(Logische) Paradoxien

Freiburger Ein-Tages-Akademie

Markus Junker

Mathematisches Institut
Abteilung für Mathematische Logik
Universität Freiburg

Samstag, 16. Juni 2012

Vier bekannte antike Paradoxien

- **„Achilleus und die Schildkröte"**

  Obwohl um ein Mehrfaches schneller, holt Achilleus den Vorsprung der Schildkröte nicht ein.
  → heute problemlos auflösbar (Kontinuum/Unendlichkeit)

- **Zenons Paradox des fliegenden Pfeils**

  Der Pfeil bewegt sich, obwohl er in jedem einzelnen Augenblick ruht.
  → Frage nach dem physikalischen Verständnis der Welt

- **„Der Lügner"**

  Ein Kreter behauptet, dass alle Kreter lügen.
  → verbirgt eine echte Antinomie

- **Sokrates**: „Ich weiß, dass ich nichts weiß."
  → rhetorisches Paradoxon

Zur Wortklärung

Einzal: ein Paradox(on) – eine Paradoxie
Mehrzahl: Paradoxa – Paradoxien

- vom griechischen παράδοξον:
  - παρά gegen, wider
  - δόξα Meinung, Ansicht, Erwartung
- Bedeutung: scheinbarer oder tatsächlicher Widerspruch; umgangssprachlich: „*paradox*“ auch für „*absurd*“ oder „*einer naheliegenden Erwartung widersprechend*“
- Begriffe aus dem Umkreis:
  - Antinomie („gegen das Gesetz“)
  - Aporie („Ausweglosigkeit“)
  - Kontradiktion, Widerspruch
  - Trugschluss

Quine: The Ways of Paradox

Paradoxon: "produces a self-contradiction by accepted ways of reasoning". (Eine schlüssige Argumentation, deren Konklusion falsch oder absurd erscheint.)

Quine unterscheidet drei Arten von Paradoxa:

- Die Konklusion ist wahr.
  Auflösung des Paradoxons besteht in einer Erklärung, warum die Konklusion trotz scheinbaren Widerspruchs wahr ist.
- Die Argumentation ist falsch.
  Auflösung des Paradoxons besteht in der Aufdeckung des Fehlers in der Argumentation.
- Es ist eine echte Antinomie,
  die nicht ohne weiteres aufgelöst werden kann
  (und damit überkommene Vorstellungen in Frage stellt).

Paradoxa als rhetorische Figur werden nicht betrachtet!

Andere Sichtweise

Die Welt ist widerspruchsfrei. Paradoxa entstehen durch unseren Blick auf die Welt, durch unsere Vorstellungen, die als „Modelle“ nur unzureichend die Welt wiedergeben können.

Beispiel: die mathematisch-physikalischen Modelle einer stetigen/ kontinuierlichen oder einer diskreten/gequantelten Raum-Zeit, welche den Paradoxien von Zenon zugrunde liegen.

Sprache kann auch als ein Modell angesehen werden (für das Denken).

Man kann mit Quine („Two Dogmas of Empiricism“) auch anders argumentieren:

Quine bestreitet die übliche Unterscheidung zwischen synthetischen und analytischen Wahrheiten, und lässt einen fließenden Übergang zu von Aussagen, die man früher als falsch akzeptiert, zu Aussagen, an deren Wahrheit man länger festhalten würde.

Gegenthese zu Quine: Es gibt einen fließenden Übergang vom umgangssprachlichen „paradox“, das lediglich eine Unwahrscheinlichkeit oder ein „wider Erwarten“ beschreibt, hin zu den „echten Antinomien“ wie dem Lügner-Paradoxon.

Ein Zoo von Paradoxien: Scheinparadoxien I

Fließender Übergang vom Umgangssprachlichen „wider Erwartung“ zu schwierigeren „Rätseln“:

- Manche empfinden es als „logisch“, dass beim Fussball eine Mannschaft mit der größeren Anzahl an Torchancen gewinnt, und als „paradox“, wenn sie verliert.

  Auflösung: „paradox“ heißt hier nur soviel wie „unwahrscheinlich“, „unplausibel“

- (Quine) In dem Stück „Die Piraten von Penzance“ hat man mit dem 21. Geburtstag die Piratenlehrzeit beendet. Nun ist Frederic, eine der Hauptpersonen, zwar schon 21 Jahre alt, hat aber erst seinen 5. Geburtstag hinter sich.

  Auflösung: Auch dies ist nur die Unwahrscheinlichkeit, am 29. Februar geboren zu sein.

Ein Zoo von Paradoxien: Scheinparadoxien II

- Die Spiegelparadoxie: Warum vertauscht ein Spiegel rechts und links, aber nicht oben und unten?

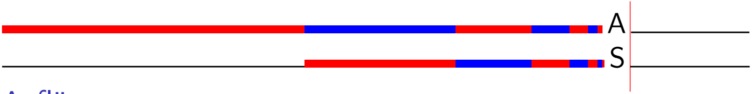
  Auflösung: Falsche Prämisse, denn der Spiegel vertauscht gar nicht rechts und links. Nur die Identifikation einer Person mit ihrem Spiegelbild durch eine gedankliche Drehung tut es.

Ein Zoo von Paradoxien: Achilleus und die Schildkröte

Wird Zenon von Elea zugeschrieben (auch „Zenon der Ältere“ genannt, ca. 490 v. Chr. bis 430 v. Chr.):

> *„Zenon erwies sich als trefflicher Mann wie in allen anderen Stücken, so auch besonders darin, daß er Höheren mit überlegenem Stolze begegnete in gleicher Art wie Heraklit. [. . .] Er hat auch die unter dem Namen ‚Achilles‘ bekannte Schlußfolge zuerst aufgebracht.“*[1]

Behauptung: Achilleus kann die Schildkröte nicht überholen.



Auflösung:

Falsche Schlussfolgerung: Unendlich viele, immer kleiner werdende Zeitintervalle können gegen einen festen Zeitpunkt konvergieren.

---

[1] Diogenes Laertios „Leben und Meinungen berühmter Philosophen“, IX 28/29, Meiner: Hamburg 2008.

Ein Zoo von Paradoxien: Paradoxien der Unendlichkeit

Eine unendliche Menge kann genauso groß wie eine echte Teilmenge sein:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \ldots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & \ldots \end{array}$$

Man kann sie sogar in zwei Mengen zerlegen, die beide gleich groß wie die Ausgangsmenge sind.

Auflösung: Falsche Erwartung; Eigenschaften, die man von endlichen Mengen kennt, gelten für unendliche Mengen nicht.

(Noch viel „schlimmer": das Banach-Tarski-Paradoxon (1924))

Ein Zoo von Paradoxien: Condorcets[2] Paradoxon

Fünf Freunde überlegen, ob sie abends lieber Fußball schauen, Eis essen oder das Seminar für den nächsten Tag vorbereiten.

Paradoxerweise würde jeweils eine Mehrheit von ihnen

- lieber Fußball schauen als das Seminar vorbereiten,
- lieber das Seminar vorbereiten als Eis essen gehen,
- lieber Eis essen gehen als Fußball zu schauen.

	Ansgar	Bernd	Claudius	Dieter	Ernst
Erstwunsch:	Fußball	Fußball	Eis	Eis	Seminar
Zweitwunsch:	Seminar	Seminar	Fußball	Seminar	Eis
Drittwunsch:	Eis	Eis	Seminar	Fußball	Fußball

Auflösung: Falsche Erwartung durch Übertragung von Eigenschaften individueller Entscheidungen auf Mehrheitsentscheidungen.

[2] Marquis de Condorcet 1743–1794

Ein Zoo von Paradoxien: Das Alabama-Paradoxon

Wie werden Parlamentssitze vergeben?
Eine Methode: Verteilung nach Hare-Niemeyer („größte Reste“).

Angenommen es gibt 100 Sitze und folgende Stimmabgaben:

Partei:	rot	gelb	grün	blau	Summe
Anteil:	40,7 %	33,4 %	5,5 %	20,4 %	100 %
Sitze:	40	33	5	20	98
	+1		+1		2

Erhöhung der Anzahl der Parlamentssitze auf 101:

Sitzanteil:	41,107	33,734	5,555	20,604	101
Sitze:	41	33	5	20	99
		+1		+1	2

(Dieses Phänomen ist 1880 in den USA bei der Verteilung der Kongresssitze auf die Bundesstaaten dem Staat Alabama passiert.)

Ein Zoo von Paradoxien: Hempels Raben-Paradoxon

Durch Beobachtung stellt man fest:

(*) Alle Raben sind schwarz.

Jedesmal, wenn man einen Raben beobachtet und feststellt, dass er schwarz ist, so ist dies also ein Beleg für die Gültigkeit der Aussage.

Nun ist aber die Aussage (*) logisch äquivalent zu der Aussage:

(**) Alles Nicht-Schwarze ist kein Rabe.

Jedesmal, wenn man etwas Nicht-Schwarzes (also etwas Grünes, etwas Rotes, etc.) beobachtet, ist dies ein Beleg für Aussage (**) und damit auch für Aussage (*).

Dies scheint absurd: Wie kann die Beobachtung eines grünes Apfels eine Bestätigung der Aussage sein, dass alle Raben schwarz sind?

Ein Zoo von Paradoxien: Hempels Raben-Paradoxon

Auflösung:

Wenn man überhaupt induktive Beweise zulässt, so stimmt die Konklusion. Da es allerdings viel weniger Raben als nicht-schwarze Objekte gibt, fällt der Beleg viel weniger ins Gewicht, so wenig, dass er inexistent scheint.

Bei anderen Zahlenverhältnissen verschwindet das Paradoxon:

(*) Alle Brillenträger hier im Raum sind Studienstiftler

ist logisch äquivalent zu

Alle Nicht-Studienstiftler hier im Raum tragen keine Brille.

Es ist plausibel, die Aussage (*) zu überprüfen, indem man die Nicht-Studienstiftler durchgeht!

Ein Zoo von Paradoxien: Das Berry-Paradoxon

Manche Zahlen lassen eine kurze Beschreibung (auf Deutsch) zu:

- dreihundertundvierzehn
- die Quadratzahl von acht
- die Anzahl der Personen jetzt in diesem Raum

Es gibt sicher nur endlich viele Beschreibungen mit weniger als zwanzig Wörtern, also auch nur endlich viele Zahlen, die sich mit weniger als zwanzig Wörtern beschreiben lassen. Also existiert

> *die kleinste ganze Zahl, die sich nicht durch höchstens zwanzig Wörter beschreiben lässt.*

Dies ist aber eine Beschreibung mit weniger als zwanzig Wörtern!

Ein Zoo von Paradoxien: Das Berry-Paradoxon

Auflösung:
Die Argumentation ist nicht sauber, da nicht genau definiert ist, was eine Beschreibung ist.

Die Definition

> *die kleinste ganze Zahl, die sich nicht durch höchstens zwanzig Wörter beschreiben lässt.*

nimmt Bezug auf alle möglichen Beschreibungen, zu der sie dazugehören soll („imprädikative Definition“).
Nicht alle imprädikative Definitionen sind problematisch, aber diese fügt einer imaginären Liste aller bisherigen Beschreibungen eine neue hinzu, d.h. die Definition verändert den Begriff.

Ein Zoo von Paradoxien: Paradoxien der materialen Implikation, z.B. Krivines Hut

In jeder beliebigen Personenmenge gibt es zu jedem Zeitpunkt einen „Hutführer“:

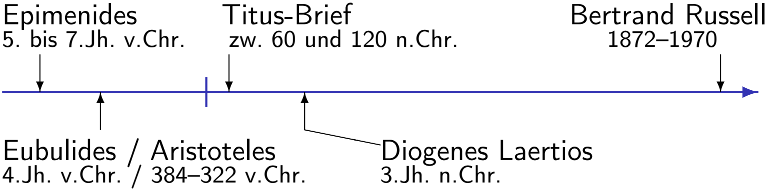
Falls der Hutführer einen Hut trägt, dann tragen alle einen Hut.

Auflösung: Mit „falls ... dann ...“ ist hier kein kausaler Zusammenhang bezeichnet, sondern eine logische Implikation im Sinne der klassischen Aussagenlogik. Das heißt, die Aussage wird wahr, wenn folgendes gilt:

Falls der Vordersatz „der Hutführer trägt einen Hut“ wahr ist, muss auch der Nachsatz „alle tragen einen Hut“ wahr sein (und wenn der Vordersatz falsch ist, ist es gleichgültig, was mit dem Nachsatz passiert).

Falls also alle einen Hut tragen, so ist jeder ein Hutführer; andernfalls ist jeder, der keinen Hut trägt, ein Hutführer.

„Der Lügner“



> *„Zu den Nachfolgern des Eukleides gehört auch der Milesier Eubulides, der viele dialektische Spitzfindigkeiten aufgebracht hat, wie den Lügner, den Betrüger, die Elektra, den Verhüllten, den Sorites (Gehäuften), den Gehörnten und den Kahlkopf.“*[3]

„Der Lügner“: ψευδόμενος (pseudomenos)

[3] Diogenes Laertios „Leben und Meinungen berühmter Philosophen“, II 108, Meiner: Hamburg 2008.

„Der Lügner“: Neues Testament

Brief an Titus:

„Dazu habe ich dich auf Kreta zurückgelassen: dass du alles, was noch zu tun ist, zu einem guten Ende bringst [. . .] Es gibt nämlich viele, die sich nicht unterordnen wollen, unnützes Zeug reden und die Leute betören [. . .] Das Maul sollte man ihnen stopfen, denn sie bringen ganze Familien durcheinander mit ihren ungehörigen Lehren, die sie um des schnöden Gewinnes willen verbreiten. Einer aus ihrem eigenen Kreis hat geradezu prophetisch gesagt: Kreter sind stets Lügner, wilde Tiere und faule Bäuche. Dieses Zeugnis ist wahr. Eben deshalb sollst du sie auf der Stelle widerlegen, damit sie im Glauben gesunden und sich nicht mehr kümmern um jüdische Mythen und Vorschriften von Leuten, die sich von der Wahrheit abwenden!“[4]

[4]Tit 1, 5a+10–14, Neue Zürcher 2007.

„Der Lügner“: Aristoteles

„Ähnlich ist auch die Rede, daß einer und derselbe gleichzeitig falsch und wahr sprechen könne, nur, weil hier nicht gut durchschaubar ist, was von beiden man dann angeben soll, entweder das zusatzlose die-Wahrheit-sagen oder das Falschreden, erscheint die Sache mißlich. Es hindert aber nichts die Annahme, daß er ohne Zusatz ein Falschredner ist, in dieser bestimmten Hinsicht und mit dieser einen Aussage aber einmal ehrlich, und (andersherum), daß er wahrhaftig ist mit bestimmten Aussagen, ohne Zusatz ist er es aber nicht.“

„Wer doch geschworen hat, einen Meineid leisten zu wollen, der leistet, wenn er dann den Meineid schwört, nur in diesem Punkte allein einen treuen Eid, aber er schwört nicht ohne Zusatz ehrlich; und auch wer jemandem nicht traut, vertraut nicht einfach so, sondern er tut es nur in einem bestimmten Punkt.“[5]

---

[5] Aristoteles, Sophistische Widerlegungen, 180a39-b7, Meiner: Hamburg 1997.

„Der Lügner“: Bertrand Russell

The oldest contradiction of the kind in question is the Epimenides. Epimenides the Cretan said that all Cretans were liars, and all other statements made by Cretans were certainly lies. Was this a lie? The simplest form of this contradiction is afforded by the man who says “I am lying;” if he is lying, he is speaking the truth, and vice versa.[6]

Warnung!

Grabspruch eines Logikers, Philetas von Kos (ca. 340–285 v. Chr.; überliefert aus dem 3.Jh. n. Chr.):

> *Wanderer, ich bin Philites, das Argument, das lügende, hat mich getötet, und das tiefe nächtliche Nachdenken [darüber].*[7]

[6]Bertrand Russell, Mathematical Logic as based on the Theory of Types. American Journal of Mathematics 30 (1908), pp. 222–262.

[7]Zitiert nach: Bochenski „Formale Logik“, Karl Alber: Freiburg 1956, § 23.

„Der Lügner“: Analyse

„Lügner“ muss jemanden bezeichnen, der stets die Unwahrheit sagt (sonst gibt es kein Paradox).

In der Russellschen Version

> *Epimenides der Kreter sagt, alle Kreter sind Lügner.*

gibt es auch noch kein Paradox. Die Aussage ist einfach falsch; es gibt Kreter, die ab und zu die Wahrheit sagen; allerdings nicht Epimenides mit dieser Aussage.

In der Paulus-Version

> *Einer aus ihrem eigenen Kreis hat [...] gesagt:*
> *Kreter sind stets Lügner [...] Dieses Zeugnis ist wahr.*

ergibt sich immerhin ein Widerspruch, wenn auch noch kein Paradox. (Der Satz „*Dieses Zeugnis ist wahr.*“ ist falsch.)

„Der Lügner“: Analyse

Paradox dagegen ist die Rekonstruktion des „Lügners“ von Eubulides (nach spätantiken Quellen) im folgenden Dialog:

- Wenn ich lügend sage, dass ich lüge, lüge ich oder sage ich Wahres?
- Du sagst Wahres.
- Wenn ich Wahres sage und sage, dass ich lüge, lüge ich?
- Du lügst offenbar.

Die kürzeste Fassung des Paradoxons steht bei Russell

> *I am lying.* *oder:* *Dieser Satz ist falsch.*

Diese Paradoxon ist nicht ohne Weiteres auflösbar, sondern zeigt die Grenzen der Sprache auf.

„Der Lügner“: Varianten

Russells Barbier ist jemand, der alle im Dorf rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert er sich selbst oder nicht?

Auflösung ist hier einfach die Schlussfolgerung, dass es einen solchen Barbier nicht geben kann.

(Mit Konsequenzen für die mathematische Mengenlehre: Es kann keine Menge geben, deren Elemente gerade diejenigen Mengen sind, die sich nicht selbst als Element enthalten.)

Nelson-Grelling-Paradoxon (1908):
Manche Adjektive sind autologisch, d.h. sie treffen auf sich selbst zu. „Kurz“ ist kurz, „dreisilbig“ ist dreisilbig. Andere sind heterologisch, d.h. sie treffen nicht auf sich selbst zu. „Lang“ ist nicht lang, „zweisilbig“ ist nicht zweisilbig.
Wie steht es mit dem Adjektiv „heterologisch“?

„Der Lügner“: Konsequenzen

Mögliche Haltungen zum Lügner-Paradoxon:

- Man ignoriert es. (Alltagsvariante)
- Man erklärt es für unwichtig. (Aristoteles; angeblich auch Wittgenstein: „keine außerphilosophische Dimension“)
- Man versucht es aufzulösen, indem man sein Sprachverständnis so analysiert und durchdringt, dass sich der Satz als wahr, falsch oder sinnlos herausstellt.
- Man lässt es als wahre Antinomie stehen.
- weitere ??

Darüberhinaus kann man versuchen, aus dem Phänomen einen Nutzen zu ziehen: tieferes Verständis für

- Aufbau formaler Sprachen oder von Computerprogrammen
- das Funktionieren von Sprache (künstliche Intelligenz)

„Der Lügner“: Nutzen und Konsequenzen

Es gibt im Bereich der Logik immer noch sehr viele Arbeiten über das Lügner-Paradoxon!

Alfred Tarski: Theorie der formalen Sprachen /
Russell & Whitehead: Typentheorie

Es wird eine Hierarchie formaler Sprachen definiert, in denen eine Stufe nur über die Wahrheit oder Falschheit von Aussagen niedrigerer Stufen sprechen kann. Dadurch wird die Lügner-Antinomie vermieden.

(Wichtig für: Mathematik, Logik, Informatik, Linguistik)

„Der Lügner“: Nutzen und Konsequenzen

Kurt Gödel: Unvollständigkeitssatz („Es gibt in der Mathematik wahre Sätze, die nicht beweisbar sind.“)

Man kann mathematische Aussagen und Beweise mit Zahlen codieren und daher mathematisch über Beweisbarkeit sprechen.
Man kann nun eine Aussage finden, die äquivalent mit ihrer eigenen Nicht-Beweisbarkeit ist (also in etwas aussagt „Ich bin nicht beweisbar.“)
Dieser Satz kann nicht falsch sein, weil er dann seine eigene Beweisbarkeit behaupten würde und dies impliziert, dass er tatsächlich beweisbar, also wahr ist. Umgekehrt impliziert seine behauptete Nicht-Beweisbarkeit, dass er tatsächlich nicht beweisbar ist.
(Dies alles ist technisch sehr schwierig zu zeigen.)

Literatur

Nur ein paar Hinweise:

- W. O. V. Quine “The Ways of Paradox”, Random House: New York 1966.
- Raymond Smullyan “Das Buch ohne Titel: Eine Sammlung von Paradoxa und Lebensrätseln”, Vieweg: Braunschweig 1983.
- Joachim Bromand “Philosophie der semantischen Paradoxien”, Mentis: Paderborn 2001.
- Bernard Bolzano “Paradoxien des Unendlichen”, Meiner: Hamburg 2012; Erstveröffentlichung 1851.