Kapitel 2

Modallogik (aussagenlogisch)

In diesem Abschnitt wird eine Erweiterung der Aussagenlogik um sogenannte *Modalitäten* behandelt. Damit erlangt man eine größere Aussagekraft der Sprache, allerdings in der Regel auf Kosten schöner Eigenschaften wie beispielsweise einfacher Möglichkeiten, überprüfen zu können, ob eine Formel logisch aus einer anderen folgt. Später wird die Prädikatenlogik eine wesentlich umfangreichere Erweiterung der Aussagenlogik bieten. Im Gegensatz zur Aussagenlogik werden wir eine Vielzahl modallogischer Systeme zur Verfügung haben und einige davon betrachten.

Für jede solche Erweiterung sollen aber gewisse Grundprinzipien der Aussagenlogik weiter Bestand haben; etwa die Zusammenhänge zwischen logischer Folgerung, logischer Äquivalenz und Tautologien; die Definition dieser Begriffe aus der Modellbeziehung; die Substitutionsregeln von Seite 11. Um ein solches logisches System aufstellen zu können, muß man also folgendes tun:

- Die formale Sprache angeben, in welcher die Formeln geschrieben werden, und beschreiben, welche Zeichenfolgen darin Formeln sind.
- Erklären, was Modelle für das System sein sollen, und wann eine Formel in einem Modell gilt (wahr ist) oder nicht gilt (falsch ist).

Eine Formel ist dann eine *Tautologie des Systems* oder eine *allgemeingültige Formel* in dem System (siehe dazu die Anmerkung auf Seite 35), wenn sie in allen Modellen gilt; eine Formel folgt logisch aus einer anderen, wenn sie in jedem Modell gilt, in dem die andere gilt, usw.

Alternativ kann man solche Systeme auch über Beweiskalküle definieren. Man braucht dann zusätzliche Regeln zu einem Beweiskalkül der Aussagenlogik, um mit den neuen Symbolen umgehen zu können.

2.1 Die modallogische Sprache

Das Alphabet Zusätzlich zur Sprache der Aussagenlogik gibt es noch die beiden neuen Zeichen $\Box$ und $\Diamond$. Die modallogische Sprache setzt sich also aus folgenden Zeichen zusammen:

- den *Aussagenvariablen* $A, B, C, \ldots$ o.ä.;
- den *Junktoren* $\bot$, $\top$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
- den *Modaloperatoren* oder *Modalitäten*[1] $\Box$ und $\Diamond$;
- den *nicht-logischen Zeichen* (und).

[1] Genauer sind die Modaloperatoren Zeichen für Modalitäten; wie so oft unterscheidet man in der Praxis der formalen Logik selten namentlich zwischen dem Zeichen und dem Bezeichneten.

Die Grammatik Die *modallogischen Sätze* oder *modallogischen Formeln* werden, wie die aussagenlogischen, aus einfacheren Formeln aufgebaut. Dabei werden die aussagenlogischen Zeichen wie in der Aussagenlogik gehandhabt; zusätzlich gibt es aber zwei Regeln für die Modaloperatoren, die ebenso wie das Negationszeichen behandelt werden. Die exakten Regeln sind wie folgt, dabei dient $\mathcal{S}$ als Platzhalter für eine beliebige modallogische Formel:

1) Jede Aussagenvariable bildet für sich eine modallogische Formel.

2) $\top$ und $\bot$ sind jeweils für sich modallogische Formeln.

3) Wenn $\mathcal{S}$ eine modallogische Formel ist, dann sind auch $\Box\mathcal{S}$ und $\Diamond\mathcal{S}$ modallogische Formeln.

4) Wenn $\mathcal{S}$ eine modallogische Formel ist, dann auch $\neg\mathcal{S}$.

5) Wenn $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ modallogische Formeln sind, dann auch $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$, $(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})$, $(\mathcal{S} \to \mathcal{T})$ und $(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$.

Insbesondere ist jede aussagenlogische Formel auch eine modallogische Formel. Alle anderen Zeichenfolgen, die nicht mit diesen Regeln gebildet werden können, sind keine modallogischen Formeln. Man sieht, daß durch die Modaloperatoren keine neuen Klammern hinzukommen. Wie die aussagenlogischen Formeln sind auch die modallogischen Formeln eindeutig lesbar, d.h. man kann aus der Formel erkennen, wie sie aufgebaut wurde.

Beispiele für modallogische Formeln sind:

$$\Diamond A \qquad \Box\Box\Box A \qquad (B \wedge \Box A) \qquad \Box(B \wedge A) \qquad \Box((B \to \Box B) \wedge \Diamond\neg A)$$
$$\neg\Box\Diamond\neg\Diamond\Diamond\neg\Box\Diamond B \qquad \neg\Diamond\bot \qquad (\neg(\Box(\neg\Box\Box A \vee \Diamond\Box B) \wedge \neg\Diamond\Diamond\Diamond\neg B) \vee \Diamond(\Box A \wedge \neg\bot))$$

Namen $\Box$ ist der *Notwendigkeitsoperator* und wird oft (englisch) „box“ gelesen („Quadrat“) oder „notwendig“ (mit allen Varianten), oder gemäß der intendierten Bedeutung, etwa „geboten ist“ oder „man weiß“. $\Diamond$ ist der *Möglichkeitsoperator* und wird oft „diamond“ bzw. „Raute“ gelesen oder „möglich“ (ebenfalls mit Varianten), oder gemäß der intendierten Bedeutung, etwa „erlaubt ist“ oder „denkbar ist“.

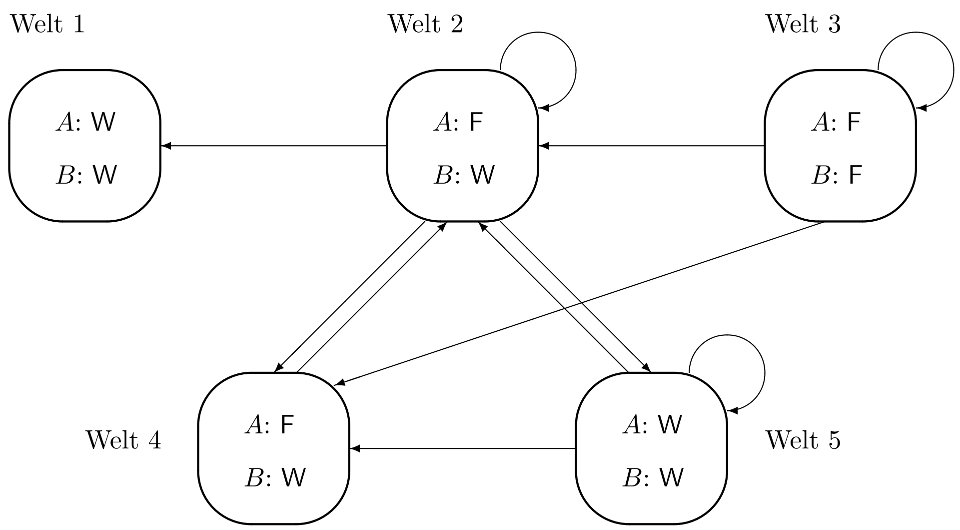
2.2 Modelle

Ein modallogisches Modell besteht aus (1) einer Ansammlung von aussagenlogischen Modellen und (2) einer *Zugangsrelation* zwischen diesen Modellen. Beides soll nun erläutert werden:

(1) Die aussagenlogischen Modelle nennt man auch *(mögliche) Welten*. Es ist sinnvoll, eine Aussagenvariable in allen diesen Welten auf die gleiche Weise zu interpretieren, etwa A stets durch „es regnet“: In manchen dieser Welten regnet es dann und A wird dort mit W belegt; in andern regnet es nicht und A wird darin mit F belegt. In einer abstrakteren Version braucht man von den aussagenlogischen Modellen nur die Belegung zurückzubehalten: Dann besteht das modallogische Modell aus einer Ansammlung von Belegungen mit einer Zugangsrelation. Es sollte mindestens eine Welt vorliegen, sonst aber gibt es keine Beschränkungen an die Anzahl der aussagenlogische Modelle: Es darf nur eines sein, es dürfen aber auch unendlich viele sein. Insbesondere darf jede Belegung mehrfach vorkommen.

(2) Die Zugangsrelation verbindet manche Welten mit andern: Man sagt, daß eine Welt die andere *sieht* oder sich vorstellen kann. Diese Relation unterliegt gar keinen Beschränkungen: In einem Extremfall könnte keine Welt irgendeine Welt sehen, in einem andern Extremfall könnte jede Welt jede andere sehen. Insbesondere braucht eine Welt sich nicht selbst zu sehen; es kann sein, daß manche Welten sich selbst sehen, andere nicht. Es kann „fantasielose“ Welten geben, die nur sich selbst sehen und keine andere Welt; „blinde“ Welten, die gar keine Welten sehen, nicht einmal sich selbst; „unsichtbare“ Welten, die von keiner Welt gesehen werden. Die

Abbildung 2.1: Ein modallogisches Modell



Zugangsrelation braucht auch nicht symmetrisch zu sein: Wenn eine Welt eine zweite sieht, muß es nicht sein, daß diese auch die erste sieht.

Ein solches Modell veranschaulicht man sich am besten durch ein Diagramm mit Kreisen für die Welten, in die man die dort gültigen Belegungen schreibt, sowie Pfeilen zwischen den Kreisen für die Zugangsrelation, wie in Abbildung 2.1.

Auswertung von Formeln in Modellen In den Modellen für die Aussagenlogik konnte man bestimmen, ob eine aussagenlogische Formel darin gilt oder nicht. In den Modellen der Modallogik hängt die Gültigkeit zusätzlich von einem Standort, d.i. einer gewählten Welt in dem Modell, ab. Für ein Modell $\mathfrak{M}$ und eine Welt w daraus wird man also bestimmen können, ob eine modallogische Formel $\mathcal{S}$ darin gilt – wofür man $(\mathfrak{M}, w) \vDash \mathcal{S}$ schreibt – oder nicht – wofür man $(\mathfrak{M}, w) \nvDash \mathcal{S}$ schreibt. Es kann dann sein, daß $(\mathfrak{M}, w) \vDash \mathcal{S}$ gilt und gleichzeitig $(\mathfrak{M}, w') \nvDash \mathcal{S}$ für eine andere Welt w'; z.B. gilt dies bereits für die Formel $\mathcal{S} = A$, falls A in der Welt w wahr ist (etwa in Welt 1 im Beispiel), aber falsch in der Welt w' (etwa Welt 2 im Beispiel). Wenn klar ist, um welches Modell es sich handelt, kann man auch kürzer $w \vDash \ldots$ bzw. $w \nvDash \ldots$ schreiben.

Die Gültigkeit muß man nun wie in der Aussagenlogik rückwärts über den Aufbau der Formel überprüfen. Dabei gelten folgende Regeln:

- Aussagenvariablen und Junktoren werden wie in der Aussagenlogik in der jeweiligen Welt ausgewertet, die ja ein aussagenlogisches Modell ist.
- $\Diamond\mathcal{S}$ gilt in der Welt w, falls diese eine Welt w' sieht, in der $\mathcal{S}$ gilt. (Dabei kann w' auch gleich w sein, falls w sich selbst sieht.)
- $\Box\mathcal{S}$ gilt in der Welt w, falls $\mathcal{S}$ in jeder Welt w' gilt, die man von w aus sehen kann (einschließlich sich selbst, falls w sich selbst sieht).

Beispiele: Betrachten wir das Modell in Abbildung 2.1. Ich schreibe w_1 für „Welt 1“ usw.

Es gilt $w_2 \vDash \neg A$ (da A dort mit F belegt ist), aber $w_2 \vDash \Diamond A$, da Welt 2 in Welt 1 sieht, in der A gilt. Dagegen gilt $w_2 \nvDash \Box A$, da nicht in allen Welten, die Welt 2 sieht, A gilt – etwa in sich selbst oder in Welt 4. Aus letzterem Grund gilt auch $w_2 \vDash \Diamond\neg A$. Da Welt 4 in Welt 2 sieht, aber auch nur dorthin, folgt daraus sowohl $w_4 \vDash \Diamond\Diamond\neg A$ als auch $w_4 \vDash \Box\Diamond\neg A$.

Ferner gilt $w_3 \vDash \Box\neg A$, da $\neg A$ in jeder der von Welt 3 sichtbaren Welten – Welt 2, 3 und 4 – gilt. Weiter ist $w_3 \vDash \Box\Diamond B$: jede der Welten, in die Welt 3 sieht, sieht in eine Welt, in der B

gilt: Welt 2 in Welt 1 oder in sich selbst; Welt 3 in Welt 2; Welt 4 in Welt 2. Also gilt auch $w_3 \vDash (\Box\neg A \wedge \Box\Diamond B)$.

Da Welt 1 gar keine Welt sehen kann, gilt $\mathcal{S}$ in allen Welten, die Welt 1 sehen kann, egal was $\mathcal{S}$ ist; andererseits gibt es keine Welt, die Welt 1 sehen kann und in der $\mathcal{S}$ gilt, wiederum unabhängig davon, was $\mathcal{S}$ ist. Also gilt in Welt 1 nie eine Formel der Form $\Diamond\mathcal{S}$ und alle Formeln der Form $\Box\mathcal{S}$. (Dies widerstrebt dem Alltagsverständnis, erklärt sich aber wie folgt: Wäre es falsch, daß $\mathcal{S}$ in allen Welten gilt, welche Welt 1 sehen kann, müßte man eine solche Welt finden, in der $\mathcal{S}$ nicht gilt. So eine Welt gibt es aber nicht.) Insbesondere haben wir $w_1 \vDash \Box\bot$ und $w_1 \vDash \neg\Diamond\top$. Da $\bot$ nirgends und $\top$ überall gilt, also auch in Welt 1, folgt $w_1 \nvDash (\top \to \Diamond\top)$ und $w_1 \nvDash (\Box\bot \to \bot)$. Dies kann man als „Paradoxien blinder Welten“ auffassen.

Als letztes, etwas komplizierteres Beispiel betrachten wir die Formel: $\Box((B \to \Box B) \wedge \Diamond\neg A)$. Die Teilformel $\Diamond\neg A$ gilt in allen Welten außer Welt 1. Die Teilformel $(B \to \Box B)$ gilt sogar in allen Welten: in Welt 3, da B dort falsch ist; in den anderen, weil sie nur in Welten sehen können, in denen B gilt. Also gilt die Konjunktion beider Teilformeln in allen Welten außer Welt 1, und die eigentliche Formel in allen Welten außer denen, die Welt 1 sehen können, also in allen Welten außer Welt 2.

2.3 Normale Systeme

Ein *modallogisches System* oder kurz eine *Modallogik* M kann man beschreiben durch die Menge modallogischer Formeln, welche die Tautologien in dem System sind, also immer „wahr“ oder gültig sein sollen. Diese heißen kurz die M-*Tautologien*. Man schreibt dann $\mathsf{M} \vdash \mathcal{S}$ dafür, daß die modallogische Formel $\mathcal{S}$ eine M-Tautologie ist, und sagt auch kurz: „$\mathcal{S}$ gilt in M“.

Solch ein System, *das System* K, erhält man dadurch, daß man als K-Tautologien sämtliche modallogischen Sätze nimmt, welche in allen Modellen von allen Standpunkten aus gültig sind. Andere Systeme erhält man dadurch, daß man nur solche Modelle betrachtet, in denen die Zugangsrelation bestimmte Eigenschaften erfüllt (dadurch erhält man mehr Tautologien, also ein größeres System, aber auch mehr logische Äquivalenzen, also ein schwächeres System).

Alle Systeme, die man über Modelle erhält, sind sogenannte *normale Systeme*. K ist also die „kleinste“ normale Modallogik. Es gibt auch nicht normale Modallogiken, die dann z.B. über Beweiskalküle eingeführt werden. Ein System M ist normal, wenn folgende Eigenschaften gelten:

(1) Jede aussagenlogische Tautologie ist eine M-Tautologie.

(2) $(\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A)$ ist eine M-Tautologie.

(3) $\Box\top$ ist eine M-Tautologie.

(4) Das Axiom K, d.i. die Formel $(\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B))$, ist eine M-Tautologie.[2]

(5) Es gelten die Substitutionsregeln:

Uniforme Substitution: Man kann in einer M-Tautologie eine Aussagenvariable überall durch die gleiche Formel ersetzen und erhält wieder eine M-Tautologie.

Äquivalente Substitution: Man kann in einer M-Tautologie eine Teilformel durch eine logisch äquivalente Teilformel ersetzen und erhält wieder eine M-Tautologie.

(6) Es gilt der *Modus Ponens*: Wenn $(\mathcal{S} \to \mathcal{T})$ und $\mathcal{S}$ M-Tautologien sind, dann ist auch $\mathcal{T}$ eine M-Tautologie.

K ist eine Art „starker *modus ponens*“:
$$\frac{\begin{array}{l}\mathsf{M} \vdash \Box(A \to B)\\ \mathsf{M} \vdash \Box A\end{array}}{\mathsf{M} \vdash \Box B}$$

[2] K steht für „Kripke“ und bezeichnet sowohl das Axiom als auch die kleinste normale Modallogik.

Aus den Eigenschaften (1), (2) und (4) folgt, daß auch $(\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A)$ eine M-Tautologie ist: $\Box$ und $\Diamond$ sind dual zueinander (ähnlich wie $\wedge$ und $\vee$). Daher kann man einen der beiden Modaloperatoren als eine Abkürzung auffassen und es reicht, Regeln für einen von beiden aufzustellen Häufig wählnlt man $\Box$.

Aus der dritten und der vierten Eigenschaft folgt beispielsweise, daß $\Box\mathcal{T}$ für jede M-Tautologie $\mathcal{T}$ wieder eine M-Tautologie ist (dies bedeutet aber nicht, daß $(A \to \Box A)$ eine M-Tautologie wäre!). Insbesondere sind auch $\Box\Box\top$, $\Box\Box\Box\top$ usw. M-Tautologien.

Aus den Eigenschaften (1) und (4) folgt z.B., daß $(\Box A \leftrightarrow \neg\neg\Box A)$ eine M-Tautologie ist.

Anmerkung: Manche Autoren reservieren das Wort „Tautologie“ für solche Formeln, die aus aussagenlogischen Tautologien durch uniforme Substitution hervorgehen, die also Tautologien aufgrund ihrer aussagenlogischen Gestalt sind. Andere Tautologien heißen dann *allgemeingültige Formeln*.

2.3.1 Axiome

Es gibt eine unüberschaubare Vielfalt normaler modallogischer Systeme, von denen aber einige wenige besondere Bedeutung haben. Es gibt grundsätzlich zwei verschiedene Arten, ein System einzuführen: über Beschränkungen an die Zugangsrelation oder über zusätzliche Axiome.

Es folgt hier nun eine Reihe der wichtigsten Axiome, die alle mit Buchstaben oder mit Zahlen bezeichnet werden. (Aus historischen Gründen haben manche mehrere Namen.)[3]

D:	$(\Box A \to \Diamond A)$				B:	$(A \to \Box\Diamond A)$	dual:	$(\Diamond\Box A \to A)$
T:	$(\Box A \to A)$	dual:	$(A \to \Diamond A)$		4:	$(\Box A \to \Box\Box A)$	dual:	$(\Diamond\Diamond A \to \Diamond A)$
Aus:	$(\Box A \leftrightarrow A)$	dual:	$(\Diamond A \leftrightarrow A)$		5/E:	$(\Diamond A \to \Box\Diamond A)$	dual:	$(\Diamond\Box A \to \Box A)$

Jedes Axiom hat eine duale Variante, die sich leicht aus dem Axiom aus den Normalitätsbedingungen herleiten läßt und die das gleiche normale System erzeugt. D ist selbstdual.

Wie schon bei K nimmt man die Namen der Axiome auch als Bezeichnung für Modallogiken, und zwar für das kleinste normale System, in welchem das betreffende Axiom eine Tautologie ist. Dies kann man auch mit mehreren Axiomen tun; zur Bezeichnung des Systems setzt man dann die Namen der Axiome hintereinander. Oft setzt man ein K dazu, um zu kennzeichnen, daß es sich um normale Systeme handelt. Außerdem gibt es noch die historische Namen S4 und S5 für KT4 und KT5. Es gilt außerdem KT4B = KT5.

Einige der gebräuchlichsten modallogischen Systeme ordnen sich wie nebenstehend an (entlang von Pfeilen wird es nach oben schwächer, d.h. Tautologien bleiben erhalten, es kommen aber neue hinzu).

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Aussagenlogik} & \\
 & \mathsf{S5} \arrow[u] & \\
\mathsf{KTB} \arrow[ur] & \mathsf{S4} \arrow[u] & \\
\mathsf{DB} \arrow[u] & \mathsf{T} \arrow[ul] \arrow[u] & \mathsf{D4} \arrow[ul] \\
\mathsf{B} \arrow[u] & \mathsf{KD} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \mathsf{K4} \arrow[u] \\
 & \mathsf{K} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Das Axiom Aus steht für „Aussagenlogik“: Es macht die zusätzliche Aussagekraft der Modallogik zunichte; eine modallogische Formel ist genau dann eine Aus–Tautologie, wenn die aussagenlogische Formel, die man durch Weglassen aller Modaloperatoren erhält, eine aussagenlogische Tautologie ist. Auf diese Weise kann man auch die Aussagenlogik als ein modallogisches System auffassen.

Unterhalb der Aussagenlogik ist S5 eine maximale normale Modallogik, d.h. mit den meisten Tautologien – siehe dazu die Anmerkungen zu den Modalitäten auf Seite 39. Es gibt aber normale Modallogiken, die nicht in S5 enthalten sind.

[3] D steht für „deontisch“, B für den niederländischen Mathematiker Brouwer, Begründer des Intuitionismus (siehe Seite ??), E für „euklidisch“; die Axiome 4 und 5 sind die charakteristischen Axiome der Lewisschen Systeme S4 und S5.

2.3.2 Beschränkungen der Zugangsrelation:

Diese gängigen Systeme kann man auch dadurch beschreiben, daß man die Modelle auf solche einschränkt, die bestimmte Bedingungen erfüllen, d.h. in denen die Zugangsrelation gewisse Eigenschaften besitzt.

Axiom	Eigenschaft[4]	Beschreibung
Aus	identisch	jede Welt sieht nur sich selbst
D	linkstotal	jede Welt sieht mindestens eine Welt
T	reflexiv	jede Welt sieht sich selbst
B	symmetrisch	wenn eine Welt eine andere sieht, dann auch umgekehrt
4	transitiv	wenn eine Welt eine zweite sieht, die eine dritte sieht, dann sieht auch die erste die dritte
5	euklidisch	wenn eine Welt in zwei Welten sieht, dann sehen sich diese gegenseitig

Diese Eigenschaften kombinieren sich: Für S4 braucht man also nur Modelle zu betrachten, in denen die Zugangsrelation reflexiv und transitiv ist. Dies bedeutet also, daß eine modallogische Formel dann und nur dann eine S4-Tautologie ist, wenn sie in allen Welten aus allen Modellen, in denen die Zugangsrelation reflexiv und transitiv ist, gültig ist.

Achtung: Die Axiome geben aber in der Regel keine Beschreibung dieser Modelle. Das heißt, selbst wenn $(\Box\mathcal{S} \to \Box\Box\mathcal{S})$ für alle modallogischen Sätze $\mathcal{S}$ und in allen Welten eines Modells gilt, braucht die Zugangsrelation dort nicht transitiv zu sein. Manche Eigenschaften von Modellen kann man allerdings durch eine modallogische Formeln axiomatisieren: Wenn etwa $\Diamond\top$ in jeder Welt gilt, dann ist die Zugangsrelation linkstotal. Nicht alle durch Axiome gegebenen Modallogiken lassen sich auf ähnlich einfache Weise durch Eigenschaften der Zugangsrelation beschreiben, und umgekehrt.

Beispiele und einige Regeln

(a) Ein Beispiel für das Dualisieren:

– In T gilt $(\Box A \to A)$, also auch $(\Box\neg A \to \neg A)$ mit uniformer Substitution: $\neg A$ für A.
– Da $((B \to C) \leftrightarrow (\neg C \to \neg B))$ eine aussagenlogische Tautologie ist, also auch eine T-Tautologie, sind $(\Box\neg A \to \neg A)$ und $(\neg\neg A \to \neg\Box\neg A)$ logisch äquivalent in T (uniforme Substitution: $\Box\neg A$ für B und $\neg A$ für C), also ist auch $(\neg\neg A \to \neg\Box\neg A)$ eine T-Tautologie (äquivalente Substitution).
– Da aber in jeder normalen Modallogik $(\neg\Box\neg A \leftrightarrow \Diamond A)$ gilt und $(\neg\neg A \leftrightarrow A)$, da dies eine aussagenlogische Tautologie ist, folgt wiederum mit äquivalenter Substitution $\mathsf{T} \vdash (A \to \Diamond A)$.

(b) „*Nezessisierung*“: Falls M eine normale Modallogik ist und $(A \to B)$ eine M-Tautologie, dann auch $(\Box A \to \Box B)$, und dual, „*Possibilisierung*“, auch $(\Diamond A \to \Diamond B)$.

Dies gilt, da $\mathsf{M} \vdash \Box\top$, also auch $\mathsf{M} \vdash \Box(A \to B)$ nach äquivalenter Substitution. Axiom K und *modus ponens* liefern dann $(\Box A \to \Box B)$ als M-Tautologie.

(c) S5 = KT4B:

Die duale Version $(A \to \Diamond A)$ von T und Axiom 5: $(\Diamond A \to \Box\Diamond A)$ ergeben zusammen mit der aussagenlogischen Tautologie $(((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C))$ nach den nötigen Substitutionen Axiom B. Ähnlich erhält man 4 aus einer Substitution der dualen Version von T, nämlich $(\Box A \to \Diamond\Box A)$, einer Substitution von 5, nämlich $(\Diamond\Box A \to \Box\Diamond\Box A)$, und der Nezessisierung der dualen Version von 5, also $(\Box\Diamond\Box A \to \Box\Box A)$.

Umgekehrt ergibt eine Substitution in B die Formel $(\Diamond A \to \Box\Diamond\Diamond A)$, und zusammen mit der Nezessisierung des dualen 4, also $(\Box\Diamond\Diamond A \to \Box\Diamond A)$, dann Axiom 5.

[4] Die Eigenschaft wird jeweils durch die Beschreibung in der rechten Spalte erklärt.

Leicht sieht man dies auch mit den Bedingungen an die Zugangsrelation: Wenn eine Welt sich selbst und eine andere sieht, dann folgt aus „euklidisch“, daß die andere auch die erste sieht. Eine reflexive euklidische Relation ist also symmetrisch. Zum Beispiel mit einer kleinen Zeichnung sieht man nun schnell ein, daß für eine symmetrische Relation „transitiv“ und „euklidisch“ sich auseinander ergeben.

(d) Distributivgesetze:

In K gelten die beiden Distributivgesetze $(\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B))$ und $(\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B))$. Die volle Distributivität von $\Box$ mit $\vee$ bzw. von $\Diamond$ mit $\wedge$ gilt nicht einmal in $\mathsf{S5}$: Betrachtet man das Modell mit zwei Welten mit voller Zugangsrelation, in einer der Welten ist A wahr, B falsch, in der anderen A falsch, B wahr, dann gilt $\Box(A \vee B)$, aber weder $\Box A$ noch $\Box B$. Damit gilt auch die duale Distributivität von $\Diamond$ mit $\wedge$ nicht, denn aus $\Box(A \vee B) \not\approx (\Box A \vee \Box B)$ erhält man durch Substitution $\neg\Box(\neg A \vee \neg B) \not\approx \neg(\Box\neg A \vee \Box\neg B)$, also mit der Dualität von $\Box$ und $\Diamond$ und *de Morgan*: $\Diamond(A \wedge B) \not\approx (\Diamond A \wedge \Diamond B)$. Man kann aber auch dies direkt in dem Modell sehen.

Abgeschwächte Distributivgesetze gelten allerdings, etwa in $\mathsf{S4}$: $(\Diamond(A \vee \Diamond B) \to (\Diamond A \vee \Diamond B))$ und in $\mathsf{S5}$: $(\Diamond(A \vee \Box B) \to (\Diamond A \vee \Box B))$.

2.4 Modallogische Modellierungen

Die modallogische Sprache ist in vielen Bereichen das geeignete Mittel, die eingeschränkten Ausdrucksmöglichkeiten der Aussagenlogik zu erweitern. Es folgen nun einige Beispiele.

Modallogik im eigentlichen Sinn Hier interpretiert man $\Box$ durch „*es ist notwendig*“, $\Diamond$ durch „*es ist möglich*“. In dieser Form taucht Modallogik im Ansatz bereits bei Aristoteles auf, der modale Syllogismen untersucht hat, also etwa Schlußformen der Form

$$\frac{\begin{array}{c}(A \to B)\\(B \to \Box C)\end{array}}{(A \to \Box C)} \quad \text{oder} \quad \frac{\begin{array}{c}(A \to B)\\\Box(B \to C)\end{array}}{\Box(A \to C)}$$

Auch die Frage nach der Gültigkeit der Axiome eines normalen Systems sind eigentliche philosophische Anliegen, etwa die Gültigkeit des „starken *modus ponens*“ K oder die Frage, ob „das Wahre“ notwendigerweise wahr ist. Zu erwähnen ist hier vielleicht auch Gödels Version des ontologischen Gottesbeweises, die in einer prädikatenlogischen Modallogik zeigt, daß aus der Möglichkeit der Existenz Gottes die Notwendigkeit der Existenz folgt.

Die Modallogik erlaubt es auch, eine *starke Implikation* $(A \multimap B)$ als $\Box(A \to B)$ zu definieren, die dann nicht mehr den aussagenlogischen Paradoxien der Implikation unterliegt (*ex falso quodlibet* muß nicht gelten), dafür aber andere Eigenschaften aufweist, die mit einem intuitiven Verständnis der Implikation nicht verträglich sein müssen.

Zeitlogiken Dies ist die am besten zu veranschaulichende Interpretation: $\Box$ bedeute „*von jetzt an gilt stets*“ und $\Diamond$ „*irgendwann in der Zukunft gilt*“. Die möglichen Welten der Modelle entsprechen dann Zuständen der Welt zu zukünftigen Zeitpunkten.

Ein sinnvolles Axiom für Zeitlogiken ist $(\Box A \to \Box\Box A)$. Eine linear verlaufende Zeit legt das weitere Axiom $(\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A)$ nahe. Daneben könnte man sich aber auch eine verzweigende Zeit vorstellen, wenn man etwa Zukunftsvisionen entwickelt und verschiedene Eventualitäten einplanen möchte. Dann entsprechen die möglichen Welten tatsächlich den ausgedachten Möglichkeiten davon, wie die Welt zu einem zukünftigen Zeitpunkt aussehen könnte, und davon gibt es im allgemeinen für den gleichen Zeitpuinkt verschiedene sich widersprechende Möglichkeiten.

$(\Diamond A \to \Diamond\Diamond A)$ ist ein weiteres mögliches Axiom, das eine „dichte“ Zeit beschreibt, bei der es zwischen zwei betrachteten Zeitpunkten stets einen weiteren gibt. Bei einer „diskreten“ Zeitbetrachtung würde man dagegen einzelne aufeinanderfolgende Zeitpunkte betrachten, etwa Tag für Tag.

Deontische Logiken Hier interpretiert man $\Box$ durch „*es ist geboten/vorgeschrieben*“ und $\Diamond$ durch „*es ist erlaubt/gestattet*“. Gängiges Axiom für diesen Ansatz ist das deontische D: $(\Box A \to \Diamond A)$, oder „was geboten ist, ist auch erlaubt“.

Übersetzt man *verboten* mit *nicht erlaubt*, dann ist in einer normalen deontischen Logik beispielsweise ein Rauchverbot logisch gleichwertig mit einem Nichtrauchgebot: $\neg\Diamond R \sim \Box\neg R$.

Epistemische Logiken Hier geht es um Modellierungen von Wissen, etwa indem man $\Box$ als „*man weiß, daß*“ versteht und $\Diamond$ als „*es ist nicht ausgeschlossen, daß*“. Hier bietet sich als Axiom T an: $(\Box A \to A)$ oder „was man weiß, stimmt auch“. Dann kann man auch Prinzipien formulieren wie $(\Box A \to \Box\Box A)$: „Wenn man etwas weiß, dann weiß man auch, daß man es weiß“.

Ein interessanter in diese Richtung gehender Fall ist der Begriff der Beweisbarkeit in der Mathematik. Gödels Unvollständigskeitssatz besagt u.a., daß es mehr gültige Aussagen über natürliche Zahlen gibt, als man in einer sinnvollen Axiomatisierung, etwa der Peano–Arithmetik, beweisen kann. Interpretiert man $\Box$ durch „*beweisbar ist*“, so kann man modallogisch Axiome für den Beweisbarkeitsbegriff der Peano–Arithmetik formulieren und erhält das System $\mathsf{K4L}$, auch G für „Gödel“ genannt, wobei L die sogenannte *Löb–Formel* $(\Box(\Box A \to A) \to \Box A)$ ist. Im Kern der Unvollständigkeitsbeweise steckt die Tatsache, daß in $\mathsf{K4L}$ Axiom T: $(\Box A \to A)$ nicht gilt! Es ist sogar $\mathsf{KT4L}$ inkonsistent, d.h. $\perp$ und damit jede beliebige Formel ist eine $\mathsf{KT4L}$-Tautologie, $\mathsf{KT4L}$ also keine eigentliche Logik. Insbesondere liegt $\mathsf{K4L}$ nicht in $\mathsf{S4}$, L ist keine $\mathsf{S4}$-Tautologie.

- Literatur hierzu: George Boolos *The unprovability of consistency*, Cambridge: Cambridge University Press 1979.

2.5 Verschiedene Anmerkungen

Im Vergleich zur reinen Aussagenlogik gibt es deutlich weniger Darstllungen der Modallogik. Zu empfehlen sind:

- Robert Bull, Krister Segerberg *Basic Modal Logic*, S.1–88 im zweiten Band des *Handbook of philosophical logic*.
- Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, Yde Venema *Modal Logic*, Cambridge: Cambridge University Press 2001 (geschrieben für Informatiker).
- Brian Chellas *Modal logic*, Cambridge: Cambridge University Press (1980)[5]

2.5.1 Entscheidbarkeit

Viele Modallogiken sind entscheidbar, d.h. es gibt Verfahren, welche entscheiden, ob eine modallogische Formel eine Tautologie ist oder nicht. Dies gilt für alle hier vorgestellten Systeme (und für alle, welche dadurch gegeben sind, daß man endliche viele prädikatenlogisch beschreibbare Eigenschaften der Zugangsrelation fordert). Diese Entscheidungsverfahren beruhen darauf, daß es für jeden modallogischen Satz $\mathcal{S}$, der mit einer Modallogik M konsistent ist (d.h. $\mathsf{M} \nvdash \neg\mathcal{S}$) bereits ein Modell mit endlich vielen Welten gibt. Allerdings gibt es in der Regel kein gutes Verfahren, solch ein endliches Modell zu finden, außer alle der Größe nach durchzugehen.

Für $\mathsf{S4}$ und $\mathsf{S5}$ gibt es dagegen schönere Entscheidungsverfahren, in denen man eine Formel durch logisch äquivalente Umformungen in eine Normalform bringt, die man dann einfacher testen kann.

Ein besonders einfaches, wenn auch nicht unbedingt besonders schnelles Verfahren gibt es für $\mathsf{S5}$: Die Bedingungen an die Zugangsrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv) beschreiben eine sogenannte *Äquivalenzrelation*, d.h. es gibt eine Aufteilung der Welten in verschiedene Gruppen, innnerhalb derer jede Welt jede andere und sich selbst sehen kann, aber ohne daß irgendeine Welt eine aus einer anderen Gruppe sehen könnte. Man überlegt sich leicht, daß es ausreicht, *eine* solche Gruppe anzuschauen, also nur Modelle, in denen jeder jeden sehen kann, und außerdem

[5] Persönlich noch nicht überprüfte Empfehlung eines Fachmanns.

Abbildung 2.2: Die Modalitäten in S4

$$
\begin{tikzcd}
 & & \Box A \arrow[dl] \arrow[ddr] & \\
 & \Box\Diamond\Box A \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\Diamond\Box A \arrow[dr] & & \Box\Diamond A \arrow[dl] & A \arrow[ddl] \\
 & \Diamond\Box\Diamond A \arrow[dr] & & \\
 & & \Diamond A &
\end{tikzcd}
$$

Modelle, in denen jede Belegung nur einmal vorkommt. Wenn in der zu prüfenden Formel n Aussagenvariablen vorkommen, nimmt man für jede Auswahl aus den 2^n Belegungen ein entsprechendes Modell, in dem jede Welt = Belegung jede andere sieht (das sind 2^{2^n} Modelle), und muß von jeder Welt aus testen, ob die Formel gilt oder nicht. Das ist bei mehr als einer Aussagenvariablen viel Arbeit!

2.5.2 Modalitäten

Eine *Modalität* ist irgendeine Abfolge von $\Diamond$ und $\Box$.[6]

In S4 gilt $(\Box A \leftrightarrow \Box\Box A)$: eine Richtung ist Axiom 4, die andere Richtung bekommt man aus T durch uniforme Substitution. Dual gilt dann auch $(\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Diamond A)$. Bis auf logische Äquivalenz bleiben somit nur Modalitäten der Form $\ldots\Box\Diamond\Box\Diamond\ldots$ ohne Doppel-$\Box$ oder Doppel-$\Diamond$. Außerdem gilt in S4 $(\Diamond\Box\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box A)$ und dual $(\Box\Diamond\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond A)$, also hat S4 nur sieben Modalitäten, die sich wie in Abbildung 2.2 der Stärke nach ordnen (Pfeile stehen dafür, daß die Implikation eine S4-Tautologie ist).

In T5 gilt weiterhin $(\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond A)$: eine Richtung ist Axiom 5, die andere Richtung bekommt man wieder aus T durch uniforme Substitution. Dual gilt dann auch $(\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box A)$. Damit gibt es in S5 bis auf logische Äquivalenz nur noch die Modalitäten $\Box$, $\Diamond$ und die „leere“ Modalität. In diesem Sinne ist S5 also eine ausdrucksarme Modallogik.

2.5.3 Beweiskalküle

Wie schon öfters erwähnt, kann man Modallogiken auch durch Beweiskalküle einführen. Dazu muß man zu etwa dem für die Aussagenlogik vorgestellten Gentzen-Kalkül noch neue Regeln hinzufügen, welche folgende Form haben werden, aber nur unter bestimmten Voraussetzungen an Σ und $\mathcal{S}$ gelten. (Hier wird $\Diamond$ als Abkürzung aufgefaßt, für die man keine eigenen Regeln braucht).

$\Box$-*Beseitigung* $\dfrac{\Sigma \vdash \Box\mathcal{S}}{\Sigma \vdash \mathcal{S}}$ $\qquad$ $\Box$-*Einführung* $\dfrac{\Sigma \vdash \mathcal{S}}{\Sigma \vdash \Box\mathcal{S}}$

Die Bedingungen für $S4$ und $S5$ sind nun folgendermaßen: Die erste Ableitungsregel gilt stets; die zweite gilt für $S4$ nur, falls alle Sätze in Σ die Gestalt $\Box\mathcal{T}$ haben, und für $S5$, falls alle Sätze in Σ entweder die Gestalt $\Box\mathcal{T}$ oder $\neg\Box\mathcal{U}$ haben.

Beweiskalküle sind vor allem dann wichtig, wenn es kein (vernünftiges) Entscheidungsverfahren für eine Modallogik gibt; außerdem sind sie näher an der Art der natürlichen Argumentation als semantisch begründete Logiken. Andererseits ist es sehr schwierig zu zeigen, ob zwei durch Beweiskalküle definierte Systeme verschieden oder gleich sind.

[6] Genauer würde man auch noch Negationen $\neg$ aufnehmen, aber da es um logische Äquivalenz gehen soll, kann man die Negationszeichen alle nach außen ziehen, indem man $\Diamond\neg$ durch $\neg\Box$ ersetzt und $\Box\neg$ durch $\neg\Diamond$. Damit hat man höchstens ein Negationszeichen am Anfang.

2.5.4 Zur Geschichte der Modallogik

Die Modallogik beginnt wie die Logik überhaupt mit Aristoteles, der ein umfangreiches System modallogischer Syllogismen aufgestellt hat, über dessen Interpretation allerdings keine gefestigte Meinung vorliegt.

Einen Neuanfang gab es 1918 mit C. I. Lewis, der zunächst versuchte, eine Axiomatisierung der „starken“ Implikation $\Box(A \to B)$ vorzulegen, welche die Paradoxien der aussagenlogischen Implikation $(A \to B)$ vermeiden sollte. 1932 folgten in einem Buch mit Langford die Lewisschen Systeme $\mathsf{S1}$–$\mathsf{S5}$, von denen die ersten drei aber nicht normal sind. Einen mehrwertigen Zugang zur Modallogik schlug Łukasiewicz vor. Zeitlogiken wurden von A. Prior in den fünfziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts untersucht. Darin finden sich bereits Ansätze zu Semantiken, wie auch in den Arbeiten von Carnap, Jónsson & Tarski sowie Hintikka. Allgemein gilt Saul Kripke als der Erfinder der Semantiken (1959). Spätestens seitdem ist die Modallogik ein immenses Forschungsgebiet innerhalb der formalisierten Logik, insbesondere auch mit Anwendungen in der Informatik.

Mehr zur Geschichte der Modallogik im Beitrag im *Handbook of philosophiscal logic* und im Buch von Blackburn et.al.