unterscheiden.

Die einfachste Art des Umgangs ist sicher, die Wahrheitstafel als Definition für etwas, was mit \rightarrow bezeichnet wird, zu akzeptieren, ohne sich weitere Gedanken darüber zu machen, was dies nun genau ist. Man kann sich allerdings überlegen, daß diese Definition auch sinnvoll ist.

⁶Mitgeteilt von Frieder Vogelmann.

Der pragmatische Standpunkt stellt dazu fest, daß keine andere Wahrheitswertverteilung besser als Implikation geeignet wäre. Die beiden Alternativen, an die man vielleicht denken könnte, haben bereits andere Namen – Bi-implikation und Konjunktion – und geben klare logische Konzepte wieder, die sich deutlich von der erwünschten Implikation unterscheiden.

Einer inhaltlichen Verteidigung kann man die Vorstellung zugrundelegen, daß die Zuordnung von Wahrheitswerten einem Informationsgehalt entspricht: W bedeutet, daß man einen Satz als richtig akzeptiert, F , daß man ihn verwirft. Eine Konjunktion akzeptiert man dann und nur dann, wenn man beide Teilinformationen akzeptiert; eine Disjunktion, wenn man mindestens eine der beiden akzeptiert. In diesem Sinne steht die Implikation $(A \rightarrow B)$ dafür, daß unter der Annahme, daß A gilt, auch B akzeptiert werden soll. Man kann es auch als eine Art (Rechen-) Prozeß oder als ein Computerprogramm verstehen, das unter der Eingabe A das Ergebnis B liefert. Unstrittig ist nun, daß $\frac{A \mid B \parallel (A \rightarrow B)}{W \mid F \parallel F}$ gelten soll: Wenn eine akzeptierte Eingabe

eine verworfene Ausgabe produziert, ist der Prozeß fehlerhaft. Dahingegen wird ein fehlerfreier Prozeß bei fehlerhafter Eingabe in der Regel ein fehlerhaftes Ergebnis produzieren, muß es aber nicht, denn den Prozeß kann man sich immer auch als eine Art Informationsverlust vorstellen (B enthält weniger Information als A), wo gerade das Fehlerhafte verschwunden ist. Umgekehrt kann ein fehlerhafter Prozeß sowohl aus richtigen als auch aus falschen Eingaben sowohl falsche als auch (zufällig) richtige Ausgaben liefern.

Es gäbe nun die skeptische Version, bei der man die drei verbleibenden Spalten alle mit F auffüllt, da ja stets ein Fehler passiert sein kann. Dann hätte man eine Implikation, die immer dann W liefert, wenn mit Sicherheit kein Fehler aufgetreten ist, und stets ein F , wenn ein Fehler passiert ist und ein Zweifel vorliegt. Aber da diese Wahrheitsverteilung stets F liefert, hat sie gar keine Aussagekraft.

Im Gegensatz dazu gibt es die „positive“ Variante *in dubio pro reo*, welche die verbleibenden Spalten alle mit W auffüllt, da ja stets etwas Richtiges geschehen sein kann. Diese Implikation (nämlich die unsre) liefert ein F , wenn mit Sicherheit ein Fehler aufgetreten ist, und W , wenn etwa Richtiges geschehen ist oder ein Zweifel vorliegt. Darauf ist die Aussagenlogik aufgebaut, was bedeutet: Wenn die Aussagenlogik einen Fehler erkennt, dann liegt auch wirklich einer vor, aber sie erkennt nicht alle. Daraus ergibt sich im Gegenzug aber, daß eine Formel aber auch nur dann eine Tautologie sein kann, wenn ein Grund in der aussagenlogischen Struktur der Formel vorliegt.

Mischvarianten, die manche Spalten mit F und andere mit W auffüllen würden (etwas nach „Fehlerwahrscheinlichkeit“ – dann würde man vermutlich die Wahrheitswertverteilung der Bi-implikation bekommen), hätten ebenfalls den Nachteil, keine verlässliche Aussage mehr zu liefern.

Eine Implikation $(A \rightarrow B)$ kann man durch „wenn A , dann B “ wiedergeben, oder, in umgekehrter Reihenfolge, mit „ B folgt aus A “ oder „ B , falls A “, oder durch Ähnliches.

Zu beachten ist, daß es neben dem verbreiteten Fehlschluß, aus $(A \rightarrow B)$ die anders gerichtete Implikation $(B \rightarrow A)$ zu folgern, auch das umgekehrte Phänomen gibt: daß nur eine Implikation gesagt wird, aber eine Bi-implikation gemeint ist. Wenn die Eltern ihrem Kind sagen: „Wenn Du Deine Hausaufgaben machst, darfst Du fernsehen“, hört das Kind wahrscheinlich eher „Wenn Du Deine Hausaufgaben nicht machst, darfst Du nicht fernsehen“, und das war wohl ebenfalls gemeint, d.h. die sprachliche Implikation gibt hier eine logische Bi-implikation wieder. Im Einzelfall ist es oft schwierig zu entscheiden, ob hinter einer sprachlichen Implikation eine Bi-implikation steht.

Hinter einer Wendung wie „ A nur dann, wenn B “ steckt eine umgekehrte Implikation $(A \rightarrow B)$.

Die Bi-implikation hat keine schöne sprachliche Übersetzung: *sind äquivalent* oder *sind gleichwertig*; etwas mathematischer *dann und nur dann, wenn* oder *genau dann wenn*. Wie schon oben bei der Implikation erwähnt, versteckt sich eine Bi-implikation oft hinter einer sprachlichen Implikation. Etwa im Beispiel „Bei der NATO bestimmen die Mitgliedsstaaten. Ein Beschluß wird nur gefaßt, wenn alle zustimmen können.“, denn man kann annehmen, daß, wenn alle zustimmen können, auch ein Beschluß gefaßt wird. Bei Kant findet sich die Wendung *nur alsdann, wenn*,

die wohl zumindest im folgenden Beispiel eine Bi-implikation darstellt: „*Ein Geschmacksurteil würde in Ansehung eines Gegenstandes von bestimmtem inneren Zwecke nur alsdann rein sein, wenn der Urteilende entweder von diesem Zwecke keinen Begriff hätte, oder in seinem Urteile davon abstrahierte.*“

Anmerkungen zu mehrstelligen Junktoren An mehrstelligen Junktoren tauchen in der natürlichen Sprache iterierte Konstruktionen wie etwa ... *und ... und ...*, (*entweder*) ... *oder ... oder ...*. Diese könnte man auch als mehrfache Anwendung der betreffenden zweistelligen Junktors auffassen (was bis auf logische Äquivalenz keinen Unterschied ergibt); da aber alle Glieder gleichberechtigt auftreten und in der Regel keine Klammerung erkennbar ist, sind sie vom Charakter her doch eher höherstellig. Bei *weder ... noch ... noch* geht dies nicht, da Ψ nicht kommutativ ist: „*Weder A, noch B, noch C*“ wird korrekt mit $(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ übersetzt, was weder logisch äquivalent zu $((A \Psi B) \Psi C)$ noch zu $(A \Psi (B \Psi C))$ ist.

Ein weiteres Beispiel eines dreistelligen sprachlichen Junktors ist *falls ... dann ... sonst ...*

Beispiele für echte höherstellige Junktoren scheinen selten. Häufig sind dagegen zusammengesetzte Formulierungen, bei denen die Klammerung nicht vollkommen klar ist. Bedeutet „*Aus A oder B folgt C*“ nun $((A \vee B) \rightarrow C)$ oder $((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$? Wofür steht im Einzelfall „*Nicht A oder B*“: für $\neg(A \vee B)$ oder für $(\neg A \vee B)$ oder gar für $(\neg A \vee \neg B)$?

Eine ausführliche Darstellung von Übersetzungsfragen findet sich in:

- Ansgar Beckermann *Einführung in die Logik*, 2. Auflage, Berlin: de Gruyter 2003.

Kapitel 3

Modallogik (aussagenlogisch)

In diesem Abschnitt wird eine Erweiterung der Aussagenlogik um sogenannte *Modalitäten* behandelt. Damit erlangt man eine größere Aussagekraft der Sprache, allerdings in der Regel auf Kosten schöner Eigenschaften wie beispielsweise einfacher Möglichkeiten, überprüfen zu können, ob eine Formel logisch aus einer anderen folgt. Später wird die Prädikatenlogik eine wesentlich umfangreichere Erweiterung der Aussagenlogik bieten. Im Gegensatz zur Aussagenlogik werden wir eine Vielzahl modallogischer Systeme zur Verfügung haben und einige davon betrachten.

Für jede solche Erweiterung sollen aber gewisse Grundprinzipien der Aussagenlogik weiter Bestand haben; etwa die Zusammenhänge zwischen logischer Folgerung, logischer Äquivalenz und Tautologien; die Definition dieser Begriffe aus der Modellbeziehung; die Substitutionsregeln von Seite 27. Um ein solches logisches System aufstellen zu können, muß man also folgendes tun:

- Die formale Sprache angeben, in welcher die Formeln geschrieben werden, und beschreiben, welche Zeichenfolgen darin Formeln sind.
- Erklären, was Modelle für das System sein sollen, und wann eine Formel in einem Modell gilt (wahr ist) oder nicht gilt (falsch ist).

Eine Formel ist dann eine *Tautologie des Systems* oder eine *allgemeingültige Formel* in dem System (siehe dazu die Anmerkung auf Seite 51), wenn sie in allen Modellen gilt; eine Formel folgt logisch aus einer anderen, wenn sie in jedem Modell gilt, in dem die andere gilt, usw.

Alternativ kann man solche Systeme auch über Beweiskalküle definieren. Man braucht dann zusätzliche Regeln zu einem Beweiskalkül der Aussagenlogik, um mit den neuen Symbolen umgehen zu können.

3.1 Die modallogische Sprache

Das Alphabet Zusätzlich zur Sprache der Aussagenlogik gibt es noch die beiden neuen Zeichen \Box und \Diamond . Die modallogische Sprache setzt sich also aus folgenden Zeichen zusammen:

- den *Aussagenvariablen* A, B, C, \dots o.ä.;
- den *Junktoren* $\perp, \top, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- den *Modaloperatoren* oder *Modalitäten*¹ \Box und \Diamond ;
- den *nicht-logischen Zeichen* (und).

¹Genauer sind die Modaloperatoren Zeichen für Modalitäten; wie so oft unterscheidet man in der Praxis der formalen Logik selten namentlich zwischen dem Zeichen und dem Bezeichneten.

Die Grammatik Die *modallogischen Sätze* oder *modallogischen Formeln* werden, wie die aussagenlogischen, aus einfacheren Formeln aufgebaut. Dabei werden die aussagenlogischen Zeichen wie in der Aussagenlogik gehandhabt; zusätzlich gibt es aber zwei Regeln für die Modaloperatoren, die ebenso wie das Negationszeichen behandelt werden. Die exakten Regeln sind wie folgt, dabei dient \mathcal{S} als Platzhalter für eine beliebige modallogische Formel:

- 1) Jede Aussagenvariable bildet für sich eine modallogische Formel.
- 2) \top und \perp sind jeweils für sich modallogische Formeln.
- 3) Wenn \mathcal{S} eine modallogische Formel ist, dann sind auch $\Box\mathcal{S}$ und $\Diamond\mathcal{S}$ modallogische Formeln.
- 4) Wenn \mathcal{S} eine modallogische Formel ist, dann auch $\neg\mathcal{S}$.
- 5) Wenn \mathcal{S} und \mathcal{T} modallogische Formeln sind, dann auch $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$, $(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})$, $(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$ und $(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$.

Insbesondere ist jede aussagenlogische Formel auch eine modallogische Formel. Alle anderen Zeichenfolgen, die nicht mit diesen Regeln gebildet werden können, sind keine modallogischen Formeln. Man sieht, daß durch die Modaloperatoren keine neuen Klammern hinzukommen. Wie die aussagenlogischen Formeln sind auch die modallogischen Formeln eindeutig lesbar, d.h. man kann aus der Formel erkennen, wie sie aufgebaut wurde.

Beispiele für modallogische Formeln sind:

$$\begin{array}{cccccc} \Diamond A & \Box\Box\Box A & (B \wedge \Box A) & \Box(B \wedge A) & \Box((B \rightarrow \Box B) \wedge \Diamond \neg A) \\ \neg\Box\Diamond\neg\Diamond\neg\Box\Diamond B & \neg\Diamond\perp & (\neg(\Box(\neg\Box\Box A \vee \Diamond\Box B) \wedge \neg\Diamond\Diamond\neg B) \vee \Diamond(\Box A \wedge \neg\perp)) \end{array}$$

Namen \Box ist der *Notwendigkeitsoperator* und wird oft (englisch) „box“ gelesen („Quadrat“) oder „notwendig“ (mit allen Varianten), oder gemäß der intendierten Bedeutung, etwa „geboten ist“ oder „man weiß“. \Diamond ist der *Möglichkeitsoperator* und wird oft „diamond“ bzw. „Raute“ gelesen oder „möglich“ (ebenfalls mit Varianten), oder gemäß der intendierten Bedeutung, etwa „erlaubt ist“ oder „denkbar ist“.

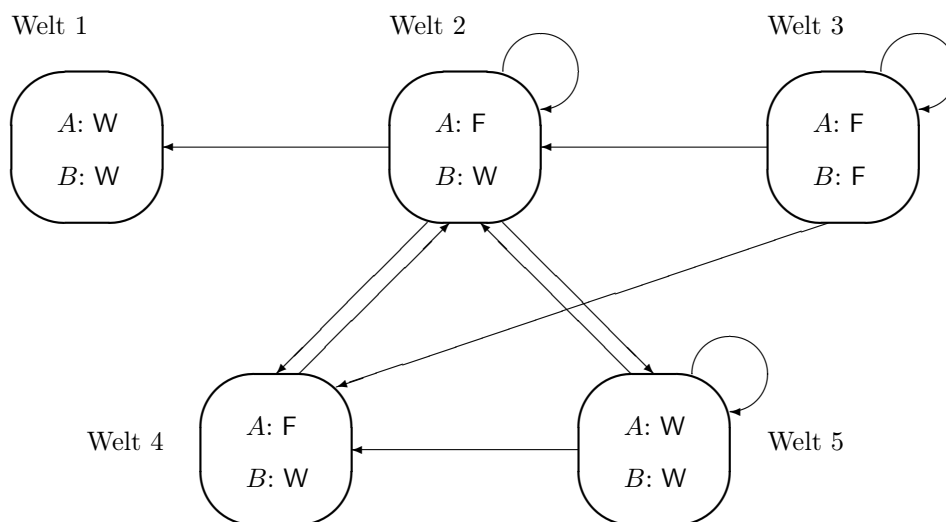
3.2 Modelle

Ein modallogisches Modell besteht aus (1) einer Ansammlung von aussagenlogischen Modellen und (2) einer *Zugangsrelation* zwischen diesen Modellen. Beides soll nun erläutert werden:

(1) Die aussagenlogischen Modelle nennt man auch (*mögliche*) *Welten*. Es ist sinnvoll, eine Aussagenvariable in allen diesen Welten auf die gleiche Weise zu interpretieren, etwa A stets durch „es regnet“: In manchen dieser Welten regnet es dann und A wird dort mit W belegt; in andern regnet es nicht und A wird darin mit F belegt. In einer abstrakteren Version braucht man von den aussagenlogischen Modellen nur die Belegung zurückzubehalten: Dann besteht das modallogische Modell aus einer Ansammlung von Belegungen mit einer Zugangsrelation. Es sollte mindestens eine Welt vorliegen, sonst aber gibt es keine Beschränkungen an die Anzahl der aussagenlogischen Modelle: Es darf nur eines sein, es dürfen aber auch unendlich viele sein. Insbesondere darf jede Belegung mehrfach vorkommen.

(2) Die Zugangsrelation verbindet manche Welten mit andern: Man sagt, daß eine Welt die andere *sieht* oder sich vorstellen kann. Diese Relation unterliegt gar keinen Beschränkungen: In einem Extremfall könnte keine Welt irgendeine Welt sehen, in einem andern Extremfall könnte jede Welt jede andere sehen. Insbesondere braucht eine Welt sich nicht selbst zu sehen; es kann sein, daß manche Welten sich selbst sehen, andere nicht. Es kann „fantasielose“ Welten geben, die nur sich selbst sehen und keine andere Welt; „blinde“ Welten, die gar keine Welten sehen, nicht einmal sich selbst; „unsichtbare“ Welten, die von keiner Welt gesehen werden. Die

Abbildung 3.1: Ein modallogisches Modell



Zugangsrelation braucht auch nicht symmetrisch zu sein: Wenn eine Welt eine zweite sieht, muß es nicht sein, daß diese auch die erste sieht.

Ein solches Modell veranschaulicht man sich am besten durch ein Diagramm mit Kreisen für die Welten, in die man die dort gültigen Belegungen schreibt, sowie Pfeilen zwischen den Kreisen für die Zugangsrelation, wie in Abbildung 3.1.

Auswertung von Formeln in Modellen In den Modellen für die Aussagenlogik konnte man bestimmen, ob eine aussagenlogische Formel darin gilt oder nicht. In den Modellen der Modallogik hängt die Gültigkeit zusätzlich von einem Standort, d.i. einer gewählten Welt in dem Modell, ab. Für ein Modell \mathfrak{M} und eine Welt w daraus wird man also bestimmen können, ob eine modallogische Formel \mathcal{S} darin gilt – wofür man $(\mathfrak{M}, w) \models \mathcal{S}$ schreibt – oder nicht – wofür man $(\mathfrak{M}, w) \not\models \mathcal{S}$ schreibt. Es kann dann sein, daß $(\mathfrak{M}, w) \models \mathcal{S}$ gilt und gleichzeitig $(\mathfrak{M}, w') \not\models \mathcal{S}$ für eine andere Welt w' ; z.B. gilt dies bereits für die Formel $\mathcal{S} = A$, falls A in der Welt w wahr ist (etwa in Welt 1 im Beispiel), aber falsch in der Welt w' (etwa Welt 2 im Beispiel). Wenn klar ist, um welches Modell es sich handelt, kann man auch kürzer $w \models \dots$ bzw. $w \not\models \dots$ schreiben.

Die Gültigkeit muß man nun wie in der Aussagenlogik rückwärts über den Aufbau der Formel überprüfen. Dabei gelten folgende Regeln:

- Aussagenvariablen und Junktoren werden wie in der Aussagenlogik in der jeweiligen Welt ausgewertet, die ja ein aussagenlogisches Modell ist.
- $\Diamond \mathcal{S}$ gilt in der Welt w , falls diese eine Welt w' sieht, in der \mathcal{S} gilt. (Dabei kann w' auch gleich w sein, falls w sich selbst sieht.)
- $\Box \mathcal{S}$ gilt in der Welt w , falls \mathcal{S} in jeder Welt w' gilt, die man von w aus sehen kann (einschließlich sich selbst, falls w sich selbst sieht).

Beispiele: Betrachten wir das Modell in Abbildung 3.1. Ich schreibe w_1 für „Welt 1“ usw.

Es gilt $w_2 \models \neg A$ (da A dort mit F belegt ist), aber $w_2 \models \Diamond A$, da Welt 2 in Welt 1 sieht, in der A gilt. Dagegen gilt $w_2 \not\models \Box A$, da nicht in allen Welten, die Welt 2 sieht, A gilt – etwa in sich selbst oder in Welt 4. Aus letzterem Grund gilt auch $w_2 \models \Diamond \neg A$. Da Welt 4 in Welt 2 sieht, aber auch nur dorthin, folgt daraus sowohl $w_4 \models \Diamond \Diamond \neg A$ als auch $w_4 \models \Box \Diamond \neg A$.

Ferner gilt $w_3 \models \Box \neg A$, da $\neg A$ in jeder der von Welt 3 sichtbaren Welten – Welt 2, 3 und 4 – gilt. Weiter ist $w_3 \models \Box \Diamond B$: jede der Welten, in die Welt 3 sieht, sieht in eine Welt, in der B

gilt: Welt 2 in Welt 1 oder in sich selbst; Welt 3 in Welt 2; Welt 4 in Welt 2. Also gilt auch $w_3 \models (\Box\neg A \wedge \Box\Diamond B)$.

Da Welt 1 gar keine Welt sehen kann, gilt \mathcal{S} in allen Welten, die Welt 1 sehen kann, egal was \mathcal{S} ist; andererseits gibt es keine Welt, die Welt 1 sehen kann und in der \mathcal{S} gilt, wiederum unabhängig davon, was \mathcal{S} ist. Also gilt in Welt 1 nie eine Formel der Form $\Diamond\mathcal{S}$ und alle Formeln der Form $\Box\mathcal{S}$. (Dies widerstrebt dem Alltagsverständnis, erklärt sich aber wie folgt: Wäre es falsch, daß \mathcal{S} in allen Welten gilt, welche Welt 1 sehen kann, müßte man eine solche Welt finden, in der \mathcal{S} nicht gilt. So eine Welt gibt es aber nicht.) Insbesondere haben wir $w_1 \models \Box\perp$ und $w_1 \models \neg\Diamond\top$. Da \perp nirgends und \top überall gilt, also auch in Welt 1, folgt $w_1 \not\models (\top \rightarrow \Diamond\top)$ und $w_1 \not\models (\Box\perp \rightarrow \perp)$. Dies kann man als „Paradoxien blinder Welten“ auffassen.

Als letztes, etwas komplizierteres Beispiel betrachten wir die Formel: $\Box((B \rightarrow \Box B) \wedge \Diamond\neg A)$. Die Teilformel $\Diamond\neg A$ gilt in allen Welten außer Welt 1. Die Teilformel $(B \rightarrow \Box B)$ gilt sogar in allen Welten: in Welt 3, da B dort falsch ist; in den anderen, weil sie nur in Welten sehen können, in denen B gilt. Also gilt die Konjunktion beider Teilformeln in allen Welten außer Welt 1, und die eigentliche Formel in allen Welten außer denen, die Welt 1 sehen können, also in allen Welten außer Welt 2.

3.3 Normale Systeme

Ein *modallogisches System* oder kurz eine *Modallogik* M kann man beschreiben durch die Menge modallogischer Formeln, welche die Tautologien in dem System sind, also immer „wahr“ oder gültig sein sollen. Diese heißen kurz die *M-Tautologien*. Man schreibt dann $M \vdash \mathcal{S}$ dafür, daß die modallogische Formel \mathcal{S} eine M-Tautologie ist, und sagt auch kurz: „ \mathcal{S} gilt in M “.

Solch ein System, *das System* K , erhält man dadurch, daß man als K-Tautologien sämtliche modallogischen Sätze nimmt, welche in allen Modellen von allen Standpunkten aus gültig sind. Andere Systeme erhält man dadurch, daß man nur solche Modelle betrachtet, in denen die Zugangsrelation bestimmte Eigenschaften erfüllt (dadurch erhält man mehr Tautologien, also ein größeres System, aber auch mehr logische Äquivalenzen, also ein schwächeres System).

Alle Systeme, die man über Modelle erhält, sind sogenannte *normale Systeme*. K ist also die „kleinste“ normale Modallogik. Es gibt auch nicht normale Modallogiken, die dann z.B. über Beweiskalküle eingeführt werden. Ein System M ist normal, wenn folgende Eigenschaften gelten:

- (1) Jede aussagenlogische Tautologie ist eine M-Tautologie.
- (2) $(\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A)$ ist eine M-Tautologie.
- (3) $\Box\top$ ist eine M-Tautologie.
- (4) Das Axiom K, d.i. die Formel $(\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B))$, ist eine M-Tautologie.²
- (5) Es gelten die Substitutionsregeln:

Uniforme Substitution: Man kann in einer M-Tautologie eine Aussagenvariable überall durch die gleiche Formel ersetzen und erhält wieder eine M-Tautologie.

Äquivalente Substitution: Man kann in einer M-Tautologie eine Teilformel durch eine logisch äquivalente Teilformel ersetzen und erhält wieder eine M-Tautologie.

- (6) Es gilt der *Modus Ponens*: Wenn $(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$ und \mathcal{S} M-Tautologien sind, dann ist auch \mathcal{T} eine M-Tautologie.

K ist eine Art „starker *modus ponens*“:

$$\frac{M \vdash \Box(A \rightarrow B) \quad M \vdash \Box A}{M \vdash \Box B}$$

² K steht für „Kripke“ und bezeichnet sowohl das Axiom als auch die kleinste normale Modallogik.

Aus den Eigenschaften (1), (2) und (4) folgt, daß auch $(\Diamond A \leftrightarrow \neg \Box \neg A)$ eine M-Tautologie ist: \Box und \Diamond sind dual zueinander (ähnlich wie \wedge und \vee). Daher kann man einen der beiden Modaloperatoren als eine Abkürzung auffassen und es reicht, Regeln für einen von beiden aufzustellen Häufig wählt man \Box .

Aus der dritten und der vierten Eigenschaft folgt beispielsweise, daß $\Box \mathcal{T}$ für jede M-Tautologie \mathcal{T} wieder eine M-Tautologie ist (dies bedeutet aber nicht, daß $(A \rightarrow \Box A)$ eine M-Tautologie wäre!). Insbesondere sind auch $\Box \Box \top$, $\Box \Box \Box \top$ usw. M-Tautologien.

Aus den Eigenschaften (1) und (4) folgt z.B., daß $(\Box A \leftrightarrow \neg \neg \Box A)$ eine M-Tautologie ist.

Anmerkung: Manche Autoren reservieren das Wort „Tautologie“ für solche Formeln, die aus aussagenlogischen Tautologien durch uniforme Substitution hervorgehen, die also Tautologien aufgrund ihrer aussagenlogischen Gestalt sind. Andere Tautologien heißen dann *allgemeingültige Formeln*.

3.3.1 Axiome

Es gibt eine unüberschaubare Vielfalt normaler modallogischer Systeme, von denen aber einige wenige besondere Bedeutung haben. Es gibt grundsätzlich zwei verschiedene Arten, ein System einzuführen: über Beschränkungen an die Zugangsrelation oder über zusätzliche Axiome.

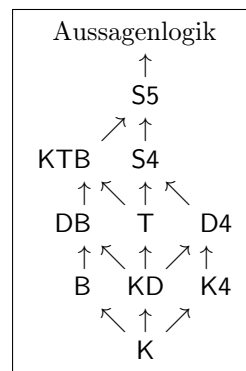
Es folgt hier nun eine Reihe der wichtigsten Axiome, die alle mit Buchstaben oder mit Zahlen bezeichnet werden. (Aus historischen Gründen haben manche mehrere Namen.)³

D:	$(\Box A \rightarrow \Diamond A)$		B:	$(A \rightarrow \Box \Diamond A)$	dual:	$(\Diamond \Box A \rightarrow A)$	
T:	$(\Box A \rightarrow A)$	dual:	$(A \rightarrow \Diamond A)$	4:	$(\Box A \rightarrow \Box \Box A)$	dual:	$(\Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A)$
Aus:	$(\Box A \leftrightarrow A)$	dual:	$(\Diamond A \leftrightarrow A)$	5/E:	$(\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A)$	dual:	$(\Diamond \Box A \rightarrow \Box A)$

Jedes Axiom hat eine duale Variante, die sich leicht aus dem Axiom aus den Normalitätsbedingungen herleiten läßt und die das gleiche normale System erzeugt. D ist selbstdual.

Wie schon bei K nimmt man die Namen der Axiome auch als Bezeichnung für Modallogiken, und zwar für das kleinste normale System, in welchem das betreffende Axiom eine Tautologie ist. Dies kann man auch mit mehreren Axiomen tun; zur Bezeichnung des Systems setzt man dann die Namen der Axiome hintereinander. Oft setzt man ein K dazu, um zu kennzeichnen, daß es sich um normale Systeme handelt. Außerdem gibt es noch die historische Namen S4 und S5 für KT4 und KT5. Es gilt außerdem $KT4B = KT5$.

Einige der gebräuchlichsten modallogischen Systeme ordnen sich wie nebenstehend an (entlang von Pfeilen wird es nach oben schwächer, d.h. Tautologien bleiben erhalten, es kommen aber neue hinzu).



Das Axiom Aus steht für „Aussagenlogik“: Es macht die zusätzliche Aussagekraft der Modallogik zunichte; eine modallogische Formel ist genau dann eine Aus-Tautologie, wenn die aussagenlogische Formel, die man durch Weglassen aller Modaloperatoren erhält, eine aussagenlogische Tautologie ist. Auf diese Weise kann man auch die Aussagenlogik als ein modallogisches System auffassen.

Unterhalb der Aussagenlogik ist S5 eine maximale normale Modallogik, d.h. mit den meisten Tautologien – siehe dazu die Anmerkungen zu den Modalitäten auf Seite 55. Es gibt aber normale Modallogiken, die nicht in S5 enthalten sind.

³D steht für „deontisch“, B für den niederländischen Mathematiker Brouwer, Begründer des Intuitionismus (siehe Seite ??), E für „euklidisch“; die Axiome 4 und 5 sind die charakteristischen Axiome der Lewisschen Systeme S4 und S5.

3.3.2 Beschränkungen der Zugangsrelation:

Diese gängigen Systeme kann man auch dadurch beschreiben, daß man die Modelle auf solche einschränkt, die bestimmte Bedingungen erfüllen, d.h. in denen die Zugangsrelation gewisse Eigenschaften besitzt.

Axiom	Eigenschaft ⁴	Beschreibung
Aus	identisch	jede Welt sieht nur sich selbst
D	linkstotal	jede Welt sieht mindestens eine Welt
T	reflexiv	jede Welt sieht sich selbst
B	symmetrisch	wenn eine Welt eine andere sieht, dann auch umgekehrt
4	transitiv	wenn eine Welt eine zweite sieht, die eine dritte sieht, dann sieht auch die erste die dritte
5	euklidisch	wenn eine Welt in zwei Welten sieht, dann sehen sich diese gegenseitig

Diese Eigenschaften kombinieren sich: Für S4 braucht man also nur Modelle zu betrachten, in denen die Zugangsrelation reflexiv und transitiv ist. Dies bedeutet also, daß eine modallogische Formel dann und nur dann eine S4-Tautologie ist, wenn sie in allen Welten aus allen Modellen, in denen die Zugangsrelation reflexiv und transitiv ist, gültig ist.

Achtung: Die Axiome geben aber in der Regel keine Beschreibung dieser Modelle. Das heißt, selbst wenn $(\Box S \rightarrow \Box \Box S)$ für alle modallogischen Sätze S und in allen Welten eines Modells gilt, braucht die Zugangsrelation dort nicht transitiv zu sein. Manche Eigenschaften von Modellen kann man allerdings durch eine modallogische Formeln axiomatisieren: Wenn etwa $\Diamond \top$ in jeder Welt gilt, dann ist die Zugangsrelation linkstotal. Nicht alle durch Axiome gegebenen Modallogiken lassen sich auf ähnlich einfache Weise durch Eigenschaften der Zugangsrelation beschreiben, und umgekehrt.

Beispiele und einige Regeln

(a) Ein Beispiel für das Dualisieren:

- In T gilt $(\Box A \rightarrow A)$, also auch $(\Box \neg A \rightarrow \neg A)$ mit uniformer Substitution: $\neg A$ für A .
- Da $((B \rightarrow C) \leftrightarrow (\neg C \rightarrow \neg B))$ eine aussagenlogische Tautologie ist, also auch eine T-Tautologie, sind $(\Box \neg A \rightarrow \neg A)$ und $(\neg \neg A \rightarrow \neg \Box \neg A)$ logisch äquivalent in T (uniforme Substitution: $\Box \neg A$ für B und $\neg A$ für C), also ist auch $(\neg \neg A \rightarrow \neg \Box \neg A)$ eine T-Tautologie (äquivalente Substitution).
- Da aber in jeder normalen Modallogik $(\neg \Box \neg A \leftrightarrow \Diamond A)$ gilt und $(\neg \neg A \leftrightarrow A)$, da dies eine aussagenlogische Tautologie ist, folgt wiederum mit äquivalenter Substitution $\top \vdash (A \rightarrow \Diamond A)$.

(b) „Nezessisierung“: Falls M eine normale Modallogik ist und $(A \rightarrow B)$ eine M-Tautologie, dann auch $(\Box A \rightarrow \Box B)$, und dual, „Possibilisierung“, auch $(\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$.

Dies gilt, da $M \vdash \Box \top$, also auch $M \vdash \Box(A \rightarrow B)$ nach äquivalenter Substitution. Axiom K und *modus ponens* liefern dann $(\Box A \rightarrow \Box B)$ als M-Tautologie.

(c) S5 = KT4B:

Die duale Version $(A \rightarrow \Diamond A)$ von T und Axiom 5: $(\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A)$ ergeben zusammen mit der aussagenlogischen Tautologie $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$ nach den nötigen Substitutionen Axiom B. Ähnlich erhält man 4 aus einer Substitution der dualen Version von T, nämlich $(\Box A \rightarrow \Diamond \Box A)$, einer Substitution von 5, nämlich $(\Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond \Box A)$, und der Nezessisierung der dualen Version von 5, also $(\Box \Diamond \Box A \rightarrow \Box \Box A)$.

Umgekehrt ergibt eine Substitution in B die Formel $(\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond \Box A)$, und zusammen mit der Nezessisierung des dualen 4, also $(\Box \Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A)$, dann Axiom 5.

⁴Die Eigenschaft wird jeweils durch die Beschreibung in der rechten Spalte erklärt.

Leicht sieht man dies auch mit den Bedingungen an die Zugangsrelation: Wenn eine Welt sich selbst und eine andere sieht, dann folgt aus „euklidisch“, daß die andere auch die erste sieht. Eine reflexive euklidische Relation ist also symmetrisch. Zum Beispiel mit einer kleinen Zeichnung sieht man nun schnell ein, daß für eine symmetrische Relation „transitiv“ und „euklidisch“ sich auseinander ergeben.

(d) Distributivgesetze:

In \mathbf{K} gelten die beiden Distributivgesetze $(\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B))$ und $(\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B))$. Die volle Distributivität von \Box mit \vee bzw. von \Diamond mit \wedge gilt nicht einmal in $\mathbf{S5}$: Betrachtet man das Modell mit zwei Welten mit voller Zugangsrelation, in einer der Welten ist A wahr, B falsch, in der anderen A falsch, B wahr, dann gilt $\Box(A \vee B)$, aber weder $\Box A$ noch $\Box B$. Damit gilt auch die duale Distributivität von \Diamond mit \wedge nicht, denn aus $\Box(A \vee B) \approx (\Box A \vee \Box B)$ erhält man durch Substitution $\neg\Box(\neg A \vee \neg B) \approx \neg(\Box\neg A \vee \Box\neg B)$, also mit der Dualität von \Box und \Diamond und *de Morgan*: $\Diamond(A \wedge B) \approx (\Diamond A \wedge \Diamond B)$. Man kann aber auch dies direkt in dem Modell sehen.

Abgeschwächte Distributivgesetze gelten allerdings, etwa in $\mathbf{S4}$: $(\Diamond(A \vee \Diamond B) \rightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B))$ und in $\mathbf{S5}$: $(\Diamond(A \vee \Box B) \rightarrow (\Diamond A \vee \Box B))$.

3.4 Modallogische Modellierungen

Die modallogische Sprache ist in vielen Bereichen das geeignete Mittel, die eingeschränkten Ausdrucksmöglichkeiten der Aussagenlogik zu erweitern. Es folgen nun einige Beispiele.

Modallogik im eigentlichen Sinn Hier interpretiert man \Box durch „es ist notwendig“, \Diamond durch „es ist möglich“. In dieser Form taucht Modallogik im Ansatz bereits bei Aristoteles auf, der modale Syllogismen untersucht hat, also etwa Schlußformen der Form

$$\frac{(A \rightarrow B) \quad (B \rightarrow \Box C)}{(A \rightarrow \Box C)} \quad \text{oder} \quad \frac{(A \rightarrow B) \quad \Box(B \rightarrow C)}{\Box(A \rightarrow C)}$$

Auch die Frage nach der Gültigkeit der Axiome eines normalen Systems sind eigentliche philosophische Anliegen, etwa die Gültigkeit des „starken *modus ponens*“ \mathbf{K} oder die Frage, ob „das Wahre“ notwendigerweise wahr ist. Zu erwähnen ist hier vielleicht auch Gödels Version des ontologischen Gottesbeweises, die in einer prädikatenlogischen Modallogik zeigt, daß aus der Möglichkeit der Existenz Gottes die Notwendigkeit der Existenz folgt.

Die Modallogik erlaubt es auch, eine *starke Implikation* $(A \dashv\vdash B)$ als $\Box(A \rightarrow B)$ zu definieren, die dann nicht mehr den aussagenlogischen Paradoxien der Implikation unterliegt (*ex falso quodlibet* muß nicht gelten), dafür aber andere Eigenschaften aufweist, die mit einem intuitiven Verständnis der Implikation nicht verträglich sein müssen.

Zeitlogiken Dies ist die am besten zu veranschaulichende Interpretation: \Box bedeute „von jetzt an gilt stets“ und \Diamond „irgendwann in der Zukunft gilt“. Die möglichen Welten der Modelle entsprechen dann Zuständen der Welt zu zukünftigen Zeitpunkten.

Ein sinnvolles Axiom für Zeitlogiken ist $(\Box A \rightarrow \Box\Box A)$. Eine linear verlaufende Zeit legt das weitere Axiom $(\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A)$ nahe. Daneben könnte man sich aber auch eine verzweigende Zeit vorstellen, wenn man etwa Zukunftsvisionen entwickelt und verschiedene Eventualitäten einplanen möchte. Dann entsprechen die möglichen Welten tatsächlich den ausgedachten Möglichkeiten davon, wie die Welt zu einem zukünftigen Zeitpunkt aussehen könnte, und davon gibt es im allgemeinen für den gleichen Zeitpunkt verschiedene sich widersprechende Möglichkeiten.

$(\Diamond A \rightarrow \Diamond\Diamond A)$ ist ein weiteres mögliches Axiom, das eine „dichte“ Zeit beschreibt, bei der es zwischen zwei betrachteten Zeitpunkten stets einen weiteren gibt. Bei einer „diskreten“ Zeitbeachtung würde man dagegen einzelne aufeinanderfolgende Zeitpunkte betrachten, etwa Tag für Tag.

Deontische Logiken Hier interpretiert man \Box durch „es ist geboten/vorgeschrieben“ und \Diamond durch „es ist erlaubt/gestattet“. Gängiges Axiom für diesen Ansatz ist das deontische D: $(\Box A \rightarrow \Diamond A)$, oder „was geboten ist, ist auch erlaubt“.

Übersetzt man *verboten* mit *nicht erlaubt*, dann ist in einer normalen deontischen Logik beispielsweise ein Rauchverbot logisch gleichwertig mit einem Nichtrauchgebot: $\neg\Diamond R \sim \Box\neg R$.

Epistemische Logiken Hier geht es um Modellierungen von Wissen, etwa indem man \Box als „man weiß, daß“ versteht und \Diamond als „es ist nicht ausgeschlossen, daß“. Hier bietet sich als Axiom T an: $(\Box A \rightarrow A)$ oder „was man weiß, stimmt auch“. Dann kann man auch Prinzipien formulieren wie $(\Box A \rightarrow \Box\Box A)$: „Wenn man etwas weiß, dann weiß man auch, daß man es weiß“.

Ein interessanter in diese Richtung gehender Fall ist der Begriff der Beweisbarkeit in der Mathematik. Gödels Unvollständigkeitsatz besagt u.a., daß es mehr gültige Aussagen über natürliche Zahlen gibt, als man in einer sinnvollen Axiomatisierung, etwa der Peano–Arithmetik, beweisen kann. Interpretiert man \Box durch „beweisbar ist“, so kann man modallogisch Axiome für den Beweisbarkeitsbegriff der Peano–Arithmetik formulieren und erhält das System K4L, auch G für „Gödel“ genannt, wobei L die sogenannte *Löb-Formel* $(\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A)$ ist. Im Kern der Unvollständigkeitsbeweise steckt die Tatsache, daß in K4L Axiom T: $(\Box A \rightarrow A)$ nicht gilt! Es ist sogar KT4L inkonsistent, d.h. \perp und damit jede beliebige Formel ist eine KT4L-Tautologie, KT4L also keine eigentliche Logik. Insbesondere liegt K4L nicht in S4, L ist keine S4-Tautologie.

- Literatur hierzu: George Boolos *The unprovability of consistency*, Cambridge: Cambridge University Press 1979.

3.5 Verschiedene Anmerkungen

Im Vergleich zur reinen Aussagenlogik gibt es deutlich weniger Darstellungen der Modallogik. Zu empfehlen sind:

- Robert Bull, Krister Segerberg *Basic Modal Logic*, S.1–88 im zweiten Band des *Handbook of philosophical logic*.
- Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, Yde Venema *Modal Logic*, Cambridge: Cambridge University Press 2001 (geschrieben für Informatiker).
- Brian Chellas *Modal logic*, Cambridge: Cambridge University Press (1980)⁵

3.5.1 Entscheidbarkeit

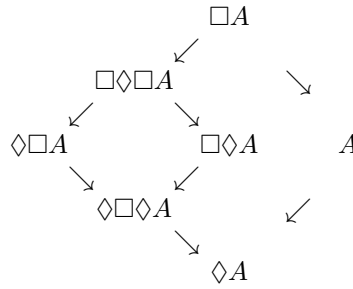
Viele Modallogiken sind entscheidbar, d.h. es gibt Verfahren, welche entscheiden, ob eine modallogische Formel eine Tautologie ist oder nicht. Dies gilt für alle hier vorgestellten Systeme (und für alle, welche dadurch gegeben sind, daß man endliche viele prädikatenlogisch beschreibbare Eigenschaften der Zugangsrelation fordert). Diese Entscheidungsverfahren beruhen darauf, daß es für jeden modallogischen Satz \mathcal{S} , der mit einer Modallogik M konsistent ist (d.h. $M \not\vdash \neg\mathcal{S}$) bereits ein Modell mit endlich vielen Welten gibt. Allerdings gibt es in der Regel kein gutes Verfahren, solch ein endliches Modell zu finden, außer alle der Größe nach durchzugehen.

Für S4 und S5 gibt es dagegen schönere Entscheidungsverfahren, in denen man eine Formel durch logisch äquivalente Umformungen in eine Normalform bringt, die man dann einfacher testen kann.

Ein besonders einfaches, wenn auch nicht unbedingt besonders schnelles Verfahren gibt es für S5: Die Bedingungen an die Zugangsrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv) beschreiben eine sogenannte *Äquivalenzrelation*, d.h. es gibt eine Aufteilung der Welten in verschiedene Gruppen, innerhalb derer jede Welt jede andere und sich selbst sehen kann, aber ohne daß irgendeine Welt eine aus einer anderen Gruppe sehen könnte. Man überlegt sich leicht, daß es ausreicht, *eine* solche Gruppe anzuschauen, also nur Modelle, in denen jeder jeden sehen kann, und außerdem

⁵Persönlich noch nicht überprüfte Empfehlung eines Fachmanns.

Abbildung 3.2: Die Modalitäten in S4



Modelle, in denen jede Belegung nur einmal vorkommt. Wenn in der zu prüfenden Formel n Aussagenvariablen vorkommen, nimmt man für jede Auswahl aus den 2^n Belegungen ein entsprechendes Modell, in dem jede Welt = Belegung jede andere sieht (das sind 2^{2^n} Modelle), und muß von jeder Welt aus testen, ob die Formel gilt oder nicht. Das ist bei mehr als einer Aussagenvariablen viel Arbeit!

3.5.2 Modalitäten

Eine *Modalität* ist irgendeine Abfolge von \diamond und \square .⁶

In S4 gilt ($\square A \leftrightarrow \square \square A$): eine Richtung ist Axiom 4, die andere Richtung bekommt man aus T durch uniforme Substitution. Dual gilt dann auch ($\diamond A \leftrightarrow \diamond \diamond A$). Bis auf logische Äquivalenz bleiben somit nur Modalitäten der Form $\dots \square \diamond \square \diamond \dots$ ohne Doppel- \square oder Doppel- \diamond . Außerdem gilt in S4 ($\diamond \square \diamond \square A \leftrightarrow \diamond \square A$) und dual ($\square \diamond \square \diamond A \leftrightarrow \square \diamond A$), also hat S4 nur sieben Modalitäten, die sich wie in Abbildung 3.2 der Stärke nach ordnen (Pfeile stehen dafür, daß die Implikation eine S4-Tautologie ist).

In T5 gilt weiterhin ($\diamond A \leftrightarrow \square \diamond A$): eine Richtung ist Axiom 5, die andere Richtung bekommt man wieder aus T durch uniforme Substitution. Dual gilt dann auch ($\square A \leftrightarrow \diamond \square A$). Damit gibt es in S5 bis auf logische Äquivalenz nur noch die Modalitäten \square , \diamond und die „leere“ Modalität. In diesem Sinne ist S5 also eine ausdrucksarme Modallogik.

3.5.3 Beweiskalküle

Wie schon öfters erwähnt, kann man Modallogiken auch durch Beweiskalküle einführen. Dazu muß man zu etwa dem für die Aussagenlogik vorgestellten Gentzen-Kalkül noch neue Regeln hinzufügen, welche folgende Form haben werden, aber nur unter bestimmten Voraussetzungen an Σ und \mathcal{S} gelten. (Hier wird \diamond als Abkürzung aufgefaßt, für die man keine eigenen Regeln braucht).

$$\begin{array}{ccc} \square\text{-Beseitigung} & \frac{\Sigma \vdash \square \mathcal{S}}{\Sigma \vdash \mathcal{S}} & \square\text{-Einführung} & \frac{\Sigma \vdash \mathcal{S}}{\Sigma \vdash \square \mathcal{S}} \end{array}$$

Die Bedingungen für S4 und S5 sind nun folgendermaßen: Die erste Ableitungsregel gilt stets; die zweite gilt für S4 nur, falls alle Sätze in Σ die Gestalt $\square \mathcal{T}$ haben, und für S5, falls alle Sätze in Σ entweder die Gestalt $\square \mathcal{T}$ oder $\neg \square \mathcal{U}$ haben.

Beweiskalküle sind vor allem dann wichtig, wenn es kein (vernünftiges) Entscheidungsverfahren für eine Modallogik gibt; außerdem sind sie näher an der Art der natürlichen Argumentation als semantisch begründete Logiken. Andererseits ist es sehr schwierig zu zeigen, ob zwei durch Beweiskalküle definierte Systeme verschieden oder gleich sind.

⁶Genauer würde man auch noch Negationen \neg aufnehmen, aber da es um logische Äquivalenz gehen soll, kann man die Negationszeichen alle nach außen ziehen, indem man $\diamond \neg$ durch $\neg \square$ ersetzt und $\square \neg$ durch $\neg \diamond$. Damit hat man höchstens ein Negationszeichen am Anfang.

3.5.4 Zur Geschichte der Modallogik

Die Modallogik beginnt wie die Logik überhaupt mit Aristoteles, der ein umfangreiches System modallogischer Syllogismen aufgestellt hat, über dessen Interpretation allerdings keine gefestigte Meinung vorliegt.

Einen Neuanfang gab es 1918 mit C.I.Lewis, der zunächst versuchte, eine Axiomatisierung der „starken“ Implikation $\Box(A \rightarrow B)$ vorzulegen, welche die Paradoxien der aussagenlogischen Implikation $(A \rightarrow B)$ vermeiden sollte. 1932 folgten in einem Buch mit Langford die Lewisschen Systeme S1–S5, von denen die ersten drei aber nicht normal sind. Einen mehrwertigen Zugang zur Modallogik schlug Łukasiewicz vor. Zeitlogiken wurden von A. Prior in den fünfziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts untersucht. Darin finden sich bereits Ansätze zu Semantiken, wie auch in den Arbeiten von Carnap, Jónsson & Tarski sowie Hintikka. Allgemein gilt Saul Kripke als der Erfinder der Semantiken (1959). Spätestens seitdem ist die Modallogik ein immenses Forschungsgebiet innerhalb der formalisierten Logik, insbesondere auch mit Anwendungen in der Informatik.

Mehr zur Geschichte der Modallogik im Beitrag im *Handbook of philosophical logic* und im Buch von Blackburn et.al.

Kapitel 4

Prädikatenlogik

Die Prädikaten- (oder auch Quantorenlogik) stellt ebenfalls eine Erweiterung der Aussagenlogik dar. Zum einen gibt es hierin die Möglichkeit, die innere Struktur von Aussagen näher zu analysieren als nur durch die aussagenlogischen Junktoren: Man hat die Möglichkeit, Eigenschaften einzelner Objekte und ihre Verhältnisse zueinander zu beschreiben. Zum andern kann man über diese Objekte auch „quantifizieren“, d.h. über ihre Existenz oder auch ihre Anzahl oder über die Universalität einer Eigenschaft sprechen.

Die Prädikatenlogik ist in ihrer Aussagekraft stark genug, die gesamte bekannte Mathematik und damit auch alle mathematisierbare Wissenschaft zu beschreiben. Allerdings ist diese Beschreibung in der Regel eine Kodierung, also nicht vollkommen natürlich. Um natürlichere Beschreibungen zu erhalten, kann man die Prädikatenlogik wiederum erweitern, etwas durch die beiden Modaloperatoren (also die bisherige aussagenlogische Modallogik zu einer prädikatenlogischen Modallogik ausbauen).

Genauer handelt es sich bei der Prädikatenlogik hier um die *Prädikatenlogik erster Stufe*. Es gibt auch Prädikatenlogiken höherer Stufe, in denen man nicht nur über Objekte, sondern auch z.B. über Eigenschaften (d.h. Mengen von Objekten) quantifizieren kann. Ich werde eine abgeschwächte Version der Prädikatenlogik, nämlich ohne Funktionen, vorstellen. Dabei bleibt die prinzipielle Ausdruckskraft der Prädikatenlogik erhalten; die Darstellung vereinfacht sich aber erheblich. Die ausführliche Version ist aber für Interessierte in kleinerer Schrift beigegeben.

4.1 Die prädikatenlogische Sprache

Die prädikatenlogische Sprache ist deutlich komplexer als die aussagen- oder modallogische Sprache. Der Wunsch ist hierbei, über einzelne Objekte eines Universums sprechen zu können. Es wird also Namen für solche Objekte geben: einerseits *Variablen* für solche Objekte und andererseits *Konstanten* für feste Objekte. Hinzu kommen Relationszeichen für Eigenschaften von Objekten und gewissermaßen als zusätzliche Junktoren sogenannte *Quantoren*, die etwas über die Anzahl von Objekten aussagen. Noch stärker als in der Aussagenlogik wird man die Sprache erst dann gut begreifen, wenn man gesehen hat, wie Formeln in Modellen ausgewertet werden. Aber da nur eines nach dem andern eingeführt werden kann, sollte man den Inhalt dieses Abschnittes erst einmal vertrauensvoll entgegennehmen, um nach der Lektüre von Abschnitt 4.2 gegebenenfalls hierher zurückzukommen.

Das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache besteht aus folgenden Zeichen:

Dem „festen“ Anteil, das sind

- die „logischen Zeichen“ $\perp, \top, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$
- die „nicht-logischen Zeichen“ $) , ($ und $=$

- die Individuenvariablen v, w, x, y, z ;¹

und einem variablen Anteil (manchmal *Signatur* oder *Vokabular* genannt), das sind

- Individuenkonstanten a, b, c, \dots (vorzugsweise lateinische Minuskeln vom Beginn des Alphabets);
- Relationszeichen A, B, \dots, V, W, \dots (lateinische Majuskeln).

Die Relationszeichen besitzen zudem eine *Stelligkeit*, sind also zum Beispiel zwei- oder vierstellig. Die ist eine natürliche Zahl, die angibt, mit wievielen Variablen, Konstanten oder allgemeiner Termen (Erklärung folgt!) ein solches Zeichen verknüpft wird. Die einstelligen Relationszeichen heißen auch *Prädikate* (daher der Name „Prädikatenlogik“). Es sind auch nullstellige Relationszeichen zugelassen. Diese heißen auch „Aussagenvariablen“, und man wird sehen, daß sie sich tatsächlich wie die Aussagenvariablen in der Aussagenlogik verhalten werden. Dadurch stellt das prädikatenlogische Alphabet tatsächlich eine Erweiterung des aussagenlogischen dar.

Die Information über die Stelligkeit gehört zur Angabe einer prädikatenlogischen Sprache. Die Zuteilung bestimmter Buchstabengruppen zu den einzelnen Zeichenarten ist eine reine Konvention, die das Lesen erleichtert. Auch hier sollte man bei der Angabe einer prädikatenlogischen Sprache, d.h. seines variablen Anteils, spezifizieren, welche Zeichen welche Rolle übernehmen. In diesem Skript seien aber die Kleinbuchstaben v, w, x, y, z stets für Individuenvariablen reserviert.

Bei der ausführlichen Version der Prädikatenlogik kommen noch das Komma «,» als nicht-logisches Zeichen sowie im variablen Anteil *Funktionszeichen* f, g, \dots hinzu. Auch die Funktionszeichen verfügen über eine anzugebende Stelligkeit. Läßt man nullstellige Funktionszeichen zu, so kann man diese mit Individuenkonstanten identifizieren.

Namen und Varianten \forall heißt der *Allquantor*, \exists der *Existenzquantor*, = das *Gleichheitszeichen*. Die beiden Quantoren kann man sich gut merken, da sie jeweils aus dem umgedrehten Anfangsbuchstaben ihres Namens bestehen. Das Gleichheitszeichen kann man sich noch besser merken, weil es einfach das übliche Gleichheitszeichen ist.

Die beiden Quantoren werden stets in Verbindung mit einer Individuenvariablen auftreten, z.B. mit x als $\forall x$ bzw. $\exists x$ (genaugenommen sind *dies* die Quantoren, also für jede Individuenvariable ein All- und ein Existenzquantor). Man liest sie dann „für alle x (gilt ...)“ und „es gibt (mindestens) ein x (mit der Eigenschaft ...)“. Die Bezeichnung der Quantoren mit \exists und \forall ist weit verbreitet; Eine Variante in der Literatur aus Schreibmaschinenzeiten ist (Ex) für $\exists x$ und (x) für $\forall x$. Ebenso findet man bisweilen \bigvee_x für $\exists x$ und \bigwedge_x für $\forall x$. Dies kommt daher, daß sich der Existenzquantor in einer gewissen Weise wie eine Disjunktion, der Allquantor wie eine Konjunktion verhält.

Ähnlich wie wir in der Aussagenlogik zwischen Syntax- und Semantikebene unterscheiden mußten, muß man dies eigentlich auch mit dem Gleichheitszeichen tun. Das Gleichheitszeichen wird einerseits in Formeln verwendet (syntaktische Ebene); andererseits möchte man über zwei Formeln aussagen können, daß sie gleich sind, wie man auch über zwei Formeln aussagen könnte, daß sie logisch äquivalent sind. So, wie man für letzteres kurz das Zeichen \sim benutzt, könnte man für die Gleichheit von Formeln das Gleichheitszeichen $=$ benutzen wollen. Dies findet dann aber auf der semantischen Ebene statt und unterscheidet sich vom anderen Gleichheitszeichen wie \sim von \leftrightarrow . Hier gibt es keine einheitliche Lösung: Manche Autoren schreiben \doteq für das syntaktische Gleichheitszeichen, andere \equiv oder $=$ für das semantische. Ich werde das Problem dadurch umgehen, daß ich auf der semantischen Ebene kein Gleichheitszeichen zu verwenden versuche.

¹Auch hier möchte man eigentlich unbegrenzt viele Individuenvariablen zur Verfügung haben; bei Bedarf nimmt man v_1, v_2, v_3 oder andere Varianten. Analoges gilt für die Individuenkonstanten und Relationszeichen.

Die Regeln Die prädikatenlogischen Formeln werden ebenfalls nach bestimmten Regeln aus einfacheren aufgebaut. Während dies in der Aussagenlogik ein Prozeß ist, welcher aus Elementarsätzen zusammengesetzte Sätze formt, kommt in der allgemeinen Prädikatenlogik eigentlich noch ein weiterer Schritt hinzu, welcher zunächst gewissermaßen die Wörter bildet, aus denen die Elementarsätze bestehen. Diese „Wörter“ werden *Terme* genannt. In der vereinfachten Version passiert hier aber nicht viel.

(1) In der vereinfachten Version ist ein Term entweder eine Individuenvariable oder eine Individuenkonstante.

In der Version mit Funktionen ist ein Term eine Zeichenfolge, welche später in einem Modell durch ein Objekt des Modells ausgewertet werden kann. Diese werden wieder an Hand einer „Bauanleitung“ aus einfacheren Termen zusammengesetzt.

1. Jede Individuenvariable ist ein Term.
2. Jede Individuenkonstante ist ein Term.
3. Wenn τ_1, \dots, τ_n Terme sind und f ein n -stelliges Funktionszeichen, dann ist auch $f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ein Term.

Beispiele: Die Sprache enthalte Individuenkonstanten a und c , einstellige Funktionszeichen f und g sowie ein zweistelliges h .

Terme sind etwa: v a $f(c)$ $f(g(x))$ $f(f(f(f(a))))$ $h(v, c)$ $h(f(c), h(v, c))$
Keine Terme sind z.B.: $A(v)$ f $f(g)$ ac $f(x, y)$ $h(a)$ $h(ac)$

(2) Als nächstes definieren wir *atomare* prädikatenlogische Formeln. Diese heißen so, weil sie nicht aus einfacheren Formeln zusammengesetzt sind. In der Aussagenlogik bilden die Aussagenvariablen, Verum und Falsum die atomaren Formeln; in der Prädikatenlogik gibt es zusätzliche atomare Formeln:

1. \top und \perp sind atomare prädikatenlogische Formeln.
2. Wenn τ_1 und τ_2 Terme sind, dann ist $\tau_1 = \tau_2$ eine atomare prädikatenlogische Formel.
3. Wenn τ_1, \dots, τ_n Terme sind und R ein n -stelliges Relationszeichen, dann ist $R\tau_1 \dots \tau_n$ eine atomare prädikatenlogische Formel.

Wendet man die letzte Regel auf nullstellige Relationszeichen an, so erhält man auch in der Prädikatenlogik, daß jede Aussagenvariable für sich eine Formel bildet.

Beispiele: Sind a und c Individuenkonstanten, A ein nullstelliges, W ein einstelliges und F ein zweistelliges Relationszeichen, so sind atomare prädikatenlogische Formeln zum Beispiel:

$a = c$ $c = y$ \perp Wa Wz Faa A $v_1 = v_2$

Mit Funktionen wären z.B. auch $Wh(v, c)$ und $Fvf(g(x))$ atomare prädikatenlogische Formeln.

(3) Nun bildet man, wie in der Aussagenlogik, aus den atomaren prädikatenlogischen Formeln zusammengesetzte Formeln; dabei gibt es neben den weiterhin geltenden Regeln aus der Aussagenlogik zwei neue Regeln. Zusammen ergeben sich alle prädikatenlogischen Formeln wie folgt:

1. Jede atomare prädikatenlogischen Formel ist eine prädikatenlogischen Formel.
2. Wenn \mathcal{S} und \mathcal{T} prädikatenlogische Formeln sind, dann auch $\neg\mathcal{S}$, $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$, $(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})$, $(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$ und $(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$.
3. Wenn \mathcal{S} eine prädikatenlogische Formeln ist und v eine Individuenvariable, dann sind auch $\forall v \mathcal{S}$ und $\exists v \mathcal{S}$ prädikatenlogische Formeln.²

²Hier benutze ich v als Variable für Individuenvariablen. Die mit Quantoren gebildeten Formeln sind also Zeichenfolgen, die mit einem der beiden Zeichen \forall oder \exists beginnen, dann folgt eine Individuenvariable, und schließlich folgt eine Zeichenfolge, welche eine Formel \mathcal{S} darstellt.

Alle anderen Zeichenfolgen, die nicht mit diesen Regeln gebildet werden können, sind keine prädikatenlogischen Formeln. Insbesondere darf ein Quantor nur in Verbindung mit einer Individuenvariable erscheinen, und nicht mit einer Konstante oder einem Relationszeichen. Dabei muß diese Individuenvariable in der Formel nicht auftreten (man wird allerdings später bei der Auswertung in Modellen sehen, daß dies insofern eine sinnlose Quantifizierung ist, als sie an der Aussagekraft einer Formel nichts ändert).

Jede aussagenlogische Formel ist auch eine prädikatenlogische Formel. Aus unerfindlichen Gründen lassen viele Autoren keine nullstelligen Relationszeichen zu; bei ihnen ist die Prädikatenlogik keine unmittelbare Erweiterung der Aussagenlogik.

Prädikatenlogische Formeln sind wieder eindeutig lesbar, d.h. man kann ihren Aufbau rückwärts nachvollziehen.

Dies gilt insbesondere auch für Terme. Daß man bei Funktionszeichen Klammern einsetzt und Kommata zur Trennung der Terme, ist eine aus der Mathematik übernommene Gepflogenheit, die das Lesen erleichtert. Bisweilen wird dies auch für Relationszeichen übernommen. Bei handschriftlichen Formeln kann man auch durch einen leichten Abstand die Trennung zwischen mehreren Termen, welche einem Relationszeichen folgen, andeuten, sollten diese durch verschachtelte Funktionszeichen unübersichtlich werden.

Beispiele: Prädikatenlogische Formeln in der obigen Sprache sind etwa

$$a = c \quad \exists v a = v \quad \exists w a = v \quad \forall v \forall w Wv \quad \exists v \exists w Fvw \quad \exists v (Wa \wedge \forall w Fvw)$$

4.2 Modelle prädikatenlogischer Sprachen

Ein Modell \mathfrak{M} für eine prädikatenlogische Sprache besteht aus:

1. einem *Universum* oder *Individuen-* oder *Gegenstandsbereich*, das ist eine (nicht leere) Menge M von (konkreten oder abstrakten) Objekten, auch Individuen genannt;
2. festen Objekten $a^{\mathfrak{M}}, b^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}}, \dots$ aus M für die Individuenkonstanten a, b, c, \dots in der Sprache;
3. *Relationen* $A^{\mathfrak{M}}, B^{\mathfrak{M}}, C^{\mathfrak{M}}, \dots$ über M für die Relationszeichen A, B, C, \dots in der Sprache, wobei jede Relation die Stelligkeit hat, welche für das Relationszeichen vorgegeben ist.

Eine n -stellige Relation $R^{\mathfrak{M}}$ über M ist eine Eigenschaft, die für Auswahlen von n Objekten aus M zutrifft oder nicht. Die Relation $R^{\mathfrak{M}}$ entscheidet also jedesmal, wenn man n Objekte m_1, \dots, m_n aus M auswählt, ob sie darauf zutrifft – dann schreibt man $R^{\mathfrak{M}}m_1 \dots m_n$ – oder nicht.

Beispiele (1) M seien alle Menschen, $W^{\mathfrak{M}}$ die einstellige Relation „ist weiblich“. $W^{\mathfrak{M}}(m)$ gilt dann für eine Person m genau dann, wenn m weiblich ist.

(2) M seien alle Menschen, $K^{\mathfrak{M}}$ die zweistellige Relation „ist Kind von“. Hier sieht man, daß es auf die Reihenfolge von m_1, \dots, m_n ankommt. Ist m_1 Sohn von m_2 , dann gilt $K^{\mathfrak{M}}m_1m_2$, aber nicht $K^{\mathfrak{M}}m_2m_1$.

(3) M seien alle Menschen, $S^{\mathfrak{M}}$ die zweistellige Relation „sich mögen“. Hier kann es sein, daß $S^{\mathfrak{M}}mm$ für manche m gilt, für andere nicht. Wenn eine Relation $R^{\mathfrak{M}}m_1 \dots m_n$ zutrifft, ist damit nichts darüber ausgesagt, ob die m_1, \dots, m_n verschieden sind oder nicht.

(4) M seien alle Menschen, $T^{\mathfrak{M}}$ die dreistellige Relation „Tochter sein von ... und ...“.

(5) In der natürlichen Sprache gibt es Eigenschaften, die keine feste Stelligkeit haben, z.B. „untereinander befreundet sein“. Wenn man dies prädikatenlogisch modellieren möchte, braucht man entweder für jede Stelligkeit ein eigenes Relationssymbol, oder man drückt die Tatsache, daß z.B. fünf Menschen untereinander befreundet sind, dadurch aus, daß man für je zwei dieser fünf aussagt, daß sie befreundet sind, und dann die Konjunktion aller dieser Formeln bildet.

In der Version mit Funktionen, besteht ein Modell zusätzlich aus *Funktionen* $f^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}}, \dots$ von M nach M für die Funktionszeichen f, g, \dots in der Sprache, auch jeweils in der angegebenen Stelligkeit. Dabei ist eine n -stellige Funktion eine Zuordnung, die *jeder* Auswahl von n Objekten in M *ein und nur ein* Objekt aus M zuordnet. Man schreibt $f^{\mathfrak{M}}(m_1, \dots, m_n)$ für das Objekt, welches den Objekten m_1, \dots, m_n zugeordnet wird.

- Beispiele:** (1) M seien alle Menschen, $f^{\mathfrak{M}}$ die einstellige Funktion, die jedem Menschen seinen Vater zuordnet.
 (2) M seien alle reellen Zahlen, $f^{\mathfrak{M}}$ beispielsweise die (einstellige) Sinusfunktion, $g^{\mathfrak{M}}$ die zweistellige Addition, welche je zwei Zahlen ihre Summe zuordnet.
 (3) M seien alle Einwohner Deutschlands, $f^{\mathfrak{M}}(m)$ der Bürgermeister der Gemeinde, in der die Person m wohnt. (Hier sieht man, daß $f^{\mathfrak{M}}(m)$ nicht unbedingt verschieden von m sein muß!)

4.3 Auswertungen der Formeln in Modellen

Bei der Auswertung von Formeln in Modellen kommt eine neue Schwierigkeit auf: die der freien Variablen. Dies sind Individuenvariablen, welche nicht im Bereich eines Quantors stehen. Ähnlich wie die Gültigkeit eines Satzes wie „Das Ding ist grün“ nur dann bestimmt werden kann, wenn man zusätzlich weiß, was mit „das Ding“ gemeint ist, können auch solche prädikatenlogischen Formeln in Modellen nur unter einer Zusatzinformation ausgewertet werden, nämlich, was mit freien Individuenvariablen geschehen soll. Dazu benutzt man wieder eine sogenannte *Belegung* der Variablen. Während in der Aussagenlogik Aussagenvariablen mit (Aussagen, und damit letztendlich mit) Wahrheitswerten belegt wurden, werden hier Individuenvariablen mit Individuen, also mit Objekten des Modells belegt. Eine Belegung ist also eine Zuordnung, welche jeder vorkommenden Individuenvariable ein Objekt des Modells zuordnet. Belegungen werden hier in der Regel mit β bezeichnet.

Im Folgenden wird nun Schritt für Schritt definiert, wann eine Formel \mathcal{S} in einem Modell \mathfrak{M} unter einer Belegung β gilt, wofür man kurz $\mathfrak{M} \models \mathcal{S}[\beta]$ schreibt. Die formale Definition mag zunächst verwirrend erscheinen: im Grunde wertet man eine Formel aber genau so aus, wie es die Formel beschreibt. Die formale Definition erlaubt es aber auch, „merkwürdige“ Formeln auszuwerten, in denen etwa doppelt über Individuenvariablen quantifiziert wurde, oder über Variablen, welche sonst in der Formel nicht vorkommen, usw. Außerdem ist es bei „komplizierten“ Formeln, z.B. mit vielen Quantorenwechseln, nicht so offensichtlich, was die Formel besagt.

(1) Auswertung der Terme Jeder Term einer prädikatenlogischen Sprache soll ein Objekt eines Modells beschreiben. Dies geschieht im allgemeinen abhängig von einer Belegung β : ein Term τ wird in einem Modell \mathfrak{M} unter einer Belegung β also durch ein Objekt $\tau[\beta]$ ausgewertet. Dies geschieht in der naheliegenden Weise:

- Für Individuenkonstanten, etwa a , ist $a[\beta] = a^{\mathfrak{M}}$, also das Element, das in dem Modell mit a bezeichnet wird.
- Für Individuenvariablen, etwa v , ist $v[\beta] = \beta(v)$, d.h. das Element, das die Belegung der Variable v zuordnet.

Der etwas aufgeblasene Formalismus wird notwendig, wenn man Funktionen hinzuzieht. Dann muß man nämlich $\tau[\beta]$ wieder über den Aufbau der Terme definieren durch folgende Regel:

- Wenn f ein n -stelliges Funktionszeichen ist und τ_1, \dots, τ_n Terme sind, dann ist $f(\tau_1, \dots, \tau_n)[\beta] = f^{\mathfrak{M}}(\tau_1[\beta], \dots, \tau_n[\beta])$.

Dies bedeutet, daß dem Term $f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ unter β genau das Objekt zugeordnet wird, welches die Funktion $f^{\mathfrak{M}}$ den Objekten $\tau_1[\beta], \dots, \tau_n[\beta]$ zuordnet. Man macht also genau das in dem Modell, was der Term beschreibt.

Beispiel: M seien wieder alle Menschen, $a^{\mathfrak{M}}$ Aristoteles, $f^{\mathfrak{M}}$ die „Vater“-Funktion, $g^{\mathfrak{M}}$ die „Mutter“-Funktion. Wir betrachten eine Belegung β , welche v mit Saul Kripke und w mit Charles Sanders Pierce auswertet. Dann wird $f(f(a))[\beta]$ der Großvater väterlicherseits von Aristoteles, $g(v)[\beta]$ die Mutter von Kripke und $g(g(f(w)))[\beta]$ die Mutter der Großmutter väterlicherseits von Pierce.

(2) Auswertung atomarer Formeln Die Auswertung atomarer prädikatenlogischer Formeln ist nun wieder einfacher, hängt aber auch von einer Belegung ab. Allen Formeln werden wieder, allerdings abhängig von Belegungen, Wahrheitswerte W oder F zugeordnet, und zwar wieder genau gemäß der Interpretation der Zeichen:

1. Eine prädikatenlogische Formel $\tau_1 = \tau_2$ wird wahr unter einer Belegung β , falls $\tau_1[\beta]$ und $\tau_2[\beta]$ dasselbe Objekt des Modells \mathfrak{M} sind.
2. Eine prädikatenlogische Formel $R\tau_1 \dots \tau_n$ wird wahr unter einer Belegung β , falls die Eigenschaft (Relation) $R^{\mathfrak{M}}$ auf die Objekte $\tau_1[\beta], \dots, \tau_n[\beta]$ aus M zutrifft, falls also $R^{\mathfrak{M}}\tau_1[\beta] \dots \tau_n[\beta]$ gilt.

Man sieht hier, daß das Gleichheitszeichen ebenso gehandhabt wird wie ein zweistelliges Relationszeichen. Der Hauptunterschied besteht darin, daß das Gleichheitszeichen in jedem Modell eine feste Bedeutung hat. Das Gleichheitszeichen ist also gewissermaßen eine „Relationskonstante“; es verhält sich zu den Relationszeichen wie in der Aussagenlogik die Aussagenkonstanten Verum und Falsum zu den Aussagenvariablen. Außerdem schreibt man aus Gewohnheit $y = w$ statt $=vw$.

(3) Auswertung zusammengesetzter Formeln Die Auswertung der aussagenlogischen Junktoren erfolgt wie aus der Aussagenlogik gewohnt. Zur Auswertung der Quantoren müssen wir Belegungen leicht abändern können: Ist β eine Belegung und m ein Objekt im Modell \mathfrak{M} , dann soll $\beta(\frac{m}{v})$ die Belegung sein, die überall mit β übereinstimmt, der Variablen v aber das Objekt m zuordnet.

1. Eine prädikatenlogische Formel $\forall v S$ wird wahr unter der Belegung β , wenn für jedes Objekt m im Modell \mathfrak{M} gilt, daß die Formel S unter der Belegung $\beta(\frac{m}{v})$ wahr wird.
2. Eine prädikatenlogische Formel $\exists v S$ wird wahr unter der Belegung β , wenn es ein Objekt m im Modell \mathfrak{M} gibt, so daß die Formel S unter der Belegung $\beta(\frac{m}{v})$ wahr wird.

Um eine quantifizierte Formel auszuwerten, läßt man also zunächst den Quantor weg und wertet die übriggebliebene Formel aus; dabei muß man aber die Belegung für die quantifizierte Variable abändern. Für einen Allquantor müssen sämtliche Möglichkeiten wahr werden, für einen Existenzquantor muß es eine geben, welche die übriggebliebene Formel wahr macht.

Prädikatenlogische Sätze Wenn ein Quantor in einer Formel auftritt, dann heißt die Teilformel, vor die der Quantor (zusammen mit Individuenvariable) beim Aufbau der Formel geschrieben wurde, der *Bereich* des Quantors. Eine Individuenvariable v , die im Bereich eines Quantors $\forall v$ oder $\exists v$ steht, heißt durch diesen Quantor *gebunden*; eine Variable, die durch keinen Quantor gebunden ist, heißt *frei*. Dies kann man exakt definieren, es ist aber auch intuitiv verständlich.

Beispiele: In der Formel $\exists x Rxy$ ist x gebunden, y dagegen frei. y steht zwar im Bereich des Quantors $\exists x$, dieser bindet aber nicht y , da es sich um eine andere Variable handelt.

In der Formel $\exists x(Rxy \wedge x = c)$ ist x überall gebunden: der Bereich des Quantors ist alles, was zwischen den Klammern steht. In der Formel $(\exists x Rxy \wedge x = c)$ dagegen ist nur Rxy im Bereich des Quantors. Damit ist das x aus der Teilformel Rxy gebunden, das x aus der Teilformel $x = c$ aber frei. In beiden Fällen ist y frei.

Im Unterschied zur Aussagenlogik will ich zwischen prädikatenlogischen Sätzen und Formeln unterscheiden. Ein *prädikatenlogischer Satz* ist eine prädikatenlogische Formel ohne freie Variablen.

Nur für freie Variablen ist die Belegung bei der Auswertung einer Formel von Bedeutung, denn für gebundene Variablen wird die Belegung im Auswertungsprozeß sowieso abgeändert. Intuitiv

ist klar, aber man kann auch präzise beweisen, daß der Wahrheitswert einer Formel ohne freie Variablen nicht von der gewünschten Belegung abhängt. Für prädikatenlogische Sätze ist damit unabhängig von Belegungen definiert, ob sie in einem Modell gelten oder nicht. Für einen prädikatenlogischen Satz \mathcal{S} schreibt man dann wieder, wie in der Aussagenlogik, $\mathfrak{M} \models \mathcal{S}$, wenn der Satz in dem Modell gilt.

Die Bildungsgesetze für prädikatenlogische Formeln erlauben „sinnlose Quantifikationen“. Damit sind Quantifikationen $\forall v\mathcal{S}$ oder $\exists v\mathcal{S}$ gemeint, bei denen v nicht freie Variable von \mathcal{S} ist (also wenn v gar nicht vorkommt oder alle Vorkommen von v bereits durch Quantoren gebunden sind). Zum Beispiel ist $\forall v a = c$ eine prädikatenlogische Formel, oder auch $\exists x\exists x\forall x Rxx$. In diesem Fall bewirken die „unnötigen“ Quantoren nichts an der Gültigkeit der Formeln, der Satz $\forall v a = c$ gilt also genau dann in einem Modell, wenn dort $a = c$ gilt, und der Satz $\exists x\exists x\forall x Rxx$ gilt genau dann, wenn der Satz $\forall x Rxx$ gilt. Weil sie in diesem Sinne nicht stören, verbietet man sie nicht in der Definition. Würde man dies tun, bekäme man an anderer Stelle Schwierigkeiten, z.B. bei Substitutionsregeln.

4.4 Aussagen über Sätze

Analog zur Aussagenlogik sagt man nun, ein prädikatenlogischer Satz \mathcal{T} *folgt logisch* aus einem prädikatenlogischen Satz \mathcal{S} , falls \mathcal{T} in jedem Modell gilt, in welchem schon \mathcal{S} gilt. Wie gehabt schreibt man dafür $\mathcal{S} \vdash \mathcal{T}$.

Für prädikatenlogische Formeln soll die Folgerungsbeziehung unabhängig von der Belegung der freien Variablen erfolgen. Man definiert also, daß eine prädikatenlogische Formel \mathcal{T} aus einer prädikatenlogischen Formel \mathcal{S} logisch folgt, wenn \mathcal{T} in jedem Modell und unter jeder Belegung gilt, unter der bereits \mathcal{S} gilt.

Zwei prädikatenlogische Formeln \mathcal{S} und \mathcal{T} heißen *logisch äquivalent*, in Zeichen $\mathcal{S} \sim \mathcal{T}$, wenn jede logisch aus der anderen folgt. Anders ausgedrückt: \mathcal{S} und \mathcal{T} gelten unter denselben Modellen und Belegungen.

Eine prädikatenlogische Formel \mathcal{S} (bzw. eine Menge Σ prädikatenlogischer Formeln) heißt *erfüllbar* oder *konsistent*, wenn es mindestens ein Modell und eine Belegung der vorkommenden Individuenvariablen gibt, unter der \mathcal{S} (bzw. alle Formeln in Σ) gelten.

Eine prädikatenlogische Formel \mathcal{S} heißt *allgemeingültig*, wenn sie in allen Modellen unter allen Belegungen gilt. Dafür schreibt man wieder $\vdash \mathcal{S}$.

Prädikatenlogische Tautologien sollen dagegen nur diejenigen allgemeingültigen Sätze heißen, die aus aussagenlogischen Tautologien dadurch entstehen, daß man die darin vorkommenden Aussagenvariablen durch prädikatenlogische Formeln ersetzt. Diese Unterscheidung wird nicht von allen Autoren gemacht, ist aber daher sinnvoll, weil man entscheiden kann, ob eine Formel eine prädikatenlogische Tautologie, nicht aber, ob eine Formel allgemeingültig ist.

Zusammenhänge

1. \mathcal{S} ist dann und nur dann nicht erfüllbar, wenn $\neg\mathcal{S}$ allgemeingültig ist.
2. \mathcal{T} ist dann und nur dann allgemeingültig, wenn $\mathcal{T} \sim \top$.
3. Eine prädikatenlogische Formel \mathcal{T} folgt dann und nur dann logisch aus \mathcal{S} (in Zeichen also $\mathcal{S} \vdash \mathcal{T}$), wenn $(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$ allgemeingültig ist.
4. Zwei prädikatenlogische Formeln \mathcal{S} und \mathcal{T} sind dann und nur dann logisch äquivalent, wenn $(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$ allgemeingültig ist.
5. Ist \mathcal{S} eine prädikatenlogische Formel mit freien Variablen v_1, \dots, v_n , so ist \mathcal{S} dann und nur dann allgemeingültig, wenn der prädikatenlogische Satz $\forall v_1 \dots \forall v_n \mathcal{S}$ allgemeingültig ist.

6. Achtung: sind \mathcal{S} und \mathcal{T} prädikatenlogische Formeln mit freien Variablen v_1, \dots, v_n , dann gilt nach dem zuvor gesagten $\mathcal{S} \vdash \mathcal{T}$ genau dann, wenn $\vdash \forall v_1 \dots \forall v_n (\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$. Dies ist jedoch nicht gleichwertig mit $\forall v_1 \dots \forall v_n \mathcal{S} \vdash \forall v_1 \dots \forall v_n \mathcal{T}$!

Ähnlich sind auch z.B. die Formeln $x = a$ und $y = a$ nicht logisch äquivalent zueinander.

4.5 Eine Liste logischer Gesetze

Die Austausch- oder Substitutionsregeln Hierzu sollte man sich auch für die Prädikatenlogik zunächst überlegen, daß gewisse Ersetzungen Formeln zu Formeln machen: Wenn man in einer prädikatenlogischen Formel eine Teilformel durch eine andere Formel ersetzt, dann entsteht insgesamt wieder eine prädikatenlogische Formel. Wenn man eine Individuenvariable durch einen Term ersetzt, entsteht ebenfalls wieder eine Formel. Es gelten nun in erweiterter die Substitutionsregeln der Aussagenlogik:

Uniforme Substitution: Wenn man in einer allgemeingültigen Formel (oder in zwei logisch äquivalenten Formeln, oder in allen Formeln einer logischen Folgerung $\Sigma \vdash \mathcal{S}$) jedes Vorkommen einer Aussagenvariablen durch dieselbe prädikatenlogische Formel ersetzt, so erhält man wieder eine allgemeingültige Formel (bzw. zwei logisch äquivalente Formeln oder eine Beziehung logischer Folgerung).

Äquivalente Substitution: Wenn man in einer allgemeingültigen Formel (oder in zwei logisch äquivalenten Formeln, oder in allen Formeln einer logischen Folgerung $\Sigma \vdash \mathcal{S}$) irgendeine Teilformel durch eine dazu logisch äquivalente Formel ersetzt, so erhält man wieder eine allgemeingültige Formel (bzw. zwei logisch äquivalente Formeln oder eine Beziehung logischer Folgerung).

Substitution von Individuenvariablen: Zusätzlich gibt es weitere Substitutionsregel, die im wesentlichen aussagen, daß es auf den gewählten Namen einer Individuenvariablen nicht ankommt:

- Wenn man in einer allgemeingültigen Formel (oder in zwei logisch äquivalenten Formeln, oder in allen Formeln einer logischen Folgerung $\Sigma \vdash \mathcal{S}$) jedes Vorkommen einer freien Individuenvariablen durch dieselbe andere Individuenvariable ersetzt, und es dabei nicht passiert, daß eine dieser Variablen zu einer gebundenen wird, dann erhält man wieder eine allgemeingültige Formel (bzw. zwei logisch äquivalente Formeln oder eine Beziehung logischer Folgerung).
- Wenn man in einer allgemeingültigen Formel (oder in zwei logisch äquivalenten Formeln, oder in allen Formeln einer logischen Folgerung $\Sigma \vdash \mathcal{S}$) jedes Vorkommen einer Individuenvariablen v im Bereich eines Quantors $\exists v$ oder $\forall v$ durch dieselbe andere Individuenvariable ersetzt (einschließlich des Vorkommens unmittelbar hinter dem Quantorenzeichen), und dabei nicht eine andere Variable als bisher durch diesen Quantor gebunden wird, so erhält man wieder eine allgemeingültige Formel (bzw. zwei logisch äquivalente Formeln oder eine Beziehung logischer Folgerung).

Beispiele zur Substitution freier Variablen: $((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$ ist allgemeingültig, also auch $((v = y \wedge y = z) \rightarrow v = z)$, ebenso $((y = y \wedge y = z) \rightarrow y = z)$. Es ist also nicht verboten, daß die einzusetzende Variable bereits in der Formel auftritt. Dagegen ist $(\exists y(x = y \wedge Sy) \rightarrow Sx)$ allgemeingültig, nicht aber $(\exists y(y = y \wedge Sy) \rightarrow Sy)$: indem man hier x durch y ersetzt, wird bei einem Vorkommen die zuvor freie Variable zu einer gebundenen.

Beispiele zur Substitution gebundener Variablen: $(\exists x \forall y Rxy \rightarrow \forall x \exists y Rxy)$ ist allgemeingültig, also auch $(\exists x \forall z Rxz \rightarrow \forall x \exists y Rxy)$. Beispiel einer ungültigen Substitution: $(\exists x \exists y \neg x=y \rightarrow \forall x \exists y \neg x=y)$ ist allgemeingültig, nicht aber $(\exists x \exists y \neg x=y \rightarrow \forall x \exists x \neg x=x)$. Durch die Ersetzung von y durch x im hinteren Teil wird nun durch den Existenzquantor eine Variable gebunden, die zuvor erst durch den Allquantor gebunden war.

Unproblematisch sind die Ersetzungsregeln für Individuenvariablen, wenn man eine völlig neue Individuenvariable nimmt, die sonst nirgends auftritt.

Vertauschbarkeit der Quantoren untereinander

$$\begin{aligned} \forall v \forall w \mathcal{S} &\sim \forall w \forall v \mathcal{S} \\ \exists v \exists w \mathcal{S} &\sim \exists w \exists v \mathcal{S} \\ \forall v \mathcal{S} &\vdash \exists v \mathcal{S} && \text{die Umkehrung gilt nicht!} \\ \exists v \forall w \mathcal{S} &\vdash \forall w \exists v \mathcal{S} && \text{die Umkehrung gilt nicht!} \end{aligned}$$

Vertauschbarkeit der Quantoren mit Junktoren In einem Modell ausgewertet, bedeutet ein Allquantor $\forall x$ soviel wie eine „große“ (gegebenenfalls sogar unendliche) Konjunktion: die Gültigkeit von $\forall x \mathcal{S}$ in einem Modell \mathfrak{M} sagt aus, daß die durch \mathcal{S} ausgedrückte Eigenschaft für alle Objekte des Universums zutrifft. Wenn man mit $\mathcal{S}(\frac{\tau}{x})$ die Formel bezeichnet, welche dadurch entsteht, daß man in der Formel \mathcal{S} jedes freie Vorkommen der Variablen x durch den Term τ ersetzt, so ist $\forall x \mathcal{S}$ also gleichwertig mit $\mathcal{S}(\frac{m_1}{x}) \wedge \mathcal{S}(\frac{m_2}{x}) \wedge \mathcal{S}(\frac{m_3}{x}) \wedge \dots$, wobei m_1, m_2, m_3, \dots alle Objekte des Universums durchläuft. Ganz ähnlich verhält sich der Existenzquantor wie eine Disjunktion aus; $\exists x \mathcal{S}$ sagt im Modell \mathfrak{M} das Gleiche aus wie $\mathcal{S}(\frac{m_1}{x}) \vee \mathcal{S}(\frac{m_2}{x}) \vee \mathcal{S}(\frac{m_3}{x}) \vee \dots$. Man wird feststellen, daß in diesem Sinne ein Allquantor mit der Konjunktion verträglich ist und ebensolche Vertauschungsregeln mit anderen Junktoren wie die Konjunktion erfüllt, ebenso der Existenzquantor mit der Disjunktion. Insbesondere sind Existenz- und Allquantor zueinander dual:

$$\begin{aligned} \neg \forall v \mathcal{S} &\sim \exists v \neg \mathcal{S} \\ \neg \exists v \mathcal{S} &\sim \forall v \neg \mathcal{S} \\ \exists v \mathcal{S} &\sim \neg \forall v \neg \mathcal{S} \\ \forall v \mathcal{S} &\sim \neg \exists v \neg \mathcal{S} \end{aligned}$$

Diese Regeln sind also nichts als eine Art Erweiterung der Regeln von de Morgan (jede der vier Versionen geht übrigens durch die Substitutionsregeln aus den andern hervor). Insbesondere kann man mit Hilfe von \neg einen Quantor durch den andern ausdrücken. Analog zu vollständigen Junktorensystemen bildet hier also jeder der Quantoren ein *vollständiges Quantorsystem*. Bei den Kalkülen in Abschnitt 4.6 wird man sich bisweilen auf vollständige Junktore-Quantor-Systeme wie \neg, \wedge, \exists beschränken.

Weitere Vertauschbarkeitsregeln der Quantoren mit Junktoren sind:

$$\begin{aligned} \forall v (\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}) &\sim (\forall v \mathcal{S} \wedge \forall v \mathcal{T}) \\ \exists v (\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}) &\vdash (\exists v \mathcal{S} \wedge \exists v \mathcal{T}) && \text{die Umkehrung gilt nicht!} \\ \exists v (\mathcal{S} \vee \mathcal{T}) &\sim (\exists v \mathcal{S} \vee \exists v \mathcal{T}) \\ (\forall v \mathcal{S} \vee \forall v \mathcal{T}) &\vdash \forall v (\mathcal{S} \vee \mathcal{T}) && \text{die Umkehrung gilt nicht!} \\ \exists v (\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}) &\sim (\forall v \mathcal{S} \rightarrow \exists v \mathcal{T}) \\ (\exists v \mathcal{S} \rightarrow \forall v \mathcal{T}) &\vdash \forall v (\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}) && \text{die Umkehrung gilt nicht!} \end{aligned}$$

Gleichheitsregeln

$$\begin{aligned} \vdash \forall v v = v \\ \vdash \forall v \forall w (v = w \leftrightarrow w = v) \\ \vdash \forall v \forall w \forall x ((v = w \wedge w = x) \rightarrow v = x) \\ \vdash \forall v_1 \dots \forall v_n \forall w_1 \dots \forall w_n ((v_1 = w_1 \wedge \dots \wedge v_n = w_n) \rightarrow (Rv_1 \dots v_n \leftrightarrow R w_1 \dots w_n)) \\ \text{für jedes } n\text{-stellige Relationszeichen } R \end{aligned}$$

In der Version mit Funktionen hat man zusätzlich die Gleichheitsregel

$$\vdash \forall v_1 \dots \forall v_n \forall w_1 \dots \forall w_n ((v_1 = w_1 \wedge \dots \wedge v_n = w_n) \rightarrow f(v_1, \dots, v_n) = f(w_1, \dots, w_n))$$

für jedes n -stellige Funktionszeichen f .

Weitere Vertauschbarkeitsregeln Annahme: v ist nicht frei in \mathcal{T} (zum Beispiel, wenn v in \mathcal{T} gar nicht vorkommt).

$$\begin{aligned} \forall v \mathcal{T} &\sim \exists v \mathcal{T} \sim \mathcal{T} \\ \forall v (\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}) &\sim (\forall v \mathcal{S} \wedge \mathcal{T}) \\ \exists v (\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}) &\sim (\exists v \mathcal{S} \wedge \mathcal{T}) \\ \forall v (\mathcal{S} \vee \mathcal{T}) &\sim (\forall v \mathcal{S} \vee \mathcal{T}) \\ \exists v (\mathcal{S} \vee \mathcal{T}) &\sim (\exists v \mathcal{S} \vee \mathcal{T}) \\ \forall v (\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}) &\sim (\exists v \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}) \\ \exists v (\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}) &\sim (\forall v \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}) \\ \forall v (\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}) &\sim (\mathcal{T} \rightarrow \forall v \mathcal{S}) \\ \exists v (\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}) &\sim (\mathcal{T} \rightarrow \exists v \mathcal{S}) \end{aligned}$$

Ableitungsregeln für Quantoren Im Gegensatz zur Aussagenlogik, wo man mit Wahrheitstafeln im Prinzip alles ausrechnen kann, insbesondere für jede Formel, ob sie allgemeingültig ist oder nicht, gibt es in der Prädikatenlogik kein solches universelles Verfahren. Es gibt lediglich *Kalküle*, mit deren Hilfe man alle allgemeingültigen Formel konstruieren kann, ohne aber für eine gegebene Formel eine solche Konstruktion einfach finden zu können. Insbesondere braucht man also zusätzlich zu Schlussregeln für die Junktoren, wie wir sie aus der Aussagenlogik kennen, Regeln für die Quantoren. Hier sind vier praktikable Regeln:

\forall -Einführungsregel

$$\frac{\Sigma \vdash \mathcal{S}(\frac{w}{v})}{\Sigma \vdash \forall v \mathcal{S}}$$

falls w nicht als freie Variable in Σ oder \mathcal{S} vorkommt.
 w ist Variable, kein Konstantenzeichen!

\forall -Eliminationsregel

$$\frac{\Sigma \vdash \forall v \mathcal{S}}{\Sigma \vdash \mathcal{S}(\frac{\tau}{v})}$$

falls τ keine Variable ist, die durch die Substitution in den Bereich eines entsprechenden Quantors fiel.

\exists -Eliminationsregel

$$\frac{\Sigma \vdash \exists v \mathcal{S}}{\Sigma \vdash \mathcal{S}(\frac{a}{v})}$$

falls $\exists v \mathcal{S}$ ein Satz ist und a ein „neues“ Konstantenzeichen, das im Rest der Ableitung nicht vorkommt.

Falls $\exists v \mathcal{S}$ kein Satz ist, muss man die \exists -Eliminationsregel so abändern, dass man statt einem neuen Konstantenzeichen a einen Term $f(w_1, \dots, w_k)$ mit einem „neuen“ Funktionszeichen f einführt, wobei w_1, \dots, w_k die freien Variablen von $\exists v \mathcal{S}$ sind.

\exists -Einführungsregel

$$\frac{\Sigma \vdash \mathcal{S}(\frac{\tau}{v})}{\Sigma \vdash \exists v \mathcal{S}}$$

4.6 Kalküle der Prädikatenlogik und Vollständigkeitsatz

Achtung: Die Abschnitte 4.6 und 4.7 sind nicht klausurrelevant, sondern dienen der Allgemeinbildung. In diesen Abschnitten heißen Formel φ, ψ, \dots statt \mathcal{S}, \mathcal{T} , Theorien T statt Σ , Terme t statt τ ...

Der letzte Teil über Gödels Unvollständigkeitssätze ist sehr schwer zu verstehen und einigermaßen mathematisch.

\mathcal{L} ist im folgenden eine fest gewählte prädikatenlogische Sprache (d.h. eine Auswahl an Zeichen für Individuenkonstanten, Funktionen und Relationen).

T ist eine \mathcal{L} -Theorie, d.h. eine Menge von prädikatenlogischen Sätzen dieser Sprache (kurz: \mathcal{L} -Sätze), in diesem Fall auch *Axiome* der Theorie genannt.

Semantischer Folgerungsbegriff: Ein \mathcal{L} -Satz φ folgt logisch aus einer Theorie T , wenn jedes Modell von T auch Modell von φ ist. Man schreibt $T \models \varphi$. Eine \mathcal{L} -Theorie wird *erfüllbar* oder *konsistent* genannt, wenn sie ein Modell hat.

Es gilt nun folgender Zusammenhang: φ folgt logisch aus T dann und nur dann, wenn die \mathcal{L} -Theorie T' , die aus T zusammen mit $\neg\varphi$ besteht³, nicht erfüllbar ist.

Für eine erfüllbare \mathcal{L} -Theorie T und einen \mathcal{L} -Satz φ gilt also eine der folgenden Möglichkeiten:

- φ folgt logisch aus T , d.h. T zusammen mit $\neg\varphi$ ist inkonsistent.
- $\neg\varphi$ folgt logisch aus T , d.h. T zusammen mit φ ist inkonsistent.
- T ist sowohl zusammen mit φ konsistent als auch zusammen mit $\neg\varphi$; keine der beiden Formeln folgt logisch aus φ .

Außerdem heißt ein \mathcal{L} -Satz φ *allgemeingültig*, falls er in allen Modellen gilt, also falls er aus der „leeren Theorie“ (d.i. ohne Axiome) logisch folgt.

Im Unterschied dazu soll eine *prädikatenlogische Tautologie* eine Formel sein, die aus einer aussagenlogischen Tautologie dadurch entsteht, daß man Aussagenvariablen durch prädikatenlogische Formeln ersetzt, und zwar eine Aussagenvariable an allen Vorkommen durch die gleiche Formel. Eine prädikatenlogische Tautologie ist also aufgrund ihrer zugrundeliegenden aussagenlogischen Gestalt allgemeingültig.

Syntaktischer Folgerungsbegriff: Ein *Kalkül* K für die Prädikatenlogik ist eine Menge von Regeln, wie man aus gegebenen Folgerungsbeziehungen der Form „ φ folgt aus T “ neue Folgerungsbeziehungen gewinnt. Manche dieser Regeln haben keine Voraussetzung oder „Eingabe“, dann spricht man auch von *Axiomen*(regeln), während man die andern *eigentliche Regeln* nennen könnte.

Ein \mathcal{L} -Satz φ heißt nun *ableitbar* oder *beweisbar* aus einer \mathcal{L} -Theorie T im Kalkül K , wenn es eine Abfolge von Folgerungsbeziehungen gibt, die jeweils mit den Regeln des Kalküls aus den vorhergehenden gewonnen werden und an deren Ende die Folgerungsbeziehung „ φ folgt aus T “ steht. Man schreibt dafür $T \vdash_K \varphi$. Ein Satz φ heißt ableitbar oder beweisbar im Kalkül K (ohne Erwähnung einer Theorie), falls φ in K aus der leeren Theorie ableitbar ist. Dafür schreibt man $\vdash_K \varphi$. Schließlich heißt eine Theorie *widerspruchsfrei* bezüglich des Kalküls K , falls sich \perp nicht in K aus T ableiten läßt, in Symbolen: falls $T \not\vdash_K \perp$.

(Falls im Kalkül aussagenlogische Regeln ableitbar sind, genauer: es reicht die Gültigkeit einer Regel der Form $\frac{T, \varphi \vdash \neg\varphi}{T \vdash \perp}$, so läßt sich Ableitbarkeit ebenso auf Widerspruchsfreiheit zu-

rückführen wie logische Folgerung auf Erfüllbarkeit, d.h. φ läßt sich in K aus T genau dann ableiten, wenn die Theorie $T' = T \cup \{\neg\varphi\}$ nicht widerspruchsfrei bezüglich K ist.)

Vollständigkeit: Man möchte nun Kalküle finden, für welche die parallelen Begriffe „logische Folgerung/Ableitbarkeit“ einerseits und „Erfüllbarkeit/Widerspruchsfreiheit“ andererseits übereinstimmen.

Ein Kalkül heißt *sound* oder *korrekt*, wenn sich nur semantisch gültige logische Folgerungen aus ihm ableiten lassen, d.h. wenn alle Regeln korrekt sind, also aus gültigen logischen Folgerungen wieder gültige logische Folgerungen herleiten. Ein Kalkül heißt *vollständig*, wenn sich jede semantisch gültige logische Folgerung aus ihm ableiten läßt.

Es ist normalerweise einfach, die Korrektheit eines Kalküls nachzuprüfen, die Vollständigkeit dagegen schwierig. Der erste Vollständigkeitsbeweis eines Kalküls wurde von Gödel 1928 bewiesen.

Es werden zwei Haupttypen von Kalkülen unterschieden: *Axiomen-* oder *Hilbert-Kalküle* mit vielen Axiomen, aber wenig eigentlichen Regeln (meist nur dem Modus Ponens), und *Regel-* oder

³Mathematisch ausgedrückt: $T' = T \cup \{\neg\varphi\}$.

Gentzen-Kalküle mit möglichst wenig Axiomen, aber vielen Regeln. Von letzterem wiederum gibt es zwei Hauptvarianten, welche manchmal als *natürliches Schließen* und als *Sequenzenkalkül* bezeichnet werden. Der Sprachgebrauch ist hier aber wechselnd.

Ein Hilbert-Kalkül⁴: In diesem Kalkül sind sämtliche Junktoren zugelassen, von den Quantoren aber nur der Existenzquantor. Entweder man faßt einen Allquantor $\forall x$ als Abkürzung für $\neg\exists x\neg$ auf, oder man muß den Kalkül um entsprechende Regeln ergänzen (entweder, indem man die „Abkürzungsregeln“ ($\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$) für jede Formel φ als zusätzliche Axiome aufnimmt, oder \forall -Axiome und \forall -Regeln einführt).

AXIOME(NREGELN) DES KALKÜLS:

$$\frac{}{T \vdash_H \varphi} \quad \begin{array}{l} \text{(a) falls } \varphi \text{ in } T \text{ enthalten ist;} \\ \text{(b) falls } \varphi \text{ eine prädikatenlogische Tautologie ist;} \\ \text{(c) falls } \varphi \text{ eine Gleichheitsaxiom ist;} \\ \text{(d) falls } \varphi \text{ ein } \exists\text{-Axiom ist.} \end{array}$$

Dabei ist ein *Gleichheitsaxiom* ein \mathcal{L} -Satz einer der folgenden Formen:

$$\begin{array}{l} \forall v v = v \\ \forall v \forall w (v = w \leftrightarrow w = v) \\ \forall v \forall w \forall x ((v = w \wedge w = x) \rightarrow v = x) \\ \forall v_1 \dots \forall v_n \forall w_1 \dots \forall w_n ((v_1 = w_1 \wedge \dots \wedge v_n = w_n) \rightarrow f(v_1, \dots, v_n) = f(w_1, \dots, w_n)) \\ \forall v_1 \dots \forall v_n \forall w_1 \dots \forall w_n ((v_1 = w_1 \wedge \dots \wedge v_n = w_n) \rightarrow (Rv_1 \dots v_n \leftrightarrow Rw_1 \dots w_n)) \end{array}$$

wobei f ein n -stelliges Funktionszeichen und R ein n -stelliges Relationszeichen aus \mathcal{L} ist.

Ein \exists -Axiom ist ein \mathcal{L} -Satz der folgenden Form:

$$\varphi\left(\frac{t}{v}\right) \rightarrow \exists v \varphi$$

wobei die Variablen von t nicht in φ vorkommen dürfen (oder etwas allgemeiner: es darf nicht passieren, daß nach dem Ersetzen Variablen von t durch Quantoren von φ gebunden sind.)

Ist φ eine prädikatenlogische Formel, so soll $\varphi\left(\frac{t}{v}\right)$ für die Formel stehen, die man erhält, indem man bei jedem freien Vorkommen der Variable v in φ diese durch den Term t ersetzt. (Man muß sich natürlich davon überzeugen, daß dies wieder eine Formel ist. Außerdem muß man ein wenig aufpassen, wenn v selbst wieder in t vorkommt: diese v 's dürfen dann nicht auch ersetzt werden!)

EIGENTLICHE REGELN DES KALKÜLS:

$$\begin{array}{l} \text{Modus ponens} \quad \frac{T \vdash_H \varphi \quad T \vdash_H (\varphi \rightarrow \psi)}{T \vdash_H \psi} \quad \text{\(\exists\)-Einführung} \quad \frac{T \vdash_H (\varphi \rightarrow \psi)}{T \vdash_H (\exists v \varphi \rightarrow \psi)} \\ \text{wobei } v \text{ keine freie Variable von } \psi \text{ sein darf.} \end{array}$$

Man kann problemlos die eigentlichen Regeln auf den Modus Ponens reduzieren (wie in jedem Kalkül!), indem man hier die \exists -Einführung durch eine Reihe von Axiomen der Form $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists v \varphi \rightarrow \psi))$ ersetzt, was aber weniger natürlich ist.

Ein Sequenzenkalkül (Variante 1)⁵:

Dieser Kalkül arbeitet mit dem vollständigen Junktoren-/Quantorensystem \neg, \vee, \exists .

AXIOME(NREGEL) DES KALKÜLS:

⁴Nach M. Ziegler „Vorlesung über mathematische Logik“, Universität Freiburg.

⁵Nach Ebbinghaus, Flum, Thomas „Einführung in die mathematische Logik“, 4. Aufl., Heidelberg 1996.

$$\frac{}{T, \varphi \vdash_{S_1} \varphi}$$

$$\frac{}{T \vdash_{S_1} t = t}$$

EIGENTLICHE REGELN DES KALKÜLS:⁶

Monotonieregel	$\frac{T_1 \vdash_{S_1} \varphi}{T_1, T_2 \vdash_{S_1} \varphi}$	Substitutionsregel	$\frac{T \vdash_{S_1} \varphi(\frac{t_1}{v})}{T, t_1 = t_2 \vdash_{S_1} \varphi(\frac{t_2}{v})}$
Fallunterscheidung	$\frac{T, \varphi \vdash_{S_1} \psi \quad T, \neg \varphi \vdash_{S_1} \psi}{T \vdash_{S_1} \psi}$	Widerspruchsregel	$\frac{T, \neg \varphi \vdash_{S_1} \psi \quad T, \neg \varphi \vdash_{S_1} \neg \psi}{T \vdash_{S_1} \varphi}$
\vee -Regel links	$\frac{T, \varphi_1 \vdash_{S_1} \psi \quad T, \varphi_2 \vdash_{S_1} \psi}{T, (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vdash_{S_1} \psi}$	\vee -Regel rechts	$\frac{T \vdash_{S_1} \varphi}{T \vdash_{S_1} (\varphi \vee \psi)}$ $\frac{T \vdash_{S_1} \varphi}{T \vdash_{S_1} (\psi \vee \varphi)}$
\exists -Regel links	$\frac{T, \varphi(\frac{w}{v}) \vdash_{S_1} \psi}{T, \exists v \varphi \vdash_{S_1} \psi}$	\exists -Regel rechts	$\frac{T \vdash_{S_1} \varphi(\frac{t}{v})}{T \vdash_{S_1} \exists v \varphi}$

*falls w nicht als freie Variable
in $T, \exists x \varphi$ oder ψ vorkommt.*

Ein Sequenzenkalkül (Variante 2)⁷: Dieser Kalkül ist etwas „symmetrischer“ als die erste Variante: Hier haben die Folgerungsbeziehungen die Form $\Phi \vdash_{S_2} \Psi$, wobei Φ und Ψ Mengen endlicher \mathcal{L} -Sätze sind. Die intendierte Bedeutung von $\varphi_1, \dots, \varphi_m \vdash_{S_2} \psi_1, \dots, \psi_n$ ist $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m) \vdash (\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n)$. Dieser Kalkül arbeitet mit dem vollständigen Junktoren-/Quantorensystem \neg, \wedge, \exists .

AXIOME(NREGEL) DES KALKÜLS:

$$\frac{}{\Phi, \varphi \vdash_{S_2} \Psi, \varphi} \quad \frac{}{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, t = t}$$

EIGENTLICHE REGELN DES KALKÜLS:

\neg -Regel links	$\frac{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, \varphi}{\Phi, \neg \varphi \vdash_{S_2} \Psi}$	\neg -Regel rechts	$\frac{\Phi, \varphi \vdash_{S_2} \Psi}{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, \neg \varphi}$
\wedge -Regeln links	$\frac{\Phi, \varphi_1 \vdash_{S_2} \Psi}{\Phi, (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vdash_{S_2} \Psi}$ $\frac{\Phi, \varphi_2 \vdash_{S_2} \Psi}{\Phi, (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vdash_{S_2} \Psi}$	\wedge -Regel rechts	$\frac{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, \varphi_1 \quad \Phi \vdash_{S_2} \Psi, \varphi_2}{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, (\varphi_1 \wedge \varphi_2)}$
\exists -Regel links	$\frac{\Phi, \varphi(\frac{t}{v}) \vdash_{S_2} \Psi}{\Phi, \exists v \varphi \vdash_{S_2} \Psi}$	\exists -Regel rechts	$\frac{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, \varphi(\frac{t}{v})}{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, \exists v \varphi}$

*falls die Variablen von t weder in
 φ, Φ noch in Ψ vorkommen.*

⁶Auf die Reihenfolge der Prämissen, etwa T_1, T_2 in der Monotonieregel, soll es nie ankommen.

⁷Nach M. Ziegler „Vorlesung über mathematische Logik“, Universität Freiburg.

<p>=-Regeln links</p> $\frac{\Phi, t_1 = t_2 \vdash_{S_2} \Psi, \varphi(\frac{t_1}{v})}{\Phi, t_1 = t_2 \vdash_{S_2} \Psi, \varphi(\frac{t_2}{v})}$ $\frac{\Phi, t_1 = t_2 \vdash_{S_2} \Psi, \varphi(\frac{t_2}{v})}{\Phi, t_1 = t_2 \vdash_{S_2} \Psi, \varphi(\frac{t_1}{v})}$	<p>=-Regel rechts</p> $\frac{}{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, t = t}$	<p>(Diese Axiomenregel ist aus Symmetriegründen hier wiederholt.)</p>
---	--	---

Ein Kalkül natürlichen Schließens⁸: In diesem Kalkül gibt es gar keine Axiome, dafür arbeiten die Regeln mit Annahmen. Formeln, welche Annahmen einer Regeln darstellen, stehen in eckigen Klammern. Annahmen sind zunächst *offen*, werden aber durch Regeln geschlossen. Soll $T \vdash \varphi$ abgeleitet werden, dürfen am Ende nur noch Annahmen aus T offen sein.

Drei übereinanderstehende Punkte stehen für eine Ableitung im Kalkül. Statt Links- und Rechts-Regeln, wie im Sequenzenkalkül, gibt es hier für jeden Junktore/Quantore Einführungs- und Eliminationsregeln. Dieser Kalkül ist ohne Gleichheit „=“, aber mit allen üblichen Junktoren und Quantoren außer \leftrightarrow .

<p>(¬-Einführung)</p> $\frac{\begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi}$ <p><i>und die Annahme wird geschlossen</i></p>	<p>¬-Elimination</p> $\frac{\begin{array}{c} \vdots \quad \vdots \\ \varphi \quad \neg\varphi \end{array}}{\psi}$
<p>∧-Einführung</p> $\frac{\begin{array}{c} \vdots \quad \vdots \\ \varphi \quad \psi \end{array}}{(\varphi \wedge \psi)}$	<p>∧-Elimination</p> $\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (\varphi \wedge \psi) \end{array}}{\varphi} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (\varphi \wedge \psi) \end{array}}{\psi}$
<p>∨-Einführung</p> $\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \end{array}}{(\varphi \vee \psi)} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \psi \end{array}}{(\varphi \vee \psi)}$	<p>∨-Elimination</p> $\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \quad [\psi] \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (\varphi \vee \psi) \quad \chi \quad \chi \end{array}}{\chi}$ <p><i>und beide Annahmen werden geschlossen.</i></p>
<p>→-Einführung</p> $\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{(\varphi \rightarrow \psi)}$ <p><i>und die Annahme wird geschlossen.</i></p>	<p>→-Elimination</p> $\frac{\begin{array}{c} \vdots \quad \vdots \\ \varphi \quad (\varphi \rightarrow \psi) \end{array}}{\psi}$
<p>∀-Einführung</p> $\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi(\frac{w}{v}) \end{array}}{\forall v \varphi}$ <p><i>sofern w nicht frei in φ (es sei denn w = v) oder einer offenen Annahme der Ableitung ist.</i></p>	<p>∀-Elimination</p> $\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \forall v \varphi \end{array}}{\varphi(\frac{w}{v})}$

⁸Nach Troelstra, Schwichtenberg „Basic Proof Theory“, Cambridge 1996.

<p>\exists-Einführung</p> $\frac{\vdots}{\frac{\varphi(\frac{x}{v})}{\exists v \varphi}}$	<p>\exists-Elimination</p> $\frac{\begin{array}{c} [\varphi(\frac{w}{v})] \\ \vdots \\ \exists v \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \psi \end{array}}{\psi}$ <p>und die Annahme wird geschlossen. Dabei darf w nicht frei in φ sein (es sei denn $w = v$), noch in ψ, noch in einer der am Ende noch offenene Annahmen.</p>
--	---

Varianten: Für jeden Kalkül gibt es unzählige Varianten. Zum Beispiel arbeitet die erste Variante des Sequenzenkalküls mit dem vollständigen Junktoren- und Quantorensystem \neg, \vee, \exists . Entsprechend kann man für die andern Junktoren/Quantoren zusätzliche Regeln einführen. Jeden Kalkül kann man durch abgeleitete Regeln ergänzen.

Vorsicht: Die Kalküle sind sehr „empfindlich“. Leichte Änderungen der Regeln können bereits dazu führen, daß nicht mehr alle gültigen Folgerungsbeziehungen ableitbar sind. Wenn man im Kalkül des natürlichen Schließens die „ \neg -Einführung“ genannte Regel durch eine richtige Einführungsregel für die Negation ersetzt, also durch die Regel $\frac{[\varphi]}{\neg\varphi}$, dann erhält man eine

$$\frac{\vdots}{\perp} \quad \frac{}{\neg\varphi}$$

schwächere Logik, die *intuitionistische Logik*, in welcher die Doppelnegationsregel

$$\frac{\vdots}{\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}}$$

nicht ableitbar ist. Nimmt man diese hinzu, oder das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten, erhält man wieder die klassische Logik. Lässt man die „ \neg -Einführung“ ganz weg, erhält man die sogenannte *minimale Logik*, in welcher die Regel „ex falso quodlibet“ nicht mehr gilt.

$$\frac{\vdots}{\perp} \quad \frac{}{\varphi}$$

Der Sequenzenkalkül wurde von Gentzen u.a. deshalb eingeführt, um die sogenannte „Schnitt-elimination“ zu zeigen: Die ursprünglich vorhandene *Schnittregel*

$$\frac{\Phi_1 \vdash_{S_2} \Psi_1, \varphi \quad \Phi_2, \varphi \vdash_{S_2} \Psi_2}{\Phi_1, \Phi_2 \vdash_{S_2} \Psi_1, \Psi_2}$$

man aus den andern ableiten. Damit zeigt man, daß jede Ableitung $T \vdash \varphi$ so geführt werden kann, daß man keine andern Formeln benötigt als diejenigen, die in T und φ (eventuell als Unterformeln) auftauchen.

Der Vollständigkeitssatz: Für jeden dieser Kalküle (bzw. auch Varianten davon) kann man die Korrektheit und die Vollständigkeit beweisen. Dies wird dann *Vollständigkeitssatz* für dieses Kalkül genannt. das heißt, man zeigt daß $T \models \varphi$ dann und nur dann gilt, wenn in dem entsprechenden Kalkül $T \vdash \varphi$ ableitbar ist.

Dies beweist man dadurch, daß man jeweils zeigt, daß eine widerspruchsfreie Theorie ein Modell besitzt. Dazu hat Henkin eine elegante Methode entwickelt: Man erweitert zunächst die Sprache um viele Konstanten, wobei man jedesmal, wenn eine Existenzaussage gilt, eine Konstante für ein Element, welches diese Existenzaussage erfüllt, hinzunimmt, und zeigt dann, daß man die Terme als Individuen eines Modells nehmen kann. Hierbei wird die Syntax gewissermaßen durch sich selbst interpretiert.

Da in einer Ableitung in einem dieser Kalküle immer nur endlich viele Formeln auftreten, ergibt sich als Folgerung aus den Vollständigkeitssätzen der sogenannte *Kompaktheitssatz*: Wenn ein Satz φ aus einer Theorie T logisch folgt, dann folgt er schon aus endlich vielen Axiomen von

T. Anders ausgedrückt: Wenn eine Theorie inkonsistent ist, dann liegt das schon an endlich vielen Axiomen. Nochmals anders formuliert: Wenn jeweils endlich viele Axiome einer Theorie ein Modell haben, dann hat auch die gesamte Theorie ein Modell.

Nach dem Beweis des Vollständigkeitssatzes braucht man zwischen den beiden Zeichen \models und \vdash nicht mehr zu unterscheiden.

4.7 Die Unvollständigkeitssätze der Prädikatenlogik

Arithmetik: Sei \mathcal{L}_N die prädikatenlogische Sprache mit einem Konstantenzeichen c_0 , einem einstelligem Funktionszeichen S , den beiden zweistelligen Funktionszeichen f_+ und f_\times , sowie einem zweistelligen Relationszeichen $R_<$. Die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$ bilden eine \mathcal{L}_N -Struktur \mathfrak{N} , wenn man c_0 durch die Zahl 0, f_+ und f_\times durch Addition und Multiplikation, $R_<$ durch $<$ und S durch die Nachfolgerfunktion (*successor*) $+1$ interpretiert.⁹

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz wird zeigen, daß man die *Theorie von \mathfrak{N}* , das sind alle in \mathfrak{N} gültigen \mathcal{L}_N -Sätze, nicht beschreiben, und also auch nicht wirklich kennen kann. (Ein Beispiel eines Satzes, von dem man (noch?) nicht weiß, ob er in \mathfrak{N} gilt, ist die *Goldbachsche Vermutung*, daß jede gerade Zahl größer als zwei sich als Summe von zwei Primzahlen schreiben lasse. Als Übung kann man sich überlegen, wie man dies als \mathcal{L}_N -Satz schreiben kann.)

Axiomensysteme: Sätze, welche man in \mathfrak{N} als gültig erachtet, kann man zu (unvollständigen) Axiomensystemen zusammenfassen. Einem kleinen solchen System, meist Q genannt, liegt das schrittweise Verständnis von Addition, Multiplikation und Ordnung zugrunde:

$$\begin{array}{ll} \forall x f_+(x, c_0) = x & \forall x \forall y f_+(x, S(y)) = S(f_+(x, y)) \\ \forall x f_\times(x, c_0) = c_0 & \forall x \forall y f_\times(x, S(y)) = f_+(f_\times(x, y), x) \\ \forall x \neg R_< x c_0 & \forall x \forall y (R_< x S(y) \leftrightarrow (x = y \vee R_< x y)) \end{array}$$

Und des besseren Verständnisses wegen das Ganze nochmals in \mathfrak{N} interpretiert, d.h. in der üblichen Schreibweise. Für alle Zahlen x und y gilt:

$$\begin{array}{ll} x + 0 = x & x + (y + 1) = (x + y) + 1 \\ x \cdot 0 = 0 & x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x \\ x \not< 0 & (x < y + 1 \leftrightarrow (x = y \vee x < y)) \end{array}$$

Das Axiomensystem der *Peano-Arithmetik* PA besteht aus den Axiomen von Q zusammen mit dem *Induktionsschema*, das ist für jede \mathcal{L}_N -Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ das Axiom

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \left((\varphi(x_1 \dots x_n, c_0) \wedge \forall y (\varphi(x_1 \dots x_n, y) \rightarrow \varphi(x_1 \dots x_n, S(y)))) \rightarrow \forall y \varphi(x_1 \dots x_n, y) \right)$$

d.h. wenn eine durch eine Formel beschriebene Eigenschaft auf 0 zutrifft und jedesmal, wenn sie für eine Zahl gilt, auch für deren Nachfolger gilt, dann trifft sie auf alle Zahlen zu.

Anmerkung (1) In jedem Modell \mathfrak{M} von Q gibt es die Zahlen $c_0^{\mathfrak{M}}$, $S^{\mathfrak{M}}(c_0^{\mathfrak{M}})$, $S^{\mathfrak{M}}(S^{\mathfrak{M}}(c_0^{\mathfrak{M}}))$ usw., die ich wie üblich $0, 1, 2, \dots$ nennen werde. Aber kein noch so starkes Axiomensystem der Prädikatenlogik erster Stufe, also auch PA nicht, könnte gewährleisten, daß ein Modell nur aus diesen Zahlen besteht und nicht noch aus irgendwelchen „unendlich großen“ Objekten. Dies kann man erst in der Prädikatenlogik zweiter Stufe erreichen, in der man nicht nur über Elemente, sondern auch über Relationen quantifizieren darf. Dann kann man das Induktionsschema ersetzen durch das Induktionsaxiom

$$\forall X \left((X(0) \wedge \forall y (X(y) \rightarrow X(S(y)))) \rightarrow \forall y X(y) \right).$$

(2) Q hat gegenüber PA zwei Vorteile: Zum einen besteht es nur aus endlich vielen Axiomen; zum andern sind es gewissermaßen die völlig unstrittigen Eigenschaften natürlicher Zahlen.

⁹Die Nachfolgerfunktion wirkt zunächst künstlich, aber sie wird bei den Axiomen Q praktisch sein; außerdem entspricht sie dem sehr grundlegenden „eins weiter Zählen“.

Das Induktionsprinzip ist dagegen philosophisch problematischer, weil es den Übergang vom potentiell zum aktual Unendlichen festschreibt. PA ist natürlich deutlich aussagekräftiger als Q ; allerdings reicht Q aus, um mit den natürlichen Zahlen wie gewohnt rechnen zu können.

Im Folgenden wird es nun immer um Theorien gehen, welche entweder eine Erweiterung von Q darstellen, oder in welchen es möglich ist, so etwas wie natürliche Zahlen zu definieren, welche sich gemäß Q verhalten.¹⁰

Gödelisierung: Jedem der logischen Zeichen und der nicht-logischen Zeichen (abhängig von der Sprache) sowie unendlich vielen Individuenvariablen v_0, v_1, v_2, \dots werden der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3 \dots$ zugeordnet. Man kann sich natürlich auf ein vollständiges Junktoren- und Quantorensystem beschränken. Also etwa für \mathcal{L}_N :

\neg	\wedge	\exists	$=$	$($	$)$	c_0	S	f_+	f_\times	$R_<$	v_0	v_1	v_2	\dots
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	\dots

Jeder Zeichenfolge, also insbesondere jedem Term, jeder Formel und jeder Folge von Formeln, wird nun zunächst die Folge der zugehörigen Zahlen zugeordnet, also etwa der Formel $\exists v_1 S(v_1) = c_0$ die Folge $(3, 13, 8, 5, 13, 6, 4, 7)$. Nun kann man einer Folge von Zahlen selbst wieder eine Zahl zuordnen, und zwar so, daß man aus dieser Zahl die Folge zurückgewinnen kann. Eine Möglichkeit besteht darin, die Zahl $2^3 \cdot 3^{13} \cdot 5^8 \cdot 7^5 \cdot 11^{13} \cdot 13^6 \cdot 17^4 \cdot 19^7$ zu nehmen (was wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung funktioniert). Diese Zahl heißt dann der *Code* oder die *Gödelnummer* der Formel φ und wird mit $\ulcorner \varphi \urcorner$ bezeichnet.

Wichtig ist, daß man dies so machen kann, daß man mit den Axiomen Q vieles, was man üblicherweise mit Worten ausdrücken kann, auch aus den Codes ausrechnen kann. Zum Beispiel gibt es eine \mathcal{L}_N -Formel $\varphi(v)$, welche genau dann von einer natürlichen Zahl erfüllt wird, wenn sie Code einer Formel ist.¹¹

Anderes Beispiel: Es gibt eine \mathcal{L}_N -Formel $\psi(v, w)$, welche auf zwei Zahlen genau dann zutrifft, wenn die erste Code einer Variablen ist, welche frei in der Formel auftritt, von der die zweite Zahl der Code ist.

Drittes Beispiel: Es gibt eine Formel $Bew(v)$, welche auf eine Zahl genau dann zutrifft, wenn diese Zahl eine Folge von \mathcal{L}_N -Sätzen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ kodiert, wobei jede Formel aus den vorhergehenden durch eine Regel z.B. des Sequenzenkalküls hervorgeht. Einer der entscheidenden Punkte im Zusammenhang mit den Unvollständigkeitssätzen ist die Frage, wie kompliziert bzw. berechenbar diese Formel ist.

Wir nennen eine Theorie, bei der all dies möglich ist, eine *Theorie mit Gödelisierung*. Es ist nicht einfach, eine Gödelisierung in Q durchzuführen. Nachzuprüfen, daß es die oben erwähnten Formeln dann gibt, ist eine etwas langwierige und technische Angelegenheit.

Teilmengen natürlicher Zahlen: Eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist einfach eine (nicht unbedingt endliche) Auswahl natürlicher Zahlen: manche gehören zu der Teilmenge, andere nicht. Wir wollen vier Arten von Teilmengen betrachten: Beliebige Teilmengen, beschreibbare Teilmengen, auflistbare Teilmengen und berechenbare Teilmengen.

- Einer beliebigen Teilmenge liegt die Vorstellung zugrunde, daß für alle Zahlen gleichzeitig gewußt wird, welche zu ihr gehören und welche nicht; sie ist also ein aktual unendliches Objekt. Man kann sich auch einen Dämon vorstellen, der über dieses Wissen verfügt; es kann aber nicht unbedingt auf eine endliche Art und Weise einem Menschen vermittelt werden.
- Eine *beschreibbare* Menge natürlicher Zahlen (mathematisch eine *arithmetische* oder *in \mathcal{L}_N definierbare* Menge genannt), ist die Menge aller natürlichen Zahlen, welche eine durch eine \mathcal{L}_N -Formel beschriebene Eigenschaft erfüllen.

¹⁰Dies bedeutet, daß es für jede natürliche Zahl n einen Term τ_n gibt und definierbare Funktionen $+$ und \cdot und eine definierbare Relation $<$, so daß die Theorie $\tau_{n+m} = \tau_n + \tau_m, \tau_{nm} = \tau_n \cdot \tau_m$ und $\forall x (x < \tau_n \leftrightarrow (x = \tau_0 \vee x = \tau_1 \vee \dots \vee x = \tau_{n-1}))$ beweist.

¹¹Achtung: In einem „Nicht-Standardmodell“ von Q (das also größer als \mathfrak{N} ist), gibt es „unendlich große“ Zahlen, von denen die Theorie glaubt, sie wären Codes von Formeln, ohne daß sie es sind.

- Eine *aufzählbare* Menge natürlicher Zahlen (mathematisch eine *rekursiv aufzählbare* Menge genannt) ist eine Teilmenge, für die eine Maschine (z.B. ein Computerprogramm) nach und nach alle zu der Teilmenge gehörigen Zahlen ausgeben kann (wichtig: nicht unbedingt in der richtigen Reihenfolge!).
- Eine *berechenbare* oder *entscheidbare* Menge natürlicher Zahlen (mathematisch eine *rekursive* Menge genannt) ist eine Teilmenge, für die eine Maschine entscheiden kann, ob eine Zahl dazu gehört oder nicht (das ist das Gleiche, wie die zu der Teilmenge gehörenden Zahlen in der richtigen Reihenfolge ausgeben zu können).
Eine Menge M ist dann berechenbar, wenn sowohl sie selbst als auch die zu ihr komplementäre Menge (die aus allen Zahlen besteht, die nicht in M liegen) aufzählbar sind: Denn dann kann eine Maschine abwechselnd die Zahlen in M und in der dazu komplementären Menge ausgeben. Will man für eine Zahl entscheiden, ob sie in M liegt, wartet man einfach so lange, bis sie auf einer der beiden Listen auftaucht.

Cantors Diagonalargument zeigt, daß es „mehr“ Teilmengen natürlicher Zahlen als natürliche Zahlen selbst gibt; genauer: Für jede auch unendlich lange Auflistung M_1, M_2, M_3, \dots von Teilmengen gibt es (mindestens) eine Teilmenge natürlicher Zahlen, die darin nicht vorkommt. Und zwar wird diese Teilmenge D wie folgt konstruiert:

- 1 gehört zu D dann und nur dann, wenn 1 nicht zu M_1 gehört.
- 2 gehört zu D dann und nur dann, wenn 2 nicht zu M_2 gehört.
- 3 gehört zu D dann und nur dann, wenn 3 nicht zu M_3 gehört.
- usw.

Dann kann D mit keiner der vorgegebenen Teilmengen übereinstimmen, denn D und die k -te Teilmenge M_k unterscheiden sich bei der Zahl k .

Das Argument zeigt dann auch, daß es sehr viele Teilmengen gibt, die nicht in der Liste auftauchen, denn man könnte ja D in die Liste aufnehmen, und würde dann wieder eine neue Teilmenge konstruieren können. (Tatsächlich gibt es „sehr viel mehr“ Teilmengen, die in einer Liste nicht auftauchen. Problematisch an dem Argument ist lediglich die Annahme, daß sowohl die Teilmengen als auch die Liste als aktual unendliche Objekte gegeben sind.)

„**Wenige beschreibbare Mengen**“: Dagegen gibt es nicht mehr beschreibbare Teilmengen natürlicher Zahlen als natürliche Zahlen selbst: man kann nämlich alle Beschreibungen, das heißt alle \mathcal{L}_N -Formeln, zum Beispiel der Länge nach anordnen. Es gibt also sehr viel mehr beliebige Teilmengen als beschreibbare Teilmengen.

Plausibel ist auch, daß nicht jede beschreibbare Menge aufzählbar ist: Wenn in der Formel Allquantoren auftauchen, muß man gegebenenfalls schon unendlich viele Rechnungen ausführen, um für eine einzige Zahl herauszubekommen, ob sie in der Menge liegt. Eine Maschine würde also mit den Berechnungen bereits für eine Zahl niemals fertig werden. Später wird es „konkretere“ Beispiele geben.

„**Berechenbarkeit**“: Die Begriffe „aufzählbare“ und „berechenbare Menge“ sind zunächst vage. Es hat sich aber im Laufe der Zeit herausgestellt, daß alle bisher vorgeschlagenen hinreichend starken Maschinenmodelle und Berechenbarkeitsbegriffe äquivalent sind. Danach ist eine Menge natürlicher Zahlen genau dann aufzählbar, wenn sie durch eine Σ_1 -Formel beschreibbar ist. Σ_1 -Formeln entstehen aus quantorenfreien \mathcal{L}_N -Formeln durch \wedge, \vee , Existenzquantoren und sogenannte *beschränkte Allquantoren* $\forall x < n$. Und folglich ist eine Menge genau dann berechenbar, wenn sowohl sie selbst als auch ihr Komplement durch Σ_1 -Formeln beschreibbar sind. Als *Churchsche These* ist das (nicht beweisbare) Postulat bekannt, daß es keinen sinnvollen stärkeren Berechenbarkeitsbegriff gibt.

Wieder Cantors Diagonalargument: Wenn man glaubt, was im Abschnitt über Gödelisierung steht, sollte man auch glauben, daß es eine Formel $U(v, w)$ gibt, welche für Zahlen n und m dann und nur dann zutrifft, wenn m der Code einer Σ_1 -Formel ist, welche eine Teilmenge der natürlichen Zahlen beschreibt, in der n liegt. Wenn man nun eine geschickte Gödelisierung wählt und genau hinsieht, stellt man fest, daß die Formel U selbst als Σ_1 -Formel wählen kann. U ist damit eine *universelle rekursiv aufzählbare Relation*, d.h. $U(v, 0), U(v, 1), U(v, 2), \dots$ gibt

eine Auflistung sämtlicher auflistbarer Teilmengen natürlicher Zahlen! (Genauer: eine Auflistung der Beschreibungen aller auflistbaren Teilmengen natürlicher Zahlen.) Nun kann man wieder Cantors Diagonalargument anwenden: $\neg U(v, v)$ kann dann keine auflistbare Menge beschreiben, weil sie verschieden von jedem $U(v, n)$ sein muß. Also haben wir eine beschreibbare, nicht auflistbare Menge gefunden. Andererseits beschreibt $U(v, v)$ eine auflistbare Menge¹², die aber nicht berechenbar ist, weil ihr Komplement, daß ja durch $\neg U(v, v)$ beschrieben ist, nicht auflistbar ist.

Anmerkung: Man ist vielleicht versucht, das Voranstehende mit allen Formeln statt mit allen Σ_1 -Formeln durchzuführen, also eine Formel $U'(v, w)$ zu finden, so daß $U'(v, 0), U'(v, 1), U'(v, 2), \dots$ eine Auflistung sämtlicher beschreibbarer Teilmengen natürlicher Zahlen ergibt. Cantors Diagonalargument zeigt aber sofort, daß dies nicht gehen kann, denn dann würde $\neg U'(v, v)$ eine Menge von Zahlen beschreiben, die in der Liste aller beschreibbarer Mengen aber nicht auftauchen könnte! Dies liegt daran, daß man die Eigenschaft, daß φ in \mathbb{N} gilt, für eine beliebige Formel φ nicht aus den Zahlen $\ulcorner \varphi \urcorner$ und n ausrechnen kann. Man muß also bei der Gödelisierung genau hinsehen, was auszudrücken möglich ist und was nicht.

Entscheidbare Theorien: Eine Theorie mit Gödelisierung (also zum Beispiel eine, die Q enthält) heißt *axiomatisierbar*, wenn die Menge der Gödelnummern der Axiome von T auflistbar ist, *arithmetisch*, wenn die Menge der Gödelnummern der Axiome von T beschreibbar ist, und *entscheidbar*, wenn die Menge der Gödelnummern aller Sätze, die aus T logisch folgen, berechenbar ist.

Wieder kann man durch geschicktes Gödelisieren und genaue Analyse sehen, daß man die Formel $\text{Bew}(v)$ von oben als Σ_1 -Formel wählen kann (das ist wiederum nicht einfach). Dann folgt, daß die Menge der Gödelnummern aller allgemeingültigen Sätze auflistbar ist. Intuitiv folgt das aus dem Vollständigkeitssatz: Ein vollständiger Kalkül erlaubt es, nach und nach alle allgemeingültigen Sätze zu „produzieren“. Auf Grundlage der Churchschen These ist dies also ein anderes Argument dafür. Die Menge der Gödelnummern aller allgemeingültigen Sätze ist aber im allgemeinen nicht berechenbar!

Ähnlich sieht man, daß es für axiomatisierbare Theorien eine Σ_1 -Formel $\text{Bew}_T(v)$ gibt, welche die Gödelnummern von Sätzen beschreibt, welche aus T folgen. Auch diese Menge ist also auflistbar.

Der erste Gödelschen Unvollständigkeitssatz sagt (in einer seiner vielen Versionen) aus, daß eine axiomatisierbare Theorie mit Gödelisierung unvollständig ist. Dabei heißt eine Theorie *vollständig*, wenn für jeden Satz φ der Sprache entweder φ oder $\neg\varphi$ aus der Theorie folgt. Eine unvollständige Theorie entscheidet also nicht für jeden Satz, ob er aus ihr folgt oder nicht.¹³ Umgekehrt ausgedrückt sagt der Unvollständigkeitssatz also z.B., daß die vollständige Theorie der natürlichen Zahlen, also alle Sätze, die in \mathfrak{N} gelten, nicht axiomatisierbar ist. Es gilt sogar, daß sie nicht einmal beschreibbar ist, sogar, daß jede arithmetische Teiltheorie der Theorie von \mathfrak{N} unvollständig ist.

In eine ähnliche Richtung geht das Ergebnis, daß Q und jede ihre Erweiterungen unentscheidbar ist. Daraus folgt dann auch, daß sie Prädiaktenlogik insgesamt unentscheidbar ist. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß die Menge der Gödelnummern der allgemeingültigen Sätze ein weiteres Beispiel einer auflistbaren, aber nicht berechenbaren Menge bildet.

Es gibt allerdings axiomatisierbare Theorien, die vollständig sind. Diese sind dann automatisch entscheidbar¹⁴, aber zu ausdrucksarm, um Gödelisierung zu erlauben.

¹²Da $U(v, w)$ eine Σ_1 -Formel ist, auch $U(v, v)$. Oder man läßt eine Maschine laufen, welche „diagonal“ durch alle Maschinen für die $U(v, n)$ läuft; d.h. man gibt eine erste Zahl in der durch $U(v, 0)$ beschriebenen Menge aus, dann eine erste in der durch $U(v, 1)$ beschriebenen und eine zweite der durch $U(v, 0)$ beschriebenen Menge, dann eine erste in der durch $U(v, 2)$, eine zweite in der durch $U(v, 1)$ und eine dritte in der durch $U(v, 0)$ beschriebenen Menge, usw. So erhält man eine Auflistung aller auflistbaren Mengen gleichzeitig, und muß dann nur noch alle nicht zu $U(v, v)$ gehörenden Zahlen weglassen.

¹³Gödels Vollständigkeitssatz spricht über die Vollständigkeit eines Kalküls; Gödels Unvollständigkeitssätze über die Unvollständigkeit von Theorien!

¹⁴Man kann die Menge der Gödelnummern von Sätzen, welche aus T folgen, auflisten. Da T vollständig ist, wird für jeden Satz φ irgendwann entweder die Gödelnummer von φ oder die von $\neg\varphi$ in der Liste auftauchen.

Im Folgenden sei nun T stets eine Theorie mit Gödelisierung.

Der Fixpunktsatz: *Zu jeder Formel $\psi(v)$ gibt es einen Fixpunkt, das ist ein Satz φ mit der Eigenschaft*

$$T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner))$$

Dies bedeutet, daß der Satz φ gewissermaßen aussagt, daß die Eigenschaft ψ auf ihn zutrifft!

BEWEIS: Es gibt eine Formel $\sigma(x, y, z)$, welche die Einsetzung einer Zahl in eine Formel beschreibt, das heißt es gilt $\mathfrak{N} \models \sigma(\ulcorner \chi \urcorner, n, \ulcorner \chi(n) \urcorner)$ für jede Zahl n und jede Formel χ in einer freien Variablen, und für keine anderen Zahlentripel gilt σ .

$\varrho(v)$ sei nun die Formel $\exists w(\psi(w) \wedge \sigma(v, v, w))$, das heißt ϱ drückt die Eigenschaft eines Individuums, daß es in sich selbst eingesetzt (genauer in die Formel, dessen Gödelnummer es ist), die Eigenschaft ψ hat. Und nun stellt sich heraus, daß $\varrho(\ulcorner \varrho \urcorner)$ mysteriöserweise es tut, denn

$$T \vdash (\varrho(\ulcorner \chi \urcorner) \leftrightarrow \psi(\ulcorner \chi(\ulcorner \chi \urcorner) \urcorner)) \quad \text{also} \quad T \vdash (\varrho(\ulcorner \varrho \urcorner) \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varrho(\ulcorner \varrho \urcorner) \urcorner))$$

„Mysteriöserweise“, denn ein eigentliches Verständnis dieses Phänomens zu erlangen, scheint unmöglich. Der Versuch, es sprachlich zu formulieren, ergibt für die linke Seite des \leftrightarrow : „In sich selbst eingesetzt ergibt sich die Eigenschaft ψ “, und die rechte Seite sagt aus, daß die Eigenschaft ψ auf das Ganze zutrifft. Und beides ist irgendwie gleichwertig!

Tarskis Satz: *Es gibt kein Wahrheitsprädikat für T , das heißt keine Formel $W(v)$ mit der Eigenschaft*

$$T \vdash (\varphi \leftrightarrow W(\ulcorner \varphi \urcorner))$$

Insbesondere ist die vollständige Theorie von \mathfrak{N} nicht beschreibbar.

BEWEIS: Ein Fixpunkt φ für $\neg W$ zeigt gerade, daß W kein Wahrheitsprädikat sein kann.

Eine ausdrucksstarke Theorie (also eine mit Gödelisierung) kann also nicht „selbst wissen“, was aus ihr beweisbar ist.

Gödels erster Unvollständigkeitssatz: *Wenn T beschreibbar ist, dann ist T unvollständig.*

BEWEIS: (T sei hier eine Teiltheorie der Theorie von \mathfrak{N} .) Falls T beschreibbar ist, dann gibt es eine Formel¹⁵ $\text{Bew}_T(v)$, welche auf eine Gödelnummer genau dann zutrifft, wenn sie einen aus T beweisbaren Satz kodiert. Das funktioniert wie oben: Man kodiert eine Folge von Formeln, welche jeweils aus den vorangehenden durch eine Regel des Sequenzkalküls hervorgehen, oder eines der Axiome von T sind (und dazu braucht man die Beschreibbarkeit von T). Das heißt, man hat

$$T \vdash \varphi \iff \mathfrak{N} \models \text{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

Sei φ ein Fixpunkt von $\neg \text{Bew}_T$, das heißt

$$T \vdash (\varphi \leftrightarrow \neg \text{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)).$$

Natürlich gilt dies dann erst recht in \mathfrak{N} . Also haben wir

$$\mathfrak{N} \models \varphi \iff \mathfrak{N} \models \neg \text{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \iff T \not\vdash \varphi.$$

Da T aber eine Teiltheorie von \mathfrak{N} ist, ist der Fall $T \vdash \varphi$ und $\mathfrak{N} \not\models \varphi$, das heißt $\mathfrak{N} \models \neg \varphi$, ausgeschlossen! Somit gilt $\mathfrak{N} \models \varphi$ und $T \not\vdash \varphi$, also ist φ ein wahrer, aber in T nicht beweisbarer Satz.

(Gödel hatte seinen Unvollständigkeitssatz zunächst in einem etwas anderen Kontext bewiesen. Rosser war dann der erste, der konkret einen weder beweisbaren noch widerlegbaren Satz angegeben hat. Dies ist ebenfalls ein Fixpunkt für eine etwas kompliziertere Eigenschaft, die im wesentlichen etwas sagt wie: „für jede Zahl, die Gödelnummer eines Beweises von R ist, gibt es eine kleinere Zahl, welche Gödelnummer eines Beweises von $\neg R$ ist.“)

¹⁵Falls T axiomatisierbar ist, so kann man sogar eine Σ_1 -Formel wählen.

Unentscheidbarkeit des Prädikatenkalküls: Es gilt zunächst: Q ist unentscheidbar.

Zum Beweis zeigt man, daß alle rekursiv aufzählbaren Mengen schon in Q definierbar sind. Wenn also $\psi(v)$ eine Σ_1 -Formel ist, die somit eine auflistbare Menge beschreibt, dann gilt $\mathfrak{N} \models \psi(n)$ genau dann, wenn $Q \vdash \psi(n)$. Wäre Q entscheidbar, könnte man auch jede auflistbare Menge berechnen. Dies ist aber nicht der Fall, wie wir gesehen haben.

Der Beweis funktioniert erst recht für Erweiterungen von Q , man hat also sogar: *Jede Teiltheorie der Theorie von \mathfrak{N} , welche Q enthält, ist unentscheidbar.*

Da Q aus endlich vielen Axiomen besteht, kann man sie alle in einem Satz ξ zusammenfassen. Wäre der Prädikatenkalkül insgesamt entscheidbar, könnte man auch alle Sätze der Form $(\xi \rightarrow \varphi)$ entscheiden, und damit Q . Also bilden auch die allgemeingültigen Sätze (in einer hinreichend umfangreichen Sprache)¹⁶ keine entscheidbare Menge.

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz: Hierzu muß man in beschreibbaren Erweiterungen T der Peano-Arithmetik arbeiten. Dann kann man zeigen, daß das Beweisbarkeitsprädikat Bew_T die folgenden Löb-Axiome erfüllt:

- Falls $T \vdash \varphi$, so $T \vdash \text{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.¹⁷
- $T \vdash (\text{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Bew}_T(\ulcorner \text{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner))$.
- $T \vdash ((\text{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \text{Bew}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner)) \rightarrow \text{Bew}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

Wenn man Bew_T als \Box schreibt, kann man das rein modallogisch modellieren. Also: Wenn $T \vdash \varphi$, so $T \vdash \Box \varphi$, und in T gelten die Axiome $(\Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi)$ und $((\Box \varphi \wedge \Box(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \Box \psi)$.

Man betrachtet nun die Formel $\neg \text{Bew}_T(\ulcorner \perp \urcorner)$, die auch Kon_T geschrieben wird, weil sie die Konsistenz der Theorie T ausdrückt. Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz besagt nun: *Falls T konsistent ist, dann ist Kon_T in T nicht beweisbar.*

Der Beweis erfolgt rein formal aus den Löb-Axiomen; man zeigt, daß Kon_T ein Fixpunkt von $\neg \text{Bew}_T$ ist, und sogar, daß jeder Fixpunkt zu Kon_T äquivalent ist. Also gilt

$$T \vdash (\text{Kon}_T \leftrightarrow \neg \text{Bew}_T(\ulcorner \text{Kon}_T \urcorner))$$

T kann seine eigene Konsistenz also nur dann beweisen, wenn T inkonsistent ist!

Man kann aber nicht zeigen, daß Kon_T nicht widerlegbar ist, denn das würde dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz für die Theorie T^+ , die aus T und Kon_T besteht, widersprechen. Es ist also denkbar, daß $T \vdash \neg \text{Kon}_T$ gilt: Dies gehört zu den Merkwürdigkeiten, die zu Gödelschen Knoten im Gehirn führen.

Schließlich ist der Vollständigkeit halber noch der *Satz von Löb* zu erwähnen, der auch zum Gödelschen Umfeld gehört: Hier werden Fixpunkte des Beweisbarkeitsprädikats betrachtet

$$T \vdash (\varphi \leftrightarrow \text{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner))$$

Der Satz von Löb sagt nun aus, daß diese Fixpunkte stets beweisbar sind, genauer sogar

$$T \vdash (\text{Bew}_T(\ulcorner \text{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner))$$

oder in der etwas übersichtlicheren modallogischen Version: $T \vdash (\Box(\Box \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box \varphi)$.

Literatur

- George Boolos *The unprovability of consistency : an essay in modal logic*, Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

¹⁶Wenn die Sprache nur Konstantenzeichen und einstellige Relationszeichen enthält, sind die allgemeingültigen Formeln noch entscheidbar. Aber bereits mit einem zweistelligen Relationssymbol tritt die Unentscheidbarkeit ein.

¹⁷Wichtig (wenn auch intuitiv nicht nachzuvollziehen) ist, daß die Umkehrung des ersten Löb-Axioms nicht gilt, also daß man aus $T \vdash \text{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ nicht $T \vdash \varphi$ folgern darf. Man glaubt zwar, daß es wahr ist (also in \mathfrak{N} gilt), aber um es beweisen zu können, bräuchte man die Korrektheit des durch Bew beschriebenen Beweisbarkeitsbegriffs, was selbst wieder ein äußerst starkes Axiom wäre.

- Torkel Franzén *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to its Use and Abuse*, Wellesley, Massachusetts: A K Peters, 2005.
- Ernest Nagel, James Newman *Der Gödelsche Beweis*, 5.. Auflage, München: Oldenbourg, 1992.
- Raymond Smullyan *Gödel's incompleteness theorems*, Oxford: Oxford Univ. Press, 1992.
- Raymond Smullyan *Forever undecided : a puzzle guide to Gödel*, Oxford: Oxford University Press, 1988.
deutsch: *Logik-Ritter und andere Schurken*, Frankfurt am Main: Krüger, 1989.
- Martin Ziegler *Vorlesung über mathematische Logik*, Skript, Universität Freiburg.
<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/Skripte.html>