Formale Logik

PD Dr. Markus Junker
Abteilung für Mathematische Logik
Universität Freiburg

Wintersemester 16/17
Sitzung vom 8. Februar 2017

Modallogik: Aussagen über Formeln

- Es gibt verschiedene modallogische Systeme, die man in der Regel durch Einschränkungen an die betrachteten Modelle erhält.

  Das allgemeine System, bei dem es keine Einschränkungen an die Modelle gibt, heißt auch System K (für Kripke).

- Eine modallogische Formel ist eine modallogische Tautologie oder auch K-Tautologie, wenn sie in allen Welten aller denkbaren Modelle gilt.

- Zwei modallogische Formeln F und G heißen logisch äquivalent oder auch K-äquivalent zueinander, wenn F und G in allen Welten aller Modelle den gleichen Wahrheitswert haben.

Einige modallogische Tautologien

- Jede aussagenlogische Tautologie ist eine modallogische Tautologie.
- Wenn F eine modallogische Tautologie ist, dann auch $\Box F$.
  Insbesondere sind also $\Box\top$, $\Box\Box\top$, $\Box\Box\Box\top$, ... *Tautologien.*
- Dualität: $\Box F \sim \neg\Diamond\neg F$ und $\Diamond F \sim \neg\Box\neg F$
- Es gelten die Prinzipien der uniformen und äquivalenten Substitution.
  (*Damit ergibt sich* $\Box F \sim \neg\Diamond\neg F$ *aus* $\Diamond F \sim \neg\Box\neg F$)
- Es gilt Axiom K („*starker modus ponens*"), d. i.
  $$(\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B))$$
  ist eine modallogische Tautologie.
- Es gilt der *modus ponens*, d. h. wenn F und $(F \to G)$ modallogische Tautologien sind, dann auch G.

Normale Systeme (1)

Eine Menge M modallogischer Formeln („M-Tautologien“) heißt normales System, wenn die Regeln der vorherigen Folie gelten, d. h.:

- Es gelten die Prinzipien der uniformen und äquivalenten Substitution.
- Es gilt der *modus ponens*, d. h. wenn F und $(F \to G)$ M-Tautologien sind, dann auch G.
- $\top$ und $\Box\top$ sind M-Tautologien.
- $(\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A)$ ist eine M-Tautologie.
- Axiom K: $(\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B))$ ist eine M-Tautologie.

Normale Systeme (2)

Normale Systeme kann man auf zwei Arten erhalten:

- Man betrachtet nur Modelle mit besonderen Eigenschaften (*z. B. „jede Welt sieht sich selbst“*) und nennt eine Formel M-Tautologie, wenn sie in allen Welten aller Modelle mit diesen Zusatzeigenschaften gilt.

  (*Weniger Modelle ergibt tendenziell mehr Tautologien und mehr Äquivalenzen, also eine „schwächere“ Logik.*)

- Man betrachtet zusätzliche Axiome, d. h. Formeln, die Tautologien sein sollen, und nimmt dann die kleinste Menge modallogischer Formeln, die diese Axiome enthält und ein normales System bildet.

Sehr häufig gibt es schöne Entsprechungen zwischen beiden Herangehensweisen, d. h. „schöne“ Eigenschaften von Modellen entsprechen einfachen zusätzlichen Axiomen.

Normale Systeme: Axiome

Name des Axioms		Axiom	duales Axiom
D	(deontisch)	$(\Box A \to \Diamond A)$	[*selbstdual*]
T	(—)	$(\Box A \to A)$	$(A \to \Diamond A)$
4	(System S4)	$(\Box A \to \Box\Box A)$	$(\Diamond\Diamond A \to \Diamond A)$
B	(Brouwer)	$(A \to \Box\Diamond A)$	$(\Diamond\Box A \to A)$
5 / E	(System S5 / euklidisch)	$(\Diamond A \to \Box\Diamond A)$	$(\Diamond\Box A \to \Box A)$
[Aus	(Aussagenlogik)	$(\Box A \leftrightarrow A)$	$(\Diamond A \leftrightarrow A)$]

Namen von Systemen werden durch (K +) Axiome angegeben.

Zum Beispiel ist KT4 (oder T4) das kleinste normale System, das T und 4 als Tautologien enthält.

Normale Systeme: Axiome und Modelle (1)

Name	Axiom	„entsprechende" Eigenschaft
Aus	$(\Box A \leftrightarrow A)$	*jede Welt sieht nur sich selbst*
D	$(\Box A \rightarrow \Diamond A)$	keine „blinden Welten": *jede Welt sieht mindestens eine Welt*
T	$(\Box A \rightarrow A)$	Zugangsrelation ist reflexiv: *jede Welt sieht sich selbst*
B	$(A \rightarrow \Box\Diamond A)$	Zugangsrelation ist symmetrisch: *wenn eine Welt eine andere sieht, dann auch umgekehrt*
4	$(\Box A \rightarrow \Box\Box A)$	Zugangsrelation ist transitiv: *wenn eine Welt eine zweite sieht, die eine dritte sieht, dann sieht schon die erste die dritte*
5	$(\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A)$	*wenn eine Welt in zwei Welten sieht, dann sehen sich diese gegenseitig*

Normale Systeme: Axiome und Modelle (2)

Hinweis: Die Entsprechung zwischen Axiom A und Eigenschaft E bedeutet, dass man die Logik KA auch dadurch erhält, dass man nur Modelle betrachtet, in der die Zugangsrelation die Eigenschaft E besitzt.
Sie bedeutet nicht, dass in jedem Modell, in dem A in allen Welten gilt, die Zugangsrelation die Eigenschaft E haben muss! Dies gilt von den vorgestellten Axiomen nur für D (*denn wenn* $(\top \rightarrow \Box\top)$ *gilt, ist die Welt nicht blind*).

Es ist immer recht einfach zu sehen, dass in den Modellen mit eingeschränkter Zugangsrelation das entsprechende Axiom gilt.

Beispiel: In Modellen mit symmetrischer Zugangsrelation gilt B: $(A \rightarrow \Box\Diamond A)$, denn wenn A in einer Welt w gilt, gilt in jeder Welt w', in die w hineinsehen kann, $\Diamond A$, weil w' in w zurücksehen kann.

Die Umkehrungen sind nicht einfach zu sehen!

Normale Systeme: Axiome und Modelle (3)

KAus kollabiert die Modallogik zur Aussagenlogik: eine Formel ist genau dann in KAus, wenn durch Entfernen der Modaloperatoren eine aussagenlogische Tautologie entsteht.

In „blinden Welten“ ist nichts möglich und alles notwendig, d. h. es gilt $\Box F$ und $\neg\Diamond F$ für jedes F. In einer blinden Welt gilt also insbesondere $\Box\bot$, $\Box\top$ und (dual) $\neg\Diamond\top$, $\neg\Diamond\bot$.

In KD — $(\Box A \to \Diamond A)$: keine blinden Welten — ist dagegen alles Notwendige auch möglich. Insbesondere ist $\Diamond\top$ eine KD-Tautologie (dual: $\Box\neg\bot$).

D ist in eigentlich allen Anwendungen ein notwendiges und sinnvolles Axiom; KD ist eine „starke“ Modallogik mit wenigen Tautologien.

Normale Systeme

Am anderen Ende des Spektrums steht S5 = KT5 = KT4B. Hier kann man sich auf Modelle beschränken, in denen jede Welt alle anderen Welten sieht (also die maximale Zugangsrelation).

S5 ist die schwächste der hier vorgestellten nicht-trivialen Modallogiken (d. h. hat die meisten Tautologien).

In S5 kollabieren alle Modalitäten: Wenn M_i Modaloperatoren $\Box$ oder $\Diamond$ sind, dann gilt in S5:

$$M_1 \dots M_k \Box A \sim \Box A \quad \text{und} \quad M_1 \dots M_k \Diamond A \sim \Diamond A$$

S4 = KT4 ist etwas stärkeres, sehr gebräuchliches System.
S4 und S5 sind zwei der fünf von Lewis eingeführten modallogischen Systeme; (die anderen, S1–S3, sind nicht normal).

Modalitäten

Alle Abfolgen von Modaloperatoren $\Box$ und $\Diamond$ sind äquivalent zu einer der folgenden:

In S5:

$$\begin{tikzcd}
\Box A \arrow[d] \\
A \arrow[d] \\
\Diamond A
\end{tikzcd}$$

In S4:

$$\begin{tikzcd}
 & & \Box A \arrow[dl] \arrow[ddr] & \\
 & \Box\Diamond\Box A \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\Diamond\Box A \arrow[dr] & & \Box\Diamond A \arrow[dl] & A \arrow[ddl] \\
 & \Diamond\Box\Diamond A \arrow[dr] & & \\
 & & \Diamond A &
\end{tikzcd}$$

Pfeile bedeuten, dass die jeweilige Implikation eine Tautologie des Systems ist!

Inklusionen normaler Systeme

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{KAus} & \\
 & \mathsf{S5} \arrow[u] & \\
\mathsf{KTB} \arrow[ur] & & \mathsf{S4} \arrow[ul] \\
\mathsf{KDB} \arrow[u] & \mathsf{KT} \arrow[ul] \arrow[ur] & \mathsf{KD4} \arrow[u] \\
\mathsf{KB} \arrow[u] & \mathsf{KD} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \mathsf{K4} \arrow[u] \\
 & \mathsf{K} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Aussagenlogik (keine eigentliche Modallogik)

eine maximale nicht-triviale Modallogik

weitere gebräuchliche Systeme

die stärkste normale Modallogik

Pfeile sind Inklusionen, d. h. zeigen auf schwächere Systeme.

Beispiel: T: $(\Box A \to A)$ ergibt dual: $(A \to \Diamond A)$, aus beidem folgt D: $(\Box A \to \Diamond A)$.

Modellierungen und normale Systeme

Alethische Logik

gültig z. B.: $(\Box A \to A)$, $(A \to \Diamond A)$
mindestens KT; falls $(\Box A \to \Box\Box A)$ sogar S4

Zeitlogiken

gültig z. B.: $(\Box A \to \Box\Box A)$, $(\Box A \to \Diamond A)$, M: $(\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A)$
mindestens KD4M
falls $\Box$ = „*jetzt und immer in der Zukunft gilt*“, dann KT4M = S4.1

M alleine entspricht keiner Eigenschaft an die Zugangsrelation, gilt aber bei *linear geordneten* Zugangsrelationen, d. h. transitiv + „*Wenn eine Welt zwei andere sieht, so sieht eine davon die dritte.*“

Deontische Logiken / Epistemische Logiken

gültig z. B.: $(\Box A \to \Diamond A)$ bzw. $(\Box A \to A)$
mindestens KD bzw. KT

Modellierungen und normale Systeme

Parkplatzschild „*Unerlaubtes Parken ist verboten*“

d. h. $(\neg\Diamond P \rightarrow \Box\neg P)$??

Uni Freiburg beim Einführen des Rauchverbots: „*Es handelt sich nicht nur um ein Rauchverbot, sondern um ein Nichtrauchgebot*“

d. h. $\not\vdash (\neg\Diamond R \rightarrow \Box\neg R)$??

Nicht-normale deontische Logiken?
(*Bemerkung: Die Übersetzung von „verboten“ und „unerlaubt“ sind nicht ganz klar und in den beiden Beispielen nicht konsistent.*)

Thornton Wilder: „*Wir alle wissen mehr als das, wovon wir wissen, dass wir es wissen.*“

d. h. Axiom 4: $(\Box A \rightarrow \Box\Box A)$ gilt nicht.

Setzt man $\Box A$ für „*A ist beweisbar*“ im Kontext des Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes, dann gilt $(\Box A \rightarrow \Box\Box A)$.