

Formale Logik

PD Dr. Markus Junker
Abteilung für Mathematische Logik
Universität Freiburg

Wintersemester 16/17
Sitzung vom 1. Februar 2017

Modallogik: Momente ihrer Geschichte

- ▶ **Aristoteles** (384–322)

modallogische Syllogismen (mit unklarer Interpretation)

- ▶ **Clarence Irving Lewis** (1883–1964)

Axiomatisierung einer „starken“ Implikation $\Box(A \rightarrow B)$, die Paradoxien der aussagenlogischen „materialen“ Implikation $(A \rightarrow B)$ vermeiden sollte.

(*Langford & Lewis 1932*): Modallogische Systeme S1–S5

- ▶ **Saul Kripke** (* 1940):

Semantik „möglicher Welten“ (1959)

Normale modallogische Systeme

Die formale Sprache der Modallogik: Zeichen

Benutzt werden folgende Zeichen:

- ▶ die **Aussagenvariablen** A B C ...
- ▶ die **Junktoren** \top \perp \neg \vee \wedge \rightarrow \leftrightarrow
- ▶ die **Klammern** $($ und $)$
- ▶ die **Modaloperatoren** \square und \diamond

\square heißt **Notwendigkeitsoperator**
und wird *Quadrat*, *box*, oder „*notwendig*“ genannt.

\diamond heißt **Möglichkeitsoperator**
und wird *Raute*, *diamond*, oder „*möglich*“ genannt.

Die formale Sprache der Modallogik: Formeln

Modallogische Formeln sind alle Symbolfolgen, die nach folgenden Regeln gebildet werden können:

- ▶ Jede Aussagenvariable ist eine modallogische Formel.
- ▶ \top und \perp sind modallogische Formeln.
- ▶ Wenn F und G modallogische Formeln sind, dann auch $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ und $(F \leftrightarrow G)$.
- ▶ Wenn F eine modallogische Formel ist, dann auch $\Box F$ und $\Diamond F$.

Beispiele modallogischer Formeln:

$\Box A$ $\Diamond B$ $(A \wedge \Diamond B)$ $\Box(A \wedge \Diamond B)$ $(\Box A \wedge \Diamond B)$

$\Diamond \neg(\Box A \wedge \Diamond B)$ $\Box \Box \top$ $\neg \Diamond \Box \Box \neg \neg \Box \Diamond A$ $(\neg B \rightarrow A)$

Modellierungen durch die modallogische Sprache (1)

Alethische Logik

\Box *notwendigerweise gilt*

\Diamond *möglicherweise gilt*

gültig z. B.: $(\Box A \rightarrow A)$, $(A \rightarrow \Diamond A)$

unklar z. B.: $(\Box A \rightarrow \Box \Box A)$, $(A \rightarrow \Box \Diamond A)$

Zeitlogiken

\Box *immer in der Zukunft gilt (oder: i. d. Vergangenheit galt)*

\Diamond *irgendwann in der Zukunft gilt (bzw. in der V. galt)*

gültig z. B.: $(\Box A \rightarrow \Box \Box A)$, $(\Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A)$, $(\Box A \rightarrow \Diamond A)$

unklar z. B.: $(\Diamond A \rightarrow \Diamond \Diamond A)$ (zwischen jedem zukünftigen Moment und jetzt gibt es ein Dazwischen)

$\Box \Diamond T$ (die Zeit hört nicht auf)

Modellierungen durch die modallogische Sprache (2)

Deontische Logiken

\square *es ist geboten (vorgeschrieben), dass*

\diamond *es ist gestattet (erlaubt), dass*

gültig z. B.: $(\square A \rightarrow \diamond A)$

Epistemische Logiken

\square *man weiß, dass ...*

\diamond *es ist mit dem Wissen vereinbar, dass ...*

gültig z. B.: $(\square A \rightarrow A)$

unklar z. B.: $(\square A \rightarrow \square \square A)$ (*KK principle*)

Modelle anderer Aussagenlogiken

strikte Implikation $(A \rightarrow B)$ als $\square(A \rightarrow B)$

strikte Negation $\square \neg A$ (*tertium non datur gilt nicht*)

Modallogik: Semantik

Grundidee: Es gibt *notwendige Wahrheiten*, die nicht anders sein können, und *kontingente Wahrheiten*, die in einer anderen Welt auch falsch sein könnten.

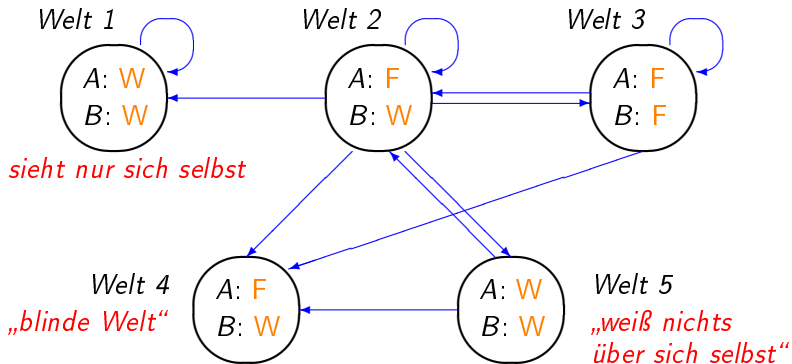
Eine Vorstellung davon, wie die Welt anders aussehen könnte, wird *mögliche Welt* genannt.

- ▶ **Notwendigerweise wahr** ist eine Aussage A , die in allen möglichen Welten gilt. (*Formale Übersetzung:* $\Box A$ ist wahr.)
- ▶ **Möglicherweise wahr** ist eine Aussage A , die in mindestens einer möglichen Welten gilt. (*Formale Übersetzung:* $\Diamond A$ ist wahr.)
- ▶ **In der Wirklichkeit wahr** ist eine Aussage A , die in unserer Welt gilt. (*Formale Übersetzung:* A ist wahr.)

David Kellogg Lewis (1941–2001): Die möglichen Welten existieren *realiter* – gewissermaßen als Paralleluniversen.

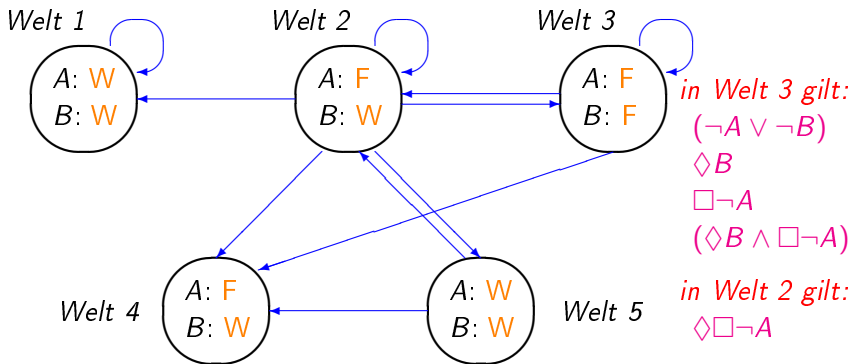
Modallogik: Modelle

Ein modallogisches Modell besteht aus einer Menge möglicher Welten – dies sind aussagenlogische Modelle bzw. Belegungen der Aussagenvariablen – und einer Zugangsrelation zwischen den möglichen Welten: Jede der möglichen Welten kann sich gewisse andere mögliche Welten vorstellen oder „(in sie) sehen“.



Modallogik: Auswertung von Formeln in Modellen

- ▶ $\Box F$ gilt in einer Welt W , wenn F in allen von W gesehenen Welten gilt.
- ▶ $\Diamond F$ gilt in einer Welt W , wenn F in mindestens einer der von W gesehenen Welten gilt.
- ▶ Aussagenlogische Junktoren werden innerhalb der jeweiligen Welt wie gewohnt ausgewertet.



Modallogik: Aussagen über Formeln

Es ist also nicht definiert, dass eine Formel in einem Modell gilt, sondern nur, dass eine Formel *in einer Welt eines Modells* gilt.

- ▶ Eine modallogische Formel ist eine **modallogische Tautologie**, wenn sie in allen Welten aller denkbaren Modelle gilt. (Modelle können auch unendlich groß sein!)
- ▶ Zwei modallogische Formeln F und G sind **logisch äquivalent** zueinander, falls $(F \leftrightarrow G)$ eine modallogische Tautologie ist, d. h. falls F und G in allen Welten aller Modelle den gleichen Wahrheitswert haben.
- ▶ Eine modallogische Formel F folgt aus modallogischen Formeln P_1, P_2, \dots , falls F in allen Welten aller Modelle wahr wird, in denen alle P_1, P_2, \dots wahr sind. Falls es endlich viele P_1, P_2, \dots, P_n sind, ist dies genau dann der Fall, wenn $((P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow F)$ eine modallogische Tautologie ist.