Kapitel 3

Prädikatenlogik

Die Prädikaten– (oder auch Quantorenlogik) stellt ebenfalls eine Erweiterung der Aussagenlogik dar. Zum einen gibt es hierin die Möglichkeit, die innere Struktur von Aussagen näher zu analysieren als nur durch die aussagenlogischen Junktoren: Man hat die Möglichkeit, Eigenschaften einzelner Objekte und ihre Verhältnisse zueinander zu beschreiben. Zum andern kann man über diese Objekte auch „quantifizieren“, d.h. über ihre Existenz oder auch ihre Anzahl oder über die Universalität einer Eigenschaft sprechen.

Die Prädikatenlogik ist in ihrer Aussagekraft stark genug, die gesamte bekannte Mathematik und damit auch alle mathematisierbare Wissenschaft zu beschreiben. Allerdings ist diese Beschreibung in der Regel eine Kodierung, also nicht vollkommen natürlich. Um natürlichere Beschreibungen zu erhalten, kann man die Prädikatenlogik wiederum erweitern, etwas durch die beiden Modaloperatoren (also die bisherige aussagenlogische Modallogik zu einer prädikatenlogischen Modallogik ausbauen).

Genauer handelt es sich bei der Prädikatenlogik hier um die *Prädikatenlogik erster Stufe*. Es gibt auch Prädikatenlogiken höherer Stufe, in denen man nicht nur über Objekte, sondern auch z.B. über Eigenschaften (d.h. Mengen von Objekten) quantifizieren kann. Ich werde eine abgeschwächte Version der Prädikatenlogik, nämlich ohne Funktionen, vorstellen. Dabei bleibt die prinzipielle Ausdruckskraft der Prädikatenlogik erhalten; die Darstellung vereinfacht sich aber erheblich. Die ausführliche Version ist aber für Interessierte in kleinerer Schrift beigegeben.

3.1 Die prädikatenlogische Sprache

Die prädikatenlogische Sprache ist deutlich komplexer als die aussagen– oder modallogische Sprache. Der Wunsch ist hierbei, über einzelne Objekte eines Universums sprechen zu können. Es wird also Namen für solche Objekte geben: einerseits *Variablen* für solche Objekte und andererseits *Konstanten* für feste Objekte. Hinzu kommen Relationszeichen für Eigenschaften von Objekten und gewissermaßen als zusätzliche Junktoren sogenannte *Quantoren*, die etwas über die Anzahl von Objekten aussagen. Noch stärker als in der Aussagenlogik wird man die Sprache erst dann gut begreifen, wenn man gesehen hat, wie Formeln in Modellen ausgewertet werden. Aber da nur eines nach dem andern eingeführt werden kann, sollte man den Inhalt dieses Abschnittes erst einmal vertrauensvoll entgegennehmen, um nach der Lektüre von Abschnitt 3.2 gegebenenfalls hierher zurückzukommen.

Das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache besteht aus folgenden Zeichen:

Dem „festen“ Anteil, das sind

- die „logischen Zeichen“ $\bot$, $\top$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$
- die „nicht-logischen Zeichen“ $)$, $($ und $=$

- die Individuenvariablen v, w, x, y, z;[1]

und einem variablen Anteil (manchmal *Signatur* oder *Vokabular* genannt), das sind

- Individuenkonstanten $a, b, c, \ldots$ (vorzugsweise lateinische Minuskeln vom Beginn des Alphabets);

- Relationszeichen $A, B, \ldots, V, W, \ldots$ (lateinische Majuskeln).

Die Relationszeichen besitzen zudem eine *Stelligkeit*, sind also zum Beispiel zwei– oder vierstellig. Die ist eine natürliche Zahl, die angibt, mit wievielen Variablen, Konstanten oder allgemeiner Termen (Erklärung folgt!) ein solches Zeichen verknüpft wird. Die einstelligen Relationszeichen heißen auch *Prädikate* (daher der Name „Prädikatenlogik“). Es sind auch nullstellige Relationszeichen zugelassen. Diese heißen auch „Aussagenvariablen“, und man wird sehen, daß sie sich tatsächlich wie die Aussagenvariablen in der Aussagenlogik verhalten werden. Dadurch stellt das prädikatenlogische Alphabet tatsächlich eine Erweiterung des aussagenlogischen dar.

Die Information über die Stelligkeit gehört zur Angabe einer prädikatenlogischen Sprache. Die Zuteilung bestimmter Buchstabengruppen zu den einzelnen Zeichenarten ist eine reine Konvention, die das Lesen erleichtert. Auch hier sollte man bei der Angabe einer prädikatenlogischen Sprache, d.h. seines variablen Anteils, spezifizieren, welche Zeichen welche Rolle übernehmen. In diesem Skript seien aber die Kleinbuchstaben v, w, x, y, z stets für Individuenvariablen reserviert.

Bei der ausführlichen Version der Prädikatenlogik kommen noch das Komma «,» als nicht-logisches Zeichen sowie im variablen Anteil *Funktionszeichen* $f, g, \ldots$ hinzu. Auch die Funktionszeichen verfügen über eine anzugebende Stelligkeit. Läßt man nullstellige Funktionszeichen zu, so kann man diese mit Individuenkonstanten identifizieren.

Namen und Varianten $\forall$ heißt der *Allquantor*, $\exists$ der *Existenzquantor*, $=$ das *Gleichheitszeichen*. Die beiden Quantoren kann man sich gut merken, da sie jeweils aus dem umgedrehten Anfangsbuchstaben ihres Namens bestehen. Das Gleichheitszeichen kann man sich noch besser merken, weil es einfach das übliche Gleichheitszeichen ist.

Die beiden Quantoren werden stets in Verbindung mit einer Individuenvariablen auftreten, z.B. mit x als $\forall x$ bzw. $\exists x$ (genaugenommen sind *dies* die Quantoren, also für jede Individuenvariable ein All– und ein Existnzquantor). Man liest sie dann „für alle x (gilt ...)“ und „es gibt (mindestens) ein x (mit der Eigenschaft ...)“. Die Bezeichnung der Quantoren mit $\exists$ und $\forall$ ist weit verbreitet; Eine Variante in der Literatur aus Schreibmaschinenzeiten ist (Ex) für $\exists x$ und (x) für $\forall x$. Ebenso findet man bisweilen $\bigvee_x$ für $\exists x$ und $\bigwedge_x$ für $\forall x$. Dies kommt daher, daß sich der Existenzquantor in einer gewissen Weise wie eine Disjunktion, der Allquantor wie eine Konjunktion verhält.

Ähnlich wie wir in der Aussagenlogik zwischen Syntax– und Semantikebene unterscheiden mußten, muß man dies eigentlich auch mit dem Gleichheitszeichen tun. Das Gleichheitszeichen wird einerseits in Formeln verwendet (syntaktische Ebene); andererseits möchte man über zwei Formeln aussagen können, daß sie gleich sind, wie man auch über zwei Formel aussagen können möchte, daß sie logisch äquivalent sind. So, wie man für letzteres kurz das Zeichen $\sim$ benutzt, könnte man für die Gleichheit von Formeln das Gleichheitszeichen $=$ benutzen wollen. Dies findet dann aber auf der sematischen Ebene statt und unterscheidet sich vom anderen Gleichheitszeichen wie $\sim$ von $\leftrightarrow$. Hier gibt es keine einheitliche Lösung: Manche Autoren schreiben $\doteq$ für das syntaktische Gleichheitszeichen, andere $\equiv$ oder $=$ für das semantische. Ich werde das Problem dadurch umgehen, daß ich auf der semantischen Ebene kein Gleichheitszeichen zu verwenden versuche.

[1] Auch hier möchte man eigentlich unbegrenzt viele Individuenvariablen zur Verfügung haben; bei Bedarf nimmt man v_1, v_2, v_3 oder andere Varianten. Analoges gilt für die Individuenkonstanten und Relationszeichen.

Die Regeln Die prädikatenlogischen Formeln werden ebenfalls nach bestimmten Regeln aus einfacheren aufgebaut. Während dies in der Aussagenlogik ein Prozeß ist, welcher aus Elementarsätzen zusammengesetzte Sätze formt, kommt in der allgemeinen Prädikatenlogik eigentlich noch ein weiterer Schritt hinzu, welcher zunächst gewissermaßen die Wörter bildet, aus denen die Elementarsätze bestehen. Diese „Wörter“ werden *Terme* genannt. In der vereinfachten Version passiert hier aber nicht viel.

(1) In der vereinfachten Version ist ein Term entweder eine Individuenvariable oder eine Individuenkonstante.

In der Version mit Funktionen ist ein Term eine Zeichenfolge, welche später in einem Modell durch ein Objekt des Modells ausgewertet werden kann. Diese werden wieder an Hand einer „Bauanleitung“ aus einfacheren Termen zusammengesetzt.

1. Jede Individuenvariable ist ein Term.
2. Jede Individuenkonstante ist ein Term.
3. Wenn $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Terme sind und f ein n-stelliges Funktionszeichen, dann ist auch $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ein Term.

Beispiele: Die Sprache enthalte Individuenkonstanten a und c, einstellige Funktionszeichen f und g sowie ein zweistelliges h.

Terme sind etwa: v a $f(c)$ $f(g(x))$ $f(f(f(f(a))))$ $h(v,c)$ $h(f(c),h(v,c))$

Keine Terme sind z.B.: $A(v)$ f $f(g)$ ac $f(x,y)$ $h(a)$ $h(ac)$

(2) Als nächstes definieren wir *atomare* prädikatenlogische Formeln. Diese heißen so, weil sie nicht aus einfacheren Formeln zusammengesetzt sind. In der Aussagenlogik bilden die Aussagenvariablen, Verum und Falsum die atomaren Formeln; in der Prädikatenlogik gibt es zusätzliche atomare Formeln:

1. $\top$ und $\bot$ sind atomare prädikatenlogische Formeln.
2. Wenn τ_1 und τ_2 Terme sind, dann ist $\tau_1 = \tau_2$ eine atomare prädikatenlogische Formel.
3. Wenn $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Terme sind und R ein n-stelliges Relationszeichen, dann ist $R\tau_1 \ldots \tau_n$ eine atomare prädikatenlogische Formel.

Wendet man die letzte Regel auf nullstellige Relationszeichen an, so erhält man auch in der Prädikatenlogik, daß jede Aussagenvariable für sich eine Formel bildet.

Beispiele: Sind a und c Individuenkonstanten, A ein nullstelliges, W ein einstelliges und F ein zweistelliges Relationszeichen, so sind atomare prädikatenlogische Formeln zum Beispiel:

$$a = c \qquad c = y \qquad \bot \qquad W a \qquad W z \qquad F\,a\,a \qquad A \qquad v_1 = v_2$$

Mit Funktionen wären z.B. auch $W\,h(v,c)$ und $F\,v\,f(g(x))$ atomare prädikatenlogische Formeln.

(3) Nun bildet man, wie in der Aussagenlogik, aus den atomaren prädikatenlogischen Formeln zusammengesetzte Formeln; dabei gibt es neben den weiterhin geltenden Regeln aus der Aussagenlogik zwei neue Regeln. Zusammen ergeben sich alle prädikatenlogischen Formeln wie folgt:

1. Jede atomare prädikatenlogischen Formel ist eine prädikatenlogischen Formel.
2. Wenn $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ prädikatenlogische Formeln sind, dann auch $\neg\mathcal{S}$, $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$, $(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})$, $(\mathcal{S} \to \mathcal{T})$ und $(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$.
3. Wenn $\mathcal{S}$ eine prädikatenlogische Formeln ist und v eine Individuenvariable, dann sind auch $\forall v\,\mathcal{S}$ und $\exists v\,\mathcal{S}$ prädikatenlogische Formeln.[2]

[2] Hier benutze ich v als Variable für Individuenvariablen. Die mit Quantoren gebildeten Formeln sind also Zeichenfolgen, die mit einem der beiden Zeichen $\forall$ oder $\exists$ beginnen, dann folgt eine Individuenvariable, und schließlich folgt eine Zeichenfolge, welche eine Formel $\mathcal{S}$ darstellt.

Alle anderen Zeichenfolgen, die nicht mit diesen Regeln gebildet werden können, sind keine prädikatenlogischen Formeln. Insbesondere darf ein Quantor nur in Verbindung mit einer Individuenvariable erscheinen, und nicht mit einer Konstante oder einem Relationszeichen. Dabei muß diese Individuenvariable in der Formel nicht auftreten (man wird allerdings später bei der Auswertung in Modellen sehen, daß dies insofern eine sinnlose Quantifizierung ist, als sie an der Aussagekraft einer Formel nichts ändert).

Jede aussagenlogische Formel ist auch eine prädikatenlogische Formel. Aus unerfindlichen Gründen lassen viele Autoren keine nullstelligen Relationszeichen zu; bei ihnen ist die Prädikatenlogik keine unmittelbare Erweiterung der Aussagenlogik.

Prädikatenlogische Formeln sind wieder eindeutig lesbar, d.h. man kann ihren Aufbau rückwärts nachvollziehen.

Dies gilt insbesondere auch für Terme. Daß man bei Funktionszeichen Klammern einsetzt und Kommata zur Trennung der Terme, ist eine aus der Mathematik übernommene Gepflogenheit, die das Lesen erleichtert. Bisweilen wird dies auch für Relationszeichen übernommen. Bei handschriftlichen Formeln kann man auch durch einen leichten Abstand die Trennung zwischen mehreren Termen, welche einem Relationszeichen folgen, andeuten, sollten diese durch verschachtelte Funktionszeichen unübersichtlich werden.

Beispiele: Prädikatenlogische Formeln in der obigen Sprache sind etwa

$$a = c \qquad \exists v\, a = v \qquad \exists w\, a = v \qquad \forall v \forall v\, Wv \qquad \exists v \exists w\, Fvw \qquad \exists v\, (Wa \wedge \forall w\, Fvw)$$

3.2 Modelle prädikatenlogischer Sprachen

Ein Modell $\mathfrak{M}$ für eine prädikatenlogische Sprache besteht aus:

1. einem *Universum* oder *Individuen*– oder *Gegenstandsbereich*, das ist eine (nicht leere) Menge M von (konkreten oder abstrakten) Objekten, auch Individuen genannt;

2. festen Objekten $a^{\mathfrak{M}}, b^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}}, \dots$ aus M für die Individuenkonstanten $a, b, c, \dots$ in der Sprache;

3. *Relationen* $A^{\mathfrak{M}}, B^{\mathfrak{M}}, C^{\mathfrak{M}}, \dots$ über M für die Relationszeichen $A, B, C, \dots$ in der Sprache, wobei jede Relation die Stelligkeit hat, welche für das Relationszeichen vorgegeben ist.

Eine *n-stellige Relation* $R^{\mathfrak{M}}$ über M ist eine Eigenschaft, die für Auswahlen von n Objekten aus M zutrifft oder nicht. Die Relation $R^{\mathfrak{M}}$ entscheidet also jedesmal, wenn man n Objekte $m_1, \dots, m_n$ aus M auswählt, ob sie darauf zutrifft – dann schreibt man $R^{\mathfrak{M}} m_1 \dots m_n$ – oder nicht.

Beispiele (1) M seien alle Menschen, $W^{\mathfrak{M}}$ die einstellige Relation „ist weiblich“. $W^{\mathfrak{M}}(m)$ gilt dann für eine Person m genau dann, wenn m weiblich ist.

(2) M seien alle Menschen, $K^{\mathfrak{M}}$ die zweistellige Relation „ist Kind von“. Hier sieht man, daß es auf die Reihenfolge von $m_1, \dots, m_n$ ankommt. Ist m_1 Sohn von m_2, dann gilt $K^{\mathfrak{M}} m_1 m_2$, aber nicht $K^{\mathfrak{M}} m_2 m_1$.

(3) M seien alle Menschen, $S^{\mathfrak{M}}$ die zweistellige Relation „sich mögen“. Hier kann es sein, daß $S^{\mathfrak{M}} mm$ für manche m gilt, für andere nicht. Wenn eine Relation $R^{\mathfrak{M}} m_1 \dots m_n$ zutrifft, ist damit nichts darüber ausgesagt, ob die $m_1, \dots, m_n$ verschieden sind oder nicht.

(4) M seien alle Menschen, $T^{\mathfrak{M}}$ die dreistellige Relation „Tochter sein von ... und ...“.

(5) In der natürlichen Sprache gibt es Eigenschaften, die keine feste Stelligkeit haben, z.B. „untereinander befreundet sein“. Wenn man dies prädikatenlogisch modellisieren möchte, braucht man entweder für jede Stelligkeit ein eigenes Relationssymbol, oder man drückt die Tatsache, daß z.B. fünf Menschen untereinander befreundet sind, dadurch aus, daß man für je zwei dieser fünf aussagt, daß sie befreundet sind, und dann die Konjunktion aller dieser Formeln bildet.

In der Version mit Funktionen, besteht ein Modell zusätzlich aus *Funktionen* $f^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}}, \ldots$ von M nach M für die Funktionszeichen $f, g, \ldots$ in der Sprache, auch jeweils in der angegebenen Stelligkeit. Dabei ist eine n-stellige Funktion eine Zuordnung, die *jeder* Auswahl von n Objekten in M *ein und nur ein* Objekt aus M zuordnet. Man schreibt $f^{\mathfrak{M}}(m_1, \ldots, m_n)$ für das Objekt, welches den Objekten $m_1, \ldots, m_n$ zugeordnet wird.

Beispiele: (1) M seien alle Menschen, $f^{\mathfrak{M}}$ die einstellige Funktion, die jedem Menschen seinen Vater zuordnet.

(2) M seien alle reellen Zahlen, $f^{\mathfrak{M}}$ beispielsweise die (einstellige) Sinusfunktion, $g^{\mathfrak{M}}$ die zweistellige Addition, welche je zwei Zahlen ihre Summe zuordnet.

(3) M seien alle Einwohner Deutschlands, $f^{\mathfrak{M}}(m)$ der Bürgermeister der Gemeinde, in der die Person m wohnt. (Hier sieht man, daß $f^{\mathfrak{M}}(m)$ nicht unbedingt verschieden von m sein muß!)

3.3 Auswertungen der Formeln in Modellen

Bei der Auswertung von Formeln in Modellen kommt eine neue Schwierigkeit auf: die der freien Variablen. Dies sind Individuenvariablen, welche nicht im Bereich eines Quantors stehen. Ähnlich wie die Gültigkeit eines Satzes wie „Das Ding ist grün“ nur dann bestimmt werden kann, wenn man zusätzlich weiß, was mit „das Ding“ gemeint ist, können auch solche prädikatenlogischen Formeln in Modellen nur unter einer Zusatzinformation ausgewertet werden, nämlich, was mit freien Individuenvariablen geschehen soll. Dazu benutzt man wieder eine sogenannte *Belegung* der Variablen. Während in der Aussagenlogik Aussagenvariablen mit (Aussagen, und damit letztendlich mit) Wahrheitswerten belegt wurden, werden hier Individuenvariablen mit Individuen, also mit Objekten des Modells belegt. Eine Belegung ist also eine Zuordnung, welche jeder vorkommenden Individuenvariable ein Objekt des Modells zuordnet. Belegungen werden hier in der Regel mit β bezeichnet.

Im Folgenden wird nun Schritt für Schritt definiert, wann eine Formel $\mathcal{S}$ in einem Modell $\mathfrak{M}$ unter einer Belegung β gilt, wofür man kurz $\mathfrak{M} \models \mathcal{S}\,[\beta]$ schreibt. Die formale Definition mag zunächst verwirrend erscheinen: im Grunde wertet man eine Formel aber genau so aus, wie es die Formel beschreibt. Die formale Definition erlaubt es aber auch, „merkwürdige“ Formeln auszuwerten, in denen etwa doppelt über Individuenvariablen quantifiziert wurde, oder über Variablen, welche sonst in der Formel nicht vorkommen, usw. Außerdem ist es bei „komplizierten“ Formeln, z.B. mit vielen Quantorenwechseln, nicht so offensichtlich, was die Formel besagt.

(1) Auswertung der Terme Jeder Term einer prädikatenlogischen Sprache soll ein Objekt eines Modells beschreiben. Dies geschieht im allgemeinen abhängig von einer Belegung β: ein Term τ wird in einem Modell $\mathfrak{M}$ unter einer Belegung β also durch ein Objekt $\tau[\beta]$ ausgewertet.

Dies geschieht in der naheliegenden Weise:

- Für Individuenkonstanten, etwa a, ist $a[\beta] = a^{\mathfrak{M}}$, also das Element, das in dem Modell mit a bezeichnet wird.
- Für Individuenvariablen, etwa v, ist $v[\beta] = \beta(v)$, d.h. das Element, das die Belegung der Variable v zuordnet.

Der etwas aufgeblasene Formalismus wird notwendig, wenn man Funktionen hinzuzieht. Dann muß man nämlich $\tau[\beta]$ wieder über den Aufbau der Terme definieren durch folgende Regel:

- Wenn f ein n-stelliges Funktionszeichen ist und $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Terme sind, dann ist $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)[\beta] = f^{\mathfrak{M}}(\tau_1[\beta], \ldots, \tau_n[\beta])$.

Dies bedeutet, daß dem Term $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ unter β genau das Objekt zugeordnet wird, welches die Funktion $f^{\mathfrak{M}}$ den Objekten $\tau_1[\beta], \ldots, \tau_n[\beta]$ zuordnet. Man macht also genau das in dem Modell, was der Term beschreibt.

Beispiel: M seien wieder alle Menschen, $a^{\mathfrak{M}}$ Aristoteles, $f^{\mathfrak{M}}$ die „Vater“–Funktion, $g^{\mathfrak{M}}$ die „Mutter“–Funktion. Wir betrachten eine Belegung β, welche v mit Saul Kripke und w mit Charles Sanders Pierce auswertet. Dann wird $f(f(a))[\beta]$ der Großvater väterlicherseits von Aristoteles, $g(v)[\beta]$ die Mutter von Kripke und $g(g(f(w)))[\beta]$ die Mutter der Großmutter väterlicherseits von Pierce.

(2) Auswertung atomarer Formeln Die Auswertung atomarer prädikatenlogischer Formeln ist nun wieder einfacher, hängt aber auch von einer Belegung ab. Allen Formeln werden wieder, allerdings abhängig von Belegungen, Wahrheitswerte W oder F zugeordnet, und zwar wieder genau gemäß der Interpretation der Zeichen:

1. Eine prädikatenlogische Formel $\tau_1 = \tau_2$ wird wahr unter einer Belegung β, falls $\tau_1[\beta]$ und $\tau_2[\beta]$ dasselbe Objekt des Modells $\mathfrak{M}$ sind.
2. Eine prädikatenlogische Formel $R\tau_1 \ldots \tau_n$ wird wahr unter einer Belegung β, falls die Eigenschaft (Relation) $R^{\mathfrak{M}}$ auf die Objekte $\tau_1[\beta], \ldots, \tau_n[\beta]$ aus M zutrifft, falls also $R^{\mathfrak{M}}\tau_1[\beta] \ldots \tau_n[\beta]$ gilt.

Man sieht hier, daß das Gleichheitszeichen ebenso gehandhabt wird wie ein zweistelliges Relationszeichen. Der Hauptunterschied besteht darin, daß das Gleichheitszeichen in jedem Modell eine feste Bedeutung hat. Das Gleichheitszeichen ist also gewissermaßen eine „Relationskonstante“; es verhält sich zu den Relationszeichen wie in der Aussagenlogik die Aussagenkonstanten Verum und Falsum zu den Aussagenvariablen. Außerdem schreibt man aus Gewohnheit $y = w$ statt $=vw$.

(3) Auswertung zusammengesetzter Formeln Die Auswertung der aussagenlogischen Junktoren erfolgt wie aus der Aussagenlogik gewohnt. Zur Auswertung der Quantoren müssen wir Belegungen leicht abändern können: Ist β eine Belegung und m ein Objekt im Modell $\mathfrak{M}$, dann soll $\beta(\frac{m}{v})$ die Belegung sein, die überall mit β übereinstimmt, der Variablen v aber das Objekt m zuordnet.

1. Eine prädikatenlogische Formel $\forall v\, \mathcal{S}$ wird wahr unter der Belegung β, wenn für jedes Objekt m im Modell $\mathfrak{M}$ gilt, daß die Formel $\mathcal{S}$ unter der Belegung $\beta(\frac{m}{v})$ wahr wird.
2. Eine prädikatenlogische Formel $\exists v\, \mathcal{S}$ wird wahr unter der Belegung β, wenn es ein Objekt m im Modell $\mathfrak{M}$ gibt, so daß die Formel $\mathcal{S}$ unter der Belegung $\beta(\frac{m}{v})$ wahr wird.

Um eine quantifizierte Formel auszuwerten, läßt man also zunächst den Quantor weg und wertet die übriggebliebene Formel aus; dabei muß man aber die Belegung für die quantifizierte Variable abändern. Für einen Allquantor müssen sämtliche Möglichkeiten wahr werden, für einen Existenzquantor muß es eine geben, welche die übriggebliebene Formel wahr macht.

Prädikatenlogische Sätze Wenn ein Quantor in einer Formel auftritt, dann heißt die Teilformel, vor die der Quantor (zusammen mit Individuenvariable) beim Aufbau der Formel geschrieben wurde, der *Bereich* des Quantors. Eine Individuenvariable v, die im Bereich eines Quantors $\forall v$ oder $\exists v$ steht, heißt durch diesen Quantor *gebunden*; eine Variable, die durch keinen Quantor gebunden ist, heißt *frei*. Dies kann man exakt definieren, es ist aber auch intuitiv verständlich.

Beispiele: In der Formel $\exists x Rxy$ ist x gebunden, y dagegen frei. y steht zwar im Bereich des Quantors $\exists x$, dieser bindet aber nicht y, da es sich um eine andere Variable handelt.

In der Formel $\exists x(Rxy \wedge x = c)$ ist x überall gebunden: der Bereich des Quantors ist alles, was zwischen den Klammern steht. In der Formel $(\exists x\, Rxy \wedge x = c)$ dagegen ist nur Rxy im Bereich des Quantors. Damit ist das x aus der Teilformel Rxy gebunden, das x aus der Teilformel $x = c$ aber frei. In beiden Fällen ist y frei.

Im Unterschied zur Aussagenlogik will ich zwischen prädikatenlogischen Sätzen und Formeln unterscheiden. Ein *prädikatenlogischer Satz* ist eine prädikatenlogische Formel ohne freie Variablen.

Nur für freie Variablen ist die Belegung bei der Auswertung einer Formel von Bedeutung, denn für gebundene Variablen wird die Belegung im Auswertungsprozeß sowieso abgeändert. Intuitiv ist klar, aber man kann auch präzise beweisen, daß der Wahrheitswert einer Formel ohne freie Variablen nicht von der gewünschten Belegung abhängt. Für prädikatenlogische Sätze ist damit unabhängig von Belegungen definiert, ob sie in einem Modell gelten oder nicht. Für einen prädikatenlogischen Satz $\mathcal{S}$ schreibt man dann wieder, wie in der Aussagenlogik, $\mathfrak{M} \models \mathcal{S}$, wenn der Satz in dem Modell gilt.

Die Bildungsgesetze für prädikatenlogische Formeln erlauben „sinnlose Quantifikationen“. Damit sind Quantifikationen $\forall v\mathcal{S}$ oder $\exists v\mathcal{S}$ gemeint, bei denen v nicht freie Variable von $\mathcal{S}$ ist (also wenn v gar nicht vorkommt oder alle Vorkommen von v bereits durch Quantoren gebunden sind). Zum Beispiel ist $\forall v\, a = c$ eine prädikatenlogische Formel, oder auch $\exists x \exists x \forall x\, Rxx$. In diesem Fall bewirken die „unnötigen“ Quantoren nichts an der Gültigkeit der Formeln, der Satz $\forall v\, a = c$ gilt also genau dann in einem Modell, wenn dort $a = c$ gilt, und der Satz $\exists x \exists x \forall x\, Rxx$ gilt genau dann, wenn der Satz $\forall x\, Rxx$ gilt. Weil sie in diesem Sinne nicht stören, verbietet man sie nicht in der Definition. Würde man dies tun, bekäme man an anderer Stelle Schwierigkeiten, z.B. bei Substitutionsregeln.

3.4 Aussagen über Sätze

Analog zur Aussagenlogik sagt man nun, ein prädikatenlogischer Satz $\mathcal{T}$ *folge logisch* aus einem prädikatenlogischen Satz $\mathcal{S}$, falls $\mathcal{T}$ in jedem Modell gilt, in welchem schon $\mathcal{S}$ gilt. Wie gehabt schreibt man dafür $\mathcal{S} \vdash \mathcal{T}$.

Für prädikatenlogische Formeln soll die Folgerungsbeziehung unabhängig von der Belegung der freien Variablen erfolgen. Man definiert also, daß eine prädikatenlogische Formel $\mathcal{T}$ aus einer prädikatenlogischen Formel $\mathcal{S}$ logisch folgt, wenn $\mathcal{T}$ in jedem Modell und unter jeder Belegung gilt, unter der bereits $\mathcal{S}$ gilt.

Zwei prädikatenlogische Formeln $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ heißen *logisch äquivalent*, in Zeichen $\mathcal{S} \sim \mathcal{T}$, wenn jede logisch aus der anderen folgt. Anders ausgedrückt: $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ gelten unter denselben Modellen und Belegungen.

Eine prädikatenlogische Formel $\mathcal{S}$ (bzw. eine Menge Σ prädikatenlogischer Formeln) heißt *erfüllbar* oder *konsistent*, wenn es mindestens ein Modell und eine Belegung der vorkommenden Individuenvariablen gibt, unter der $\mathcal{S}$ (bzw. alle Formeln in Σ) gelten.

Eine prädikatenlogische Formel $\mathcal{S}$ heißt *allgemeingültig*, wenn sie in allen Modellen unter allen Belegungen gilt. Dafür schreibt man wieder $\vdash \mathcal{S}$.
Prädikatenlogische Tautologien sollen dagegen nur diejenigen allgemeingültigen Sätze heißen, die aus aussagenlogischen Tautologien dadurch entstehen, daß man die darin vorkommenden Aussagenvariablen durch prädikatenlogische Formeln ersetzt. Diese Unterscheidung wird nicht von allen Autoren gemacht, ist aber daher sinnvoll, weil man entscheiden kann, ob eine Formel eine prädikatenlogische Tautologie, nicht aber, ob eine Formel allgemeingültig ist.

Zusammenhänge

1. $\mathcal{S}$ ist dann und nur dann nicht erfüllbar, wenn $\neg\mathcal{S}$ allgemeingültig ist.

2. $\mathcal{T}$ ist dann und nur dann allgemeingültig, wenn $\mathcal{T} \sim \top$.

3. Eine prädikatenlogische Formel $\mathcal{T}$ folgt dann und nur dann logisch aus $\mathcal{S}$ (in Zeichen also $\mathcal{S} \vdash \mathcal{T}$), wenn $(\mathcal{S} \to \mathcal{T})$ allgemeingültig ist.

4. Zwei prädikatenlogische Formeln $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ sind dann und nur dann logisch äquivalent, wenn $(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{T})$ allgemeingültig ist.

5. Ist $\mathcal{S}$ eine prädikatenlogische Formel mit freien Variablen $v_1, \ldots, v_n$, so ist $\mathcal{S}$ dann und nur dann allgemeingültig, wenn der prädikatenlogische Satz $\forall v_1 \ldots \forall v_n \mathcal{S}$ allgemeingültig ist.

6. Achtung: sind $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ prädikatenlogische Formeln mit freien Variablen $v_1, \ldots, v_n$, dann gilt nach dem zuvor gesagten $\mathcal{S} \vdash \mathcal{T}$ genau dann, wenn $\vdash \forall v_1 \ldots \forall v_n(\mathcal{S} \to \mathcal{T})$. Dies ist jedoch nicht gleichwertig mit $\forall v_1 \ldots \forall v_n \mathcal{S} \vdash \forall v_1 \ldots \forall v_n \mathcal{T}$!

   Ähnlich sind auch z.B. die Formeln $x = a$ und $y = a$ nicht logisch äquivalent zueinander.

3.5 Eine Liste logischer Gesetze

Die Austausch– oder Substitutionsregeln Hierzu sollte man sich auch für die Prädikatenlogik zunächst überlegen, daß gewisse Ersetzungen Formeln zu Formeln machen: Wenn man in einer prädikatenlogischen Formel eine Teilformel durch eine andere Formel ersetzt, dann entsteht insgesamt wieder eine prädikatenlogische Formel. Wenn man eine Individuenvariable durch einen Term ersetzt, entsteht ebenfalls wieder eine Formel. Es gelten nun in erweiterter die Substitutionsregeln der Aussagenlogik:

Uniforme Substitution: Wenn man in einer allgemeingültigen Formel (oder in zwei logisch äquivalenten Formeln, oder in allen Formeln einer logischen Folgerung $\Sigma \vdash \mathcal{S}$) jedes Vorkommen einer Aussagenvariablen durch dieselbe prädikatenlogische Formel ersetzt, so erhält man wieder eine allgemeingültige Formel (bzw. zwei logisch äquivalente Formeln oder eine Beziehung logischer Folgerung).

Äquivalente Substitution: Wenn man in einer allgemeingültigen Formel (oder in zwei logisch äquivalenten Formeln, oder in allen Formeln einer logischen Folgerung $\Sigma \vdash \mathcal{S}$) irgendeine Teilformel durch eine dazu logisch äquivalente Formel ersetzt, so erhält man wieder eine allgemeingültige Formel (bzw. zwei logisch äquivalente Formeln oder eine Beziehung logischer Folgerung).

Substitution von Individuenvariablen: Zusätzlich gibt es weitere Substitutionregel, die im wesentlichen aussagen, daß es auf den gewählten Namen einer Individuenvariablen nicht ankommt:

- Wenn man in einer allgemeingültigen Formel (oder in zwei logisch äquivalenten Formeln, oder in allen Formeln einer logischen Folgerung $\Sigma \vdash \mathcal{S}$) jedes Vorkommen einer freien Individuenvariablen durch dieselbe andere Individuenvariable ersetzt, und es dabei nicht passiert, daß eine dieser Variablen zu einer gebundenen wird, dann erhält man wieder eine allgemeingültige Formel (bzw. zwei logisch äquivalente Formeln oder eine Beziehung logischer Folgerung).
- Wenn man in einer allgemeingültigen Formel (oder in zwei logisch äquivalenten Formeln, oder in allen Formeln einer logischen Folgerung $\Sigma \vdash \mathcal{S}$) jedes Vorkommen einer Individuenvariablen v im Bereich eines Quantors $\exists v$ oder $\forall v$ durch dieselbe andere Individuenvariable ersetzt (einschließlich des Vorkommens unmittelbar hinter dem Quantorenzeichen), und dabei nicht eine andere Variable als bisher durch diesen Quantor gebunden wird, so erhält man wieder eine allgemeingültige Formel (bzw. zwei logisch äquivalente Formeln oder eine Beziehung logischer Folgerung).

Beispiele zur Substitution freier Variablen: $((x = y \wedge y = z) \to x = z)$ ist allgemeingültig, also auch $((v = y \wedge y = z) \to v = z)$, ebenso $((y = y \wedge y = z) \to y = z)$. Es ist also nicht verboten, daß die einzusetzende Variable bereits in der Formel auftritt. Dagegen ist $(\exists y(x = y \wedge Sy) \to Sx)$ allgemeingültig, nicht aber $(\exists y(y = y \wedge Sy) \to Sy)$: indem man hier x durch y ersetzt, wird bei einem Vorkommen die zuvor freie Variable zu einer gebundenen.

Beispiele zur Substitution gebundener Variablen: $(\exists x \forall y Rxy \to \forall x \exists y Rxy)$ ist allgemeingültig, also auch $(\exists x \forall z Rxz \to \forall x \exists y Rxy)$. Beispiel einer ungültigen Substitution: $(\exists x \exists y \neg x{=}y \to \forall x \exists y \neg x{=}y)$ ist allgemeingültig, nicht aber $(\exists x \exists y \neg x{=}y \to \forall x \exists x \neg x{=}x)$. Durch die Ersetzung von y durch x im hinteren Teil wird nun durch den Existenzquantor eine Variable gebunden, die zuvor erst durch den Allquantor gebunden war.

Unproblematisch sind die Ersetzungsregeln für Individuenvariablen, wenn man eine völlig neue Individuenvariable nimmt, die sonst nirgends auftritt.

Vertauschbarkeit der Quantoren untereinander

$$\begin{array}{rcll}
\forall v\, \forall w\, \mathcal{S} & \sim & \forall w\, \forall v\, \mathcal{S} & \\
\exists v\, \exists w\, \mathcal{S} & \sim & \exists w\, \exists v\, \mathcal{S} & \\
\forall v\, \mathcal{S} & \vdash & \exists v\, \mathcal{S} & \text{die Umkehrung gilt nicht!} \\
\exists v\, \forall w\, \mathcal{S} & \vdash & \forall w\, \exists v\, \mathcal{S} & \text{die Umkehrung gilt nicht!}
\end{array}$$

Vertauschbarkeit der Quantoren mit Junktoren In einem Modell ausgewertet, bedeutet ein Allquantor $\forall x$ soviel wie eine „große“ (gegebenenfalls sogar unendliche) Konjunktion: die Gültigkeit von $\forall x \mathcal{S}$ in einem Modell $\mathfrak{M}$ sagt aus, daß die durch $\mathcal{S}$ ausgedrückte Eigenschaft für alle Objekte des Universums zutrifft. Wenn man mit $\mathcal{S}(\frac{\tau}{x})$ die Formel bezeichnet, welche dadurch entsteht, daß man in der Formel $\mathcal{S}$ jedes freie Vorkommen der Variablen x durch den Term τ ersetzt, so ist $\forall x \mathcal{S}$ also gleichwertig mit $\mathcal{S}(\frac{m_1}{x}) \wedge \mathcal{S}(\frac{m_2}{x}) \wedge \mathcal{S}(\frac{m_3}{x}) \wedge \ldots$, wobei $m_1, m_2, m_3, \ldots$ alle Objekte des Universums durchläuft . Ganz ähnlich verhält sich der Existenzquantor wie eine Disjunktion aus; $\exists x \mathcal{S}$ sagt im Modell $\mathfrak{M}$ das Gleiche aus wie $\mathcal{S}(\frac{m_1}{x}) \vee \mathcal{S}(\frac{m_2}{x}) \vee \mathcal{S}(\frac{m_3}{x}) \vee \ldots$ Man wird feststellen, daß in diesem Sinne ein Allquantor mit der Konjunktion verträglich ist und ebensolche Vertauschungsregeln mit anderen Junktoren wie die Konjunktion erfüllt, ebenso der Existenzquantor mit der Disjunktion. Insbesondere sind Existenz– und Allquantor zueinander dual:

$$\begin{array}{rcl}
\neg\, \forall v\, \mathcal{S} & \sim & \exists v\, \neg\, \mathcal{S} \\
\neg\, \exists v\, \mathcal{S} & \sim & \forall v\, \neg\, \mathcal{S} \\
\exists v\, \mathcal{S} & \sim & \neg\, \forall v\, \neg\, \mathcal{S} \\
\forall v\, \mathcal{S} & \sim & \neg\, \exists v\, \neg\, \mathcal{S}
\end{array}$$

Diese Regeln sind also nichts als eine Art Erweiterung der Regeln von de Morgan (jede der vier Versionen geht übrigens durch die Substitutionsregeln aus den andern hervor). Insbesondere kann man mit Hilfe von $\neg$ einen Quantor durch den andern ausdrücken. Analog zu vollständigen Junktorensystemen bildet hier also jeder der Quantoren ein *vollständiges Quantorsystem*. Bei den Kalkülen in Abschnitt 3.6 wird man sich bisweilen auf vollständige Junktor–Quantor–Systeme wie $\neg, \wedge, \exists$ beschränken.

Weitere Vertauschbarkeitsregeln der Quantoren mit Junktoren sind:

$$\begin{array}{rcll}
\forall v\, (\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}) & \sim & (\forall v\, \mathcal{S} \wedge \forall v\, \mathcal{T}) & \\
\exists v\, (\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}) & \vdash & (\exists v\, \mathcal{S} \wedge \exists v\, \mathcal{T}) & \text{die Umkehrung gilt nicht!} \\
\exists v\, (\mathcal{S} \vee \mathcal{T}) & \sim & (\exists v\, \mathcal{S} \vee \exists v\, \mathcal{T}) & \\
(\forall v\, \mathcal{S} \vee \forall v\, \mathcal{T}) & \vdash & \forall v\, (\mathcal{S} \vee \mathcal{T}) & \text{die Umkehrung gilt nicht!} \\
\exists v\, (\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}) & \sim & (\forall v\, \mathcal{S} \rightarrow \exists v\, \mathcal{T}) & \\
(\exists v\, \mathcal{S} \rightarrow \forall v\, \mathcal{T}) & \vdash & \forall v\, (\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}) & \text{die Umkehrung gilt nicht!}
\end{array}$$

Gleichheitsregeln

$$\begin{array}{ll}
\vdash & \forall v\ v = v \\
\vdash & \forall v\, \forall w\, (v = w \leftrightarrow w = v) \\
\vdash & \forall v\, \forall w\, \forall x\, ((v = w \wedge w = x) \rightarrow v = x) \\
\vdash & \forall v_1 \ldots \forall v_n \forall w_1 \ldots \forall w_n \big((v_1 = w_1 \wedge \cdots \wedge v_n = w_n) \rightarrow (R v_1 \ldots v_n \leftrightarrow R w_1 \ldots w_n)\big)
\end{array}$$

für jedes n-stellige Relationszeichen R

In der Version mit Funktionen hat man zusätzlich die Gleichheitsregel

$$\vdash \forall v_1 \ldots \forall v_n \forall w_1 \ldots \forall w_n \big((v_1 = w_1 \wedge \cdots \wedge v_n = w_n) \rightarrow f(v_1, \ldots, v_n) = f(w_1, \ldots, w_n)\big)$$

für jedes n-stellige Funktionszeichen f.

Weitere Vertauschbarkeitsregeln Annahme: v ist nicht frei in $\mathcal{T}$ (zum Beispiel, wenn v in $\mathcal{T}$ gar nicht vorkommt).

$$\forall v\mathcal{T} \quad \sim \quad \exists v\mathcal{T} \quad \sim \quad \mathcal{T}$$

$$\begin{array}{rcl}
\forall v\,(\mathcal{S}\wedge\mathcal{T}) & \sim & (\forall v\,\mathcal{S}\wedge\mathcal{T}) \\
\exists v\,(\mathcal{S}\wedge\mathcal{T}) & \sim & (\exists v\,\mathcal{S}\wedge\mathcal{T}) \\
\forall v\,(\mathcal{S}\vee\mathcal{T}) & \sim & (\forall v\,\mathcal{S}\vee\mathcal{T}) \\
\exists v\,(\mathcal{S}\vee\mathcal{T}) & \sim & (\exists v\,\mathcal{S}\vee\mathcal{T}) \\
\forall v\,(\mathcal{S}\to\mathcal{T}) & \sim & (\exists v\,\mathcal{S}\to\mathcal{T}) \\
\exists v\,(\mathcal{S}\to\mathcal{T}) & \sim & (\forall v\,\mathcal{S}\to\mathcal{T}) \\
\forall v\,(\mathcal{T}\to\mathcal{S}) & \sim & (\mathcal{T}\to\forall v\,\mathcal{S}) \\
\exists v\,(\mathcal{T}\to\mathcal{S}) & \sim & (\mathcal{T}\to\exists v\,\mathcal{S})
\end{array}$$

Ableitungsregeln für Quantoren Im Gegensatz zur Aussagenlogik, wo man mit Wahrheitstafeln im Prinzip alles ausrechnen kann, insbesondere für jede Formel, ob sie allgemeingültig ist oder nicht, gibt es in der Prädiaktenlogik kein solches universelles Verfahren. Es gibt lediglich *Kalküle*, mit deren Hilfe man alle allgemeingültigen Formel konstruieren kann, ohne aber für eine gegebene Formel eine solche Konstruktion einfach finden zu können. Insbesondere braucht man also zusätzlich zu Schlußregeln für die Junktoren, wie wir sie aus der Aussagenlogik kennen, Regeln für die Quantoren. Hier sind vier praktikable Regeln:

$\forall$-Einführungsregel

$$\frac{\Sigma \;\vdash\; \mathcal{S}(\frac{w}{v})}{\Sigma \;\vdash\; \forall v\,\mathcal{S}}$$

falls w nicht als freie Variable in Σ oder $\mathcal{S}$ vorkommt.
w ist Variable, kein Konstantenzeichen!

$\forall$-Eliminationsregel

$$\frac{\Sigma \;\vdash\; \forall v\,\mathcal{S}}{\Sigma \;\vdash\; \mathcal{S}(\frac{\tau}{v})}$$

falls τ keine Variable ist, die durch die Substitution in den Bereich eines entsprechenden Quantors fiele.

$\exists$-Eliminationsregel

$$\frac{\Sigma \;\vdash\; \exists v\,\mathcal{S}}{\Sigma \;\vdash\; \mathcal{S}(\frac{a}{v})}$$

falls $\exists v\,\mathcal{S}$ ein Satz ist und a ein „neues“ Konstantenzeichen, das im Rest der Ableitung nicht vorkommt.

$\exists$-Einführungsregel

$$\frac{\Sigma \;\vdash\; \mathcal{S}(\frac{\tau}{v})}{\Sigma \;\vdash\; \exists v\,\mathcal{S}}$$

Falls $\exists v\,\mathcal{S}$ kein Satz ist, muss man die $\exists$-Eliminationsregel so abändern, dass man statt einem neuen Konstantenzeichen a einen Term $f(w_1,\ldots,w_k)$ mit einem „neuen“ Funktionszeichen f einführt, wobei $w_1,\ldots,w_k$ die freien Variablemn von $\exists v\,\mathcal{S}$ sind.

3.6 Kalküle der Prädikatenlogik und Vollständigkeitssatz

Achtung: Die Abschnitte 3.6 und 3.7 sind nicht klausurrelevant, sondern dienen der Allgemeinbildung. In diesen Abschnitten heißen Formel $\varphi,\psi,\ldots$ statt $\mathcal{S},\mathcal{T}$, Theorien T statt Σ, Terme t statt τ ...
Der letzte Teil über Gödels Unvollständigkeitssätze ist sehr schwer zu verstehen und einigermaßen mathematisch.

$\mathcal{L}$ ist im folgenden eine fest gewählte prädikatenlogische Sprache (d.h. eine Auswahl an Zeichen für Individuenkonstanten, Funktionen und Relationen).

T ist eine $\mathcal{L}$-*Theorie*, d.h. eine Menge von prädikatenlogischen Sätzen dieser Sprache (kurz: $\mathcal{L}$-*Sätze*), in diesem Fall auch *Axiome* der Theorie genannt.

Semantischer Folgerungsbegriff: Ein $\mathcal{L}$-Satz φ *folgt logisch* aus einer Theorie T, wenn jedes Modell von T auch Modell von φ ist. Man schreibt $T \models \varphi$. Eine $\mathcal{L}$-Theorie wird *erfüllbar* oder *konsistent* genannt, wenn sie ein Modell hat.

Es gilt nun folgender Zusammenhang: φ folgt logisch aus T dann und nur dann, wenn die $\mathcal{L}$-Theorie T', die aus T zusammen mit $\neg\varphi$ besteht[3], nicht erfüllbar ist.

Für eine erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie T und einen $\mathcal{L}$-Satz φ gilt also eine der folgenden Möglichkeiten:

- φ folgt logisch aus T, d.h. T zusammen mit $\neg\varphi$ ist inkonsistent.
- $\neg\varphi$ folgt logisch aus T, d.h. T zusammen mit φ ist inkonsistent.
- T ist sowohl zusammen mit φ konsistent als auch zusammen mit $\neg\varphi$; keine der beiden Formeln folgt logisch aus φ.

Außerdem heißt ein $\mathcal{L}$-Satz φ *allgemeingültig*, falls er in allen Modellen gilt, also falls er aus der „leeren Theorie“ (d.i. ohne Axiome) logisch folgt.

Im Unterschied dazu soll eine *prädikatenlogische Tautologie* eine Formel sein, die aus einer aussagenlogischen Tautologie dadurch entsteht, daß man Aussagenvariablen durch prädikatenlogische Formeln ersetzt, und zwar eine Aussagenvariable an allen Vorkommen durch die gleiche Formel. Eine prädikatenlogische Tautologie ist also aufgrund ihrer zugrundeliegenden aussagenlogischen Gestalt allgemeingültig.

Syntaktischer Folgerungsbegriff: Ein *Kalkül* K für die Prädikatenlogik ist eine Menge von Regeln, wie man aus gegebenen Folgerungsbeziehungen der Form „φ folgt aus T“ neue Folgerungsbeziehungen gewinnt. Manche dieser Regeln haben keine Voraussetzung oder „Eingabe“, dann spricht man auch von *Axiomen(regeln)*, während man die andern *eigentliche Regeln* nennen könnte.

Ein $\mathcal{L}$-Satz φ heißt nun *ableitbar* oder *beweisbar* aus einer $\mathcal{L}$-Theorie T im Kalkül K, wenn es eine Abfolge von Folgerungsbeziehungen gibt, die jeweils mit den Regeln des Kalküls aus den vorhergehenden gewonnen werden und an deren Ende die Folgerungsbeziehung „φ folgt aus T“ steht. Man schreibt dafür $T \vdash_K \varphi$. Ein Satz φ heißt ableitbar oder beweisbar im Kalkül K (ohne Erwähnung einer Theorie), falls φ in K aus der leeren Theorie ableitbar ist. Dafür schreibt man $\vdash_K \varphi$. Schließlich heißt eine Theorie *widerspruchsfrei* bezüglich des Kalküls K, falls sich $\perp$ nicht in K aus T ableiten läßt, in Symbolen: falls $T \nvdash_K \perp$.

(Falls im Kalkül aussagenlogische Regeln ableitbar sind, genauer: es reicht die Gültigkeit einer Regel der Form $\dfrac{T, \varphi \vdash \neg\varphi}{T \vdash \perp}$, so läßt sich Ableitbarkeit ebenso auf Widerspruchsfreiheit zurückführen wie logische Folgerung auf Erfüllbarkeit, d.h. φ läßt sich in K aus T genau dann ableiten, wenn die Theorie $T' = T \cup \{\neg\varphi\}$ nicht widerspruchsfrei bezüglich K ist.)

Vollständigkeit: Man möchte nun Kalküle finden, für welche die parallelen Begriffe „logische Folgerung/Ableitbarkeit“ einerseits und „Erfüllbarkeit/Widerspruchsfreiheit“ andererseits übereinstimmen.

Ein Kalkül heißt *sound* oder *korrekt*, wenn sich nur semantisch gültige logische Folgerungen aus ihm ableiten lassen, d.h. wenn alle Regeln korrekt sind, also aus gültigen logischen Folgerungen wieder gültige logische Folgerungen herleiten. Ein Kalkül heißt *vollständig*, wenn sich jede semantisch gültige logische Folgerung aus ihm ableiten läst.

Es ist normalerweise einfach, die Korrektheit eines Kalküls nachzuprüfen, die Vollständigkeit dagegen schwierig. Der erste Vollständigkeitsbeweis eines Kalküls wurde von Gödel 1928 bewiesen.

Es werden zwei Haupttypen von Kalkülen unterschieden: *Axiomen–* oder *Hilbert–Kalküle* mit vielen Axiomen, aber wenig eigentlichen Regeln (meist nur dem Modus Ponens), und *Regel–* oder

[3]Mathematisch ausgedrückt: $T' = T \cup \{\neg\varphi\}$.

Gentzen–Kalküle mit möglichgst wenig Axiomen, aber vielen Regeln. Von letzterem wiederum gibt es zwei Hauptvarianten, welche manchmal als *natürliches Schließen* und als *Sequenzenkalkül* bezeichnet werden. Der Sprachgebrauch ist hier aber wechselnd.

Ein Hilbert–Kalkül[4]: In diesem Kalkül sind sämtliche Junktoren zugelassen, von den Quantoren aber nur der Existenzquantor. Entweder man faßt einen Allquantor $\forall x$ als Abkürzung für $\neg\exists x\neg$ auf, oder man muß den Kalkül um entsprechende Regeln ergänzen (entweder, indem man die „Abkürzungsregeln“ $(\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi)$ für jede Formel φ als zusätzliche Axiome aufnimmt, oder $\forall$-Axiome und $\forall$-Regeln einführt).

Axiome(nregeln) des Kalküls:

$$\frac{}{T \vdash_H \varphi}$$

(a) falls φ in T enthalten ist;
(b) falls φ eine prädikatenlogische Tautologie ist;
(c) falls φ eine Gleichheitsaxiom ist;
(d) falls φ ein $\exists$-Axiom ist.

Dabei ist ein *Gleichheitsaxiom* ist ein $\mathcal{L}$-Satz einer der folgenden Formen:

$$\begin{aligned}
&\forall v\, v = v\\
&\forall v\forall w\, (v = w \leftrightarrow w = v)\\
&\forall v\forall w\forall x\, \big((v = w \wedge w = x) \to v = x\big)\\
&\forall v_1 \dots \forall v_n \forall w_1 \dots \forall w_n \big((v_1 = w_1 \wedge \dots \wedge v_n = w_n) \to f(v_1, \dots, v_n) = f(w_1, \dots, w_n)\big)\\
&\forall v_1 \dots \forall v_n \forall w_1 \dots \forall w_n \big((v_1 = w_1 \wedge \dots \wedge v_n = w_n) \to (Rv_1 \dots v_n \leftrightarrow Rw_1 \dots w_n)\big)
\end{aligned}$$

wobei f ein n-stelliges Funktionszeichen und R ein n-stelliges Relationszeichen aus $\mathcal{L}$ ist.

Ein $\exists$-*Axiom* ist ein $\mathcal{L}$-Satz der folgenden Form:

$$\varphi(\frac{t}{v}) \to \exists v\, \varphi$$

wobei die Variablen von t nicht in φ vorkommen dürfen (oder etwas allgemeiner: es darf nicht passieren, daß nach dem Ersetzen Variablen von t durch Quantoren von φ gebunden sind.)

Ist φ eine prädikatenlogische Formel, so soll $\varphi(\frac{t}{v})$ für die Formel stehen, die man erhält, indem man bei jedem freien Vorkommen der Variable v in φ diese durch den Term t ersetzt. (Man muß sich natürlich davon überzeugen, daß dies wieder eine Formel ist. Außerdem muß man ein wenig aufpassen, wenn v selbst wieder in t vorkommt: diese v's dürfen dann nicht auch ersetzt werden!)

Eigentliche Regeln des Kalküls:

Modus ponens
$$\frac{T \vdash_H \varphi \qquad T \vdash_H (\varphi \to \psi)}{T \vdash_H \psi}$$

$\exists$-Einführung
$$\frac{T \vdash_H (\varphi \to \psi)}{T \vdash_H (\exists v\, \varphi \to \psi)}$$

wobei v keine freie Variable von ψ sein darf.

Man kann problemlos die eigentlichen Regeln auf den Modus Ponens reduzieren (wie in jedem Kalkül!), indem man hier die $\exists$-Einführung durch eine Reihe von Axiomen der Form $((\varphi \to \psi) \to (\exists v\, \varphi \to \psi))$ ersetzt, was aber weniger natürlich ist.

Ein Sequenzenkalkül (Variante 1)[5]:

Dieser Kalkül arbeitet mit dem vollständigen Junktoren–/Quantorensystem $\neg, \vee, \exists$.

Axiome(nregel) des Kalküls:

[4] Nach M. Ziegler „Vorlesung über mathematische Logik“, Universität Freiburg.

[5] Nach Ebbinghaus, Flum, Thomas „Einführung in die mathematische Logik“, 4. Aufl., Heidelberg 1996.

$$\frac{}{T, \varphi \vdash_{S_1} \varphi} \qquad \frac{}{T \vdash_{S_1} t = t}$$

EIGENTLICHE REGELN DES KALKÜLS:[6]

Monotonieregel
$$\frac{T_1 \vdash_{S_1} \varphi}{T_1, T_2 \vdash_{S_1} \varphi}$$

Substitutionsregel
$$\frac{T \vdash_{S_1} \varphi(\frac{t_1}{v})}{T, t_1 = t_2 \vdash_{S_1} \varphi(\frac{t_2}{v})}$$

Fallunterscheidung
$$\frac{T, \varphi \vdash_{S_1} \psi \qquad T, \neg\varphi \vdash_{S_1} \psi}{T \vdash_{S_1} \psi}$$

Widerspruchsregel
$$\frac{T, \neg\varphi \vdash_{S_1} \psi \qquad T, \neg\varphi \vdash_{S_1} \neg\psi}{T \vdash_{S_1} \varphi}$$

$\vee$-Regel links
$$\frac{T, \varphi_1 \vdash_{S_1} \psi \qquad T, \varphi_2 \vdash_{S_1} \psi}{T, (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vdash_{S_1} \psi}$$

$\vee$-Regel rechts
$$\frac{T \vdash_{S_1} \varphi}{T \vdash_{S_1} (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{T \vdash_{S_1} \varphi}{T \vdash_{S_1} (\psi \vee \varphi)}$$

$\exists$-Regel links
$$\frac{T, \varphi(\frac{w}{v}) \vdash_{S_1} \psi}{T, \exists v\, \varphi \vdash_{S_1} \psi}$$

falls w nicht als freie Variable in T, $\exists x\varphi$ oder ψ vorkommt.

$\exists$-Regel rechts
$$\frac{T \vdash_{S_1} \varphi(\frac{t}{v})}{T \vdash_{S_1} \exists v\, \varphi}$$

Ein Sequenzenkalkül (Variante 2)[7]: Dieser Kalkül ist etwas „symmetrischer“ als die erste Variante: Hier haben die Folgerungsbeziehungen die Form $\Phi \vdash_{S_2} \Psi$, wobei Φ und Ψ Mengen endlicher $\mathcal{L}$-Sätze sind. Die intendierte Bedeutung von $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash_{S_2} \psi_1, \ldots, \psi_n$ ist $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m) \vdash (\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n)$. Dieser Kalkül arbeitet mit dem vollständigen Junktoren–/Quantorensystem $\neg, \wedge, \exists$.

AXIOME(NREGEL) DES KALKÜLS:

$$\frac{}{\Phi, \varphi \vdash_{S_2} \Psi, \varphi} \qquad \frac{}{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, t = t}$$

EIGENTLICHE REGELN DES KALKÜLS:

$\neg$-Regel links
$$\frac{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, \varphi}{\Phi, \neg\varphi \vdash_{S_2} \Psi}$$

$\neg$-Regel rechts
$$\frac{\Phi, \varphi \vdash_{S_2} \Psi}{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, \neg\varphi}$$

$\wedge$-Regeln links
$$\frac{\Phi, \varphi_1 \vdash_{S_2} \Psi}{\Phi, (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vdash_{S_2} \Psi} \qquad \frac{\Phi, \varphi_2 \vdash_{S_2} \Psi}{\Phi, (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vdash_{S_2} \Psi}$$

$\wedge$-Regel rechts
$$\frac{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, \varphi_1 \qquad \Phi \vdash_{S_2} \Psi, \varphi_2}{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, (\varphi_1 \wedge \varphi_2)}$$

$\exists$-Regel links
$$\frac{\Phi, \varphi(\frac{t}{v}) \vdash_{S_2} \Psi}{\Phi, \exists v\, \varphi \vdash_{S_2} \Psi}$$

falls die Variablen von t weder in φ, Φ noch in Ψ vorkommen.

$\exists$-Regel rechts
$$\frac{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, \varphi(\frac{t}{v})}{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, \exists v\, \varphi}$$

[6] Auf die Reihenfolge der Prämissen, etwa T_1, T_2 in der Monotonieregel, soll es nie ankommen.
[7] Nach M. Ziegler „Vorlesung über mathematische Logik“, Universität Freiburg.

=-Regeln links

$$\frac{\Phi, t_1 = t_2 \vdash_{S_2} \Psi, \varphi(\frac{t_1}{v})}{\Phi, t_1 = t_2 \vdash_{S_2} \Psi, \varphi(\frac{t_2}{v})}$$

$$\frac{\Phi, t_1 = t_2 \vdash_{S_2} \Psi, \varphi(\frac{t_2}{v})}{\Phi, t_1 = t_2 \vdash_{S_2} \Psi, \varphi(\frac{t_1}{v})}$$

=-Regel rechts

$$\frac{}{\Phi \vdash_{S_2} \Psi, t = t}$$

(Diese Axiomenregel ist aus Symmetriegründen hier wiederholt.)

Ein Kalkül natürlichen Schließens[8]: In diesem Kalkül gibt es gar keine Axiome, dafür arbeiten die Regeln mit Annahmen. Formeln, welche Annahmen einer Regeln darstellen, stehen in eckigen Klammern. Annahmen sind zunächst *offen*, werden aber durch Regeln geschlossen. Soll $T \vdash \varphi$ abgeleitet werden, dürfen am Ende nur noch Annahmen aus T offen sein.

Drei übereinanderstehende Punkte stehen für eine Ableitung im Kalkül. Statt Links– und Rechts–Regeln, wie im Sequenzenkalkül, gibt es hier für jeden Junktor/Quantor Einführungs– und Eliminationsregeln. Dieser Kalkül ist ohne Gleichheit „=“, aber mit allen üblichen Junktoren und Quantoren außer $\leftrightarrow$.

($\neg$-Einführung)

$$\frac{\begin{matrix}[\neg\varphi]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}$$

und die Annahme wird geschlossen

$\neg$-Elimination

$$\frac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ \varphi & \neg\varphi\end{matrix}}{\psi}$$

$\wedge$-Einführung

$$\frac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ \varphi & \psi\end{matrix}}{(\varphi \wedge \psi)}$$

$\wedge$-Elimination

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ (\varphi \wedge \psi)\end{matrix}}{\varphi} \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ (\varphi \wedge \psi)\end{matrix}}{\psi}$$

$\vee$-Einführung

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi\end{matrix}}{(\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ \psi\end{matrix}}{(\varphi \vee \psi)}$$

$\vee$-Elimination

$$\frac{\begin{matrix} & [\varphi] & [\psi] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varphi \vee \psi) & \chi & \chi\end{matrix}}{\chi}$$

und beide Annahmen werden geschlossen.

$\to$-Einführung

$$\frac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{(\varphi \to \psi)}$$

und die Annahme wird geschlossen.

$\to$-Elimination

$$\frac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ \varphi & (\varphi \to \psi)\end{matrix}}{\psi}$$

$\forall$-Einführung

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi(\frac{w}{v})\end{matrix}}{\forall v\, \varphi}$$

sofern w nicht frei in φ (es sei denn $w = v$) oder einer offenen Annahme der Ableitung ist.

$\forall$-Elimination

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ \forall v\, \varphi\end{matrix}}{\varphi(\frac{w}{v})}$$

[8] Nach Troelstra, Schwichtenberg „Basic Proof Theory“, Cambridge 1996.

∃-Einführung	∃-Elimination
$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi(\frac{t}{v})\end{array}}{\exists v\,\varphi}$$	$$\dfrac{\begin{array}{cc} & [\varphi(\frac{w}{v})]\\ \vdots & \vdots\\ \exists v\,\varphi & \psi\end{array}}{\psi}$$ *und die Annahme wird geschlossen. Dabei darf w nicht frei in φ sein (es sei denn $w = v$), noch in ψ, noch in einer der am Ende noch offenene Annahmen.*

Varianten: Für jeden Kalkül gibt es unzählige Varianten. Zum Beispiel arbeitet die erste Variante des Sequenzenkalküls mit dem vollständigen Junktoren– und Quantorensystem $\neg, \vee, \exists$. Entsprechend kann man für die andern Junktoren/Quantoren zusätzliche Regeln einführen. Jeden Kalkül kann man durch abgeleitete Regeln ergänzen.

Vorsicht: Die Kalküle sind sehr „empfindlich“. Leichte Änderungen der Regeln können bereits dazu führen, daß nicht mehr alle gültigen Folgerungsbeziehungen ableitbar sind. Wenn man im Kalkül des natürlichen Schließens die „$\neg$-Einführung“ genannte Regel durch eine richtige Einführungsregel für die Negation ersetzt, also durch die Regel $\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}$, dann erhält man eine schwächere Logik, die *intuitionistische Logik*, in welcher die Doppelnegationsregel $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg\neg\varphi\end{array}}{\varphi}$ nicht ableitbar ist. Nimmt man diese hinzu, oder das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten, erhält man wieder die klassische Logik. Lässt man die „$\neg$-Einführung“ ganz weg, erhält man die sogenannte *minimale Logik*, in welcher die Regel „ex falso quodlibet“ $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}$ nicht mehr gilt.

Der Sequenzenkalkül wurde von Gentzen u.a. deshalb eingeführt, um die sogenannte „Schnittelimination“ zu zeigen: Die ursprünglich vorhandene *Schnittregel* $\dfrac{\begin{array}{l}\Phi_1 \vdash_{S_2} \Psi_1, \varphi\\ \Phi_2, \varphi \vdash_{S_2} \Psi_2\end{array}}{\Phi_1, \Phi_2 \vdash_{S_2} \Psi_1, \Psi_2}$ kann man aus den andern ableiten. Damit zeigt man, daß jede Ableitung $T \vdash \varphi$ so geführt werden kann, daß man keine andern Formeln benötigt als diejenigen, die in T und φ (eventuell als Unterformeln) auftauchen.

Der Vollständigkeitssatz: Für jeden dieser Kalküle (bzw. auch Varianten davon) kann man die Korrektheit und die Vollständigkeit beweisen. Dies wird dann *Vollständigkeitssatz* für dieses Kalkül genannt. das heißt, man zeigt daß $T \models \varphi$ dann und nur dann gilt, wenn in dem entsprechenden Kalkül $T \vdash \varphi$ ableitbar ist.

Dies beweist man dadurch, daß man jeweils zeigt, daß eine widerspruchsfreie Theorie ein Modell besitzt. Dazu hat Henkin eine elegante Methode entwickelt: Man erweitert zunächst die Sprache um viele Konstanten, wobei man jedesmal, wenn eine Existenzaussage gilt, eine Konstante für ein Element, welches diese Existenzaussage erfüllt, hinzunimmt, und zeigt dann, daß man die Terme als Individuen eines Modells nehmen kann. Hierbei wird die Syntax gewissermaßen durch sich selbst interpretiert.

Da in einer Ableitung in einem dieser Kalküle immer nur endlich viele Formeln auftreten, ergibt sich als Folgerung aus den Vollständigkeitssätzen der sogenannte Kompaktheitssatz: Wenn ein Satz φ aus einer Theorie T logisch folgt, dann folgt er schon aus endlich vielen Axiomen von

T. Anders ausgedrückt: Wenn eine Theorie inkonsistent ist, dann liegt das schon an endlich vielen Axiomen. Nochmals anders formuliert: Wenn jeweils endlich viele Axiome einer Theorie ein Modell haben, dann hat auch die gesamte Theorie ein Modell.

Nach dem Beweis des Vollständigkeitssatzes braucht man zwischen den beiden Zeichen $\models$ und $\vdash$ nicht mehr zu unterscheiden.

3.7 Die Unvollständigkeitssätze der Prädikatenlogik

Arithmetik: Sei $\mathcal{L}_N$ die prädikatenlogische Sprache mit einem Konstantenzeichen c_0, einem einstelligen Funktionszeichen S, den beiden zweistelligen Funktionszeichen f_+ und $f_\times$, sowie einem zweistelligen Relationszeichen $R_<$. Die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ bilden eine $\mathcal{L}_N$-Struktur $\mathfrak{N}$, wenn man c_0 durch die Zahl 0, f_+ und $f_\times$ durch Addition und Multiplikation, $R_<$ durch $<$ und S durch die Nachfolgerfunktion (*successor*) $+1$ interpretiert.[9]

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz wird zeigen, daß man die *Theorie von* $\mathfrak{N}$, das sind alle in $\mathfrak{N}$ gültigen $\mathcal{L}_N$-Sätze, nicht beschreiben, und also auch nicht wirklich kennen kann. (Ein Beispiel eines Satzes, von dem man (noch?) nicht weiß, ob er in $\mathfrak{N}$ gilt, ist die *Goldbachsche Vermutung*, daß jede gerade Zahl größer als zwei sich als Summe von zwei Primzahlen schreiben lasse. Als Übung kann man sich überlegen, wie man dies als $\mathcal{L}_N$-Satz schreiben kann.)

Axiomensysteme: Sätze, welche man in $\mathfrak{N}$ als gültig erachtet, kann man zu (unvollständigen) Axiomensystemen zusammenfassen. Einem kleinen solchen System, meist Q genannt, liegt das schrittweise Verständnis von Addition, Multiplikation und Ordnung zugrunde:

$$\begin{array}{ll}
\forall x\ f_+(x, c_0) = x & \forall x \forall y\ f_+(x, S(y)) = S(f_+(x, y)) \\
\forall x\ f_\times(x, c_0) = c_0 & \forall x \forall y\ f_\times(x, S(y)) = f_+(f_\times(x, y), x) \\
\forall x\ \neg R_< x c_0 & \forall x \forall y\ (R_< x S(y) \leftrightarrow (x = y \vee R_< x y))
\end{array}$$

Und des besseren Verständnisses wegen das Ganze nochmals in $\mathfrak{N}$ interpretiert, d.h. in der üblichen Schreibweise. Für alle Zahlen x und y gilt:

$$\begin{array}{ll}
x + 0 = x & x + (y + 1) = (x + y) + 1 \\
x \cdot 0 = 0 & x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x \\
x \not< 0 & (x < y + 1 \leftrightarrow (x = y \vee x < y))
\end{array}$$

Das Axiomensystem der *Peano–Arithmetik* PA besteht aus den Axiomen von Q zusammen mit dem *Induktionsschema*, das ist für jede $\mathcal{L}_N$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ das Axiom

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Big(\big(\varphi(x_1 \ldots x_n, c_0) \wedge \forall y \big(\varphi(x_1 \ldots x_n, y) \rightarrow \varphi(x_1 \ldots x_n, S(y)) \big) \big) \rightarrow \forall y \varphi(x_1 \ldots x_n, y) \Big)$$

d.h. wenn eine durch eine Formel beschriebene Eigenschaft auf 0 zutrifft und jedesmal, wenn sie für eine Zahl gilt, auch für deren Nachfolger gilt, dann trifft sie auf alle Zahlen zu.

Anmerkung (1) In jedem Modell $\mathfrak{M}$ von Q gibt es die Zahlen $c_0^{\mathfrak{M}}$, $S^{\mathfrak{M}}(c_0^{\mathfrak{M}})$, $S^{\mathfrak{M}}(S^{\mathfrak{M}}(c_0^{\mathfrak{M}}))$ usw., die ich wie üblich $0, 1, 2, \ldots$ nennen werde. Aber kein noch so starkes Axiomensystem der Prädikatenlogik erster Stufe, also auch PA nicht, könnte gewährleisten, daß ein Modell nur aus diesen Zahlen besteht und nicht noch aus irgendwelchen „unendlich großen“ Objekten. Dies kann man erst in der Prädikatenlogik zweiter Stufe erreichen, in der man nicht nur über Elemente, sondern auch über Relationen quantifizieren darf. Dann kann man das Induktionsschema ersetzen durch das Induktionsaxiom

$$\forall X \Big(\big(X(0) \wedge \forall y \big(X(y) \rightarrow X(S(y)) \big) \big) \rightarrow \forall y X(y) \Big).$$

(2) Q hat gegenüber PA zwei Vorteile: Zum einen besteht es nur aus endlich vielen Axiomen; zum andern sind es gewissermaßen die völlig unstrittigen Eigenschaften natürlicher Zahlen.

[9] Die Nachfolgerfunktion wirkt zunächst künstlich, aber sie wird bei den Axiomen Q praktisch sein; außerdem entspricht sie dem sehr grundlegenden „eins weiter Zählen“.

Das Induktionsprinzip ist dagegen philosophisch problematischer, weil es den Übergang vom potentiell zum aktual Unendlichen festschreibt. PA ist natürlich deutlich aussagekräftiger als Q; allerdings reicht Q aus, um mit den natürlichen Zahlen wie gewohnt rechnen zu können.

Im Folgenden wird es nun immer um Theorien gehen, welche entweder eine Erweiterung von Q darstellen, oder in welchen es möglich ist, so etwas wie natürliche Zahlen zu definieren, welche sich gemäß Q verhalten.[10]

Gödelisierung: Jedem der logischen Zeichen und der nicht-logischen Zeichen (abhängig von der Sprache) sowie unendlich vielen Individuenvarialen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ werden der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3 \ldots$ zugeordnet. Man kann sich natürlich auf ein vollständiges Junktoren– und Quantorensystem beschränken. Also etwa für $\mathcal{L}_N$:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \neg & \wedge & \exists & = & (&) & c_0 & S & f_+ & f_\times & R_< & v_0 & v_1 & v_2 & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \ldots \end{array}$$

Jeder Zeichenfolge, also insbesondere jedem Term, jeder Formel und jeder Folge von Formeln, wird nun zunächst die Folge der zugehörigen Zahlen zugeordnet, also etwa der Formel $\exists v_1 S(v_1) = c_0$ die Folge $(3, 13, 8, 5, 13, 6, 4, 7)$. Nun kann man einer Folge von Zahlen selbst wieder eine Zahl zuordnen, und zwar so, daß man aus dieser Zahl die Folge zurückgewinnen kann. Eine Möglichkeit besteht darin, die Zahl $2^3 \cdot 3^{13} \cdot 5^8 \cdot 7^5 \cdot 11^{13} \cdot 13^6 \cdot 17^4 \cdot 19^7$ zu nehmen (was wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung funktioniert). Diese Zahl heißt dann der *Code* oder die *Gödelnummer* der Formel φ und wird mit $\ulcorner\varphi\urcorner$ bezeichnet.

Wichtig ist, daß man dies so machen kann, daß man mit den Axiomen Q vieles, was man üblicherweise mit Worten ausdrücken kann, auch aus den Codes ausrechnen kann. Zum Beispiel gibt es eine $\mathcal{L}_N$-Formel $\varphi(v)$, welche genau dann von einer natürlichen Zahl erfüllt wird, wenn sie Code einer Formel ist.[11]

Anderes Beispiel: Es gibt eine $\mathcal{L}_N$-Formel $\psi(v, w)$, welche auf zwei Zahlen genau dann zutrifft, wenn die erste Code einer Variablen ist, welche frei in der Formel auftrifft, von der die zweite Zahl der Code ist.

Drittes Beispiel: Es gibt eine Formel $\mathrm{Bew}(v)$, welche auf eine Zahl genau dann zutrifft, wenn diese Zahl eine Folge von $\mathcal{L}_N$-Sätzen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ kodiert, wobei jede Formel aus den vorhergehenden durch eine Regel z.B. des Sequenzenkalküls hervorgeht. Einer der entscheidenden Punkte im Zusammenhang mit den Unvollständigkeitssätzen ist die Frage, wie kompliziert bzw. berechenbar diese Formel ist.

Wir nennen eine Theorie, bei der all dies möglich ist, eine *Theorie mit Gödelisierung*. Es ist nicht einfach, eine Gödelisierung in Q durchzuführen. Nachzuprüfen, daß es die oben erwähnten Formeln dann gibt, ist eine etwas langwierige und technische Angelegenheit.

Teilmengen natürlicher Zahlen: Eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist einfach eine (nicht unbedingt endliche) Auswahl natürlicher Zahlen: manche gehören zu der Teilmenge, andere nicht. Wir wollen vier Arten von Teilmengen betrachten: Beliebige Teilmengen, beschreibbare Teilmengen, auflistbare Teilmengen und berechenbare Teilmengen.

- Einer beliebigen Teilmenge liegt die Vorstellung zugrunde, daß für alle Zahlen gleichzeitig gewußt wird, welche zu ihr gehören und welche nicht; sie ist also ein aktual unendliches Objekt. Man kann sich auch einen Dämon vorstellen, der über dieses Wissen verfügt; es kann aber nicht unbedingt auf eine endliche Art und Weise einem Menschen vermittelt werden.
- Eine *beschreibbare* Menge natürlicher Zahlen (mathematisch eine *arithmetische* oder *in $\mathcal{L}_N$ definierbare* Menge genannt), ist die Menge aller natürlichen Zahlen, welche eine durch eine $\mathcal{L}_N$-Formel beschriebene Eigenschaft erfüllen.

[10] Dies bedeutet, daß es für jede natürliche Zahl n einen Term τ_n gibt und definierbare Funktionen $+$ und $\cdot$ und eine definierbare Relation $<$, so daß die Theorie $\tau_{n+m} = \tau_n + \tau_m$, $\tau_{nm} = \tau_n \cdot \tau_m$ und $\forall x\, (x < \tau_n \leftrightarrow (x = \tau_0 \vee x = \tau_1 \vee \cdots \vee x = \tau_{n-1}))$ beweist.

[11] Achtung: In einem „Nicht-Standardmodell“ von Q (das also größer als $\mathfrak{N}$ ist), gibt es „unendlich große“ Zahlen, von denen die Theorie glaubt, sie wären Codes von Formeln, ohne daß sie es sind.

- Eine *auflistbare* Menge natürlicher Zahlen (mathematisch eine *rekursiv aufzählbare* Menge genannt) ist eine Teilmenge, für die eine Maschine (z.B. ein Computerprogramm) nach und nach alle zu der Teilmenge gehörigen Zahlen ausgeben kann (wichtig: nicht unbedingt in der richtigen Reihenfolge!).
- Eine *berechenbare* oder *entscheidbare* Menge natürlicher Zahlen (mathematisch eine *rekursive* Menge genannt) ist eine Teilmenge, für die eine Maschine entscheiden kann, ob eine Zahl dazu gehört oder nicht (das ist das Gleiche, wie die zu der Teilmenge gehörenden Zahlen in der richtigen Reihenfolge ausgeben zu können).
  Eine Menge M ist dann berechenbar, wenn sowohl sie selbst als auch die zu ihr komplementäre Menge (die aus allen Zahlen besteht, die nicht in M liegen) auflistbar sind: Denn dann kann eine Maschine abwechselnd die Zahlen in M und in der dazu komplementären Menge ausgeben. Will man für eine Zahl entscheiden, ob sie in M liegt, wartet man einfach so lange, bis sie auf einer der beiden Listen auftaucht.

Cantors Diagonalargument zeigt, daß es „mehr“ Teilmengen natürlicher Zahlen als natürliche Zahlen selbst gibt; genauer: Für jede auch unendlich lange Auflistung $M_1, M_2, M_3, \ldots$ von Teilmengen gibt es (mindestens) eine Teilmenge natürlicher Zahlen, die darin nicht vorkommt. Und zwar wird diese Teilmenge D wie folgt konstruiert:

1 gehört zu D dann und nur dann, wenn 1 nicht zu M_1 gehört.
2 gehört zu D dann und nur dann, wenn 2 nicht zu M_2 gehört.
3 gehört zu D dann und nur dann, wenn 3 nicht zu M_3 gehört.
usw.

Dann kann D mit keiner der vorgegebenen Teilmengen übereinstimmen, denn D und die k-te Teilmenge M_k unterscheiden sich bei der Zahl k.

Das Argument zeigt dann auch, daß es sehr viele Teilmengen gibt, die nicht in der Liste auftauchen, denn man könnte ja D in die Liste aufnehmen, und würde dann wieder eine neue Teilmenge konstruieren können. (Tatsächlich gibt es „sehr viel mehr“ Teilmengen, die in einer Liste nicht auftauchen. Problematisch an dem Argument ist lediglich die Annahme, daß sowohl die Teilmengen als auch die Liste als aktual unendliche Objekte gegeben sind.)

„Wenige beschreibbare Mengen“: Dagegen gibt es nicht mehr beschreibbare Teilmengen natürlicher Zahlen als natürliche Zahlen selbst: man kann nämlich alle Beschreibungen, das heißt alle $\mathcal{L}_N$-Formeln, zum Beispiel der Länge nach anordnen. Es gibt also sehr viel mehr beliebige Teilmengen als beschreibbare Teilmengen.

Plausibel ist auch, daß nicht jede beschreibbare Menge auflistbar ist: Wenn in der Formel Allquantoren auftauchen, muß man gegebenenfalls schon unendlich viele Rechnungen ausführen, um für eine einzige Zahl herauszubekommen, ob sie in der Menge liegt. Eine Maschine würde also mit den Berechnungen bereits für eine Zahl niemals fertig werden. Später wird es „konkretere“ Beispiele geben.

„Berechenbarkeit“: Die Begriffe „auflistbare“ und „berechenbare Menge“ sind zunächst vage. Es hat sich aber im Laufe der Zeit herausgestellt, daß alle bisher vorgeschlagenen hinreichend starken Maschinenmodelle und Berechbarkeitsbegriffe äquivalent sind. Danach ist eine Menge natürlicher Zahlen genau dann auflistbar, wenn sie durch eine Σ_1-Formel beschreibbar ist. Σ_1-Formeln entstehen aus quantorenfreien $\mathcal{L}_N$-Formeln durch $\wedge$, $\vee$, Existenzquantoren und sogenannte *beschränkte Allquantoren* $\forall x < n$. Und folglich ist eine Menge genau dann berechenbar, wenn sowohl sie selbst als auch ihr Komplement durch Σ_1-Formeln beschreibbar sind. Als *Churchsche These* ist das (nicht beweisbare) Postulat bekannt, daß es keinen sinnvollen stärkeren Berechenbarkeitsbegriff gibt.

Wieder Cantors Diagonalargument: Wenn man glaubt, was im Abschnitt über Gödelisierung steht, sollte man auch glauben, daß es eine Formel $U(v, w)$ gibt, welche für Zahlen n und m dann und nur dann zutrifft, wenn m der Code einer Σ_1-Formel ist, welche eine Teilmenge der natürlichen Zahlen beschreibt, in der n liegt. Wenn man nun eine geschickte Gödelisierung wählt und genau hinsieht, stellt man fest, daß die Formel U selbst als Σ_1-Formel wählen kann. U ist damit eine *universelle rekursiv aufzählbare Relation*, d.h. $U(v, 0), U(v, 1), U(v, 2), \ldots$ gibt eine Auflistung sämtlicher auflistbarer Teilmengen natürlicher Zahlen! (Genauer: eine Auflistung der Beschreibungen aller auflistbaren Teilmengen natürlicher Zahlen.) Nun kann man wieder Cantors Diagonalargument anwenden: $\neg U(v,v)$ kann dann keine auflistbare Menge beschreiben, weil sie verschieden von jedem $U(v,n)$ sein muß. Also haben wir eine beschreibbare, nicht auflistbare Menge gefunden. Andererseits beschreibt $U(v,v)$ eine auflistbare Menge[12], die aber nicht berechenbar ist, weil ihr Komplement, daß ja durch $\neg U(v,v)$ beschrieben ist, nicht auflistbar ist.

Anmerkung: Man ist vielleicht versucht, das Voranstehende mit allen Formeln statt mit allen Σ_1-Formeln durchzuführen, also eine Formel $U'(v,w)$ zu finden, so daß $U'(v,0)$, $U'(v,1)$, $U'(v,2),\dots$ eine Auflistung sämtlicher beschreibbarer Teilmengen natürlicher Zahlen ergibt. Cantors Diagonalargument zeigt aber sofort, daß dies nicht gehen kann, denn dann würde $\neg U'(v,v)$ eine Menge von Zahlen beschreiben, die in der Liste aller beschreibbarer Mengen aber nicht auftauchen könnte! Dies liegt daran, daß man die Eigenschaft, daß φ in $\mathbb{N}$ gilt, für eine beliebige Formel φ nicht aus den Zahlen $\ulcorner\varphi\urcorner$ und n ausrechnen kann. Man muß also bei der Gödelisierung genau hinsehen, was auszudrücken möglich ist und was nicht.

Entscheidbare Theorien: Eine Theorie mit Gödelisierung (also zum Beispiel eine, die Q enthält) heißt *axiomatisierbar*, wenn die Menge der Gödelnummern der Axiome von T auflistbar ist, *arithmetisch*, wenn die Menge der Gödelnummern der Axiome von T beschreibbar ist, und *entscheidbar*, wenn die Menge der Gödelnummern aller Sätze, die aus T logisch folgen, berechenbar ist.

Wieder kann man durch geschicktes Gödelisieren und genaue Analyse sehen, daß man die Formel $\mathrm{Bew}(v)$ von oben als Σ_1-Formel wählen kann (das ist wiederum nicht einfach). Dann folgt, daß die Menge der Gödelnummern aller allgemeingültigen Sätze auflistbar ist. Intuitiv folgt das aus dem Vollständigkeitssatz: Ein vollständiger Kalkül erlaubt es, nach und nach alle allgemeingültigen Sätze zu „produzieren“. Auf Grundlage der Churchschen These ist dies also ein anderes Argument dafür. Die Menge der Gödelnummern aller allgemeingültigen Sätze ist aber im allgemeinen nicht berechenbar!

Ähnlich sieht man, daß es für axiomatisierbare Theorien eine Σ_1-Formel $\mathrm{Bew}_T(v)$ gibt, welche die Gödelnummern von Sätzen beschreibt, welche aus T folgen. Auch diese Menge ist also auflistbar.

Der erste Gödelschen Unvollständigkeitssatz sagt (in einer seiner vielen Versionen) aus, daß eine axiomatisierbare Theorie mit Gödelisierung unvollständig ist. Dabei heißt eine Theorie *vollständig*, wenn für jeden Satz φ der Sprache entweder φ oder $\neg\varphi$ aus der Theorie folgt. Eine unvollständige Theorie entscheidet also nicht für jeden Satz, ob er aus ihr folgt oder nicht.[13] Umgekehrt ausgedrückt sagt der Unvollständigkeitssatz also z.B., daß die vollständige Theorie der natürlichen Zahlen, also alle Sätze, die in $\mathfrak{N}$ gelten, nicht axiomatisierbar ist. Es gilt sogar, daß sie nicht einmal beschreibbar ist, sogar, daß jede arithmetische Teiltheorie der Theorie von $\mathfrak{N}$ unvollständig ist.

In eine ähnliche Richtung geht das Ergebnis, daß Q und jede ihre Erweiterungen unentscheidbar ist. Daraus folgt dann auch, daß sie Prädiaktenlogik insgesamt unentscheidbar ist. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß die Menge der Gödelnummern der allgemeingültigen Sätze ein weiteres Beispiel einer auflistbaren, aber nicht berechenbaren Menge bildet.

Es gibt allerdings axiomatisierbare Theorien, die vollständig sind. Diese sind dann automatisch entscheidbar[14], aber zu ausdrucksarm, um Gödelisierung zu erlauben.

[12] Da $U(v,w)$ eine Σ_1-Formel ist, auch $U(v,v)$. Oder man läßt eine Maschine laufen, welche „diagonal“ durch alle Maschinen für die $U(v,n)$ läuft; d.h. man gibt eine erste Zahl in der durch $U(v,0)$ beschriebenen Menge aus, dann eine erste in der durch $U(v,1)$ beschriebenen und eine zweite der durch $U(v,0)$ beschriebenen Menge, dann eine erste in der durch $U(v,2)$, eine zweite in der durch $U(v,1)$ und eine dritte in der durch $U(v,0)$ beschriebenen Menge, usw. So erhält man eine Auflistung aller auflistbaren Mengen gleichzeitig, und muß dann nur noch alle nicht zu $U(v,v)$ gehörenden Zahlen weglassen.

[13] Gödels Vollständgkeitssatz spricht über die Vollständigkeit eines Kalküls; Gödels Unvollständigkeitssätze über die Unvollständigkeit von Theorien!

[14] Man kann die Menge der Gödelnummern von Sätzen, welche aus T folgen, auflisten. Da T vollständig ist, wird für jeden Satz φ irgendwann entweder die Gödelnummer von φ oder die von $\neg\varphi$ in der Liste auftauchen.

Im Folgenden sei nun T stets eine Theorie mit Gödelisierung.

Der Fixpunktsatz: *Zu jeder Formel $\psi(v)$ gibt es einen Fixpunkt, das ist ein Satz φ mit der Eigenschaft*

$$T \vdash \big(\varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)\big)$$

Dies bedeutet, daß der Satz φ gewissermaßen aussagt, daß die Eigenschaft ψ auf ihn zutrifft!

Beweis: Es gibt eine Formel $\sigma(x, y, z)$, welche die Einsetzung einer Zahl in eine Formel beschreibt, das heißt es gilt $\mathfrak{N} \models \sigma(\ulcorner\chi\urcorner, n, \ulcorner\chi(n)\urcorner)$ für jede Zahl n und jede Formel χ in einer freien Variablen, und für keine anderen Zahlentripel gilt σ.

$\varrho(v)$ sei nun die Formel $\exists w\big(\psi(w) \wedge \sigma(v, v, w)\big)$, das heißt ϱ drückt die Eigenschaft eines Individuums, daß es in sich selbst eingesetzt (genauer in die Formel, dessen Gödelnummer es ist), die Eigenschaft ψ hat. Und nun stellt sich heraus, daß $\varrho(\ulcorner\varrho\urcorner)$ mysteriöserweise es tut, denn

$$T \vdash \big(\varrho(\ulcorner\chi\urcorner) \leftrightarrow \psi(\ulcorner\chi(\ulcorner\chi\urcorner)\urcorner\big) \quad \text{also} \quad T \vdash \big(\varrho(\ulcorner\varrho\urcorner) \leftrightarrow \psi(\ulcorner\varrho(\ulcorner\varrho\urcorner)\urcorner\big)$$

„Mysteriöserweise“, denn ein eigentliches Verständnis dieses Phänomens zu erlangen, scheint unmöglich. Der Versuch, es sprachlich zu formulieren, ergibt für die linke Seite des $\leftrightarrow$: „‚In sich selbst eingesetzt ergibt sich die Eigenschaft ψ‘ hat, in sich selbst eingesetzt, die Eigenschaft ψ“, und die rechte Seite sagt aus, daß die Eigenschaft ψ auf das Ganze zutrifft. Und beides ist irgendwie gleichwertig!

Tarskis Satz: *Es gibt kein Wahrheitsprädikat für T, das heißt keine Formel $W(v)$ mit der Eigenschaft*

$$T \vdash \big(\varphi \leftrightarrow W(\ulcorner\varphi\urcorner)\big)$$

Insbesondere ist die vollständige Theorie von $\mathfrak{N}$ nicht beschreibbar.

Beweis: Ein Fixpunkt φ für $\neg W$ zeigt gerade, daß W kein Wahrheitsprädikat sein kann.

Eine ausdrucksstarke Theorie (also eine mit Gödelisierung) kann also nicht „selbst wissen“, was aus ihr beweisbar ist.

Gödels erster Unvollständigkeitssatz: *Wenn T beschreibbar ist, dann ist T unvollständig.*

Beweis: (T sei hier eine Teiltheorie der Theorie von $\mathfrak{N}$.) Falls T beschreibbar ist, dann gibt es eine Formel[15] $\mathrm{Bew}_T(v)$, welche auf eine Gödelnummer genau dann zutrifft, wenn sie einen aus T beweisbaren Satz kodiert. Das funktioniert wie oben: Man kodiert eine Folge von Formeln, welche jeweils aus den vorangehenden durch eine Regel des Sequenzenkalküls hervorgehen, oder eines der Axiome von T sind (und dazu braucht man die Beschreibbarkeit von T). Das heißt, man hat

$$T \vdash \varphi \iff \mathfrak{N} \models \mathrm{Bew}_T(\ulcorner\varphi\urcorner).$$

Sei φ ein Fixpunkt von $\neg\mathrm{Bew}_T$, das heißt

$$T \vdash \big(\varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{Bew}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\big).$$

Natürlich gilt dies dann erst recht in $\mathfrak{N}$. Also haben wir

$$\mathfrak{N} \models \varphi \iff \mathfrak{N} \models \neg\mathrm{Bew}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \iff T \nvdash \varphi.$$

Da T aber eine Teiltheorie von $\mathfrak{N}$ ist, ist der Fall $T \vdash \varphi$ und $\mathfrak{N} \not\models \varphi$, das heißt $\mathfrak{N} \models \neg\varphi$, ausgeschlossen! Somit gilt $\mathfrak{N} \models \varphi$ und $T \nvdash \varphi$, also ist φ ein wahrer, aber in T nicht beweisbarer Satz.

(Gödel hatte seinen Unvollständigkeitssatz zunächst in einem etwas anderen Kontext bewiesen. Rosser war dann der erste, der konkret einen weder beweisbaren noch widerlegbaren Satz angegeben hat. Dies ist ebenfalls ein Fixpunkt für eine etwas kompliziertere Eigenschaft, die im wesentlichen etwas sagt wie: „für jede Zahl, die Gödelnummer eines Beweises von R ist, gibt es eine kleinere Zahl, welche Gödelnummer eines Beweises von $\neg R$ ist.“)

[15] Falls T axiomatisierbar ist, so kann man sogar eine Σ_1-Formel wählen.

Unentscheidbarkeit des Prädikatenkalküls: Es gilt zunächst: *Q ist unentscheidbar.*

Zum Beweis zeigt man, daß alle rekursiv aufzählbaren Mengen schon in Q definierbar sind. Wenn also $\psi(v)$ eine Σ_1-Formel ist, die somit eine auflistbare Menge beschreibt, dann gilt $\mathfrak{N} \models \psi(n)$ genau dann, wenn $Q \vdash \psi(n)$. Wäre Q entscheidbar, könnte man auch jede auflistbare Menge berechnen. Dies ist aber nicht der Fall, wie wir gesehen haben.

Der Beweis funktioniert erst recht für Erweiterungen von Q, man hat also sogar: *Jede Teiltheorie der Theorie von $\mathfrak{N}$, welche Q enthält, ist unentscheidbar.*

Da Q aus endlich vielen Axiomen besteht, kann man sie alle in einem Satz ξ zusammenfassen. Wäre der Prädiaktenkalkül insgesant entscheidbar, könnte man auch alle Sätze der Form $(\xi \to \varphi)$ entscheiden, und damit Q. Also bilden auch die allgemeingültigen Sätze (in einer hinreichend umfangreichen Sprache)[16] keine entscheidbare Menge.

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz: Hierzu muß man in beschreibbaren Erweiterungen T der Peano–Arithmetik arbeiten. Dann kann man zeigen, daß das Beweisbarkeitsprädikat Bew_T die folgenden *Löb–Axiome* erfüllt:

- Falls $T \vdash \varphi$, so $T \vdash \mathrm{Bew_T}(\ulcorner\varphi\urcorner)$.[17]
- $T \vdash \big(\mathrm{Bew_T}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Bew_T}(\ulcorner\mathrm{Bew_T}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)\big)$.
- $T \vdash \Big(\big(\mathrm{Bew_T}(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathrm{Bew_T}(\ulcorner(\varphi \to \psi)\urcorner)\big) \to \mathrm{Bew_T}(\ulcorner\psi\urcorner)\Big)$.

Wenn man Bew_T als $\Box$ schreibt, kann man das rein modallogisch modellieren. Also: Wenn $T \vdash \varphi$, so $T \vdash \Box\varphi$, und in T gelten die Axiome $(\Box\varphi \to \Box\Box\varphi)$ und $((\Box\varphi \wedge \Box(\varphi \to \psi)) \to \Box\psi)$.)

Man betrachtet nun die Formel $\neg\mathrm{Bew}_T(\ulcorner\bot\urcorner)$, die auch Kon_T geschrieben wird, weil sie die Konsistenz der Theorie T ausdrückt. Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz besagt nun:

Falls T konsistent ist, dann ist Kon_T *in T nicht beweisbar.*

Der Beweis erfolgt rein formal aus den Löb–Axiomen; man zeigt, daß Kon_T ein Fixpunkt von $\neg\mathrm{Bew}_T$ ist, und sogar, daß jeder Fixpunkt zu Kon_T äquivalent ist. Also gilt

$$T \vdash \big(\mathrm{Kon}_T \leftrightarrow \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\mathrm{Kon}_T\urcorner)\big)$$

T kann seine eigene Konsistenz also nur dann beweisen, wenn T inkonsistent ist!

Man kann aber nicht zeigen, daß Kon_T nicht widerlegbar ist, denn das würde dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz für die Theorie T^+, die aus T und Kon_T besteht, widersprechen. Es ist also denkbar, daß $T \vdash \neg\mathrm{Kon}_T$ gilt: Dies gehört zu den Merkwürdigkeiten, die zu Gödelschen Knoten im Gehirn führen.

Schließlich ist der Vollständigkeit halber noch der *Satz von Löb* zu erwähnen, der auch zum Gödelschen Umfeld gehört: Hier werden Fixpunkte des Beweisbarkeitsprädikats betrachtet

$$T \vdash \big(\varphi \leftrightarrow \mathrm{Bew}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\big)$$

Der Satz von Löb sagt nun aus, daß diese Fixpunkte stets beweisbar sind, genauer sogar

$$T \vdash \big(\mathrm{Bew}_T(\ulcorner(\mathrm{Bew}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi)\urcorner) \to \mathrm{Bew}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\big)$$

oder in der etwas übersichtlicheren modallogischen Version: $T \vdash (\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi)$.

Literatur

- George Boolos *The unprovability of consistency : an essay in modal logic*, Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

[16] Wenn die Sprache nur Konstantenzeichen und einstellige Relationszeichen enthält, sind die allgemeingültigen Formeln noch entscheidbar. Aber bereits mit einem zweistelligen Relationssymbol tritt die Unentscheidbarkeit ein.

[17] Wichtig (wenn auch intuitiv nicht nachzuvollziehen) ist, daß die Umkehrung des ersten Löb-Axioms nicht gilt, also daß man aus $T \vdash \mathrm{Bew_T}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ nicht $T \vdash \varphi$ folgern darf. Man glaubt zwar, daß es wahr ist (also in $\mathfrak{N}$ gilt), aber um es beweisen zu können, bräuchte man die Korrektheit des durch Bew beschriebenen Beweisbarkeitsbegriffs, was selbst wieder ein äußerst starkes Axiom wäre.

- Torkel Franzén *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to its Use and Abuse*, Wellesley, Massachusetts: A K Peters, 2005.
- Ernest Nagel, James Newman *Der Gödelsche Beweis*, 5.. Auflage, München: Oldenbourg, 1992.
- Raymond Smullyan *Gödel's incompleteness theorems*, Oxford: Oxford Univ. Press, 1992.
- Raymond Smullyan *Forever undecided : a puzzle guide to Gödel*, Oxford: Oxford University Press, 1988.
  deutsch: *Logik-Ritter und andere Schurken*, Frankfurt am Main: Krüger, 1989.
- Martin Ziegler *Vorlesung über mathematische Logik*, Skript, Universität Freiburg.
  `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/Skripte.html`