

# Formale Logik, WS 2016/17, Aufgaben zur Modallogik

keine Abgabe (außer in Ausnahmefällen)

*Hinweis:  $K$  bezeichnet die allgemeine Modallogik, in der es keine Einschränkungen an die Modelle gibt. Was in  $K$  gelten soll, muss also in allen denkbaren Modellen gelte n.*

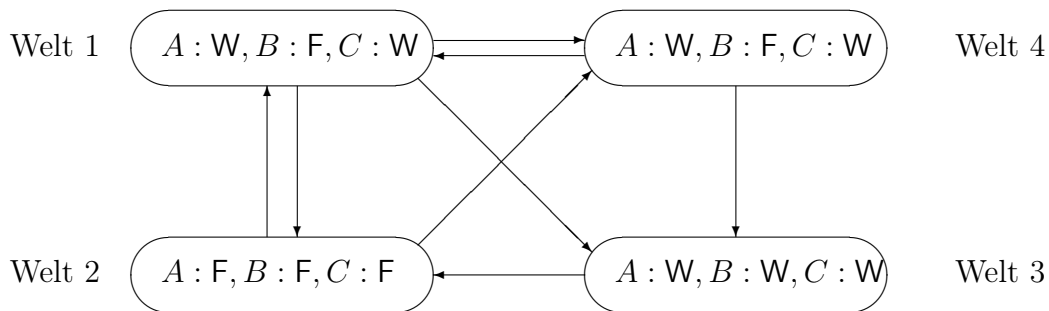
## Aufgabe 32:

Welche der folgenden Zeichenfolgen sind modallogische Formeln?

- (a)  $\Box\Diamond\neg\top$                       (b)  $\Diamond\Box(A \rightarrow \Diamond \wedge B)$                       (c)  $\Box((C \wedge \Box\neg A) \vee \Diamond A)$   
 (d)  $((A \wedge B) \vee B)$                       (e)  $\Box\Diamond B \rightarrow \Diamond A$                       (f)  $\neg\Diamond\neg\neg\neg\Box\Box\Diamond\Box\neg B$   
 (g)  $\Diamond\Box((A \wedge \neg\Box\Delta B \vee \Diamond A)$                       (h)  $(\Box\Diamond\perp \wedge \neg\Diamond A\Box)$                       (i)  $(\Box(A \rightarrow \Box B))$

## Aufgabe 33:

Betrachten Sie folgendes modallogisches Modell (keine Welt sieht sich selbst):



- (a) In welchen Welten gilt  $\Diamond A$ ,  $\Box A$ ,  $\Diamond\Diamond A$ ,  $\Diamond\Box A$ ,  $\Box\Diamond A$ ,  $\Box\Box A$ ?  
 (b) Gilt in Welt 2 die Formel  $\Box\Diamond(B \rightarrow \Diamond C)$ ? Begründen Sie die Antwort.

## Aufgabe 34:

- (a) Welche der Schlüsse sind in  $K$  korrekt?

$$\frac{\frac{\Diamond(A \rightarrow B) \quad \Diamond(B \rightarrow C)}{\Diamond(A \rightarrow C)}}{\Diamond(A \rightarrow C)}$$

$$\frac{\frac{\Box(A \rightarrow B) \quad \Box(B \rightarrow C)}{\Box(A \rightarrow C)}}{\Box(A \rightarrow C)}$$

$$\frac{\frac{\Box(A \rightarrow B) \quad \Diamond(B \rightarrow C)}{\Diamond(A \rightarrow C)}}{\Diamond(A \rightarrow C)}$$

Anmerkung: Diese Art von Schlüssen werden auch als *modallogische Syllogismen* bezeichnet.

- (b) Kann man durch Hinzunahme von (möglichst wenigen und möglichst schwachen) Axiomen aus D, T, B, 4, 5 die nicht-korrekten Schlüsse in Aufgabe 34 zu korrekten Schlüssen machen?<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Was D, T, B, 4, 5 bedeutet, wird in der Vorlesung am 8.2. erklärt.

### Aufgabe 35:

In dieser Aufgabe soll  $\rightarrow$  für die *strikte* oder *starke Implikation* stehen; dies bedeutet, dass  $(A \rightarrow B)$  eine Abkürzung für  $\Box(A \rightarrow B)$  ist.

(a) Gilt in der allgemeinen Modallogik  $K$  stets die Kontrapositionsregel für die starke Implikation, also dass  $(A \rightarrow B)$  logisch äquivalent zu  $(\neg B \rightarrow \neg A)$  ist? Argumentieren Sie!

(b) Geben Sie ein Modell an, an dem man sieht, dass der Modus Ponens für die starke Implikation i.a. nicht gilt, d.h. der Schluss von  $A$  und  $(A \rightarrow B)$  auf  $B$  nicht korrekt ist.

### Aufgabe 36:

Modalitäten erfordern besondere Vorsicht bei der Übersetzung aus der Alltagssprache. Hier ein Beispiel:

*Wenn Angela Merkel Bundeskanzlerin ist, so muss sie notwendigerweise Mitglied des Bundestages sein. Angela Merkel ist Bundeskanzlerin. Also muss Angela Merkel notwendigerweise Mitglied des Bundestages sein.*

Die Konklusion ist offenbar falsch (es ist nicht notwendig, dass Angela Merkel Mitglied des Bundestages ist; es könnte nämlich auch anders sein), aber beide Prämissen sehen korrekt aus und der Schluss wie ein simpler Modus Ponens. Formalisieren Sie das Argument und erläutern Sie den Fehlschluss!

### Aufgabe 37:

Benutzen Sie die Aussagenvariablen  $M$ ,  $P$  und  $L$  in der naheliegenden Weise und übersetzen Sie in modallogische Formeln (ohne sich allzusehr in Interpretationen zu verlieren):

- (1) *Wer Philosophie studiert, muss den Logikschein erwerben.*
- (2) *Wer Mathematik studiert, kann den Logikschein erwerben.*
- (3) *Möglicherweise muss, wer Mathematik studiert, den Logikschein erwerben.*
- (4) *Es ist möglich, Mathematik und Philosophie zu studieren*
- (5) *Möglicherweise muss, wer den Logikschein erwirbt, Philosophie studieren.*
- (6) *Wer Mathematik und Philosophie studiert, muss möglicherweise keinen Logikschein erwerben.*
- (7) *Wer weder Mathematik noch Philosophie studiert, darf den Logikschein nicht erwerben.*
- (8) *Es ist nicht notwendig, dass, wer Philosophie studiert, den Logikschein erwerben muss, aber möglich.*

Geben Sie für drei der gefundenen Sätze sowohl ein modallogisches Modell und eine Welt an, in welcher der Satz gilt, als auch ein Modell und eine Welt, in welcher der Satz nicht gilt.

### Aufgabe 38:

Formalisieren Sie die folgenden Sätze so exakt wie möglich in modallogischer Sprache. Geben Sie jeweils genau an, wofür die benutzten Aussagenvariablen stehen. Diskutieren Sie, welche Alternativen denkbar sind, und ob diese gegebenenfalls schlechter oder gleichwertig sind.

(a) „*Dass ich lebe, ist nicht nötig, wohl aber, dass ich tätig bin.*“ (Friedrich der Große)

(b) Hier nur den kursiven Teilsatz: „*Es scheinen vier Umstände zu sein, worauf alle oder der größte Teil der Übel beruhen, welche die empfindenden Geschöpfe plagen, und es ist nicht unmöglich, dass alle diese Umstände notwendig und unvermeidlich sind.*“ (David Hume)

(c) „*Selbst wenn wir also zugestehen, dass es notwendigerweise möglich sein muss, uns der Identität unserer selbst in allen unseren Vorstellungen bewusst zu werden; und weiter zugestehen, dass dazu eine Verbindung unserer Vorstellungen nach Regeln notwendig ist, folgt bestenfalls, dass es notwendigerweise möglich ist, unsere Vorstellungen nach Regeln zu verbinden; nicht aber, dass es möglich ist, die Vorstellungen nach notwendigen Regeln zu synthetisieren.*“ (Bernhard Thöle)