1. Vorlesung.

Einleitung

In der Variationsrechnung studieren wir Funktionale der Form

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))dx$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}$ eine geeignete Klasse von Funktionen oder Abbildungen $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ist, so dass

$$Du = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

existiert, und $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $(x, z, p) \mapsto f(x, z, p)$.

Beispiel 0.1 (Bogenlänge). Betrachte

$$\mathcal{C} = \left\{ u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^m), u(a) = p, u(b) = q \right\}$$

wobei $p, q \in \mathbb{R}^m$. $n = 1$. $f : (a, b) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x, u, p) = |p|$.

$$Du = \left(\frac{\partial u^1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u^m}{\partial x} \right) =: \dot{u}.$$

und

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b |\dot{u}(x)|dx.$$

Problem: Was ist die kürzeste Verbindung zwischen p und q? Für welche u is $\mathcal{F}$ minimal?

Variante 0.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine Untermannigfaltigkeit und $p, q \in M$.

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \left\{ u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^m) : c((a, b)) \subset M \right\}.$$

$\longrightarrow$ Holonome Nebenbedingung.

Problem: Kürzeste Verbindungen zwischen p und q in M? Geodätische?

Minimierer sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Variante 0.3. Für $u \in C^2([a, b], \mathbb{R}^2)$ einfach geschlossen sei $\mathcal{A}(u)$ der eingeschlossene Flächeninhalt.

$$\mathcal{C}'' = \left\{ u \in C^2([a, b], \mathbb{R}^2), u \text{ einfach geschl. Kurve mit } \mathcal{A}(u) = A \right\}.$$

$\longrightarrow$ Isoperimetrisches Problem. Lösung: Kreis mit Radius $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

Beispiel 0.4 (Flächeninhalt). Sei $u \in \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n < m$, $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, $\overline{\Omega}$ kompakt.

Induzierte Riemannsche Metric auf Ω: $g_{\alpha,\beta} = \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta u \rangle = u^* \langle e_\alpha, e_\beta \rangle$, $(e_\alpha)_{\alpha=1,\ldots,n}$ ONB in $\mathbb{R}^n$.

Riemannsches Volumen von u:

$$\mathcal{A}(u) = \int_\Omega \sqrt{\det(g_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}} dx.$$

Frage: Existieren Minimierer?

Beispiel 0.5 (Dirichlet Energie).
$$\mathcal{C} = \left\{ u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.
$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |Du|^2.$$
Dirichlet Prinzip: Konstruktion harmonischer Funktionen als Minimierer von E.

Ziel der Vorlesung: Entwicklung einer allgemeinen Theorie zur Behandlung socher Variationsprobleme.

Fragen 0.6. Es ergeben sich u.a. folgende Fragen

(1) Existenz von Minimierern.
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{F}$ gegeben. Variationsproblem: $\inf_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(u) =: \Lambda$.
Dirichlet Methode der Variationsrechung:
- Wähle Minimalfolge $u_k \in \mathcal{C}$ mit $\mathcal{F}(u_k) \to \Lambda$.
- Finde Teilfolge u_{k_i}, die gegen ein $u \in \mathcal{C}$ ̈konvergiert ∵
Problem: Wahl von $\mathcal{C}$ und einer geeigneten Topologie. (Norm oder Metrik).
- Dann zeige
$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{i \to \infty} \mathcal{F}(u_{k_i}) = \Lambda.$$
Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{F}$.

(2) Regularität von Minimierern.

n=1 Bogenlänge: Hilbert 1899, Tonelli $\sim$ 1930
Dirichlet Energie:
n=2, m=1 Morrey (Annahme quadratic volume growth)
n≥2, m=1 De Giorgi 1956, Nash 1958.
n≥2, m≥2 Im allgemeinen keine Regularität, Minimierer mit Singularitäten, De Giorgi 1969.

(3) Eindeutigkeit, Zahl der Minimierer.

(4) Kritische Punkte? (Min-Max Principle, Mountain pass).

1. Euler-Lagrange Gleichung

Definition 1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

(i) $C^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ist die Menge aller stetigen Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. $C^0(\Omega, \mathbb{R}) = C^0(\Omega)$.

(ii) $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ist die Menge der Abbildungen in $C^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$, die stetig auf $\overline{\Omega}$ erweitert werden können.

(iii) $C^0_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ist die Menge der Abbildungen in $C^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so dass $\mathsf{spt} f = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ kompakt ist.

(iv) $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ist die Menge aller Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, so dass alle partiellen Abbildungen $\partial_{x^\beta} f$ ür alle Multi-Indizes $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n_0$ mit $|\beta| \leq k$ existieren und stetig sind in Ω. Hier ist $|\beta| = \sum \beta^n_i$ und $\partial_{x^\beta} = \partial_{x^{\beta_1} \ldots x^{\beta_n}} = \partial_{x^{\beta_1}} \ldots \partial_{x^{\beta_n}}$. $C^k(\Omega, \mathbb{R}) = C^k(\Omega)$.

(v) $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ist die Menge der Abbildungen in $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, deren partielle Ableitungen bis zur Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ erweitert werden können.

(vi) $C^k_c(\Omega, \mathbb{R}^m) := C^k(\Omega, \mathbb{R}^m) \cap C_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Lemma 1.2 (Erste Variation)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachte das Funktional $\mathcal{F} : C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ mit*

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))dx$$

für $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n})$, $f = f(x,z,p)$ wobei $x = (x^\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$, $z = (z^i)_{i=1,\dots,m}$, $p = (p^i_\alpha)$
Dann gilt für $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u+t\varphi)\Big|_{t=0} = \int_\Omega \left[\partial_{z^i} f|_{(x,u,Du)}\varphi^i + \partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\partial_{x^\alpha}\varphi^i\right] dx =: \delta\mathcal{F}(u)\varphi =: \delta\mathcal{F}(u,\varphi).$$

Das lineare Funktional $\delta\mathcal{F}(u) : C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ heißt Erste Variation.

Beachte Summenkonvention: $v^i w_i = \sum_{i=1}^m v^i w_i$, $\quad v^\alpha w_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n v^\alpha w_\alpha$.

Beweis. Differenziere unter dem Integral:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega f(x, u(x) + t\varphi(x), Du|_x + tD\varphi|_x)dx\Big|_{t=0} = \int_\Omega \left[\partial_{z^i} f(x,u,Du)\varphi^i + \partial_{p^i_\alpha} f(x,u,Du)\partial_{x^\alpha}\varphi^i\right] dx.$$

□

Wiederholung: Satz von Gauss

Sei Ω beschränktes C^1-Gebiet, das heißt $\partial\Omega$ ist eine C^1-Untermgft. von $\mathbb{R}^n$. $\partial\Omega$ sei orientiert durch eine äußeres Normalenfeld $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$. Sei $X \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Dann

$$\int_\Omega \partial_{x^\alpha} X^\alpha dx = \int_{\partial\Omega} \nu^i X^i d\,\mathrm{vol}_{\partial\Omega}\,.$$

wobei $\partial_{x^\alpha} X^\alpha =: \operatorname{div} X$.

Lemma 1.3. *Sei Ω beschränktes C^1-Gebiet, und $f, D_p f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n})$ und $\mathcal{F}$ wie zuvor. Dann gilt für $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ die Formel*

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = \int_\Omega \left[\partial_{z^i} f|_{(x,u,Du)} - \partial_{x^\alpha}\left(\partial_{r^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\right)\right]\varphi^i + \int_{\partial\Omega} \nu^\alpha \partial_{r^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\varphi^i d\,\mathrm{vol}_{\partial\Omega}$$

$\forall\ \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$.

Beweis. Wir wenden den Integralsatz von Gauß auf $X = (\partial_{p^i_\alpha} u)_{\alpha=1,\dots,n}$ an:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\partial_{x^\alpha}\varphi^i &= \int_\Omega \underbrace{\partial_{x^\alpha}\left(\partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\varphi^i\right)}_{=\operatorname{div}\left(\partial_{p^i_1}(f\varphi^i),\dots,\partial_{p^i_m}(f\varphi^i)\right)} - \int \partial_{x^\alpha}\left(\partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\right)\varphi^i \\ &= \int_{\partial\Omega} \nu^\alpha \partial_{r^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\varphi^i d\,\mathrm{vol}_{\partial\Omega} - \int \partial_{x^\alpha}\left(\partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\right)\varphi^i\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.4. Ist $\varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so reicht $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Die Behauptung folgt dann, weil wir $\Omega' \subset \Omega$ betrachten können mit $\varphi \in C^\infty_c(\Omega')$.

Satz 1.5 (Fundamentallemma der VR)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \geq 0 \quad \forall\varphi \in C^\infty_c(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0.$$

Dann $f \geq 0$ $\mathcal{L}^n$-fast überall.

Bemerkung 1.6. Falls

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

so folgt $f = 0$, denn

$$\int_\Omega f(x)(-\varphi(x))dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0.$$

Es folgt mit dem Fundamentallemma, dass $-f \geq 0 \Rightarrow f \leq 0 \Rightarrow f = 0$

2. Vorlesung.

Satz 1.5 (Fundamentallemma der VR)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0.$$

Dann $f \geq 0$ $\mathcal{L}^n$-fast überall.

Bemerkung: $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k_c(\Omega)$.

Definition 1.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir bezeichnen mit $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ für $p \in [1, \infty)$ den Raum der messbaren Abbildungen f auf Ω nach $\mathbb{R}^m$, so dass

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)} = \left(\int_\Omega |f(x)|_p^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Hier ist $|(z^1, \ldots, z^n)|_p = ((z^1)^p + \cdots + (z^n)^p)^{\frac{1}{p}}$. Wir bezeichnen mit $L^p_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ die Menge der Abbildungen, so dass $f|_U \in L^p(U, \mathbb{R}^m)$ für jede offen Menge U. Falls $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, schreiben wir

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f(x)dx = \left(\int_\Omega f^1(x)dx, \ldots, \int_\Omega f^m(x)dx\right).$$

Glättungsoperator:

Wähle $\eta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta \geq 0$, $\eta(x) = \eta(-x)$ und

$$\mathsf{spt}\eta \subset B_1(0) \quad \& \quad \int \eta(x)dx = 1.$$

Zum Beispiel

$$\eta(x) = \begin{cases} c_n \exp(\frac{1}{4|x|^2-1}) & \text{falls } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{falls } |x| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

wobei c_n gewählt ist, so dass $\int \eta = 1$. Wir nennen η einen Glättungskern.

Für $\delta > 0$ sei $\eta_\delta(x) = \delta^{-n}\eta(\frac{n}{\delta})$. Man sieht leicht, dass $\eta_\delta(-x) = \eta_\delta(x)$ und

$$\mathsf{spt}\eta_\delta \subset B_\delta(0) \quad \& \quad \int \eta_\delta(x)dx = 1.$$

Für $f \in L^p(\Omega)$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\forall \delta > 0$ definieren wir

$$(S_\delta f)(x) = \int \eta_\delta(x-y)\widetilde{f}(y)dy = (\eta_\delta \star f)(x).$$

wobei

$$L^p(\mathbb{R}^n) \ni \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \Omega \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

S_δ heißt Glättungsoperator. Man kann leicht zeigen, dass $S_\delta f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 1.8. *Sei S_δ definiert wie eben.*

(i) *Für alle $p \in [1, \infty)$ ist S_δ ein beschränkter, linearer operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, so dass $\|S_\delta f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ für alle $f \in L^p(\Omega)$.*

(ii) *Falls $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$, dann $S_\delta f \to f$ gleichmäßig für $\delta \to 0$.*

(iii) *Falls $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dann $\|f - S_\delta f\|_{L^p} \to 0$ für $\delta \to 0$.*

Beweis. (i) Per Definition is S_δ linear. Außerdem folgt

$$\begin{aligned}|(S_\delta u)(x)|^p &= \left|\int \eta_\delta(x-y)u(y)dy\right|^p \\ &= \left|\int \eta_\delta(x-y)^{1-\frac{1}{p}}\eta_\delta^{\frac{1}{p}}(x-y)u(y)dy\right|^p \\ &\leq \left(\int \eta_\delta(x-y)\right)^{p-1}\left(\int \eta_\delta(x-y)|u(y)|^p dy\right) = (S_\epsilon|u|^p)(x)).\end{aligned}$$

Integration bezüglich x ergibt

$$\begin{aligned}\|S_\delta u\|_{L^p}^p &\leq \|S_\epsilon|u|^p\|_{L^1} \\ &= \int |u(y)|^p \left(\int \eta_\delta(x-y)dx\right)dy = \int |u(y)|^p dy\end{aligned}$$

und folglich $\|S_\delta u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}$.

(ii)

$$\begin{aligned}|f(x)-(\eta_\delta \star f)(x)| &= \left|f(x)\int \eta_\delta(x-y)dy - \int \eta_\delta(x-y)f(y)dy\right| \\ &= \left|\int \eta_\delta(x-y)(f(x)-f(y))dx\right| \\ &\leq \int_{B_\delta(x)} |\eta_\delta(x-y)||f(x)-f(y)||\,dx \leq \sup_{y\in\overline{B_\delta(x)}} |f(x)-f(y)|\,.\end{aligned}$$

Da f insbesondere gleichmässig stetig, konvergiert die rechte Seit unabhängig von x und gleichmässig gegen 0.

(iii) Wir wissen, dass $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ eine dichte Teilmenge von $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist. Sei nun $\epsilon > 0$, und wähle $u \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, so dass $\|u-f\|_{L^p} < \epsilon/4$. Es gilt

$$\|f-S_\delta f\|_{L^p} \leq \|f-u\|_{L^p} + \|u-S_\epsilon u\|_{L^p} + \|S_\delta(f-u)\|_{L^p} \leq 2\,\|f-u\|_{L^p} + \|u-S_\epsilon u\|_{L^p}$$

Sei K eine kompakte Menge, so dass $\operatorname{supp} u, \operatorname{supp} S_\delta u \subset K$. Dann folgt mit (ii)

$$\|u-S_\epsilon u\|_{L^p} = \|u-S_\epsilon u\|_{L^p(K)} \leq (\mathcal{L}^n(K))^{\frac{1}{p}} \sup_{x\in K}|u(x)-S_\delta u(x)| \leq \epsilon/2$$

falls $\delta < \delta_0$ für ein $\delta_0 > 0$. Zusammen ergibt sich

$$\|f-S_\delta f\|_{L^p} < \epsilon \quad \text{falls } \delta < \delta_0.$$

Beweis Fundamentallemma der VR. Der Beweis erfolgt in 2 Schritten.

Schritt 1: Sei $f \in C^0(\Omega)$. Angenommen die Behauptung is nicht richtig. Dann existiert $A \subset \Omega$ mit $\operatorname{vol}(A) > 0$ und $f|_A < 0$. Weil f stetig ist, existiert dann auch $x_0 \in \Omega$ mit $f(x_0) < 0$, und $\epsilon, \delta > 0$, so dass $f|_{B_\delta(x)} < -\epsilon$. Wir wählen $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\operatorname{supp}\varphi \subset B_\delta(x)$. Nach Voraussetzung folgt dann

$$0 \leq \int f\varphi = \int_{B_\delta(x_0)} f\varphi \leq -\epsilon \int_{B_\delta(x_0)} \varphi < 0$$

Ein Widerspruch.

Schritt 2: Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, und wähle $U \subset \Omega$, so dass $f = f|_U \in L^1(U)$.

Dann gilt für $\delta > 0$, so dass $U_\delta \subset \Omega$, und $x \in U$, dass $y \mapsto \eta(x-y) \in C_c^\infty(\Omega)$ und

$$S_\delta f(x) = \int \eta_\delta(x-y)f(y)dy = (\eta_\delta \star f)(x) \geq 0.$$

$S_\delta f \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ impliziert, dass $S_\delta f \to f$ fast überall. Insbesondere gilt dann für fast alle $x \in U$, dass $f(x) \geq 0$. Da wir mit solchen U die Menge Ω ausschöpfen können, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 1.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $f, D_p f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n})$. Sei $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u+\varphi)$ $\forall \varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

Dann ist u Lösung der Euler-Lagrange Gleichung

$$L_f(u) := -\partial_\alpha \left(\partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\right) + \partial_{z^i} f|_{(x,u,Du)} = 0 \quad i = 1, \ldots, m.$$

Das ist

$$\partial_{x^\alpha, p^i_\alpha} f_{(x,u,Du)} + \partial_{z^i, p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)} \partial_{x^\alpha} u^i|_x + \partial_{p^j_\beta, p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)} \partial_{x^\alpha, x^\beta} u^i|_x + \partial_{z^i} f|_{(x,u,Du)} = 0.$$

Bemerkung: Wir sagen $L_f(u) = 0$ ist eine quasi-lineare Gleichung, weil linear bezüglich zweiter Ableitung von u, aber nicht linear bezüglich erster und nullter Ableitungen.

L_f heißt Euler-Lagrange-Operator und kann als Abbildung $C^s(\Omega, \mathbb{R}^m) \to C^{s-2}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ interpretiert werden.

Beweis. Folgt aus Satz 1.5 und Lemma 1.3. Sei $x \in \Omega$ beliebig und $B_\epsilon(x) \subset \Omega$. $B_\epsilon(x)$ ist eine offene Umgebung von x mit C^1-Rand. Wir wählen ein beliebiges $\varphi \in C^1_c(B_\epsilon(x))$. Die Voraussetzungen von Lemma 1.3 sind erfüllt, wobei wir Ω durch $B_\epsilon(x)$ ersetzen. Es folgt also

$$\begin{aligned}
0 &= \delta\mathcal{F}_\Omega(u,\varphi) = \delta\mathcal{F}_{B_\epsilon(x)}(u,\varphi) \\
&= \int_{B_\epsilon(x)} \left[\partial_{z^i} f|_{(x,u,Du)} - \partial_{x^\alpha}\left(\partial_{r^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\right)\right] \varphi^i dx + \int_{\partial B_\epsilon(x)} \nu^\alpha \partial_{r^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)} \varphi^i d\,\mathrm{vol}_{\partial B_\epsilon(x)} \\
&= \int_{B_\epsilon(x)} \left[\partial_{z^i} f|_{(x,u,Du)} - \partial_{x^\alpha}\left(\partial_{r^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\right)\right] \varphi^i dx.
\end{aligned}$$

Aus dem Fundamentallemma folgt, dass $\partial_{z^i} f|_{(x,u,Du)} - \partial_{x^\alpha}\left(\partial_{r^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\right) = 0$ $\mathcal{L}^n$-fast überall auf $B_\epsilon(x)$. Aufgrund der Annahmen ist die linke Seite der letzten Gleichung aber bereits stetig und damit ist $L_f(u) = 0$ auf $B_\epsilon(x)$. Da $x \in \Omega$ beliegib war folgt $L_f(u) = 0$ in Ω.

Beispiel 1.10. $\mathcal{C} = C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) = C^1(\overline{\Omega})$, $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 + \int_\Omega Vu$, $f(x,z,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + Vz$. Berechne partielle Ableitungen:

$$\partial_{p_\alpha} f(x,z,p) = p_\alpha, \quad \partial_\alpha f = (\partial_\alpha \varphi) z, \quad \partial_z f = \varphi(x)$$

Falls $u \in C^2(\Omega)$, folgt

$$L_f(u) = -\partial_\alpha(\partial_\alpha u) + Vu = -\Delta u + Vu.$$

$\partial_\alpha(\partial_\alpha u) =: \Delta u$ heißt *Laplace* Operator auf $\mathbb{R}^n$.

Euler-Lagrange Gleichung: $-\Delta u + Vu = 0$ (Potentialgleichung). Falls $V = 0$, dann heißen Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung harmonische Funktionen auf Ω.

Beispiel 1.11. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $\mathcal{C} = C^1(\overline{(t_1,t_2) \times \Omega})$, $u = u(t,x)$, $Du = (\partial_t, \nabla u)$ und

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left(|\partial_t u|^2 - |\nabla u|^2\right) dx dt$$

$$f(x,z,p) = \frac{1}{2}\left((p_0)^2 - \left((p_1)^2 + \cdots + (p_n)^2\right)\right)$$

Partielle Ableitungen

$$\partial_{p_\alpha} f = \begin{cases} p_0 & \text{falls } \alpha = 0 \\ -p_\alpha & \text{falls } \alpha = 1, \dots, n. \end{cases}$$

EL Gleichung:

$$L_f(u) = -\partial_t (\partial_t u) - \partial_\alpha (-\partial_\alpha u) = -\partial_t^2 u + \Delta u = 0$$

$\longrightarrow$ Wellengleichung.

Beispiel 1.12. $\mathcal{C} = C^1(\overline{\Omega})$, $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}$, $f(x, z, p) = \sqrt{1 + |p|^2}$.
Partielle Ableitung:

$$\partial_{p_\alpha} f|_{(x,z,p)} = \frac{p_\alpha}{\sqrt{1 + |p|^2}}, \quad \partial_\alpha f = \partial_z f = 0.$$

Euler-Lagrange Gleichung:

$$L_f(u) = -\partial_\alpha \left(\frac{\partial_\alpha u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = -\operatorname{div} \underbrace{\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}}_{=:Tu} = 0$$

$H := \frac{1}{n} \operatorname{div} Tu$ ist die mittle Krümmung des Graphen von u.

$\longrightarrow$ nichtparametrische Minimalflächengleichung. $\nabla u = (\partial_{x^1} u, \dots, \partial_{x^n} u)$.

Sei $H \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Die Euler-Lagrange Gleichung des Funktionals

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \left\{ \sqrt{1 + |Du|^2} + Hu \right\} dx$$

ist

$$\operatorname{div} Tu = nH.$$

Lösungen beschreiben eine Fläche mit vorgeschriebener konstanter mittler Krümmung.

Wir untersuchen den Fall $n = 1$ genauer. Dann ist

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \left\{ \sqrt{1 + (u')^2} + Hu \right\} dx$$

Für $H = 0$ is $\mathcal{F}$ die Länge der nicht-parametrisierten Kurve $(x, u(x))$, $a \le x \le b$. Die Euler-Lagrange Gleichung ist

$$\left(\frac{u'}{\sqrt{1 + (u')^2}} \right)' = H.$$

Man zeigt leicht, dass für $H = 0$ die Lösungen Geraden sind, für $H \geq 0$ sind Lösungen Kreisbögen mit Radius $\frac{1}{H}$.

Wir haben bisher keine Randbedingung festgelegt. Betrachten wir eine Variation bezgl. $\varphi C_c^1(\Omega)$, so ändern sich die Randwerte nicht. Die Randwerte sind also vorgegeben.

Dirichlet Randbedingungen:

Sei f gegegen. Betrachte $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m$ (z.B. in $C^0(\partial\Omega)$.)

$$\begin{aligned} L_f(u) &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Als Beispiel betrachte nichtparametrishe Minimalflächen Gleichung. $\{(x, g(x)), x \in \Omega\}$ sei eine einfach geschlossene Kurve. $\longrightarrow$ Plateau-Problem.

Frei (natürliche) Randbedingungen

Satz 1.13. *Seien* $f, D_p f$ C^1 *auf* $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}$, *und* Ω *sei* C^2-*Gebiet. Für* $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ *gelte:*

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u+\varphi) \quad \forall \varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m). \tag{1}$$

Dann erfüllt u *die natürlichen Randbedingung*

$$\nu^\alpha \partial_{p^i_\alpha} f(x, u, Du) = 0 \qquad \textit{auf } \partial\Omega,\ (i = 1, \ldots, m).$$

Beispiel 1.14. Betrachte $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 + \int \varphi u. \implies \partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)} = \partial_{x^\alpha} u.$
Das heißt, die natürlichen Randbedingungen sind $\nu^\alpha \partial_{x^\alpha} u = \partial_\nu u = 0$.
(Neumann Randbedingungen)

3. Vorlesung.

Wiederholung. Eine Lösung $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ der Euler-Lagrange Gleichung

$$L_f(u) = -\partial_{x^\alpha}(\partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}) + \partial_{z^i} f|_{(x,u,Du)} = 0.$$

von $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(x, u, Du)dx$ heißt $\mathcal{F}$-Extremum, oder einfach Extremum.

Satz 1.13. *Seien $f, D_p f$ C^1 auf $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}$, und Ω sei C^2-Gebiet. Für $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ gelte:*

$$\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(u + \varphi) \quad \forall \varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m). \tag{2}$$

Dann erfüllt u die natürlichen Randbedingung

$$\nu^\alpha \partial_{p^i_\alpha} f(x, u, Du) = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega, \; (i = 1, \dots, m).$$

Beweis. Da (1) gilt $\forall \varphi \in C^2_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ folgt bereits $L_f(u) = 0$ wegen Satz 1.9. Durch Lemma 1.3 folgt dann

$$\int_{\partial\Omega} \underbrace{\nu^\alpha \partial_{p^i_\alpha} f(\cdot, u, Du)}_{=\lambda_i} \varphi^i d\,\mathrm{vol}_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall \varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m).$$

Da Ω ein C^2-Gebiet, folgt $\forall x \in \partial\Omega$ existiert $U \ni x$ offen, $V \subset \mathbb{R}^n$ und $\Phi \in C^2(U, V)$ Diffeomorphismus, so dass $\Phi(\partial\Omega \cap U) = (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap V$.

Dannn für $\eta \in C^\infty_c(V, \mathbb{R}^m)$ is $\varphi := \eta \circ \Phi$ ein zulässige Testfunktion. (Bild!!!) Mit dem Transformationsatz ergibt sich

$$0 = \int_{\partial\Omega} \lambda_i (\eta \circ \Phi)^i d\,\mathrm{vol}_{\partial\Omega} = \int_{(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})\cap V} \lambda_i \circ \Phi^{-1} \eta^i \sqrt{\det g}\, dx^{n-1}$$

wobei $g = (\langle \partial_{y^\alpha} \Phi^{-1}, \partial_{y^\beta} \Phi^{-1} \rangle)_{\alpha,\beta=1,\dots,n-1}$.

Man beachte, dass jedes $\eta \in C^\infty_c((\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap V, \mathbb{R}^m)$ zu einer Funktion in $C^\infty_c(V, \mathbb{R}^m)$ fortgesetzt werden kann. Aus dem Fundamentallemma folg, dass $\lambda_i \circ \Phi^{-1} \sqrt{\det g} = 0$, als λ_i. □

Beispiel 1.15. Wir betrachten wieder das Funktional

$$\mathcal{F} = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} dx.$$

Die natürlichen Randbedingungen sind gegeben durch $\langle n, Tu \rangle = 0$ auf $\partial\Omega$ wobei Tu die mittlere Krümmung der Fläche ist, die durch $u \in C^2(\overline{\Omega})$ gegeben ist. Dies können wir wie folgt geometrisch interpretieren. Das Normalenvektorfeld von u ist gegeben durch

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}}(Du, -1)$$

und $V = (\nu, 0)$ sei das Normalenvektorfeld am Zylinder $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ wobei ν die Normale an $\partial\Omega$. Dann

$$\langle V, N \rangle = \langle \nu, Tu \rangle = 0.$$

Das heißt, u schneidet den Zylinder $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ senkrecht.

Satz 1.16 (Integral-Nebenbedingungen)**.** *Betrachte auf $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ die Funktionale*

$$\mathcal{F}(v) = \int_\Omega f(x, v, Dv) \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(v) = \int_\Omega g(x, v, Dv)$$

mit $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m\times n})$, und $g \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbb{R}^k)$.

Betrache $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ mit folgenden Eigenschaften

(1) *Ist* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *mit* $\mathcal{G}(u+\varphi) = \mathcal{G}(u)$, *so folgt*

$$\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(u+\varphi).$$

(Wir sagen, u minimiert $\mathcal{F}$ *unter der Nebenbedingung* $\mathcal{G}$*.)*

(2) $\delta\mathcal{G}(u) : C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^k$ *hat Rang k. (Submersion ??).*
(Nichtdegeneriertheit der Nebenbedingungen)

Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^k$ *mit* $\delta(\mathcal{F} - \lambda_i \mathcal{G}_i)\eta = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Beweis. Nach (2) existiert für alle $i = 1, \dots, k$ ein $\varphi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $\delta\mathcal{G}(u)\varphi_i = e_i$.

Dann betrachte für $\eta \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ die Funktion

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, \quad G(s, t_1, \dots, t_k) = \mathcal{G}\left[u + s\eta + \sum_{i=1}^k t_i \varphi_i\right].$$

Es gilt $G \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ (weil $g \in C^1$), und $G(0,0) = \mathcal{G}(u)$, und

$$\frac{\partial G}{\partial t_i}\Big|_{t=0} = \delta\mathcal{G}(u)\varphi_i = e_i \quad \text{für } i = 1, \dots, k.$$

Dann folgt aus dem Satz zu impliziten Funktionen, dass ein lokal um 0 eine C^1-Funktion $\tau_i : (-\epsilon, \epsilon) \to 0$ existiert mit

$$\mathcal{G}(u) = G(s, t_1, \dots, t_i, \dots, t_k) \Longleftrightarrow t_i = \tau_i(s).$$

Dann folgt aus (1)

$$0 = \frac{d}{ds}\mathcal{F}(u + s\eta + \tau_1(s)\varphi_1 + \dots + \tau_k(s)\varphi_k)|_{s=0} = \delta\mathcal{F}(u)\eta + \tau_i'(0)\delta\mathcal{F}(u)\varphi_i. \tag{3}$$

Andererseits

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} G(s, \tau_1(s), \dots, \tau_k(s)) = \delta\mathcal{G}(u)\eta + \tau_i'(0)\delta\mathcal{G}(u)\varphi_i = \delta\mathcal{G}(u)\eta + \tau_i'(0)e_i.$$

Aus der letzten Gleichung folg $\delta\mathcal{G}_i(u)\eta = -\tau_i'(0)$. Durch Einsetzen in (3) erhalten wir

$$0 = \delta\mathcal{F}(u)\eta - \delta\mathcal{G}_i(u)\eta\lambda_i \quad \text{mit } \lambda_i = \delta\mathcal{F}(u)\varphi_i.$$

für alle $\eta \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$. □

Bemerkung 1.17. Sind zusätzlich $D_p f, D_p g_i \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n})$, und ist $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, so folgt aus Satz 1.13

$$L_f(u) - \lambda_i L_{g_i}(u) = 0.$$

Beispiel 1.18. $u : \Omega \to \mathbb{R} \quad (m = 1)$.

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|Du|^2 + Vu\right) dx$$

wobei $V : \Omega \to \mathbb{R}$ und

$$\mathcal{G}(u) = \int_\Omega u^2 = 1 \quad (u \text{ normiert}).$$

Es folgt

$$\delta\mathcal{G}(u)\varphi = 2\int_\Omega \varphi u.$$

Da $u \neq 0$, existiert $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\delta\mathcal{G}(u)\varphi \neq 0$ nach dem Fundamentallemma der VR. Das heißt $\delta\mathcal{G}(u)$ hat vollen Rang.

$$L_f(u) = -\Delta u + Vu$$
$$L_g(u) = 2u.$$

Ist $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ minimierer, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$-\Delta u + Vu = \lambda u$$

(Eigenwert Problem für den Operator $-\Delta + V$).

Beispiel 1.19 ("Isoperimetrisches Problem"). Betrachte

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}dx,$$
$$\mathcal{G}(u) = \int_\Omega udx = \text{ Volumen von } \{(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 < z < u(x)\}.$$

"Volumen der Fläche unter dem Graph von u."

$$\delta\mathcal{G}(u)\varphi = \int_\Omega \varphi \neq 0 \quad \text{für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ geeignet} \Longrightarrow \text{ Voller Rang.}$$

$$L_f(u) = -\operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}, \quad L_g(u) = 1.$$

Ist $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ Minimierer, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$-\operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \lambda.$$

Geometrisch bedeudet das: Der Graph von u hat konstante mittlere Krümmung.

Beispiel 1.20 (Kettenlinien). Frage: Wie hängt ein nicht-dehnbares, sehr dünnes Seil mit gleichmässiger Massenverteilung?

Wir betrachten $\mathcal{C} = \{u \in C^1([a,b], \mathbb{R}) : u(a) = z_0, u(b) = z_1\}$. Die Bedingung *nicht-dehnbar* bedeutet

$$\mathcal{L}(u) = \int_a^b \sqrt{1 + (u')^2}dx = c = const.$$

Notwendig für einen stabilen Gleichgewichtszustand unter Einfluss der Schwerkraft ist, dass der Massenschwerpunkt so tief wie möglich hängt. Das heisst, wir minimieren die y-Koordinate des Massenschwerpunkt, das heißt wir minimieren

$$\int_a^b u\sqrt{1 + (u')^2}dx / \mathcal{L}(u)$$

bzw.

$$\int_a^b u\sqrt{1 + (u')^2}dx$$

unter der Integral-Nebenbedingung $\mathcal{L}(u) = c$ und der Randbedingung $u(a) = z_0$ und $u(b) = z_1$. Satz 1.16 liefert, dass ein C^2 Minimum die Euler-Lagrange Gleichung zum Variationsintegral

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u) = \int_a^b (u + \lambda)\sqrt{1 + (u')^2}dx$$

lößt für ein geeignetetes $\lambda \in \mathbb{R}$. Wenn wir $v := u + \lambda$ betrachten, lößt v also die EL Gleichung von $\int_a^b u\sqrt{1 + (u')^2}dx$.

4. Vorlesung.

Beispiel 1.21 (Minimale Rotationsflächen)*.* Wir betrachten $u \in C^2([a,b])$ und $u \geq 0$. Dann erzeugt u eine Rotationsfläche durch $\{(x,u(x)) : x \in [a,b]\}$ deren Fläche gegeben ist durch

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b 2\pi u\sqrt{1+(u')^2}dx \text{ mit } f(x,z,p) = 2\pi z\sqrt{1+p^2}$$

Die Euler-Lagrange Gleichung ist

$$\sqrt{1+(u')^2} - \left(\frac{uu'}{\sqrt{1+(u')^2}}\right)' = 0.$$

Lemma 1.22. *Falls f von der Form $f(u,p)$ ist und u eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichung, dann $u' \cdot \partial_p f(u,u') - f(u,u') = const = h$ für eine Konstante h.*

Im Fall einer Rotationsfläche ergibt dass

$$\frac{(u')^2 u}{\sqrt{1+(u')^2}} - u\sqrt{1+(u')^2} = \frac{h}{2\pi} \;\Rightarrow\; u = -\frac{h}{2\pi}\sqrt{1+(u')^2}.$$

Es folgt, dass $h < 0$, falls $u > 0$ auf $[a,b]$. Und $h = 0$, falls $u(x) = 0$ für ein $x \in [a,b]$. Daraus folgt, dass entweder $u \equiv 0$, oder $u \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Insbesondere haben Extrema $\neq 0$ keine Singularitäten und es gilt $0 < -h \leq 2\pi \min_{x\in[a,b]} u(x)$. Sei $c = -\frac{h}{2\pi}$. Dann

$$u^2 = c^2 + (cu')^2.$$

Die Lösungen sind $u(x) = c\cosh\frac{x-x_0}{c}$.

Holonome Nebenbedingungen:

Wir diskutieren nun Nebenbedingungen der Form

$$G(x,u(x))) = 0 \qquad (*)$$

für eine Skalar- oder Vektorwertige C^2-Funktion $G(x,z)$. Bedingungen der Form $(*)$ heißen holonom, im Gegensatz zu Bedingungen der Form

$$G(x,u(x),Du(x)) = 0,$$

die nicht-holonom (nonholonomic) genannt werden.

Zur Einfachheit betrachten wir nur folgende Situation. Sei $u \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ und $G = (G^1,\ldots,G^r)$ für $1 \leq r \leq n-1$ aus $C^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^r)$. Das heißt $G(x,z) = G(z)$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein beschränktes Gebiet, und

$$\mathcal{C} = \left\{u \in C^1(\overline{\Omega}) : G(u(x)) = 0 \;\forall x \in \overline{\Omega}\right\}.$$

Wir nehmen an, dass die Matrix $(\partial_{z^i}G^j)_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,r}$ hat vollen Rang in allen Punkten der Menge

$$M := \{z \in \mathbb{R}^m : G(z) = 0\}.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen ist die Menge M eine $(m-r)$-dimensionale Untermgft. in $\mathbb{R}^m$, mit Normalen $\nabla G^1,\ldots,\nabla G^r$ der Klasse C^1. $\Pi_z : \mathbb{R}^m \to T_zM$ sei die orthogonale projektion von $\mathbb{R}^m$ auf den Tangentialraum T_zM von M bei z.

Definition 1.23. Sei $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ mit $u(x) \in M$. Eine Abbildung $V \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ heißt Tangentialvektorfeld entlang von u falls $V(x) \in T_{u(x)}M$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

Lemma 1.24. *Sei $\psi \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so dass*

$$\int_\Omega \langle \psi(x), V(x) \rangle dx = 0$$

für alle Tangentialvektorfelder $V \in C^1_c(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ along u. Dann gilt $\Pi_{u(x)}\psi(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$.

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ und $z_0 = u(x_0)$. Auf einer hinreichend kleinen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^m$ von z_0 sei $\tau_1, \ldots, \tau_{m-r}, \nu_1, \ldots, \nu_r$ eine Familie von punktweise orthonormalen C^1-Vektorfeldern, so dass $(\tau_i)_{i=1,\ldots,m-r}$ tangential zu M ist. Sei $B_R(x_0)$ ein kleiner Ball, so dass $\{u(x) : x \in B_R(x_0)\} \subset U$. Wähle Funktione $\varphi^i \in C^1_c(B)$ für $i = 1, \ldots, m-r$, und definiere

$$V(x) := \sum_{i=1}^{m-r} \varphi^i(x)\tau_i(u(x)).$$

V ist tangential entlang u. Auf $B_R(x_0)$ lässt sich ψ schreiben also

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{m-r} a^i(x)\tau_i(u(x)) + \sum_{j=1}^{r} b^j(x)\nu_j(u(x)).$$

für a^i und b^j in $C^0(\overline{B_R(x_0)})$. Die Annahme ergibt

$$0 = \sum_{i=1}^{m-r} \int_\Omega a^i(x)\varphi^i(x)dx$$

Da die φ^i beliebig waren, folgt aus dem FL, dass $a^i = 0$. Deshalb $\Pi_{u(x)}\psi(x) = 0$ $\forall x \in B_R(x_0)$. Weil $x_0 \in \Omega$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

$u \in \mathcal{C}$ heißt schwaches relatives Minimum, falls

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$$

für alle $v \in \mathcal{C}$ so dass $v = u$ auf $\partial\Omega$ und $\|v - u\|_{C^1(\overline{\Omega})} = \|v - u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{\alpha=1}^n \|\partial_{x^\alpha}(v - u)\|_{C^0(\overline{\Omega})} < \delta$ for some $\delta > 0$.

Satz 1.25. *Falls $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ein schwaches relatives Extremum von $\mathcal{F}$ ist unter der Nebenbedingung $G(u(x)) = 0$, so existieren Funktion $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, so dass u ein Extremum bezüglich $\mathcal{F}^*(u) = \int f^*(x, u(x), Du(x))dx$ ist, wobei $f^*(x, z, p) := f(x, z, p) + \sum_{j=1}^r \lambda_j(x)G^j(z)$.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass u die EL Gleichung bzgl. $\mathcal{F}^*$ auf Ω löst. Dazu sei $x_0 \in \Omega$ und $z_0 = u(x_0) \in M$. Es sei $B_R(x_0) \subset \Omega$, so dass $u(B_R(x_0)) \subset U$ wobei U ein lokale Koordinaten Umgebung von $z_0 \in M$ ist. $V \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ sei ein beliebiges Tangentialvektorfeld entlang u mit $\operatorname{supp} V \subset B_R(x_0)$. Es existiert ein $\psi : \overline{\Omega} \times [-t_0, t_0] \to \mathbb{R}^m$ mit $t_0 > 0$ von der Klasse C^1, so dass

(i) $\psi(x, t) = u(x) + tV(x) + o(t)$ as $t \to 0$,
(ii) $\psi(x, t) = u(x)$ für $(x, t) \in \partial\Omega \times [-t_0, t_0]$,
(iii) $\psi(\cdot, t) \in \mathcal{C}$ für jedes $t \in [-t_0, t_0]$.

Konstruktion von ψ:
Da U eine Koordinaten Umgebung ist, existiert ein C^1-Diffeomorphismus $\Phi : U \to V \subset \mathbb{R}^{m-r}$. Wir definieren ψ auf $B_R(x_0) \times [-t_0, t_0]$ durch

$$\Phi^{-1}(\Phi(u(x)) + tD\Phi V(u(x))) = \psi(x, t).$$

wobei wir $R > 0$ und $t_0 > 0$ hinreichend klein wählen, so dass $\Phi(u(x)) + tD\Phi V(u(x)) \in V$ für alle $(x, t) \in B_R(x_0) \times [-t_0, t_0]$. Dann gilt

(i) $\partial_t\psi(x, \cdot)|_{t=0} = D\Phi^{-1}D\Phi V(u(x)) = V(u(x))$,
(ii) $\psi(x, t) = \Phi^{-1}(\Phi(u(x))) = u(x)$ falls $x \in \partial\Omega$,
(iii) $\psi(x, t) \in M$ für alle $x \in \Omega$ und $t \in [-t_0, t_0]$.

Gemäß der Annahme gilt $\Phi(0) \leq \Phi(t)$ für $\Phi(t) := \mathcal{F}(\psi(\cdot, t))$ falls $t > 0$ hinreichend klein. Also folgt $\Phi'(0) = 0$ und damit $\delta\mathcal{F}(u, V) = 0$.

Da $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, folgt mit Satz 1.9

$$0 = \delta\mathcal{F}(u, V) = \int_\Omega \langle L_f(u), V\rangle dx$$

für alle $V \in C_c^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ tangential entlang u mit $\operatorname{supp} V \subset B_R(x_0)$. Aus Lemma 1.24 folgt

$$\Pi_{u(x)} L_f(u) = 0$$

Der Vektor $L_f(u)(x)$ steht also senkrecht auf $T_{u(x)}$ für alle $x \in \Omega$. Also ist $L_f(u)(x)$ eine linear Kombination der Normalenvektoren $\partial_z G^1(x, u(x)), \ldots, \partial_z G^r(x, u(x))$. Deshalb existieren Funktion $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in C^0(\Omega)$, so dass

$$L_{f^*}(u) = L_f(u) + \sum_{j=1}^r \lambda_j \partial_z G^j(\cdot, z) = 0.$$

□

Beispiel 1.26 (Harmonische Abbildungen nach Hyperflächen in $\mathbb{R}^{m+1}$). Sei

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx \quad \text{wobei} \quad |Du|^2 = \operatorname{spur}\left\{Du \cdot Du^T\right\} = \partial_{x^\alpha} u^i \partial_{x^\alpha} u^i.$$

die Dirichlet Energie von $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. Die Euler-Gleichung ist $\Delta u = 0$. Betrachte die Nebenbedingung $|u| = 1$. Das heisst, $u : \Omega \to S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Hier ist $G(x, u(x)) = \frac{1}{2}|u|^2 = 1$. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\Delta u = -\mu(x) u$$

für eine Funktion $\mu(x)$. Wir bestimmen μ. Zunächst folgt aus $|u| = 1$, dass $\mu = -u \cdot \Delta u$. Andererseit können wir $|u|^2 = 1$ zweimal differenzieren und erhalten

$$u \cdot \Delta u + |Du|^2 = 0.$$

Es ergibt sich $\mu = |Du|^2$.

Beispiel 1.27 (Geodätische in auf Hyperfläche im $\mathbb{R}^m$). Sei

$$M = \{z \in \mathbb{R}^m : G(z) = c\}$$

eine reguläre Hyperfläche, das heißt $\nabla G|_z \neq 0$ für alle $M \in S$. Geodätische sind Extrema von $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_a^b |u'|^2 dx$ mit $u \in C^2([a, b], M)$. Aus dem Satz folgt, dass für eine Geodätische ein $\lambda \in C^0([a, b], M)$ existiert mit

$$u''(x) = \lambda(x) \nabla G(u(x)).$$

Im Fall $M = \mathbb{S}_R^{m-1} = \left\{z : |z|^2 = R^2\right\}$ folgert man leicht, dass $u''(x) = -\frac{1}{R}u$. Das heißt, eine Geodätische in $\mathbb{S}^{m-1}$ ist Teil eines Großkreises der Antipodenpunkte schneidet.

5. Vorlesung

Teilweise frei/Transversale Randbedingungen. Sie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1-Gebiet und $G \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^r)$, so dass DG maximalen Rang hat auf der Menge

$$\{z \in \mathbb{R}^m : G(z) = 0\} = M$$

Dann ist M eine $m-r$-dimensionale Untermgft.

Wir sagen $V \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ist ein Tangentialvektorfeld entlang $u|_{\partial\Omega}$ falls $V(x) \in T_{u(x)}M$ für alle $x \in \partial\Omega$. Wir haben folgendes Lemma.

Lemma 1.28. *Sei $\psi \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^m)$, so dass*

$$\int_{\partial\Omega} \langle \psi(x), V(x) \rangle d\,\mathrm{vol}_{\partial\Omega}(x) = 0$$

für alle TangentialVF $V \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ entlang $u|_{\partial\Omega}$. Dann folgt $\Pi_{u(x)}\psi(x) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$.

Beweis. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und $z_0 = u(x_0)$. Wie im Beweis von Lemma 1.24 wählen wir $\tau_1, \dots, \tau_{m-r}, \nu_1, \dots, \nu_r$ auf einer Umgebung U von z_0. Wir wählen lokale Karte $\varphi : V \subset \Omega \to W$ um $x_0 \in V$, und $B_R(\varphi(x_0)) \subset W$, so dass $u \circ \varphi(B_R(x_0)) \subset U$. Der Rest des Beweise verläuft wie in Lemma 1.24. □

Wir betrachten folgendes Variationsproblem. Sei $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(x, u, Du)dx$ für

$$u \in \mathcal{C} = \left\{ v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) : G(v(x)) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega \right\}.$$

Wir sagen u ist ein schwaches relatives Minimum von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{C}$ falls $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$ für alle $v \in \mathcal{C}$ mit $\|u - v\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \delta$.

Wir sagen u ist stationär, falls $\delta\mathcal{F}(u, V) = 0$ für alle TangentialVFer $V \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ entlang $u|_{\partial\Omega}$, Dann ist u stationär, falls u ein schwaches relatives Minimum.

Satz 1.29. *Falls $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ein stationärer Punkt von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{C}$ ist, dann erfüllt u die EL Gleichung $L_f(u) = 0$ auf Ω und die nicht-lineare Randbedingung*

$$\underbrace{(\nu^\alpha \partial_{p^1_\alpha} f|_{(x,u(x),Du(x)}, \dots, \nu^\alpha \partial_{p^m_\alpha} f|_{(x,u(x),Du(x)})}_{=:Z} \perp T_{u(x)}M. \tag{4}$$

Wir sagen u ist am Rand $\partial\Omega$ transversal zu M. Das heißt der Vektor $Z(x) = (Z_1, \dots, Z_n)(x)$ steht senkrecht auf (ist transveral zu) M für alle $x \in \partial\Omega$.

Beweis. Da alle $V \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tangential entlang $u|_{\partial\Omega}$ sind, folgt aus der Eigenschaft stationär, dass $\delta\mathcal{F}(u, V) = 0$ für alle $V \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und damit auch $L_f(u) = 0$ auf Ω. Es folgt mit Lemma 1.3, dass

$$\int_{\partial\Omega} \nu_\alpha(x) \partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u(x),Du(x)} V^i(x) d\,\mathrm{vol}_{\partial\Omega} = 0$$

für alle TangentialVfer $V \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ entlang $u|_{\partial\Omega}$. Hence, the previous Lemma yields

$$\Pi_{u(x)}(\nu_\alpha(x)\partial_{p^1_\alpha} f|_{(x,u(x),Du(x))}, \dots, \nu_\alpha(x)\partial_{p^m_\alpha} f|_{(x,u(x),Du(x))}) = 0.$$

□

Man sieht leicht die folgende Umkehrung.

Satz 1.30. *Ein Extremum $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ von $\mathcal{F}$ ist stationär in der Klasse $\mathcal{C}$ falls u transversal zu M ist.*

Beispiel 1.31. Betrachte das Dirichlet Integral

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx.$$

Dabei ist $f(z,p) = \frac{1}{2}|p|^2 = \frac{1}{2}(p^i_\alpha)^2$ und $\partial_{p^i_\alpha} f(z,p) = p^i_\alpha$. Die Transversalitäts Bedingung ergibt hier

$$\nu_\alpha(x)\partial_{x^\alpha} u^i|_x = \partial_\nu u|_x \perp T_{u(x)}M.$$

Variation der unabhängigen Variablen. Wir hatten bisher notwendige Bedingungen für Minimierer von $\mathcal{F}$ hergeleitet von der Form

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = 0 \quad \forall\ \varphi \in C^\infty_c(\Omega,\mathbb{R}^m) \quad \text{oder} \quad L_f(u) = 0.$$

Jetzt betrachten wir eine 1-Parameterfamilie von Diffeomorhismen $\varphi_t : \Omega \to \Omega$, $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ so dass $\varphi_0 = \mathrm{id}_\Omega$ und $\varphi \in C^1(\Omega \times (-\epsilon,\epsilon),\Omega)$. φ_t induziert ein zeitabhängiges Vektorfeld

$$\xi_t(x) = \frac{d}{dt}\varphi_t(x).$$

$\xi_0 =: \xi$ heißt initiales Geschwindigkeitsvektorfeld.

Andererseits: Falls ein Vektorfeld $\xi \in C^1_c(\Omega,\mathbb{R}^m)$ gegeben ist. Dann existiert ein $\varphi_t : \Omega \to \Omega$ $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ - der Fluss von ξ - eine 1-Parameter Familie von C^1-Diffeomorphismen mit $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = \xi(\varphi_t(x))$. Dann gilt auerdem $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

Definition 1.32. Seien ξ und φ_t gegeben wie eben, und sei $u \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$. Dann heißt

$$\partial\mathcal{F}(u,\xi) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_\Omega f(x,u(\varphi_t(x)),D(u\circ\varphi_t)(x))dx \tag{5}$$

innere Variation von $\mathcal{F}$ bzgl. ξ.

Lemma 1.33. *Sei $u \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ und $\xi \in C^\infty_c(\Omega,\mathbb{R}^m)$. Dann ist die innere Variation gegeben durch*

$$\partial\mathcal{F}(u)\xi = \int_\Omega \left[\partial_{p^i_\beta} f(\dots)\partial_{x^\alpha}u^i\partial_{x^\beta}\xi^\alpha - f(\dots)\partial_{x^\alpha}\xi^\alpha - \partial_{x^\alpha}f(\dots)\xi^\alpha\right]dx.$$

Beweis. Zunächst

$$\int_\Omega f(x,u(\varphi_t(x)),D(u\circ\varphi_t)(x))dx = \int_\Omega f(x,u(\varphi_t(x)),Du(\varphi_t(x))\cdot D\varphi_t(x))dx =: \Phi(t)$$

Wegen dem Transformationssatz für Gebietsintegrale folgt

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \int_\Omega f(\varphi_t^{-1}\varphi_t(x),u(\varphi_t(x)),Du(\varphi_t(x))\cdot D\varphi_t(\varphi_t^{-1}\varphi_t(x)))dx\\ &= \int_\Omega f(\varphi_t^{-1}(y),u(y),Du(y)\cdot D\varphi_t(\varphi_t^{-1}(y)))\det D\varphi_t^{-1}(y)dy\end{aligned}$$

Wir leiten ab nach t bei $t=0$

$$\begin{aligned}\Phi'(0) &= \int_\Omega \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[f(\varphi_t^{-1}(y),u(y),Du(y)\cdot D\varphi_t(\varphi_t^{-1}(y)))\det D\varphi_t^{-1}(y)\right]dy\\ &= \int_\Omega \Big[\partial_{x^\alpha}f(y,u(y),Du(y))\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[\varphi_t^{-1}]^\alpha(y)\\ &\quad + \partial_{p^i_\alpha}f(y,u(y),Du(y))\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[Du(y)\cdot D\varphi_t(\varphi_t^{-1}(y))\right]^{p^i_\alpha}\\ &\quad + f(y,u(y),Du(y))\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\det D\varphi_t^{-1}(y)\Big]dy \qquad (6)\end{aligned}$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^{-1}(y) &= -\xi(y) \\
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det D\varphi_t^{-1}(y) &= -\operatorname{div}\xi(y) = -\partial_{x^\alpha}\xi^\alpha \\
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} D\varphi_t(\varphi_t^{-1}(y)) &= D\xi(y) + \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} D\varphi_0(\varphi_t^{-1}(y)) = D\xi(y) + \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} E_n = D\xi(y).
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in (6) ergibt das

$$
\Phi'(0) = \int_\Omega \Big[-\partial_{x^\alpha} f(\dots)\xi^\alpha(y) + \partial_{p^i_\alpha} f(\dots)\partial_{x^\beta} u^i(y)\partial_{x^\alpha}\xi^\beta(y) - f(\dots)\operatorname{div}\xi(y)\Big] dy
$$

Das ist die Behauptung. □

Bemerkung 1.34. Wir schreiben auch

$$
\partial f(u)\xi(y) := -\partial_{x^\alpha} f(\dots)\xi^\alpha(y) + \partial_{p^i_\alpha} f(\dots)\partial_{x^\beta} u^i(y)\cdot\partial_{x^\alpha}\xi^\beta(y) - f(\dots)\operatorname{div}\xi(y)
$$

und damit

$$
\partial\mathcal{F}(u)\xi = \int_\Omega \partial f(u)\xi(x)dx.
$$

Definition 1.35 (Hamiltontensor)**.** Der Hamiltontensor (oder Energie-Impuls-Tensor) ist definiert durch

$$
\partial_{p^i_\alpha} f(x,u,p)p^i_\beta - \delta^\alpha_\beta f(x,u,p) = T^\beta_\alpha(x,u,p)
$$

Dann schreibt sich die innere Variation wie folgt

$$
\partial\mathcal{F}(u)\xi = \int_\Omega \left[T^\beta_\alpha(x,u,Du)\partial_{x^\alpha}\xi^\beta - \partial_{x^\alpha} f(\dots)\xi^\alpha\right] dy.
$$

Wir sagen eine Abbildung $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ist ein *inneres Extremum* von $\mathcal{F}$ falls

$$
\partial\mathcal{F}(u)\xi = 0 \quad \forall \xi \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^n).
$$

6. Vorlesung

Wiederholung: Sei $\xi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld, und sei $\varphi_t : \Omega \to \Omega$ eine 1-Parameter Familie von C^1-Diffeomorphismen, so dass $\varphi_0(x) = x$ und $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t = \xi$. Sei $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ und $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(\cdot, u, Du)$.

Die innere Variation von $\mathcal{F}$ bei u bzgl. ξ is

$$\partial\mathcal{F}(u,\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\mathcal{F}(u \circ \varphi_t) = \int \left[T_\alpha^\beta(x,u,Du)\partial_{x^\alpha}\xi^\beta - \partial_{x^\alpha} f(x,u,Du)\xi^\alpha\right] dx.$$

wobei $T_\alpha^\beta(x,u,Du)a_\alpha^\beta = \partial_{p_\alpha^i} f|_{(x,u,Du)}\partial_{x^\beta}u^i a_\alpha^\beta - f(x,u,Du)a_\alpha^\alpha$.

Satz 1.36. *Sei $f \in C^2(\dots)$ und $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ sei ein inneres Extremum von $\mathcal{F}$. Dann erfüllt u die Noether Gleichungen*

$$\partial_{x^\alpha}T_\alpha^\beta(x,u,Du) - \partial_{x^\alpha} f(x,u,Du) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{div} T_\alpha(x,u,Du) = \partial_{x^\alpha} f(x,u,Du).$$

Andererseits, ist jede C^2-Lösung u der Noether-Gleichung ein inneres Extremum von $\mathcal{F}$.

Beweis. Jedes innere Extremum u von $\mathcal{F}$ erfüllt

$$\int_\Omega \left[T_\alpha^\beta(x,u,Du)\partial_{x^\alpha}\xi^\beta - \partial_{x^\alpha} f(\dots)\xi^\alpha\right] dy = 0 \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Falls $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, erhalten wir durch partielle Integration

$$-\int_\Omega \left[\partial_{x^\alpha}T_\alpha^\beta(\dots) - \partial_{x^\beta} f(\dots)\right] \xi^\beta dy = 0.$$

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung liefert das Resultat. Die andere Richtung folgt analog.

Bemerkung. Die Noether-Gleichungen sind der Gegenpart zur Euler-Lagrange-Gleichung.

Lemma 1.37. *Fall $f \in C^2$ and $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, dann*

$$\partial\mathcal{F}(u)\xi = \int_\Omega (L_f(u) \cdot Du) \cdot \xi dx = -\int_\Omega \left(\partial_{x^\beta}\partial_{p_\beta^i} f - \partial_{z^i} f\right) \partial_{x^\alpha}u^i\xi^\alpha dx \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Beweis. Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
-\partial\mathcal{F}(u,\xi) &= \int_\Omega \left[\partial_{x^\alpha} f|_{(x,u,Du)}\xi^\alpha(x) + f(x,u,Du)\partial_{x^\alpha}\xi^\alpha - \partial_{p_\beta^i} f|_{(x,u,Du)}\partial_{x^\alpha}u^i|_x\partial_{x^\beta}\xi^\alpha|_x\right] dx \\
&= \int_\Omega \left[\partial_{x^\alpha} f|_{(x,u,Du)} - \partial_{x^\alpha}(f(x,u,Du)) + \partial_{x^\beta}(\partial_{p_\beta^i} f|_{(x,u,Du)}\partial_{x^\alpha}u^i|_x)\right] \xi^\alpha dx \\
&= \int_\Omega \Big[\partial_{x^\alpha} f|_{(x,u,Du)} - \partial_{x^\alpha} f|_{(x,u,Du)} - \partial_{z^i} f|_{(x,u,Du)}\partial_{x^\alpha}u^i|_x \\
&\qquad - \partial_{p_\alpha^i} f|_{(x,u,Du)}\partial_{x^\alpha x^\beta}u^i|_x + \partial_{x^\beta}(\partial_{p_\beta^i} f|_{(x,u,Du)})\partial_{x^\alpha}u^i|_x + \partial_{p_\beta^i} f|_{(x,u,Du)}\partial_{x^\beta x^\alpha}u^i|_x)\Big]\xi^\alpha dx \\
&= \int_\Omega \left[\partial_{x^\beta}\partial_{p_\beta^i} f - \partial_{z^i}\right] \partial_{x^\alpha}u^i\xi^\alpha dx = -\int_\Omega (L_f(u) \cdot Du) \cdot \xi dx.
\end{aligned}$$

□

Das Fundamentallemma liefert folgendes

Folgerung 1.38. *$u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ist ein inneres Extremum von $\mathcal{F}$ genau dann wenn es in Ω die Gleichungen*

$$L_f(u) \cdot Du = 0$$

erfüllt.

Bemerkung 1.39. Es folgt also, dass die Noether-Gleichungen äquivalent durch

$$L_f(u) \cdot Du = 0$$

geschrieben werden können. Das heißt $L_f(u)$ steht senkrecht auf den Vektoren $\partial_{x^\alpha} u$ für $\alpha = 1, \dots, n$.

Falls $1 \leq n \leq m$, dann ist $u(x) = z$ eine parametrisierte n-dimensionale Untermgft M in $\mathbb{R}^m$. Nun, falls u ein Extremum der Klasse C^2 von $\mathcal{F}$ ist, besagen die Noether-Gleichungen, dass $L_f(u)$ senkrecht auf M steht, d.h. $L_f(u) \perp T_u M$.

Folgerung 1.40. *Jedes Extremum der Klasse C^2 ist auch ein inneres Extremum.*

Allgemeine Variationsformel.

Lemma 1.41. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi \in C^2(\Omega \times (-\delta, \delta), \mathbb{R}^n)$, $\varphi = \varphi(t, x)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Sei $\varphi_t : \Omega \to \Omega$ ein C^2-Diffeomorphismus.*
(2) $\varphi_0 = \mathrm{id}_\Omega$.

Sei $U \subset \Omega$. Dann gilt für $g \in C^1(\Omega \times (-\delta, \delta))$ und $\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(U)} g(y, t) dy \Big|_{t=0} = \int_U [\partial_t|_{t=0} g(x, t) + \operatorname{div}(g(x, 0)\xi(x))] \, dx.$$

Beweis. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} D\varphi_t(x) = D\xi|_x$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \det D\varphi_t(x) = \operatorname{div} \xi(x).$$

Mit dem Transformationssatz folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(U)} g(t, y) dy|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \int_U g(t, \varphi_t(x)) \det D\varphi_t(x) dx|_{t=0} \\ &= \int_U \big[\partial_t|_0 g(x, 0) + \underbrace{\langle Dg, \xi \rangle(x, 0) + g(x, 0) \operatorname{div} \xi}_{=\operatorname{div}(g\xi)} \big] dx.\end{aligned}$$

C^2 ist notwendig damit $\frac{d}{dt}\partial_x = \partial_x \frac{d}{dt}$. ◻

Beispiel 1.42 (Kontinuitätsgleichung). Betrachte Strömung $\varphi : (-\delta, \delta) \times \Omega \to \Omega$ mit Geschwindigkeitsfeld $\xi = \frac{d}{dt}|_0 \varphi_t$. wie im vorigen Lemma. Sei $\rho = \rho(t, y)$ die zeitabhängige Dichte in C^1. Dann ist

$$m(t, V) = \int_V \rho(t, y) dy$$

die zeitabhängig Gesamtmasse im Gebiet $V \subset \Omega$.

Wie wird die Masse durch die Strömung transportiert?

$$0 = \frac{d}{dt} m(t, \varphi_t(U))|_{t=0} = \int_U (\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\xi)).$$

Massenerhaltung für all $U \subset \Omega$ is äquivalent zur Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\xi) = 0.$$

Dies folgt mit Hilfe des Lebesgue'schen Dichte Satzes (Lebesgue density theorem).

Satz 1.43 (Allgemeine Variationsformel)**.** *Sei $U \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi \in C^2(\Omega \times (-\delta, \delta), \mathbb{R}^n)$ mit*

(1) *Sei $\varphi_t : \Omega \to \Omega$ ein C^2-Diffeomorphismus.*

(2) $\varphi_0 = \mathrm{id}_\Omega$.

Sei weiter $u \in C^2(\Omega \times (-\delta,\delta), \mathbb{R}^m)$. *Setze*

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} \quad \textit{und} \quad \eta = \frac{\partial}{\partial t} u|_{t=0}.$$

Insbesondere ist $u(t,\cdot) = u_0 + t\varphi$ *für* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ *zulässig.*

Dann gilt für $\mathcal{F}(u,U) = \int_U f(\cdot,u,Du)$ *die Formel*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}(u_t \circ \varphi_t^{-1}, \varphi_t(U)) = \int_U \langle L_f(u), \eta - Du\cdot\xi\rangle + \int_U \mathrm{div}(T(\dots)\xi + D_p f(\dots)\eta).$$

Dabei ist $D_p f(\dots)\eta = \partial_{p^i_\alpha} f(\cdot,u,Du)\eta^i$.

Beweis. Setze $\nu_t = u_t \circ \varphi_t^{-1}$ und $\chi = \frac{\partial \nu_t}{\partial t}\big|_{t=0}$. Wir berechnen dann mit Lemma 1.41

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}(\nu_t, \varphi_t(U))|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\varphi_t(U)} f(x,\nu_t,D\nu_t)dx \\
&= \int_U \frac{\partial}{\partial t} f(x,\nu_t,D\nu_t)|_{t=0} + \int_U \mathrm{div}(f(\dots)\xi) \\
&= \int_U \left[\partial_{z^i} f|_{(x,u,Du)}\chi^i + \partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\partial_\alpha \chi^i + \partial_{x^\alpha}(f(x,u,Du)\xi^\alpha(x))\right] dx
\end{aligned}$$

Wir rechnen weiter mit Anwendung der Produktregel auf $\partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)}\partial_\alpha\chi^i$(man beachte, bei partieller Integrations würden Randterme auftreten)

$$= \int_U \left(-\partial_\alpha\left[\partial_{p^i_\alpha} f|_{(\dots)}\right] + \partial_{z^i} f|_{(\dots)}\right)\chi^i + \int_U \partial_\alpha\left(f(\dots)\xi^\alpha + \partial_{p^i_\alpha} f(\dots)\chi^i\right) = (*)$$

Außerdem gilt

$$\chi = \frac{\partial}{\partial t} v_t\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} u_t \circ \varphi_t^{-1}\Big|_{t=0} = \eta - Du\cdot\xi$$

denn

$$\xi(x) + \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi_t^{-1}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi_t(x) + \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi_t^{-1}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi_t \circ \varphi_t^{-1}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_0 x = 0$$

Einsetzen in $(*)$ ergibt

$$\begin{aligned}
&= \int_U \underbrace{\left\{-\partial_\alpha\left[\partial_{p^i_\alpha} f(\dots)\right] + \partial_{z^i} f(\dots)\right\}}_{=L_f(u)} \cdot \left(\eta^i - [Du\cdot\xi]^i\right) \\
&+ \int_U \partial_\alpha(\underbrace{f(\dots)\xi^\alpha - \partial_{p^i_\alpha} f(\dots)[Du\cdot\xi]^i}_{T^\beta_\alpha(u)\xi^\beta} + \partial_{p^i_\alpha} f(\dots)\eta^i).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Insbesondere folgt für $U = \Omega$ und $\xi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}(u_t \circ \varphi_t^{-1}) = \int_\Omega \langle L_f(u), \chi\rangle + \int_\Omega \mathrm{div}(D_p f(\dots)\eta) = -\delta\mathcal{F}(u,\chi) + \int_\Omega \mathrm{div}(D_p f(\dots)\eta)$$

7. Vorlesung.

Beispiel 1.44. Falls $f = f(z, p)$ nicht von x abhängt, werden die Noehter Gleichungen für ein inneres Extremum zu

$$\operatorname{div} T_\alpha^\beta(u, Du) = \partial_{x^\alpha}\left[\partial_{p^i_\alpha} f|_{(u,Du)} \partial_{x^\beta} u^i|_x - f(u, Du)\right] = 0.$$

Falls $n = 1$, ergibt das $\partial_{p^i} f|_{(u,u')}(u^i)' - f(u, u') = const.$

Insbesondere, falls $f(z, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - V(z)$, dann ist das

$$\langle (u^i)', (u^i)' \rangle - f(u, u') = \frac{1}{2}|u'|^2 + V(u) = E(u)$$

die Gesamtenergie eines Teilchens, dass sich in einem konservativen Kraftfeld ∇V befindet.

Nun betrachten wir eine 1-Parameterfamilie von C^2-Diffeomorphismen

$$(F_t, G_t) : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \Omega \times \mathbb{R}^m, \quad (x, z) \mapsto (F_t(x, z), G_t(x, z)),$$

so dass $F_t(x, z) = x$ und $G_t(x, z) = z$. Wir definiere die zugehörigen initialen Vektorfelder

$$X(x, z) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, x, z), \quad Z(x, z) = \frac{\partial G}{\partial t}(0, x, z).$$

Hierdurch wird für jedes $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ eine Schar von transformierten Abbildungen erzeugt. Wir transformieren die unabhängige Variablen $x \in \Omega$ durch

$$\varphi_t(x) = F_t(x, u(x)), \quad \xi = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \varphi_t(x) = X(x, u(x)).$$

und die abhängige Variable $z \in \mathbb{R}^m$ durch

$$u_t(x) = G_t(x, u(x)), \eta = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} u_t(x) = Z(x, u(x)).$$

Definition 1.45. Das Variationsintegral $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(\cdot, u, Du)$ heißt infinitesimal invariant bzgl. der Transformation (F_t, G_t), falls

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}(u_t \circ \varphi_t^{-1}, \varphi_t(U)) = 0$$

für alle $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, und $U \subset \Omega$ mit $\overline{U}$ kompakt.

Bemerkung.

Satz 1.46 (Emmy Noether, 1918)**.** *Das Variationsintegral $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(\cdot, u, Du)$ sei infinitesimal invariant bzgl. (F_t, G_t).*

Dann gilt für jede Lösung $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ von $L_f(u) = 0$ der Erhaltungsatz

$$\operatorname{div}(T(u)\xi + D_p f|_{(\dots)}\eta) = \partial_{x\alpha}\left[\partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)} \partial_{x_\beta} u^i|_x \xi^\alpha(x) + \partial_{p^i_\alpha} f|_{(x,u,Du)} \eta^i(x)\right] = 0.$$

Dabei ist T der Hamiltontensor und ξ und η sind definiert wie zuvor.

Beweis. Sei $U \subset \Omega$, so dass $\overline{U} \subset \Omega$ und kompakt. Ein Problem ist, dass $\varphi_t : \Omega \to \Omega$ eventuell kein Diffeomorphismus ist. Aber beachte, dass im Beweis der allgemeinen Variationsformel, es ausreicht, wenn $\varphi_t|_U : U \to \varphi_t(U)$ ein C^2-Diffeomorphismus ist.

Wir betrachten den Fluss $\psi_t(x) = x + t\xi(x)$ des Vektorfeldes ξ. Dann ist $\psi_t : U \to \psi(U)$ ein Diffeomorphismus. Aufgrund der Annahme, dass $(F_t, G_t) \in C^2$, gilt auch, dass $\varphi_t(x) = x + t\xi(x) + o(t)$, bzw. $\varphi_t^{-1}(x) = x - t\xi + o(t)$. Zusätzlich können wir $u_t(x)$ in x Taylor-entwickeln:

$$u_t(x + h) = u_t(x) + Du_t(x) \cdot h + o(h).$$

In der selben Weise können wir $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ Taylor-entwickeln. Zusammen ergibt das, dass im Fall $\overline{U} \subset \Omega$ kompakt, φ durch ψ wie folgt ersetzt werden kann:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u_t \circ \varphi_t^{-1}, \varphi_t(U))|_{t=0} &= \int_{\varphi_t(U)} f(x, u_t \circ \varphi_t^{-1}, D(u \circ \varphi_t^{-1})) \\ &= \int_{\psi_t(U)} f(x, u_t \circ \psi_t^{-1}, D(u \circ \psi_t^{-1})) + o(t) = \mathcal{F}(u_t \circ \psi_t^{-1}, \psi(U)) + o(t)\end{aligned}$$

mit einem Fehler $o(t)$. Beachte, dass $\varphi_t(U) \subset B_{Co(t)}(\psi_t(U))$, und $\mathcal{L}^n(B_{Co(t)}(\psi_t(U))\backslash\psi_t(U)) \leq \widetilde{C} \cdot o(t)$ für Konstanten C und $\widetilde{C} > 0$. Dann folgt mit der Voraussetzung an $\mathcal{F}$ und der allgemeinen Variationsformel

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}\mathcal{F}(u_t \circ \varphi_t^{-1}, \varphi_t(U))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\mathcal{F}(u_t \circ \psi_t^{-1}, \psi_t(U))|_{t=0} \\ &= \int_U \langle \underbrace{L_f(u)}_{=0}, \eta - Du \cdot \xi\rangle + \int_U \operatorname{div}(H_f(\dots)\xi + D_p f(\dots)\eta).\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung, da die Gleichung gilt für alle $U \subset \Omega$ offen. □

Beispiel 1.47. Sei $n = 1$ und $m = 4$,

$$f = f(z,p) = \frac{1}{2}m|(z^1, z^2)|^2 + \frac{1}{2}M|(z^3, z^4)|^2 - \sum_{i<j} \frac{mM}{|(z^1, z^2) - (z^3, z^4)|}$$

und u ein Extremum für $\mathcal{F}(u) = \int f(u, u')$. Sei $\varphi_t(x) = (x + t)$ und $u_t = u$. Dann ist $\xi(x) = 1$ und $\eta = 0$, und die Erhaltungsgleichung wird zu

$$\operatorname{div} T^\beta(u, u') = 0.$$

Oder sei $\varphi_t(x) = x$ und $u_t = (u^1 + t, u^2, u^3 + t, u^4)$. Dann gilt $\xi = 0$, $\eta = (1, 0, 1, 0)$ und $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u_t)$. Es folgt

$$\partial_{p^1} f|_{(u,u')} + \partial_{p^2} f|_{(u,u')} = const \iff m(u^1)' + M(u^3)' = const.$$

Und ensprechend $m(u^2)' + M(u^4)' = const$ falls $u_t = (u^1, u^2 + t, u^3, u^4 + t)$. (Impulserhaltung).

Beispiel 1.48 (Pohozaev-Identität). Betrachte auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ die Streckungen

$$F_t(x) = e^t x,\ \varphi_t(x) = e^t x,\ \xi(x) = x$$
$$G_t(z) = e^{\lambda t} z,\ u(t, x) = e^{\lambda t} u(x), \eta(x) = \lambda u(x).$$

Wir interessieren uns für die Invarianz unter dieser Transformation des Variationsintegrals

$$\mathcal{F}(u) = \int_U (\frac{1}{2}|Du|^2 - |u|^p) \quad (n \geq 3)$$

Berechne

$$(u_t \circ \varphi_t^{-1})(y) = e^{\lambda t} u(e^{-t} y)$$
$$D(u_t \circ \varphi_t^{-1}(y)) = e^{\lambda t - t} Du(e^{-t} y).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u_t \circ \varphi_t^{-1}, \varphi_t(U)) &= \int_{\varphi_t^{-1}(U)} \left(\frac{1}{2}e^{2(\lambda-1)t|Du|^2(e^{-t}y} - \frac{1}{p}e^{p\lambda t}|u(e^{-t}y)|^p\right) dy \\ &= \int_U \left(\frac{1}{2}e^{(n+2\lambda-2)t}|Du(x)|^2 - \frac{1}{p}e^{(n+p\lambda)t}|u(x)|^p\right) dx.\end{aligned}$$

Man sieht, das Funktional ist invariant falls

$$\begin{aligned}&n + 2\lambda - 2 = 0 \quad \text{und} \quad n + p\lambda = 0 \\ \iff\ &\lambda = -\frac{n-2}{2} \quad \text{und} \quad p = \frac{2n}{n-2}.\end{aligned}$$

Seien λ und p so gewählt.

$$T_f\xi = (\frac{1}{2}|Du|^2 - \frac{1}{p}|u|^p)\xi - \langle Du, \xi\rangle Du$$

$$D_p f(\dots)\eta = -...$$

Dann lautet der Erhaltungssatz mit $p = \frac{2n}{n-2}$

Angenommen u ist Lösung zu Randwerten $u|_{\partial\Omega} = 0$, dann folgt mit dem Satz von Gauß

$$0 = -\int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 \langle \xi, \nu\rangle.$$

Falls $\langle \xi, \nu\rangle > 0$ auf $\partial\Omega$, dann ist Ω sternförming und es folgt $Du = 0$ auf $\partial\Omega$.

Pohozaev folgerte damit, dass $Du = 0$ auf Ω, und zeigte also, dass es auf sternförmignen Gebieten keine Lösungen ungleich 0 geben kann.

8. Vorlesung

2. Funktionalanalysis

Warum Funktionalanalysis?

Unser Ziel ist Funktionale der Form $\mathcal{F}(u) = \int f(x,u,Du)$ in einer geeigneten Klasse $\mathcal{C}$ zu minimieren. Zum Beispiel, sei $\mathcal{C} = C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \cap \{u : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Angenommen $\inf_{u\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(u) > \infty$. Betrachte zum Beispiel $f = |Du|^p$, oder $f = f(x,u,Du) \geq \lambda |Du|^p$ für ein $\lambda > 0$ und $p \in (1,\infty)$. Dann wähle eine Minimalfolge $u_k \in \mathcal{C}$, d.h.

$$\mathcal{F}(u_k) \to \inf_{u\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(u).$$

Frage: Existiert eine "konvergente" Teilfolge?

Es existiert ein $C > 0$, so dass $\mathcal{F}(u_k) < C$, und folglich

$$\int |Du_k|^p \leq \frac{C}{\lambda}.$$

Also ist Du_k beschränkt in $L^p(dx)$. Diese Information reicht aber nicht aus, um Konvergenz gegen ein $u \in C^1(\overline{\Omega})$ zu etablieren.

In $L^p(dx)$ konvergieren beschränkte Folgen im Allgemeinen nicht. Lösung: Topologie der schwachen Konvergenz. **Dualräume.**

Definition 2.1. Seien X, Y Banachräume. $L(X,Y)$ sei die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen zwischen X und Y, d.h. falls $A \in L(X,Y)$ dann $\sup_{\|v\|\leq 1} \|Av\| = \|A\| < \infty$.

$X' = L(X, \mathbb{R})$ heißt der Dualraum von X.

Bemerkung. Für $A : X \to Y$ linear sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\|A\| < \infty$
(ii) A ist stetig.
(iii) A ist stetig in $0 \in X$.

Zuerst wollen wir Dualräume der L^p-Räume $L^p(\mu)$ für $p \in [1,\infty)$ charakterisieren.

Definition 2.2. Sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum. Dann

(i) $u \in L^p(\mu) \iff \int |u|^p d\mu = \|u\|_{L^p}^p < \infty$.
(ii) $u \in L^\infty(\mu) \iff \inf\{\delta > 0 : \mu(\{x \in M : u(x) \geq \delta\} = 0\} = \|u\|_{L^\infty} < \infty$.

Bemerkung. Ist $\mu(M) < \infty$ und $u \in L^p(\mu)$ für ein p, dann $\|u\|_{L^p} \to \|u\|_{L^\infty}$.

Lemma 2.3. *Sei μ ein Maßauf M. Dann gilt*

(i) *Für $1 < p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist die Abbildung $J : L^q(\mu) \to L^p(\mu)'$ gegeben durch $(Jv)(u) = \int vud\mu$ eine isometrische Einbettung.*
(ii) *Ist μ σ-endlich, so ist $J : L^\infty(\mu) \to L^1(\mu)'$ durch $(Jv)(u) = \int vud\mu$ ebenfalls eine isometrische Einbettung.*

Beweis. Hölder Ungleichung für $p \in [1,\infty]$:

$$|J(v)(u)| \leq \|v\|_{L^q} \|u\|_{L^p} \Rightarrow \|Jv\| \leq \|v\|_{L^q}.$$

Sei $p \in (1,\infty)$ und $v \in L^q(\mu) \setminus \{0\}$

$$D(v) = \begin{cases} \|v\|_{L^q}^{2-q} |v|^{q-2} v & \text{falls } v \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne

$$\|D(v)\|_{L^p} = \|v\|_{L^q}^{2-q} \left(\int |v|^{(q-1)p} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|v\|_{L^q} \quad \text{da} \quad p = \frac{q}{q-1}.$$

Auerdem $J(v)(Dv) = \|v\|_{L^q}^2$. Also folgt $\|J(v)\| \geq \|v\|_{L^q}$. Falls $p = \infty$ analog.

(ii): Sei $p = 1$. σ-endlich heißt, es gibt eine Ausschöpfung $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ von M ($\bigcup M_k = M$) mit $\mu(M_k) < \infty$. Für $\delta > 0$ und $v \in L^\infty(\mu)$ definieren wir

$$E(k,\delta) = \{x \in M_k : |v(x)| \geq \|v\|_{L^\infty} - \delta\}.$$

Da $v \in L^\infty(\mu)$ gilt $\mu(\{x \in M : |v(x)| > \|v\|_{L^\infty} - \delta\}) > 0$ für alle $\delta > 0$, und somit $\mu(E(k,\delta)) > 0$ für ein k hinreichend groß.

$$u = \begin{cases} 1_{E(k,\delta)} \frac{v}{|v|} & \text{falls } v \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\|v\|_{L^1} = \int_{E(k,\delta)} 1 d\mu = \mu(E(k,\delta))$ und

$$J(v)(u) = \int_{E(k,\delta)} |v| d\mu \geq (\|v\|_{L^\infty} - \delta)\mu(E(k,\delta)).$$

Es folgt $\|Jv\| \geq \|v\|_{L^\infty} - \delta$. Da $\delta > 0$ beliebig, folgt die Behauptung.

Satz 2.4. *Für $p \in (1,\infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist die Abbildung $J : L^q(\mu) \to L^p(\mu)'$ aus Lemma 2.3 eine surjektive Isometrie.*
Ist μ außerdem σ-endlich, so gilt das auch für $p = 1$.

Bemerkung. $J : L^1(\mu) \to L^\infty(\mu)'$ ist im allgemeinen nicht surjektiv. (Raum beschränkter, unendlicher Folgen.)

Beweis.

Lemma 2.5. *Für alle $p \in (1,\infty)$ is $K = \{u \in L^p(\mu) : \|u\|_{L^p} \leq 1\}$ ist gleichmässig konvex. Das heißt: $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, so dass*

$$\|u\|_{L^p} = \|v\|_{L^p} = 1 \;\&\; \left\|\tfrac{1}{2}(v+u)\right\|_{L^p} \geq (1-\delta) \implies \|u-v\|_{L^p} \leq \epsilon.$$

Sei $\varphi \in L^p(\mu)'$ gegeben.

Schritt 1: Dann existiert $u_0 \in L^p(\mu)$, so dass $\varphi(u_0) = \|\varphi\|$. Ohne Einschränkung sei $\|\varphi\| = 1$.
Wähle Maximalfolge u_k mit $\|u_k\|_{L^p} = 1$. Falls $\delta > 0$, folgt für k, l hinreichend groß

$$1 - \delta \leq \frac{\varphi(u_k) + \varphi(u_l)}{2} = \varphi\left(\tfrac{1}{2}(u_k + u_l)\right) \leq \left\|\tfrac{1}{2}(u_k + u_l)\right\|.$$

Weil $L^p(\mu)$ gleichmässig konvex, folgt $\|u_k - u_l\| < \epsilon \Rightarrow$ Cauchyfolge. Es existiert ein Grenzwert u_0. Mit Stetigkeit von φ folgt die Aussage.

Schritt 2: Es gilt $\varphi = JD(u_0)$, wobei $D(u_0)$ definiert ist wie im Beweis von Lemma 2.3.
Wir berechnen die Ableitung

$$\partial_t |u_0 + tu|^p = \begin{cases} p|u_0 + tu|^{p-2}(u_0 + tu)u & \text{falls} u_0 + tu \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $|t| \leq 1$ haben wir eine Majorante $|\partial_t |u_0 + tu|^p \leq p(|u_0| + |u|)^p \in L^1(\mu)$. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \|u_0 + tu\|_{L^p} = \int |u_0|^{p-2} u_0 u d\mu = JD(u_0)(u) \quad (\text{Beachte } \|u_0\| = 1).$$

Also auch

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \frac{u_0 + tu}{\|u_0 + tu\|_{L^p}} = u - JDu_0(u)u_0.$$

Zusammen mit Schritt 1 folgt dann

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi\left(\tfrac{u_0+tu}{\|u_0+tu\|_{L^p}}\right) = \varphi(u) - JD(u_0)(u).$$

Schritt 3. Der Fall $p=1$ (μ is σ-endlich).
Sei $E \subset X$ messbar mit $\mu(E) < \infty$ und für $p \geq 1$ definieren wir

$$\varphi_p : L^p(\mu) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(u) = \varphi(1_E u).$$

Es gilt $|\varphi_p(u)| \leq \|\varphi\| \, \mu(E)^{\frac{1}{q}} \, \|u\|_{L^p}$. Also ist $\varphi_p \in L^p(\mu)'$.
Nach Schritt 1 und 2 gibt es ein $v_p \in L^q(\mu)$ mit $Jv_p(u) = \varphi_p(u) = \varphi(1_E u)$ für alle $u \in L^p(\mu)$. Es folgt $J(1_{M\setminus E} v_p)u = Jv_p(1_{M\setminus E} u) = \varphi(0) = 0$. Da J eine Isometrie, ist $v_p = 0$ fast überall auf $M\setminus E$.

Sei weiter $p' \geq p$. Da $v_p = 0$ auf $M\setminus E$ und $\mu(E) < \infty$, folgt für $q \geq q'$, dass $v_p \in L^{q'}$. Dann erhalten wir für $u \in L^{p'}(\mu)$

$$Jv_{p'}(u) = \varphi(1_E u) = \varphi(1_E(1_E u)) = \int (1_E u) v_p d\mu = \int u v_p d\mu = Jv_p(u).$$

$J : L^{q'}(\mu) \to L^{p'}(\mu)'$ ist eine Isometrie, also folgt $L^{q'}(\mu) \ni v_p = v_{p'} =: v$ μ-fast überall. Außerdem

$$\|v\|_{L^q} = \left\|\varphi_{\frac{q}{q-1}}\right\| \leq \|\varphi\| \, \mu(E)^{\frac{1}{q}} \to \|\varphi\| \quad \text{mit} q \to \infty.$$

Also ist $v \in L^\infty(\mu)$, $\|v\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|$ und

$$\int uv d\mu = \varphi(1_E u) \quad \text{für } u \in L^p(\mu), \text{ und für ein } p > 1.$$

Durch Approximation mit Elementarfunktionen und dem Satz über dominierte Konvergenz folgt, dass die Formel auch für $u \in L^1(\mu)$ gilt. Nun sei $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Ausschöpfung von M mit $\mu(E_k) < \infty$. Seien $v_k \in L^\infty(\mu)$ mit $\|v_k\| \leq \|\varphi\|$ wie oben konstruiert. Da $E_k \subset E_{k'}$ für alle $k \leq k'$ folgert man leicht, dass $J(1_{E_k} v_{k'})(u) = Jv_k(u)$ für alle $u \in L^1(\mu)$. Da J Isometrie, folgt $1_{E_k} v_{k'} = v_k$. Das heißt wir erhalten $v \in L^\infty(\mu)$ mit $\|v\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|$, so dass $Jv = \varphi$.

9. Vorlesung. Dualraum von $C_c(X)$.

Definition 2.6. Sei X eine Menge.

(i) Eine Funktion $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt äußeres Maß, falls:

$$E \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \Longrightarrow \mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

(ii) Eine Menge $E \subset X$ heißt μ-messbar, falls $\mu(S) = \mu(S \cap E) + \mu(S \backslash E)$ für alle $S \subset X$.

Das System μ-messbarer Mengen ist eine σ-Algebra $\mathcal{A}$, und $\mu|_{\mathcal{A}}$ ist ein Maß.

Erinnerung. $A \subset X$ heißt Borelmenge, falls es in der von den offenen Mengen erzeugten σ-Algebra liegt.

Definition 2.7. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein äußeres MaßX heißt Borel-regulär, falls gilt:

(i) Jede Borelmenge ist μ-messbar.
(ii) Zu jedem $S \subset X$ gibt es $B \subset S$ Borel mit $\mu(B) = \mu(S)$.

μ heißt Radonmaß, falls zusätzlich

(iii) $\mu(K) < \infty$ für alle $K \subset X$ kompakt.

Satz 2.8 (Messbarkeitskriterium von Caratheodory)**.** *Sei μ ein äußeres Maßauf einem metrischen Raum (X, d) mit folgenden Eigenschaften:*

$$A, B \subset X, \mathrm{d}(A, B) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

dann sind alle Borelmengen μ-messbar.

Sei nun (X, d) ein metrischer Raum, so dass abgeschlossene Kugeln $\overline{B_\delta(x)}$ kompakt sind. (z.B. ein abgeschlossene Teilmenge in $\mathbb{R}^m$)

μ sei ein Radonmaßauf (X, d), und $\eta : X \to S^{k-1}$ sei μ-messbar. Wir betrachten das lineare Funktional

$$\Lambda : C_c^0(X, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}, \ \Lambda(f) = \int_X \langle f, \eta \rangle d\mu. \tag{7}$$

Es gilt

$$|\Lambda(f)| \leq C(K) \, \|f\|_{C^0(X)} \quad \text{falls } \mathsf{spt} f \subset K \text{ mit } \mu(K) < \infty, \tag{8}$$

wobei $C(K) = \mu(K)$. Das heißt, Λ ist stetig auf dem Raum der Funktionen $f \in C_c(X)$ mit Träger in K, also $f \in C_c(K)'$.

Definition 2.9. Eine Linearform Λ auf $C_c(X)$, so dass (8) gilt für alle $K \subset X$ kompakt und Konstanten $C(K) < \infty$, nennen wir lineares Funktional.

Definition 2.10 (Variationsmaß)**.** Sei $\Lambda : C_c(X, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional, so dass (7). Das zugehörige Variationsmaßwird in zwei Schritten erklärt

(i) Für $U \subset X$ offen, setzen wir

$$|\Lambda|(U) = \sup \{\Lambda(f) : |f| \leq 1, \mathsf{spt} f \subset U\}$$

(ii) Für $E \subset X$ beliebig setze

$$|\Lambda|(E) = \inf \{|\Lambda|(U) : E \subset U, U \text{offen}\}.$$

Die Definition ist konsistent, denn in (i) gilt $U \subset V \Rightarrow |\Lambda|(U) \leq |\Lambda|(V)$.

Satz 2.11. *Die Abbildung $|\Lambda| : 2^X \to [0, \infty]$ ist ein Radonmaß.*

Bemerkung. Teilung der Eins. Sei $K \subset X$ kompakt, und $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ mit U_λ offen. Ein untergeornete Teilung der eins, ist eine Familie von Funktionen $\chi_j \in C_c(X), j = 1,\dots,N$ mit $\mathsf{spt}\chi_j \subset U_\lambda$ für ein λ und $\sum_{j=1}^N \chi_j|_K = 1$.
Konstruktion. Zu jedem $x \in K$ wähle $r(x) > 0$ und $\lambda(x) \in \Lambda$, so dass

$$\overline{B_{2r(x)}(x)} \subset U_{\lambda(x)}.$$

K kompakt, d.h. $\exists$ endlich viele x_j $j = 1,\dots,N$, so dass $K \subset \bigcup_j B_{r(x_j)}(x_j)$. Wähle $\widetilde{\chi}_j \in C_c(X)$ mit

$$\widetilde{\chi}_j = \begin{cases} 1 & \text{auf } B_{r_j}(x) \\ 0 & \text{auf } X\backslash B_{2r_j}(x). \end{cases}$$

Setze $\chi = \sum_{j=1}^N \widetilde{\chi}_j$. Dann gilt $\chi \geq 1$ auf K, also $\chi > \frac{1}{2}$ auf einer offenen Umgebung U von K. Schließlich wählen wir $\eta \in C_c(X)$ mit $\mathsf{spt}\eta \subset U$ und $\eta|_K = 1$, und wir setzen

$$\chi_j = \eta\frac{\widetilde{\chi}_j}{\chi|_U} \in C_c(X), \quad \mathsf{spt}\chi_j \subset \overline{B_{2r(x_j)}(x_j)} \subset U_{\lambda(x_j)} \text{ und } \sum_{j=1}^N = 1 \text{ auf } K.$$

Beweis. Schritt 1: $|\Lambda|$ ist ein äußeres Maß.
Es gilt $|\Lambda|(\emptyset) = 0$, da eine $f = 0 = const$ zulässige Funktion in der Definition ist.
Seien U_j $j \in \mathbb{N}$ offene Mengen in X und $f \in C_c(X,\mathbb{R}^m)$ mit $|f| \leq 1$ und $\mathsf{spt}f \subset \bigcup_{j=1}^\infty U_j =: U$. Da $\mathsf{spt}f \subset K$ mit K kompakt, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\mathsf{spt}f \subset \bigcup_{j=1}^N U_j$. Wir wählen nun eine untergeordnete Teilung der Eins $\chi_j \in C_c(X,\mathbb{R}^k)$ $j = 1,\dots,N$ mit $\mathsf{spt}\chi_j \subset U_j$ und $\sum_{j=1}^N \chi_j = 1$ auf $\mathsf{spt}f$. Dann setzen wir $f_j = \chi_j f \in C_c(X,\mathbb{R}^k)$, also $\mathsf{spt}f_j \subset U_j$. Es gilt $|f_j| \leq 1$ und $f = \sum_{j=1}^N f_j$. Daraus folgt

$$\Lambda(f) = \sum_{j=1}^N \Lambda(f_j) \leq \sum_{j=1}^N |\Lambda|(U_j) \leq \sum_{j=1}^\infty |\Lambda|(U_j).$$

Bilden wir das Supremum über alle f, folgt $|\Lambda|(U) \leq \sum_{j=1}^\infty |\Lambda|(U_j)$. Falls E, E_j $j \in \mathbb{N}$ beliebige Teilmengen in X mit $E \subset \bigcup_{j=1}^\infty$, wählen wir zu $\epsilon > 0$ offen Mengen $U_j \supset E_j$ mit

$$|\Lambda|(U_j) \leq |\Lambda|(E_j) + 2^{-j}\epsilon.$$

Dann folgt

$$|\Lambda|(E) \leq |\Lambda|(\bigcup_{j=1}^\infty U_j) \leq \sum_{j=1}^\infty |\Lambda|(U_j) \leq \sum_{j=1}^\infty |\Lambda|(E_j) + \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt σ-subadditivität.

Schritt 2: Borelmengen sind $|\Lambda|$-messbar.
Wir zeigen das Caratheodory Kriterium. Seien $A, B \subset X$ mit $\mathrm{d}(A,B) > 0$. Zu zeigen ist $|\Lambda|(W) \geq |\Lambda|(A) + |\Lambda|(B)|$ falls $A \cup B \subset W$ offen. Für $\delta > 0$ hinreichend klein, sind $U = B_\delta(A) \cap W$ und $V = B_\delta(B) \cap W$ disjunkt. Für $f \in C_c(U,\mathbb{R}^k)$ und $g \in C_c(V,\mathbb{R}^k)$ definiere $h \in C_c(W,\mathbb{R}^k)$ durch

$$h : W \to \mathbb{R}^k, \; h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in U \\ g(x) & \text{falls } x \in V. \end{cases}$$

Dann ist $\Lambda(f) + \Lambda(g) = \Lambda(h) \leq |\Lambda|(W)$. Bilden wir das Supremum über alle f, g, folgt die Behauptung.

Schritt 3: $|\Lambda|$ ist ein Radonmaß.
Sei $E \subset X$ mit $|\Lambda|(E) < \infty$ und wähle $U_j \supset E$ offen, so dass $|\Lambda|(U_j) \leq |\Lambda|(E) + \frac{1}{j}$ und o.E. $U_1 \supset U_2 \supset \dots$. Dann ist $\bigcap U_j \supset E$ eine Borelmenge mit $|\Lambda|(E) = |\Lambda|(B) \leq \lim_{j\to\infty} |\Lambda|(U_j) = |\Lambda|(E)$.

Also ist $|\Lambda|$ Borel-regulär. Schlielich gilt für $K \subset X$ kompakt, es existiert $U \supset K$ offen mit $\overline{U}$ kompakt, und dann $|\Lambda|(K) \leq |\Lambda|(U) \leq C(\overline{U})$ nach Voraussetzung.

Satz 2.12 (Darstellungssatz von Riesz)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum mit kompakten Abstandskugeln, und sei Λ ein lineares Funktional auf $C_c(X, \mathbb{R}^k)$. Dann gibt es ein Radonmaßμ auf X und eine μ-messbare Funktion $\eta : X \to S^{k-1}$, so dass*

$$\Lambda(f) = \int_X \langle f, \eta \rangle d\mu \text{ für alle } f \in C_c(X, \mathbb{R}^k).$$

Das Paar (η, μ) ist eindeutig bestimmt und es gilt $\mu = |\Lambda|$.

Schwache Konvergenz.

Motivation. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in l^p mit

$$\|x_k\|_{l^p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_k^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C < \infty.$$

Im Allgemeinen existiert dann keine Teilfolge, die bzgl. $\|\cdot\|_{l^p}$ konvergiert, z.B. $x_k = e_k = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots)$.

Aber x_k^i ist eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, da $|x_k^i| \leq \|x_k\|_{l^p} \leq C \ \forall i, k$. Durch ein Diagonalfolgenargument finden wir eine Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$, so dass $x_{k_j}^i \to x^i$ falls $j \to \infty$. Die Teilfolge konvergiert koordinatenweise. Außerdem folgt

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |x^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{j \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_{k_j}^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \limsup_{j \to \infty} \left\| x_{k_j} \right\|_{l^p} \leq C.$$

Mit $N \to \infty$ folgt $\|x\|_{l^p} \leq C$, und insbesondere $x \in l^p$.

Die schwache Konvergenz verallgemeinert die koordinatenweise Konvergenz.

10. Vorlesung.

Definition 2.13. Sei X ein Banachraum.

(i) $x_k \in X \to x \in X$ schwach in X, falls $\varphi(x_k) \to \varphi(x)$ für alle $\varphi \in X'$.
(ii) $\varphi_k \in X' \to \varphi \in X'$ schwach-($*$) in X', falls $\varphi_k(x) \to \varphi(x)$ für alle $x \in X$.

Notation: $x_k \rightharpoonup x$ und $\varphi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$.

Beispiel 2.14. Sei $p \in [1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann $f_k \rightharpoonup f$ in $L^p(\mu)$, genau dann wenn

$$\int f_k g d\mu \to \int f g d\mu \quad \forall g \in L^q(\mu).$$

Im Fall $p = 1$ muss μ als σ-endlich vorausgesetzt werden.

Beispiel 2.15. Sei $p \in (1, \infty]$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $L^p(\mu) = L^q(\mu)'$, genau dann wenn

$$\int f_k g d\mu \to \int f g d\mu \quad \forall g \in L^q(\mu).$$

Im fall $p = \infty$ muss μ als σ-endlich vorausgesetzt werden. Für $p \in (1, \infty)$ stimmen schwache und schwach-($*$) Konvergenz überein.

Beispiel 2.16. Sei X ein metrischer Raum mit kompakten abgeschlossenen Abstandskugeln. Für lineare Funktionale auf $C_c(X)$ ist die schwach-($*$) Konvergenz definiert durch:

$$\Lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} \Lambda \text{ in } C_c(X)' \iff \Lambda_k(f) \to \Lambda(f) \text{ für alle } f \in C_c(X).$$

Sind μ_k, μ Radonmaße auf X, dann $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ falls

$$\int f d\mu_k \to \int f d\mu \quad \text{für alle} \quad f \in C_c(X).$$

Definition 2.17. Ein metrischer Raum X heißt separabel, falls ein abzählbare Teilmenge $M \subset X$ existiert mit $\overline{M} = X$.

Satz 2.18 (Schwach-($*$) Folgenkompaktheit)**.** *Sei X ein separabler Banachraum.*

Dann besitzt jede beschränkte Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X' eine Teilfolge, die schwach-($*$) gegen ein $\varphi \in X'$ konvergiert.

Beweis. Sei $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\| =: C < \infty$ und $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ sei eine dichte Teilmenge. Dann gilt $\varphi_k(x_n) \leq C \|x_n\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Durch ein Diagonalfolgenargument folgt, es existiert eine Teilfolge (ohne Einschränkung die Folge selber), so dass

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_n) = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Betrachte nun span$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} =: X_0$, d.h. jedes $x \in X_0$ ist eine endliche linear Kombination von Elementen aus $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Auf X_0 können wir $\varphi : X_0 \to \mathbb{R}$ definieren durch $\varphi(x_n) = y_n$. φ ist linear und $|\varphi(x_n)| = \lim_{k\to\infty} |\varphi_k(x_n)| \leq C \|x\| \quad \forall x \in X_0$. Also ist φ gleichmässig stetig auf dem dichten Unterraum X_0 und damit fortsetzbar zu einem Funktional $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| \leq C$. Außerdem folgt für $x \in X$ und $x_0 \in X_0$

$$|\varphi(x) - \varphi_k(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_0) - \varphi_k(x_0)| + |\varphi_k(x_0) - \varphi_k(x)|.$$

Daraus ergibt sich $\limsup_{k\to\infty} |\varphi(x) - \varphi_k(x)| \leq 2C \|x - x_0\|$. Da X_0 dicht in X, folgt $\varphi_k(x) \to \varphi(x)$ für alle $x \in X$, und somit $\varphi_k \to \varphi$ schwach-($*$) in X'. □

Folgerung 2.19 (Kompaktheitssatz für Radonmaße)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum mit kompaktem Abstandskugeln, und μ_k, $k \in \mathbb{N}$, sei ein Folge von Radonmaßen auf X mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} \mu_k(K) < \infty$ für alle $K \subset X$ kompakt.*

Dann gibt es ein Radonmaßμ auf X, so dass nach Wahl einer Teilfolge $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$, d.h.

$$\int f_k d\mu \to \int f d\mu \quad \forall f \in C_c(X).$$

Beweis. Beachte zuerst, dass $C(X)$ separabel, falls (X, d) kompakt.

Deshalb sei zunächste X kompakt. Betrachte $\Lambda_k \in C(X)'$ durch $\Lambda_k(f) = \int_X f d\mu_k$. Nach Voraussetzung gilt

$$\|\Lambda_k\| = \sup_{|f|\leq 1} |\int_X f d\mu_k| = \mu_k(X) \leq C < \infty.$$

Da $C(X)$ separabel, gibt es also eine Teilfolge (o.E. Λ_k) und $\Lambda \in C(X)'$, so dass $\Lambda_k \xrightarrow{*} \Lambda$ und $\|\Lambda\| \leq C < \infty$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es ein Radonmaßμ und ein μ-messbares $\nu : X \to \{\pm 1\}$ mit

$$\Lambda(f) = \int f \nu d\mu \quad \forall f \in C_c(X).$$

Da zusätzlich $\Lambda(f) \geq 0$ für alle $f \geq 0$ folgt außerdem $\nu = 1$.

Ist X nicht kompakt, betrachte $R > 0$ und

$$\Lambda_k^R \in C^0(\overline{B_{2R}(x_0)})', \quad \text{gegeben durch } \Lambda_k^R(f) = \int_{B_{2R}(x_0)} \varphi_R f \mu$$

wobei $\varphi : X \to [0,1]$ in $C_c(X)$ mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_R(x_0) \\ 0 & x \notin B_{2R}(x_0). \end{cases}$$

Wir können den Kompaktheitssatz auf Λ_k^R anwenden und erhalten zusammen mit dem Satz von Riesz, dass ein Radonmaß μ^R existiert, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_{2R}(x_0)} f d\mu_k = \int_{B_{2R}(x_0)} f d\mu^R \quad \forall f \in C_c(\overline{B_{2R}(x_0)}).$$

Nun wähle $R_i = i \in \mathbb{N}$. Da $\varphi_{R_i} f \in C_c(\overline{B_{2R_j}(x_0)})$ folgt für $j \geq i$ folgt, dass

$$\begin{aligned}\int_{B_{2R_i}(x_0)} f d\mu^{R_i} &= \lim_{k\to\infty} \Lambda_k^{R_i}(f) = \lim_{k\to\infty} \Lambda_k(\varphi_{R_i} f) = \lim_{k\to\infty} \Lambda_k(\varphi_{R_j}\varphi_{R_i} f) \\ &= \lim_{k\to\infty} \Lambda_k^{R_j}(\varphi_{R_i} f) = \int_{B_{2R_j}(x_0)} \varphi_i f d\mu^{R_j} = \int_{B_{2R_i}(x_0)} f \varphi_i d\mu^{R_j}.\end{aligned}$$

Nach der Eindeutigkeitsaussage im Darstellungssatz von Riesz folgt, dass $\varphi_i d\mu^{R_j} = d\mu^{R_i}$ und insbesondere gilt für $f \in C_c(X)$ mit $\mathsf{spt} f \subset B_{R_i}(x_0)$: $\int f d\mu^{R_j} = \int f d\mu^{R_i}$. Also können wir wie folgt ein lineares Funktional auf $C_c(X)$ definieren. Sei $f \in C_c(X)$ beliebig, dann existiert ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $\mathsf{spt} f \subset B_{R_i}(x_0)$ und wir definierene Λ durch

$$\Lambda(f) = \int f d\mu^{R_i} = \int f \varphi_i d\mu^{R_j} \quad \text{für alle } j \geq i.$$

Wiederum nach dem Satz von Riesz existiert dann ein Radonmaß μ auf X, so dass

$$\int f d\mu = \int f d\mu^{R_i} = \lim_{k\to} \Lambda_k^{R_i}(f) = \lim_{k\to} \int f d\mu_k \;\forall f \in C_c(\overline{B_{R_i}(x_0)}).$$

Da i beliebig, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 2.20 (Hahn-Banach)**.** *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\rho : X \to \mathbb{R}$ sublinear, d.h.*

(i) $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x) \quad \forall x \in X$ *und* $\forall \lambda > 0$,
(ii) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y) \quad \forall x, y \in X$.

Sei V ein Untervektorraum, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ linear und $\varphi(v) \leq \rho(v)$ $\forall v \in V$.

Dann gibt es ein $\phi : X \to \mathbb{R}$ linear mit $\phi|_V = \varphi$ und $\phi(x) \leq \rho(x)$ für alle $x \in X$.

Folgerung 2.21. *Sei X ein Banachraum, und $V \subset X$ ein Unterraum. Dann gibt es zu $\varphi \in V'$ ein $\phi \in X'$ mit $\varphi = \phi|_V$ und $\|\phi\| = \|\varphi\|$.*

Beweis. Wende Hahn-Banach an auf $\rho : X \to \mathbb{R}$, $\rho(x) = \|\varphi\|_{V'} \|x\|_X$. Es folgt, es gibt ein $\phi \leq \rho$ auf V, so dass $\phi(x) \leq \|\varphi\|_{V'} \|x\|_X$. Daraus folgt die Behauptung. □

Folgerung 2.22. *Sei V ein Unterraum von $(X, \|\cdot\|)$ und $x_0 \in X$ mit $\inf_{v \in V} \|x_0 - v\| = \mathrm{d} > 0$. Dann existiert ein $\phi \in X'$ mit $\|\phi\|_{X'} = 1$, so dass $\phi|_V = 0$ und $\varphi(x_0) = \mathrm{d}$.*

Beweis. Definiere φ auf $V \oplus \mathbb{R}x_0$ durch $\varphi(v + \alpha x_0) = \alpha \inf_{v \in V} \|v - x_0\|$. Es folgt leicht

$$|\varphi(v + \alpha x_0)| \leq |\alpha| \inf_{v \in V} \|v - x_0\| \leq \|\alpha x_0 + v\| .$$

Also gilt $\varphi \in (V + \mathbb{R}x_0)'$ mit $\|\varphi\| \leq 1$. Andererseits existiert $v_\epsilon \in V$ mit $\|x_0 - v_\epsilon\| \leq (1 + \epsilon) \inf_{v \in V} \|v - x_0\|$. Falls $\epsilon \to 0$ folgt daraus $\|\varphi\| \geq 1$. Durch Hahn-Banach setzen wir φ nun fort zu ϕ. □

Folgerung 2.23. (i) *Zu jedem $x \in X$ existiert ein $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| = 1$ und $\phi(x) = \|x\|$.*
(ii) *Ist $\phi(x) = 0$ für alle $\phi \in X'$, so folgt $x = 0$.*

Beispiel 2.24. Sei $f \in L^1(\mu)$ und μ σ-endlich. Falls $\int f g d\mu = 0$ für alle $g \in L^\infty(\mu)$, dann $f = 0$.

Lemma 2.25. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $I : X \to X''$ gegeben durch $I(x)(\varphi) = \varphi(x)$ ein isometrische Einbettung.*

Beweis. Sei $\|\varphi\| \leq 1$. Dann gilt $|I(x)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|x\|$ für alle $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| \leq 1$. Daraus folgt $\|I(x)\| \leq \|x\|$. Nach dem Satz von Hahn-Bachach gibt es zu $x \in X \setminus \{0\}$ ein $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$. Es folgt $|I(x)(\varphi)| = \|x\| \Rightarrow \|I(x)\| = \|x\|$.

Satz 2.26. *Grundtatsachen zur schwachen/schwach-($*$) Konvergenz.*
(i) *Schwache bzw. schwach-($*$) Grenzwerte sind eindeutig bestimmt.*
(ii) *Schwache bzw. schwach-($*$) konvergente Folgen sind beschränkt.*
(iii) *Unterhalbstetigkeit der Normen:*

$$x_k \rightharpoonup x \implies \|x\| \leq \liminf_{k \to \infty} \|x_k\| \quad \& \quad \varphi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi \implies \|\varphi\| \leq \liminf_{k \to \infty} \|\varphi_k\| .$$

Beweis. (i): Für schwach-($*$) Konvergenz ist die Aussage klar, gemäss der Definition. Nun, sei $x_k \rightharpoonup x$ und $x_k \rightharpoonup y$ in X. Dann folgt für alle $\varphi \in X'$

$$\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) = \lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) - \lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = 0$$

Nach Folgerung 2.23 folgt $x = y$.

(ii): Sei $\varphi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ in X', also $\sup_{k \in \mathbb{N}} |\phi_k(x)| < \infty$ für jedes $x \in X$. Nach Banach-Steinhaus folgt also bereits $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\phi_k\| < \infty$.

Andererseits, aus $x_k \rightharpoonup x$ in X, folgt $I x_k \overset{*}{\rightharpoonup} I x$ in X''. Dann folgt mit Lemma 2.25 $\sup \|x_k\| = \sup \|I x_k\| < \infty$.

(iii): Sei $\varphi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ in X, und $\|x\| \leq 1$. Dann folgt

$$|\phi_k(x)| = \lim_{k \to \infty} |\varphi_k(x)| \leq \liminf_{k \to \infty} \|\varphi\| .$$

Bilden des Supremum bzgl. x liefert die Behauptung. Für schwache Konvergenz verwenden wir die Einbettung $I : X \to X''$. □

11. Vorlesung.

Definition 2.27. Ein Banachraum heißt reflexiv, falls die isometrische Einbettung $I : X \to X''$ surjektiv is.

Beispiel. $L^p(\mu)$ für ein Maß μ ist reflexiv für alle $p \in (1, \infty)$. $L^\infty(\mu)$ und $L^1(\mu)$ sind hingegen nicht reflexiv.

Lemma 2.28. *Ist X ein reflexiver Banachraum, so ist jeder abgeschlossene Unteraum V reflexiv.*

Lemma 2.29. *Sei X ein Banachraum. Dann gilt: X' separabel $\Longrightarrow$ X separabel.*

Beweis. Sei ϕ_k, $k \in \mathbb{N}$ dicht in X'. Wähle $x_k \in X$ mit $\|x_k\| = 1$ und $|\phi_k(x_k)| \geq \frac{1}{2} \|\phi_k\|$. Sei $Y = \overline{\operatorname{span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}$. Wir zeigen: Falls $\phi \in X'$ mit $\phi|_Y = 0$, dann folgt bereits $\phi = 0$. Nach der Folgerung 2.22, ist dann $Y = X$, also ist X dann separabel.

$$\|\phi\| \leq \|\phi_k\| + \|\phi_k - \phi\| \leq 2|\phi_k(x_k)| + \|\phi_k - \phi\| \leq 2|\phi_k(x_k) - \phi(x_k)| + \|\phi_k - \phi\| \leq 3 \|\phi - \phi_k\| .$$

Da ϕ_k, $k \in \mathbb{N}$ dicht in X', folgt $\phi = 0$. □

Satz 2.30 (Schwache Folgenkompaktheit)**.** *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann hat jede beschränkte Teilfolge in X ein schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei (x_k) eine beschränkte Folge. $Y = \overline{\operatorname{span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}$. Y is abgeschlossen, und somit reflexiv und separabel. Dann ist $I_Y : Y \to Y''$ eine Isometrie. Insbesondere ist Y'' separabel und damit auch Y'. Dann können wir schwach-($*$) Folgenkompaktheit anwenden auf $I_Y(x_k) \in Y''$. Da I_Y surjektive, gibt es ein $x \in Y$, so dass $I_Y x_k \overset{*}{\rightharpoonup} I_Y x$. Nach Wahl einer Teilfolge also $\phi(x_k) \to \phi(x)$ für alle $\phi \in Y'$. Sei nun $\varphi \in X'$. Dann

$$\varphi(x_k) = (\varphi|_Y(x_k)) \to (\varphi|_Y)(x) = \varphi(x).$$

Also gilt $x_k \rightharpoonup x$. □

Zusammenfassung. Existenz schwach konvergenter Teilfolgen.

(i) Falls $\|f_k\|_{L^p(\mu)} \leq C < \infty$ mit $p \in (1, \infty)$:

$$\int f_k g d\mu \to \int f g d\mu \quad \forall g \in L^q(\mu), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ schwach in } L^p\text{, da } L^p \text{ reflexiv.}$$

(ii) Falls μ_k Radonmaße auf (X, d) (mit kpten Kugeln) mit $\mu_k(K) \leq C(K)$ für alle K kompakt:

$$\int g d\mu_k \to \int g d\mu \quad \forall g \in C_c^0(X) \quad \text{(schwach konvergente Radonmaße).}$$

(iii) Falls $\|f_k\|_{L^\infty(\mu)} \leq C < \infty$ mit μ σ-endliches Radonmaß auf (X, d) separabel:

$$\int f_k g d\mu \to \int f g d\mu \quad \forall g \in L^1(\mu) \quad \text{schwach-}(*) \text{ in } L^\infty(\mu)\text{, da } L^1(\mu) \text{ separabel.}$$

(iv) Falls $\|f_k\|_{L^1(\mu)} \leq C < \infty$ und μ Radonmaß auf (X, d) mit kpten Kugeln:

$$\int f_k g d\mu \to \int g d\nu \quad \forall g \in C_c^0(X) \quad \text{wobei } \nu \text{ ein signiertes Radonmaß.}$$

3. Sobolevräume

Definition 3.1 (Schwache Ableitung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Eine Funktion g heißt schwache Ableitung von u nach x^α für $\alpha = \mathbb{N}^n$

$$\int_\Omega u \partial_{x^\alpha} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

wobei $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Lemma 3.2. *Die schwache Ableitung ist also Element von $L^1_{loc}(\Omega)$ eindeutig bestimmt. Für $u \in C^k(\Omega)$, $k = |\alpha|$, ist die klassische Ableitung $\partial_{x^\alpha} u \in C^0(\Omega)$ auch die schwache Ableitung.*

Beweis. Seien $g_1, g_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwache Ableitungen von $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann folgt

$$\int_\Omega (g_1 - g_2)\phi = \int_\Omega g_1\phi - \int_\Omega g_2\phi = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt die erste Behauptung. Die zweit folgt sofort mit Hilfe partieller Integration (oder der Produktregel). □

Beispiel 3.3. Betrachte $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = |x|^q$ und $(q \in \mathbb{R})$.
Hat u eine schwache Ableitung $Du \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$?
Zunächst muss u selbst integrierbar sein. Also $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dazu betrachte

$$\int_{B_r(0)} |x|^q dx = \int_{S^{n-1}} d\phi \int_0^\infty r^q r^{n-1} dr = \mathrm{vol}(S^{n-1}) \int_0^\infty r^{q+n-1} dr.$$

Das letzt Integral is $< \infty$ gdw. $q + n > 0$. Also ist $|x|^q \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n$ falls $q > -n$.
Auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ existiert eine klassische Ableitung $Du|_x = q|x|^{q-2}x$ mit $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Du ist integrierbar gdw. $q > n - 1$, denn

$$\int_{B_r(0)} q|x|^{q-2} \sum_{i=1}^n |x_i| dx \leq \int_{B_r(0)} q|x|^{q-1} dx < \infty \iff q - 1 > n.$$

Wir behaupten nun, dass $q|x|^{q-2}x$ auf $\mathbb{R}^n$ die schwache Ableitung von $|x|^q$ ist, falls $q > n - 1$. Dazu wählen wir eine Abschneidefunktion

$$\eta_\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} |x| \leq \rho/2 \\ 1 & \text{für} |x| \geq \rho. \end{cases}$$

und $|D\eta_\rho(x)| \leq C/\rho$. Für $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt nun

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\partial_\alpha \phi)\eta_\rho = \int_{\mathbb{R}^n} u\partial_\alpha(\eta_\rho\phi) - \int_{\mathbb{R}^n} u(\partial_\alpha \eta_\rho)\phi = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\alpha u \eta_\rho \phi - \int_{\mathbb{R}^n} u(\partial_\alpha \eta_\rho)\phi. \tag{9}$$

Wir wollen $\rho \downarrow 0$ gehen lassen. Da $q > n - 1$ ist sogar $u \in L_{loc}^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)$. Wir können dann wie folgt abschätzen

$$|\int u(\partial_\alpha \eta_\rho)\phi| \leq \frac{C}{\rho} \int_{B_\rho(0)} |u| \overset{\text{Hölder}}{\leq} C \|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(B_\rho(0))} \to 0 \quad \text{falls } \rho \to 0.$$

Das heißt das letzte Integral in (9) verschwindet falls $\rho \to 0$. Dann folgt mit dem Satz über majorisiete Konvergenz, dass $u\partial_\alpha \phi$ und $\partial_\alpha u \phi$ integrierbar sind auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ bzw auf $\mathbb{R}^n$ und es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\partial_\alpha \phi) = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\alpha u \phi.$$

Also ist $Du|_x = q|x|^{q-2}x$ die schwache Ableitung auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Dann definieren wir den Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists$ schwache Ableitung $Du \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)\}$. Auf $W^{1,p}(\Omega)$ definieren wir die Norm $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|Du\|_{L^p(\Omega)}$.

Satz 3.5. $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)})$ *ist ein Banachraum.*

Beweis. Übungsaufgabe.

Sei $S_\delta : L^p_{loc}(\Omega) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ der Glättungsoperator aus Kapitel 1, gegeben durch

$$S_\delta f(x) = \int \eta_\delta(x-y) f(y) dy = \eta \star f(x)$$

mit einem symmetrischen Glättungskern η_δ für $\delta > 0$.

Wiederholung Lemma 1.8. Sei S_δ definiert wie eben, und $p \in [1, \infty)$.

(i) Für alle $p \in [1, \infty)$ ist S_δ ein beschränkter, linearer operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, so dass $\|S_\delta f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ für alle $f \in L^p(\Omega)$.

(ii) Falls $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, dann $S_\delta f \to f$ gleichmäßig für $\delta \to 0$.

(iii) Falls $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dann $\|f - S_\delta f\|_{L^p} \to 0$ für $\delta \to 0$.

Bemerkung 3.6. (i) Die Aussage in Lemma 1.8 (i) gilt auch für $p = \infty$, denn

$$\|S_\delta u\|_{L^\infty} \leq \sup_x \int \eta(x-y)|u(y)| dy \leq \|u\|_{L^\infty}.$$

(ii) Falls $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann folgt $S_\delta u \to u$ schwach-$(*)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, denn für $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int S_\delta u(x) v(x) dx = \int \int \eta_\delta(x-y) u(y) v(x) dy dx = \int S_\delta v(y) u(y) dy \to \int v(y) u(y) dy.$$

mit dem Satz über dominierte Konvergenz und weil $S_\delta v \to v$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Außerdem gilt, dass $S_\rho u \to u$ fast überall nach Wahl einer Teilfolge.

12. Vorlesung.

Lemma 3.7. *Sei $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$. Dann gilt*

(i) $\partial_\alpha S_\delta u = S_\delta \partial_\alpha u \quad$ *für $\alpha = 1, \dots, n$.*

(ii) *Ist außerdem $p < \infty$, folgt $S_\delta u \to u$ in $W^{1,p}(\Omega')$ für alle $\Omega' \subset \Omega$ mit Ω' kompakt.*

Beweis. (i) folgt aus $\eta_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, differenzieren unter dem Integral und der Definition der schwachen Ableitung.
(ii): Da $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ folgt, dass $u \in W^{1,p}(\Omega')$. Falls $\delta > 0$ nun hinreichend klein gewählt ist, folgt, dass $\mathsf{spt}\eta_\delta(\cdot - y)$ für alle $y \in B_\delta(y)$. Dann betrachte $\Omega'' = B_\delta(\Omega') \subset \Omega$ und definiere

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in B_\delta(\Omega'') \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann folgt, dass $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $S_\delta \widetilde{u} \to \widetilde{u}$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, gemäß Lemma 1.8. Außerdem gilt nach Konstruktion $S_\delta u|_{\Omega'} = S_\delta \widetilde{u}|_{\Omega'}$. Deshalb gilt $S_\delta u|_{\Omega'} \to u|_{\Omega'}$ in $L^1(\Omega')$. Zusammen mit (i) folgt die Behauptung.

Satz 3.8 (Produktregel für Sobolevfunktionen)**.** *Seien $u, v \in (W^{1,p} \cap L^\infty)(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$. Dann ist $uv \in (W^{1,p} \cap L^\infty)(\Omega)$ und es gilt $\partial_\alpha(uv) = (\partial_\alpha u)v + u(\partial_\alpha v)$.*

Beweis. Sei $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann gilt $u \cdot \partial_\alpha \phi, \partial_\alpha u \cdot \phi, u \cdot \phi \in L^1(\Omega)$, und da $S_\delta v \overset{*}{\rightharpoonup} v$, folgt

$$\begin{aligned} \int uv\partial_\alpha \phi &= \lim_{\rho \to 0} \int u(\partial_\alpha \phi) S_\rho v = \lim_{\rho \to 0} \left[\int u \partial_\alpha(\phi S_\rho v) - \int u \partial_\alpha (S_\rho v)\phi \right] \\ &= -\lim_{\rho \to 0} \int \left[(\partial_\alpha u) S_\rho v + u S_\rho(\partial_\alpha v) \right] \phi = -\int \left[(\partial_\alpha u) v + u \partial_\alpha v \right] \phi \end{aligned}$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen folgt aufgrund der Definition der schwachen Ableitung für u und wegen dem vorhergehenden Lemma. Das letzt Gleichheitszeichen folgt wiederum, weil $S_\delta v \overset{*}{\rightharpoonup} v$ und $S_\delta \partial_\alpha v \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_\alpha v$ in $L^\infty(\Omega)$.

Satz 3.9 (Meyers-Serrin)**.** *Sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt*

(i) *$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) *$(W^{1,p} \cap C^\infty)(\Omega)$ ist dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Beweis. (i): Wähle Abschneidefunktion $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \le 1 \\ 0 & \text{für } |x| \ge 2. \end{cases}$$

Setze $u_R(x) = \phi(x/R)u(x)$. Mit der Produktregel folgt

$$\partial_\alpha u_R(x) = \phi(x/R)\partial_\alpha u(x) + \frac{1}{R}\partial_\alpha \phi(x/R) u(x).$$

Es folgt die Abschätzung

$$\|\partial_\alpha u - \partial_\alpha u_R\|_{L^p} \le \|\partial_\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_R)} + \frac{C}{R} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ falls } R \to 0.$$

Das heißt, wir können jedes $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ durch Sobolev-funktionen u_R mit kompaktem Träger approximieren. Dann folgt die Behauptung weil $S_\rho u_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $S_\rho u \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$, falls $p < \infty$ noch dem Lemma oben.
(ii): Setze $U_k = B_{\frac{1}{k}}(\Omega) \cap B_k(0)$, $k \in \mathbb{N}$, sowie $U_0 = \emptyset$, und betrachte $V_k = U_{k+1} \setminus \overline{U}_{k-1}$. Wir wählen dann eine untergeordnete Zerlegung der Eins $\phi_k \in C_c^\infty(V_k)$, $\phi_k > 0$ und $\sum_{k=1}^\infty \phi_k = 1$ auf Ω. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zu $\delta > 0$ gibt es $\rho_k > 0$, so dass für $u_k = S_{\rho_k} \phi_k u$ gilt:

$$\|u_k - \phi_k u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 2^{-k}\delta, \quad \mathsf{spt} u_k \subset V_k.$$

Dann folgt für $v = \sum_{k=1}^\infty u_k \in C^\infty(\Omega)$: $\|v - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le \sum_{k=1}^\infty \|u_k - \phi_k u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le \delta$.

Bemerkung 3.10. (i) Ein anderer Zugang zu Sobolevräumen ist die Vervollständigung von $C^\infty(\Omega)$ bzgl. der $W^{1,p}(\Omega)$-Norm. Nach Meyers-Serrin führen beide Ansätze zur selben Funktionenklasse.

(ii) Im allgemeinen ist $C^1(\overline{\Omega})$ nicht dicht in $W^{1,p}(\Omega)$. Dies trifft aber zu, falls Ω ein C^1-Gebiet ist.

(iii) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist $C^1_c(\Omega)$ nicht dicht in $W^{1,p}(\Omega)$. Die Vervollständigung bzgl. $C^1_c(\Omega)$ ergibt $W^{1,p}_0(\Omega)$ (Sobolevfunktionen mit Nullrandwerten).

Satz 3.11 (Kettenregel für Sobolevfunktionen)**.** *Sei $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit f' beschränkt. Dann gilt $\partial_\alpha(f \circ u) = (f' \circ u)\partial_\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Betrachte $S_\rho u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$ und $\rho > 0$ hinreichend klein, gilt

$$\int f \circ S_\rho u \partial_\alpha \phi = -\int f' \circ S_\rho u \partial_\alpha S_\rho u \phi$$

Es gilt $S_\rho u \to u$ lokal in L^1 bzw. nach Wahl einer Teilfolge punktweise fast überall in $\Omega' \subset \Omega$ kompakt. Mit $\sup |f'| = L$ folgt

$$\left| \int (f \circ S_\rho u - f \circ u)\partial_\alpha \phi \right| \leq L \left\| \partial_\alpha \phi \right\|_{C^0} \int_{\mathsf{spt}\phi} |S_\rho u - u| \leq M \left\| S_\rho u - u \right\|_{L^1(\mathsf{spt}\phi)} \to 0.$$

Und

$$\begin{aligned} \left| \int (f' \circ S_\rho u)(\partial_\alpha S_\rho u)\phi - \int (f' \circ u)(\partial_\alpha u)\phi \right| &\leq \int |f' \circ S_\rho u||\partial_\alpha S_\rho u - \partial_\alpha u||\phi| \\ &\quad + \int |f' \circ S_\rho u - f' \circ u||\partial_\alpha u||\phi| \end{aligned}$$

Das erste Integral können wir wie oben abschätzen und verwenden, dass $\partial_\alpha S_\rho u \to \partial_\alpha u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$. Für das zweite integral verwenden wir, dass $S_\rho u \to u$ fast überall. Nach dem Satz über dominierte Konvergenz geht es dann gegen 0. □

Satz 3.12 (Transformationsregel)**.** *Sei $u \in W^{1,1}_{loc}(U)$ und $\phi \in C^1(V, U)$ ein Diffeomorphismus. Dann folgt, dass $u \circ \phi \in W^{1,1}_{loc}(V)$ mit*

$$D(u \circ \phi) = Du|_\phi \cdot D\phi \quad \textit{bzw.} \quad \partial_\alpha(u \circ \phi) = \partial_\beta u|_\phi \partial_\alpha \phi^\beta.$$

Falls $u \in W^{1,1}(U)$, gibt es insbesondere Konstanten c, C mit

$$c \left\| D(u \circ \phi) \right\|_{L^1(U)} \leq \left\| Du \right\|_{L^1(V)} \leq C \left\| D(u \circ \phi) \right\|_{L^1(U)}.$$

Beweis. Zunächst gilt mit der Transformationformel, dass $u \circ \phi$ und $Du|_\phi \partial_\alpha \phi$ in $L^1_{loc}(V)$.
Wir approximieren u wieder duch $S_\rho u \in C^\infty(B_\rho(U))$. Es gilt $(S_\rho u) \circ \phi \in C^\infty(V)$.
Beachte, dass für $\eta \in C^\infty_c(V)$ folgt $\phi(\mathsf{spt}\eta) \subset U$ kompakt. Aus partieller Integration folgt

$$\int_V \left[(S_\rho u) \circ \phi\right] \partial_\alpha \eta = -\int_V \left[D(S_\rho u)|_\phi \cdot \partial_\alpha \phi\right] \eta. \tag{10}$$

Nun berechnen wir für $\psi = \phi^{-1}$

$$\int_{\psi(U)} (S_\rho u \circ \phi - u \circ \phi)\partial_\alpha \eta = \int_U (S_\rho u - u) \underbrace{(\partial_\alpha \circ \psi)| \det D\psi|}_{\leq C < \infty} \to 0 \text{ falls } \rho \downarrow 0.$$

und auf gleich Weise

$$\int_V (DS_\rho u|_\phi - Du|_\phi)\partial_\alpha \phi \eta \to 0 \text{ falls } \rho \downarrow 0.$$

Zusammen mit (10) folgt, dass $\int_V (u \circ \phi)\partial_\alpha \eta = -\int_V (Du|_\phi \partial_\alpha \phi)\eta$ für alle $\eta \in C^\infty_c(V)$, was zu zeigen war. (Man beachte noch, dass ein Diffeomorphismus Nullmengen stets auf Nullmengen abbildet nach dem Lemma von Sard.)

Einbettungssätze von Sobolev und Rellich.

Satz 3.13. *Sei* $p \in [1, n)$ *und* $q = \frac{np}{n-p}$ $(\Leftrightarrow -\frac{n}{q} = 1 - \frac{n}{p})$. *Dann gilt*

$$\|u\|_{L^q} \leq \frac{(n-1)q}{n} \|Du\|_{L^p} \quad \textit{für alle } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Bemerkung 3.14. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit C^2-Rand, und $u(x) = \big(1 - \frac{1}{\epsilon}\, \mathrm{d}(x, \Omega)\big)_+$. Dann gilt $|Du(x)| = \frac{1}{\epsilon} 1_{\{y : \mathrm{d}(y,\Omega) \in (0,\epsilon)\}}$. Dann implziziert der Satz

$$\mathcal{L}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x)^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \|Du\|_{L^1} = \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}(\{y : \mathrm{d}(y, \Omega) \in (0, \epsilon)\}).$$

Die linke Seit konvergiert gegen $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$ falls $\epsilon \to 0$. Wir erhalten eine Version der isoperimetrischen Ungleichung.

13. Vorlesung.

Satz 3.13. *Sei $p \in [1,n)$ und $q = \frac{np}{n-p}$ ($\Leftrightarrow -\frac{n}{q} = 1 - \frac{n}{p}$). Dann gilt*

$$\|u\|_{L^q} \leq \frac{(n-1)q}{n} \|Du\|_{L^p} \quad \textit{für alle } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Bemerkung 3.15. Eine Abschätzung

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|Du\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } C = C(n,p). \tag{11}$$

ist nicht für alle p, q möglich. Betrachte dazu eine Skalierung bzgl. $\lambda > 0$: $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$, $Du_\lambda(x) = \lambda Du(\lambda)$. Dann folgt mit der Tranformationsformel

$$\|u_\lambda\|_{L^q} = \lambda^{-\frac{n}{q}} \|u\|_{L^q} \quad \& \quad \|Du_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p}.$$

Somit kann (11) nur richtig sein, falls $-\frac{n}{q} = 1 - \frac{n}{q}$, und insbesondere $p \in [1,n)$.

Beispiel 3.16. Für $p = n$ und $q = \infty$ ist (11) falsch.

$$u(x) = \log(\log \frac{1}{|x|}) \quad \text{für } |x| < \frac{1}{e}.$$

Man kann zeigen, dass $u \in W^{1,p}(B_{\frac{1}{e}}(0))$, aber $u \notin L^\infty(B_{\frac{1}{e}}(0))$.

Beweis (Gagliardo-Nirenberg). Ohne Einschränkung sei $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Schritt 1. Es reicht den Fall $p = 1$ und $q = \frac{n}{n-1}$ zu betrachten. Denn

$$\begin{aligned}
\left(\int |u|^q\right)^{\frac{n-1}{n}} &= \left(\int \left(|u|^{\frac{n-1}{n}q}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
\text{Fall } p=1 \quad &\leq \int \left|D\left(|u|^{\frac{n-1}{n}q}\right)\right| \\
&\leq \frac{n-1}{n} q \int |u|^{(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{q})q} |Du| \\
\text{Hölder mit } \tfrac{1}{p} \text{ und } 1 - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{q} \quad &\leq \frac{n-1}{n} q \left(\int |u|^q\right)^{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{q}} \left(\int |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Nach Kürzen auf beiden Seiten folgt die Behauptung.

Schritt 2. Für $n = 1$ und $p = 1$ (in diesem Fall ist $q = \frac{n}{n-1} = \infty$) gilt

$$|u(x)| = \left|\int_{-\infty}^x u'(\xi) d\xi\right| \leq \int_{-\infty}^\infty |u'(\xi)| d\xi.$$

Daraus folgt $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^1}$.

Schritt 3. Sei nun $n \geq 2$. Wir schreiben $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ mit $x = (\xi, z)$. Definiere

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^\infty |u(\xi, z)| dz \quad \& \quad g(\xi) = \int_{-\infty}^\infty |Du(\xi, z)| dz.$$

Wir nehmen zunächst an $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Aus dem Satz von Fubini und Schritt 2 folgt

$$
\begin{aligned}
\int |u|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |u(\xi,z)| \left| \int_{-\infty}^{z} \frac{\partial u}{\partial z}(\xi,s)ds \right|^{\frac{1}{n-1}} dz d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |u(\xi,z)| dz \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\partial u}{\partial z}(\xi,s)| ds \right)^{\frac{1}{n-1}} d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\xi) g(\xi)^{\frac{1}{n-1}} d\xi \\
\text{Hölder} \quad &\leq \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\xi)^{\frac{n-1}{n-2}} d\xi \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{n-1}} & \text{falls } n \geq 3 \\ \|f\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} g(\xi) d\xi & \text{falls } n = 2 \end{cases} \\
\text{Schritt 2} \quad &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Df(\xi)| d\xi \right) \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\overset{|Df| \leq g}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\xi) d\xi \right)^{\frac{n}{n-1}} \overset{\text{Def} g}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du(x)| dx \right)^{\frac{n}{n-1}}
\end{aligned}
$$

Dies zeigt den Induktionsschluß. Schließlich bleibt zu zeigen, dass $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^{n-1})$ und $|Df| \leq g$:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f \partial_\alpha \eta &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\xi,z)| \partial_\alpha \eta(\xi) d\xi dz \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \operatorname{sgn}(u(\xi,z)) \partial_\alpha u(\xi,z) \eta(\xi) d\xi dz \\
&= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(u(\xi,z)) \partial_\alpha u(\xi,z) dz \right) \eta(\xi) d\xi
\end{aligned}
$$

Es folgt $Df(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} u(\xi,z) Du(\xi,z) dz$, und insbesondere $|Du| \leq g$. □

Als nächstes fragen wir uns, ob wir aus einer $W^{1,p}$-beschränkten Folge eine L^q_{loc}-konvergente Teilfolgt auswählen können. Dazu zunächst zwei Beispiele

Satz 3.17 (Einbettungssatz von Rellich)**.** *Seien $u_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,n)$ und $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq M < \infty$ für alle k. Dann gibt es ein $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ mit $p^* = \frac{np}{n-p}$, so dass nach Wahl einer Teilfolge gilt $u_k \to u$ in $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für $q \in [1,p^*)$.*

Beispiel 3.18. Sei $u \in C^1_c(\mathbb{R})$, $u \neq 0$, und $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_k(x) = u(x-k)$. Dann gilt $\|u_k\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{W^{1,p}} < \infty$, und $u_k \to 0$ punktweise auf $\mathbb{R}$. Es gilt aber nicht $u_k \to 0$ in $L^q(\mathbb{R})$. Das heißt, wir können höchstens lokale Konvergenz erwarten.

Beispiel 3.19. Sei $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$, $u \neq 0$, und $\lambda > 0$. Sei

$$u_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{n}{p}-1} u(\lambda x) \quad (p \in [1,n)).$$

Es folgt

$$\|Du_\lambda\|_{L^p} = \|Du\|_{L^p} \quad \& \quad \|u_\lambda\|_{L^q} = \lambda^{\frac{n}{p}-1-\frac{n}{q}} \|u\|_{L^q}.$$

Da $\mathsf{spt} u_\lambda = \frac{1}{\lambda} \mathsf{spt} u$ gilt $u_\lambda \to 0$ punktweise fast überall, falls $\lambda \to \infty$. Aber $u_\lambda \to 0$ in $L^q(\mathbb{R}^n)$ nur für $\frac{n}{p} - 1 - \frac{n}{q} > 0$, d.h. $q < \frac{np}{n-p}$.

Bemerkung 3.20. Für $p \in (1,n)$ gilt $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und $\|Du\|_{L^p} \leq \liminf_{k \to \infty} \|Du_k\|_{L^p}$. Denn nach Wahl einer weiteren Teilfolge gilt $\partial_\alpha u_k \to g_\alpha$ schwach in $L^p(\mathbb{R}^n)$, und man sieht, dass $g_\alpha = \partial_\alpha u$.

Satz 3.21 (Arzelà-Ascoli)**.** *Seien X, Z metrische Räume, und X sei kompakt. Betrachte eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $C^0(X,Y)$ mit*

(i) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist gleichgradig stetig, d.h.*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{\mathrm{d}(x,y)\le\delta}\mathrm{d}(f_k(x),f_k(y))\right)\to 0 \quad \textit{mit } \delta\downarrow 0.$$

(ii) *Für alle* $x\in X$ *ist* $\{f_k(x):k\in\mathbb{N}\}$ *präkompakt in* Z.

Dann existiert eine Teilfolge f_{k_j}*, die gleichmässig gegen ein* $f\in C^0(X,Y)$ *konvergiert.*

Lemma 3.22. *Sei* S_ρ *für* $\rho>0$ *der Glättungsoperatore wie in Lemma 1.8. Dann gilt für* $u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\|u-S_\rho u\|_{L^p}\le C(\eta)\rho\,\|Du\|_{L^p}.$$

Beweis. Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ist, können wir annehmen, dass $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für $h\in\mathbb{R}^n$ berechnen wir

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|^p dx=\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_0^1\frac{d}{ds}u(x+sh)ds\right|^p dx\le\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1|Du(x+sh)|^p|h|^p ds dx\le|h|^p\,\|Du\|_{L^p}^p$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|u-S_\rho u\|^p&=\int\left|\int\eta_\rho(x-y)(u(x)-u(y))dy\right|^p dx\\&=\int\left|\int\eta(z)(u(x)-u(x-\rho z))dz\right|^p dx\\&\le C(\eta,p)\int\int|u(x)-u(x-\rho z)|^p dx dz\le C(\eta,p)\rho^p\,\|Du\|_{L^p}^p. \quad\square\end{aligned}$$

14. + 15. Vorlesung.

Satz 3.17 (Satz von Rellich)**.** *Seien $u_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,n)$ und $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq M < \infty$ für alle k. Dann gibt es ein $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ mit $p^* = \frac{np}{n-p}$, so dass nach Wahl einer Teilfolge gilt $u_k \to u$ in $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für $q \in [1,p^*)$.*

Beweis (Satz von Rellich). Wir zeigen die Aussage für $p = q$. Es gilt

$$S_\rho u_k(x) = \eta_\rho \star u_k(x) = \rho^{-n} \int \eta\left(\frac{x-y}{\rho}\right) u_k(y)dy.$$

Dann folgt

$$|S_\rho u_k(x)| \leq \rho^{-n} \|\eta\|_{C^0} \|u_k\|_{L^1(B_\rho(x))} \overset{\text{Hölder}}{\leq} \rho^{-n} C(\eta) \|u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} C(n) \rho^{n(1-\frac{1}{p})} \leq C(n,p,\eta)\rho^{-\frac{n}{p}} M$$

Analog für die Ableitung $D(S_\rho u_k) = S_\rho D u_k$:

$$|D(\eta_\rho \star u_k)(x)| \leq C(\rho, n, \eta)\rho^{-1-\frac{n}{p}} M.$$

Für festes ρ erfüllen die $S_\rho u_k$ auf kompakten Teilmengen die Voraussetzungen des Satzes von Arzelà-Ascoli. (Gleichgradige Stetigkeit folgt, weil die Folgenglieder Lipschitzstetig sind mit einer uniformen Lipschitz-Konstante.) Also gibt es zu festem $\rho > 0$ eine Teilfolge k_j, so dass $S_\rho u_{k_j}$ lokal gleichmässig konvergiert. Wähle nun $\rho_i \downarrow 0$ und dazu sukessive Teilfolgen

$$(k^1_j)_{j\in\mathbb{N}} \supset (k^2_j)_{j\in\mathbb{N}} \supset \dots,$$

so dass gilt

$$S_{\rho_i} u_{k^i_j} \to u_{\rho_i} \text{ lokal gleichmässig in } \mathbb{R}^n \text{ für } j \to \infty.$$

Bilde die Diagonalfolge und numeriere neu: $k^j_j = j$ für $j \in \mathbb{N}$. Es folgt für alle $\rho \in \{\rho_1, \rho_2, \dots\} = \Lambda$, dass $S_\rho u_j \to u_\rho$ lokal gl.m. in $\mathbb{R}^n$. Für $\sigma, \rho \in \Lambda$ mit $\sigma \leq \rho$ schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\|u_\rho - u_\sigma\|_{L^p} &\leq \liminf_{j\to\infty} \|S_\rho u_j - S_\delta u_j\|_{L^p} \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \left(\|S_\rho u_j - u_j\|_{L^p} + \|u_j - S_\rho u_j\|_{L^p}\right) \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} 2\rho \|Du_j\|_{L^p} \leq 2\rho M \to 0 \quad \text{mit} \quad \rho \downarrow 0.
\end{aligned}$$

Weil $L^p(\mathbb{R}^n)$ vollständige ist (Satz von Fischer-Riesz), folgt es gibt ein $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $u_\rho \to u$ in L^p. Wenn wir schließlich σ gegen 0 schicken in der letzten Kette von Ungleichungen, dann folgt

$$\|u_\rho - u\|_{L^p} \leq 2\rho M$$

Für K kompakt folgt nun, $\rho \in \Lambda$,

$$\|u - u_j\|_{L^p(K)} \leq \|u - u_\rho\| + \|u_\rho - S_\rho u_j\|_{L^p(K)} + \|S_\rho u_j - u_j\|_{L^p(K)} \leq 2\rho M + \|u_\rho - S_\rho u_j\|_{L^p(K)} + \rho M.$$

Da $u_\rho - S_\rho u_j$ lokal gleichmässig gegen 0 konvergiert, folgt dass $\|u_\rho - S_\rho u_j\|_{L^p(K)} \to 0$ für $j \to \infty$. Es folgt:

$$\limsup_{j\to\infty} \|u - u_j\|_{L^p(K)} \leq 3\rho M \to 0 \text{ falls } \rho \downarrow 0.$$

Damit gilt für die gewählte Teilfolge also, dass $u_j \to u$ in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz $\|u_j\|_{L^{p^*}} \leq C\|Du_j\|_{L^p} \leq C\Lambda$. Aus dem Lemma von Fatou folgt dann $\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\Lambda$. Die Konvergenz in L^q_{loc} für $q \in [1,p)$ ist klar. Die Konvergenze in L^q_{loc} für $q \in (p,p^*)$ folgt aus dem nächsten Lemma.

Lemma 3.23. *Sei μ ein Maßauf X, und $r \in (p,q) \subset [1,\infty]$. Dann gilt für $f \in L^p \cap L^q)(\mu)$:*

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|^{1-\alpha}_{L^p} \|f\|^\alpha_{L^q} \quad \textit{für } \alpha = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \in (0,1).$$

Beweis. Es gilt

$$(1-\alpha)\frac{r}{p}+\alpha\frac{r}{q}=\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\frac{r}{p}+\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\frac{r}{q}=\frac{q-r}{q-p}+\frac{r-p}{q-p}=1.$$

Dann folgt aus Hölder

$$\int |f|^r=\int |f|^{(1-\alpha)r}|f|^{\alpha r}\le\left(\int |f|^p\right)^{\frac{(1-\alpha)r}{p}}\left(\int |f|^q\right)^{\frac{\alpha r}{q}}=\|f\|_{L^p}^{(1-\alpha)r}\,\|f\|_{L^q}^{\alpha r}.\quad\square$$

Beweis (Fortsetzung Rellic). In der Situation des Satzes von Rellich haben wir $p<q<p^*=\frac{np}{n-p}$. Definiere α wie zuvor. Aus dem vorigen Lemma folgt

$$\|u-u_j\|_{L^q(K)}\le\underbrace{\|u-u_j\|_{L^p(K)}^{(1-\alpha)}}_{\to 0}\underbrace{\|u-u_j\|_{L^{p^*}(K)}^{\alpha}}_{\le C}\to 0.$$

Damit ist der Satz von Rellich vollständig bewiesen. $\square$

Oft brauch man die Sätze von Sobolev und Rellich auf einer beschränkten offenen Menge. Das Resultat dazu ist:

Satz 3.24. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ein beschränktes und offenes Gebiet mit C^1-Rand.*

(i) *Für $p\in[1,n)$ gibt es eine stetige Einbettung*

$$W^{1,p}(\Omega)\subset L^{p^*}(\Omega)\quad\text{mit } p^*=\frac{np}{n-p}.$$

(ii) *Ist $\|u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le M<\infty$ für alle $k\in\mathbb{N}$, und $p\in[1,n)$, so gibt es $u\in L^q(\Omega)$ und eine Teilfolge, so dass $u_k\to u\in L^q(\Omega)$ für all $q\in[1,p^*)$.*

Um den Satz zu beweisen, setzen wir $u\in W^{1,p}(\Omega)$ zu $\widetilde{u}\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ fort und wenden dann Satz 3.13 bzw. Satz 3.17 an.

Satz 3.25 ($W^{1,p}$-Fortsetzung)**.** *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand, und $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, so dass $\overline{\Omega}\subset U$. Dann gibt es einen stetigen linearen Operator*

$$E:W^{1,p}(\Omega)\to W_0^{1,p}(U)\qquad p\in[1,\infty]$$

mit $Eu|_\Omega=u$ für alle $u\in W^{1,p}(\Omega)$.

Beweis. Wir vereinbaren folgende Notation

$$Q=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_\infty<1\}\ \&\ Q^-=\{x\in Q:x_n<0\}\ \&\ I=\{x\in Q:x_n=0\}$$

wobei $x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^n$. Der Kern des Beweises ist das folgende Spiegelungsverfahren:

Schritt 1: Für $u\in C^1(Q^-\cup I)$ mit $\mathsf{spt}u\subset Q$ definiere

$$\widetilde{u}(x',x_n)=\begin{cases}u(x',x_n) & \text{für } x_n\le 0\\ u(x',-x_n) & \text{für } x_n>0.\end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{u}\in W^{1,p}(Q)$ und es gilt

$$\|\widetilde{u}\|_{W^{1,p}(Q)}=2\,\|u\|_{W^{1,p}(Q^-)}\,.$$

Beweis (Schritt 1). Sei $\phi\in C_c^\infty(Q)$. Wir berechnen mit der Produktregel

$$\int_Q\widetilde{u}(\partial_i\phi)=\int_{Q^-}\partial_i(\widetilde{u}\phi)-\int_{Q^-}(\partial_i\widetilde{u})\phi+\int_{Q^+}\partial_i(\widetilde{u}\phi)-\int_{Q^+}(\partial_i\widetilde{u})\phi.$$

Mit Fubini's Satz können die Intrale über Q^-, Q^+ als Mehrfachintegrale geschrieben werden. Aus $\phi \in C_c^\infty(Q)$ folgt, dass für $i \in \{1, n-1\}$ die Integrale bzgl $\partial_i(\widetilde{u}\phi)$ verschwinden. Für $i = n$ erhalten wir

$$\int_{Q^-} \partial_n(\phi\widetilde{u}) = \int_I u(x', 0)\phi(x', 0)dx' = -\int_{Q^+} \partial_n(\widetilde{u}\phi).$$

Also gilt $\int \widetilde{u}\partial_i\phi = -\int(\partial_i\widetilde{u})\phi$, wobei $\partial_i\widetilde{u} = \partial_i u$ auf Q^- und entsprechend $\partial_i\widetilde{u} = -\partial_i u(x', -x_n)$ auf Q^+.

Schritt 2: Die Aussage von Schritt 1 gilt auch für $u \in W^{1,p}(Q^-)$ mit $\mathsf{spt}u \subset Q$.

Beweis (Schritt 2). Nach Meyer-Serrin können wir $u \in C^\infty(Q^-)$ annehmen. Allerdings brauchen wir es in $C^\infty(Q^- \cup I)$. Deshalb brauchen wir die stärkere Version des Satzes von Meyer-Serrin, die besagt, dass wir $v \in W^{1,p}(Q^-)$ sogar durch $u \in C^\infty(\overline{Q^-})$ approximieren können bzgl. der $W^{1,p}$-Norm. Dies gilt, da der Rand ∂Q^- hinreichend regulär ist (Lipschitz-Rand).

Schritt 3: Konstruktion einer globalen Fortsetzung.

Beweis (Schritt 3 und Ende des Beweises). Wir überdecken $\partial\Omega$ durch offene Mengen $U_1, \ldots, U_N$, so dass C^1-Diffeomorphismen $\phi_i : U_i \to Q$ existieren mit $\phi_i(U_i \cap \Omega) = Q^-$. Zusammen mit $U_0 = \Omega$ ist die Familie $(U_i)_{i=0,\ldots,N}$ eine offene Überdeckung von $\overline{\Omega}$, und es gibt eine untergeordnete Zerlegung der Eins $\eta_i \in C_c^\infty(U_i)$ mit $\sum \eta_i = 1$ auf $\overline{\Omega}$. Außerdem gilt ohne Einschränkung, dass $\eta_i \in C_c^\infty(U)$. Andernfalls multipliziere noch mit einer geeigneten Abschneidefunktion.
Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ können wir nun wie folgt definieren:

$$Eu := \eta_0 u + \sum_{i=1}^N \widetilde{\nu}_i \circ \phi_i \quad \text{mit } \nu_i = (\eta_i u) \circ \phi_i^{-1}\Big|_{Q^-}.$$

Dabei sei $\widetilde{\nu}_i \circ \phi_i$ durch Null auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Es gilt

$$\widetilde{\nu}_i \circ \phi_i|_\Omega = \begin{cases} \eta_i u & \text{auf } \Omega \cap U_i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also folgt $Eu|_\Omega = \eta_0 u + \sum_{i=1}^N \eta_i u = u$. Außerdem is $Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathsf{spt}Eu \subset U$. Die Abschätzung für die Stetigkeit folgt schlielich aus Schritt 1 und 2, und der Soblev Transformationformel. □

Satz 3.26 (Poincare Ungleichung I). *Sei* $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, d)$.
Dann gilt für $u \in W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$*:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le d\,\|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Für $(x', x_n) \in \Omega$ folgt aus der Hölder Ungleichung

$$|u(x', x_n)| = |\int_0^{x_n} \partial_n u(x', s)ds| \le d^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^d |\partial_n u(x', s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daraus folgt durch Integration über Ω

$$\int_\Omega |u|^p \le d^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^d \int_0^d |\partial_n u(x', s)|^p ds dx_n dx' \le d^p \int_\Omega |Du|^p. \qquad \square$$

Satz 3.27 (Poincare Ungleichung II). *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes* C^1*-Gebiet. Dann existiert eine Konstante* $C(n) > 0$*, so dass*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C(n)\,\|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ mit } \int_\Omega u = 0.$$

Lemma 3.28. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Es gilt*

$$\int_\Omega u\partial_{x^\alpha}\phi = 0 \quad \text{für } \phi \in C^1_0(\Omega) \text{ und alle } \alpha = 1, \ldots, n.$$

Dann ist u konstant fast überall.

Beweis (Satz). Durch Widerspruch. Sonst gibt es eine Folge $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\int_\Omega u_k = 0$, so dass

$$\|u_k\|_{L^p(\Omega)} > k\,\|Du\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

Indem wir u_k durch $\|u_k\|^{-1}_{L^p(\Omega)} u_k$ ersetzen, können wir annehmen, dass $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Nach Rellich gibt es dann eine Teilfolge $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ mit

$$\int u = 0 \;\&\; \|u\|_{L^p} = 1. \tag{12}$$

Die Ungleichung ergibt außerdem, dass $\|Du_k\|_{L^p(\Omega)}$ beschränkt ist. Das heißt nach Wahl einer weiteren Teilfolge konvergiert Du_k schwach-($*$) in $L^p(\Omega)$ gegen $g = 0$. Nun, überprüft man leich, dass $g = 0$ die schwache Ableitung von u sein muss. Aber da Ω ein Gebiet ist ergibt sich, dass $u = const$ fast überall. Ein Widerspruch zu (12). □

4. Unterhalbstetigkeit

Wir betrachten wieder Funktionale der Form

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))dx \quad \text{wobei} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad u : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

Definition 4.1. $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ heißt Caratheodory Funktion, falls

- $f(\cdot, z, p)$ ist messbar für alle $(z, p) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}$,
- $f(x, \cdot, \cdot)$ ist stetig für fast alle $x \in \Omega$.

Satz 4.2 (Konvexität ⇒ Unterhalbstetigkeit)**.** *Sei $f : \Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ Caratheodory Funktion. Es gelte:*

1. *Es gibt eine Funktion $\phi \in L^1(\Omega)$ mit $f(x, \cdot, \cdot) \geq \phi(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.*
2. *$f(x, z, \cdot)$ ist konvex als Funktion von $p \in \mathbb{R}^{m\times n}$ für alle $(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$.*

Seien dann $u_k, u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ mit $u_k \to u$ lokal in $L^1(\Omega)$ (das heißt bezüglich $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$) und $Du_k \to Du$ schwach lokal in $L^1(\Omega)$. Dann folgt

$$\int_\Omega f(\cdot, u, Du) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f(\cdot, u_k, Du_k).$$

Beweis (Satz). Sei ohne Einschränkung $\phi = 0$. Sonste betrachte $\widetilde{f}(x, z, p) = f(x, z, p) - \phi(x)$.

Außerdem sei ohne Einschränkung Ω beschränkt und $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$ bzw. $Du_k \to Du$ schwach in $L^1(\Omega)$. Sonst wählen wir eine Ausschöpfung $\bigcup_{i=1}^\infty \Omega_i = \Omega$ (mit $\Omega_i \subset \Omega_{i+1}$ und $\overline{\Omega}_i$ kompakt für all $i \in \mathbb{N}$.) Dann gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega_i} f(\cdot, u, Du) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega_i} \underbrace{f(\cdot, u_k, Du_k)}_{\geq 0 \text{ f. ü.}} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f(\cdot, u_k, Du_k).$$

Und mit $i \to \infty$ folgt

$$\int_\Omega f(\cdot, u, Du) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f(\cdot, u_k, Du_k)$$

wobei die linke Seit konvergiert wegen dem Satz über montone Konvergenz.

Ohne Einschränkung nehmen wir auch an, dass $u_k \to u$ fast überall und $\mathcal{F}(u_k) \to \mu < \infty$ mit $k \to \infty$.

Lemma 4.3. *Betrachte für $x \in \Omega$ und $\epsilon > 0$. Sei*

$$\begin{aligned} \Delta_k(x) &= |f(x, u(x), Du_k(x)) - f(x, u_k(x), Du_k(x))| \\ E_{k,\epsilon} &= \{x \in \Omega : \Delta_k(x) \geq \epsilon\} \end{aligned}$$

Dann gilt nach Wahl einer Teilfolge $\mathcal{L}^n(E_{k,\epsilon}) \to 0$ für $k \to \infty$ und alle $\epsilon > 0$.

Beweis. Angenommen die Aussage stimmt nicht. Dann gibt es also ein $\delta > 0$, so dass $\mathcal{L}^n(E_{j,\epsilon}) \geq \delta > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Schwach konvergente Folgen sind beschränkt. Also existiert ein $C > 0$, so dass

$$\|Du_j\|_{L^1(\Omega)} \leq C \quad \text{für all } i \in \mathbb{N}.$$

Außerdem für alle $\Lambda > 0$ die Markov Ungleichung

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \Omega : |Du_j|(x) \geq \Lambda\}) \leq \frac{1}{\Lambda} \int_\Omega |Du_j|.$$

Das heißt, es gilt

$$\mathcal{L}^n(\{|Du_j| > \Lambda\}) < \frac{C}{\Lambda} \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{für } \Lambda \geq \frac{2C}{\delta} \quad \text{und für alle } j \in \mathbb{N}.$$

und es gilt $\mathcal{L}^n(E_{j,\epsilon} \setminus \{|Du_j| > \Lambda\}) \geq \mathcal{L}^n(E_{j,\epsilon}) - \delta/2$. Betrachte nun die Mengen

$$D_{k,\epsilon} = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_{j,\epsilon} \cap \{|Du_j| \leq \Lambda\} = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_{j,\epsilon} \setminus \{|Du_j| > \Lambda\}$$

Die $D_{k,\epsilon}$ ist absteigend in k, und $\mathcal{L}^n(D_{k,\epsilon}) \geq \delta/2$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Deshalb folgt aus σ-Additivität

$$\mathcal{L}^n(\bigcap_{k=1}^{\infty} D_{k,\epsilon,\Lambda}) = \lim_{k \to \infty} \mathcal{L}^n(D_{k,\epsilon,\Lambda}) \geq \frac{\delta}{2}.$$

Daraus folgt, dass für alle $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_{k,\epsilon,\Lambda}$ gilt, dass $x \in E_{j,\epsilon,\Lambda}$ für unendlich viele j. Für alle $x \in \bigcap D_{k,\epsilon,\Lambda}$ gibt es also eine Teilfolge u_j mit $j \to \infty$, so dass

$$\begin{cases} |Du_j(x)| \leq \Lambda \\ |f(x, u(x), Du_j(x)) - f(x, u_j(x), Du_j(x))| \geq \epsilon. \end{cases}$$

Nach Wahl einer weiteren Teilfolge, gilt

$$Du_j(x) \to p \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \& \quad u_j(x) \to u(x).$$

Da $f(x, \cdot, \cdot)$ stetig ist für fast alle $x \in \Omega$ folgt für fast alle $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_{k,\epsilon,\Lambda}$

$$|f(x, u_j(x), Du_j(x)) - f(x, u(x), Du_j(x))| \to 0 \quad \text{falls } j \to \infty.$$

Da ist ein Widerspruch zu $|f(x, u_j(x), Du_j(x)) - f(x, u(x), Du_j(x))| \geq \epsilon$. ∎

16. Vorlesung.

Satz 4.2 (Konvexität $\Rightarrow$ Unterhalbstetigkeit)**.** *Sei $f : \Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ Caratheodory Funktion. Es gelte:*

(1) *Es gibt eine Funktion $\phi \in L^1(\Omega)$ mit $f(x,\cdot,\cdot) \geq \phi(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.*
(2) *$f(x,z,\cdot)$ ist konvex als Funktion von $p \in \mathbb{R}^{m\times n}$ für alle $(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$.*

Seien dann $u_k, u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ mit $u_k \to u$ lokal in $L^1(\Omega)$ (das heißt bezüglich $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$) und $Du_k \to Du$ schwach lokal in $L^1(\Omega)$. Dann folgt

$$\int_\Omega f(\cdot,u,Du) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f(\cdot,u_k,Du_k).$$

Lemma 4.4. *Betrachte für $x \in \Omega$ und $\epsilon > 0$. Sei*

$$\begin{aligned}\Delta_k(x) &= |f(x,u(x),Du_k(x)) - f(x,u_k(x),Du_k(x))|\\ E_{k,\epsilon} &= \{x \in \Omega : \Delta_k(x) \geq \epsilon\}\end{aligned}$$

Dann gilt nach Wahl einer Teilfolge $\mathcal{L}^n(E_{k,\epsilon}) \to 0$ für $k \to \infty$ und alle $\epsilon > 0$.

Exkurs: Satz von Hahn-Banach für konvexe Mengen.
Im folgenden sei X ein Banachraum.

Definition 4.5. Zwei Mengen $A, B \subset X$ werden durch das Funktional $\phi \in X'$, $\phi' \neq 0$ getrennt, falls $\phi(x) < \phi(y)$ für alle $x \in A$ und $y \in B$.

Satz 4.6 (Hahn-Banach für konvexe Mengen)**.** *Seien $A, B \subset X$ konvex, A offen und $A \cap B = \emptyset$. Dann können A, B durch ein $\phi \in X'$ getrennt werden.*

Folgerung 4.7. *Sei $K \subset X$ konvex, und $0 \notin \overline{K}$. Dann gibt es ein $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| = 1$ und $\phi(x) \leq -\operatorname{d}(0,K)$ für alle $x \in K$.*

Beweis. Da $0 \notin \overline{K}$, folgt $\operatorname{d}(0,K) > 0$. Wähle als $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| = 1$, so dass K und $B_R(0)$ getrennt werden. Es folgt

$$\phi(x) \leq \phi(z) \ \ \forall x \in K \ \&\ \forall z \in B_R(0) \quad\Longrightarrow\quad \phi(x) \leq -R\,\|\phi\| = -R \ \ \forall x \in K. \qquad \square$$

Beweis (Satz 4.2, Fortsetzung)*.* Wir beweisen den Satz in 2 Schritten.

Schritt 1: Für $G \subset \Omega$ messbar gilt $\int_G f(x,u,Du) \leq \liminf_{k\to} \int_G f(x,u,Du_k)$.
Erinnerung: $(L^1(G))' = L^\infty(G)$.

Beweis (Schritt 1)*.* Nach Voraussetzung gilt $Du_k \to Du$ schwach in $L^1(G)$.

Eine Testfunktion $\phi \in L^\infty(G)$ setzen wir durch 0 auf ganz Ω fort.

Sei K die Menge aller endlichen Konvexkombinationen der Du_k. Dann ist K konvex, und Du liegt im L^1-Abschluss von K. Sonst gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach für konvexe Mengen ein $\delta > 0$ und ein $\widetilde{\phi} \in L^\infty(G)$ mit $\widetilde{\phi}(Du_k - Du) \leq -\delta$ für alle $k \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zur schwachen Konvergenz. Es gibt also $\alpha^i_k \geq 0$ mit $i,k \in \mathbb{N}$, so dass für festes $i \in \mathbb{N}$ $\alpha^i_k \neq 0$ nur für endlich viele k, $\sum_{k=1}^\infty \alpha^i_k = 1$ und

$$p^i = \sum_{i=k}^\infty \alpha^i_k Du_k \to Du \ \text{ in } \ L^1(G) \ \text{ falls } \ i \to \infty.$$

Wir können annehmen, dass $p^i \to Du$ punktweise fast überall. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x,u(x),Du(x)) &= \lim_{i\to\infty} f(x,u(x),p^i(x)) \quad \text{(für fast alle } x \in \Omega)\\ &\leq \liminf_{i\to\infty} \sum_{i=1}^\infty \alpha^i_k f(x,u(x),Du_k(x)) \quad \text{(Konvexität in } p.) \end{aligned}$$

Durch Integration folgt mit dem Lemma von Fatou

$$\int_G f(x,u,Du) \le \liminf_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^i \int_G f(x,u,Du_k) \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_G f(x,u,Du_k).$$

Wir wählen nun $\epsilon > 0$ beliebig. Dazu sei nun u_{k_i} als Teilfolge von u_k so gewählt, dass

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \int_G f(x,u,Du_{k_i}) \le \liminf_{i\to\infty} \int_G f(x,u,Du_k) + \epsilon.$$

(und wenn alles vorige an auf u_{k_i}). Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, ist damit Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2: Beweis des Satzes. Wende das Lemma an mit $\epsilon = \frac{\delta}{L^n(\Omega)}$. Dann folgt nach Übergang zu einer Teilfolge, dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(E_{j,\epsilon}) < \infty.$$

Setze $D_{k,\epsilon} = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_{j,\epsilon}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\setminus D_{k,\epsilon}} f(x,u,Du) &\overset{\text{Schritt 1}}{\le} \liminf_{j\to\infty} \int_{\Omega\setminus D_{k,\epsilon}} f(x,u,Du_j) \\
&\le \liminf_{j\to\infty} \int_{\Omega\setminus D_{k,\epsilon}} f(x,u_j,Du_j) + \underbrace{\epsilon\mathcal{L}^n(\Omega)}_{=\delta} \\
&\le \liminf_{j\to\infty} \int_{\Omega} f(x,u_j,Du_j) + \delta.
\end{aligned}$$

Es gilt $\mathcal{L}^n(D_{k,\epsilon}) \overset{k\to\infty}{\to} 0$, und $\Omega\setminus D_{k,\epsilon}$ ist aufsteigend. Es folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz, dass

$$\int_\Omega f(x,u,Du) \le \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f(x,u_j,Du_j) + \delta$$

und somit folgt für $\delta \to 0$ die Behauptung. □

Satz 4.8 (Existenz von Minimierern). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}$ eine Caratheodory funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Konvexität: $f(x,z,\xi)$ konvex in ξ für alle $(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$.*

(ii) *Koerzivität: es gibt $p \in (1,\infty)$, $\lambda > 0$ und $\phi \in L^1(\Omega)$, so dass für fast alle $x \in \Omega$ gilt:*

$$f(x,z,\xi) \ge \lambda|\xi|^p - \phi(x) \quad \text{für alle } z, \xi.$$

Für $u_0 \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ betrachte die Klasse

$$\mathcal{C} = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m) : u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m), \mathcal{F}(u) < \infty \right\}.$$

Ist $\mathcal{C} \neq \emptyset$, so gibt es ein $u \in \mathcal{C}$ mit $\mathcal{F}(u) = \inf_{v\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(v)$.

Beweis. Wähle $u_j \in \mathcal{C}$ mit $\mathcal{F}(u_j) \to \mu := \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} < \infty$. Aus Koerzivität folgt

$$\int_\Omega |Du_j|^p \le \frac{1}{\lambda} \left(\int_\Omega f(\cdot,u_j,Du_j) + \int_\Omega \phi \right) \le C.$$

Aus der Poincaré-Ungleichung, Satz 4.5, folgt

$$\int_\Omega |u_j|^p \le C(\mathrm{diam}\Omega) \int_\Omega |Du_j|^p \le C.$$

Nach dem Satz von Rellich, Satz 3.17, gibt es ein $u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge $u_j \to u$ in $L^p(\Omega)$ und $Du_j \to Du$ schwach in $L^p(\Omega)$. Hier brauchen wir $p > 1$. Es folgt insbesondere $u_j \to u$ in $L^1(\Omega)$, $Du_j \to Du$ schwach in $L^1(\Omega)$. Also gilt nach dem vorigen Satz, dass

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathcal{F}(u_j) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F}.$$

Nun ist $W_0^{1,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^{1,p}(\Omega)$, also ist $W_0^{1,p}(\Omega)$ auch abgeschlossen bezüglich schwacher Konvergenz (Hahn-Banach, Folgerung). Somit gilt $u-u_0 \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ bzw. $u \in \mathcal{C}$, und u ist der gesuchte Minimierer. □

Wir wollen nun untersuchen, ob Konvexität des Integranden bzgl. ξ notwendig für die Unterhalbstetigkeit ist, bzw. ob schwächere Bedingungen ausreichen. Im folgenden betrachten wir zur Einfachheit nur Integranden der Form $f = f(\xi)$.

Definition 4.9. Sei $Q = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ heißt quasikonvex, falls

$$f(\xi) = \int_Q f(\xi) \leq \int_Q f(\xi + D\phi(x))dx$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\phi \in C_c^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$.

Bemerkung 4.10. Ist $f \in C^0(\mathbb{R}^{m\times n})$ konvex, so folgt aus der Ungleichung von Jensen

$$\int_Q f(\xi) = f(\int_Q \xi) = f(\int_Q (\xi + D\phi)) \leq \int_Q f(\xi + D\phi).$$

das heißt: konvex $\Longrightarrow$ quasi-konvex.

17. Vorlesung.

Definition 4.9. Sei $Q = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ heißt quasikonvex, falls

$$f(\xi) = \int_Q f(\xi) \le \int_Q f(\xi + D\phi(x))dx$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\phi \in C_c^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$.

Satz 4.11. *Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^{m\times n})$ quasi-konvex.*
Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vom Rang Eins $D^2 f|_\xi(A, A) \ge 0$.

Bemerkung 4.12. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ heißt Rang Eins konvex, falls für alle $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit rang $\mathrm{rg}(A) = 1$ gilt:

$$t \mapsto f(\xi + tA) \quad \text{ist konvex.}$$

Für $f \in C^2$ gilt

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\xi + tA) = D^2 f(\xi + tA)(A, A).$$

Das heißt also: $f \in C^2(\mathbb{R}^{m\times n})$ is Rang-Eins konvex $\iff D^2 f(\xi)(A, A) \ge 0$ für alle $\xi, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rg}(A) = 1$.
Ist $\mathrm{rg}(A) = 1$, dann gibt es ein $\eta \in \mathbb{R}^m$, $|\eta| = 1$, mit $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}\cdot\eta$. Mit $\lambda = A^T\eta \in \mathbb{R}^n$ folgt

$$Ax = \langle Ax, \eta\rangle\eta = \langle x, \lambda\rangle\eta \implies A^i_\alpha = \lambda_\alpha \eta^i.$$

Sei $\lambda \otimes \eta$ die Matrix $(\lambda_\alpha\eta^i)_{\alpha,i}$.
Dann können wir die Rang Eins Bedingung $D^2 f(\xi)(A, A) \ge 0$ wie folgt schreiben:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^i_\alpha \partial^j_\beta}\Big|_\xi \lambda_\alpha\lambda_\beta\eta^i\eta^j \ge 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^m.$$

Die Legendre-Hadamard Bedingung.

Beweis (Satz). Sei $\phi \in C_c^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$ und $\xi \in \mathbb{R}^m$. Nach Voraussetzung hat die Funktion $t \mapsto \int_Q f(\xi + tD\phi)$ bei $t = 0$ ein Minimum, also folgt

$$0 \le \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \int_Q f(\xi + tD\phi) = \int_Q D^2 f(\xi)(D\phi, D\phi).$$

Seien $\lambda \in \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \mathbb{R}^m$ gegeben, und $J \in C_c^\infty(Q)$?
Wähle $\phi(x) = \frac{1}{k} J(x)\rho(k\langle\lambda, x\rangle)\eta$. Dabei sei $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\rho = \rho(s)$, die Sägefunktion, und $k \in \mathbb{N}$. Wir berechnen die Ableitung von ϕ

$$D\phi(x) = J(x) \underbrace{\rho'(k\langle\lambda, x\rangle)}_{=+/-1} \lambda \otimes \eta + \underbrace{\frac{1}{k}\rho(k\langle\lambda, x\rangle) DJ(x) \otimes \eta}_{\to 0}.$$

$$\begin{aligned} \implies 0 &\le \lim_{k\to\infty} \int_Q D^2 f(\xi)(D\phi, D\phi) \\ &= \int_Q J(x)^2 D^2 f(\xi)(\lambda\otimes\eta, \lambda\otimes\eta) = D^2 f(\xi)(\lambda\otimes\eta, \lambda\otimes\eta) \underbrace{\int_Q J(x)^2 dx}_{\ge 0}. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 4.13. *[Morrey] Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^{m\times n})$, $f = f(\xi)$ mit*

$$0 \le f(\xi) \le C(|\xi|^p + 1) \quad \text{für ein } p \in (1, \infty). \tag{13}$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(Du)$ ist unterhalbstetig bezüglich schwacher Konvergenz in $W^{1,p}(\Omega)$ für jedes offene Gebiet Ω.*
(2) *f ist quasi-konvex.*

Bemerkung 4.14. Sei $m = 1$ oder $n = 1$. Dann gilt:

$$f \text{ konvex} \Longrightarrow f \text{ quasi-konvex} \Longrightarrow f \text{ Rang Eins konvex} \Longrightarrow f \text{ konvex}.$$

Letzter Schritt folgt, da für $\min(n, m) = 1$ alle $m \times n$-Matrizen höchstens Rang Eins haben.

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Wähle $\Omega = Q = (0,1)^n$ und $\phi \in C_c^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$.
Wir setzen ϕ $\mathbb{Z}^n$-periodisch fort auf $\mathbb{R}^n$ und betrachte $u_k(x) = \xi \cdot x + \frac{1}{k}\phi(kx)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Es folgt mit $u(x) = \xi x$, dass $u_k \to u$ gleichmässig auf Q und $\|Du_k\|_{L^\infty(Q)} \leq C < \infty$.

Aus diesen Eigenschaften folgt, dass $\|u_k\|_{W^{1,\infty}(Q)} \leq \hat{C} < \infty$. Da $W^{1,\infty}(Q) \subset W^{1,p}(Q)$ mit $\|v\|_{W^{1,p}} \leq \|v\|_{W^{1,\infty}}$, folgt u_k is beschränkt in $W^{1,p}(Q)$ für jedes $p \in (1, \infty)$.
$W^{1,p}(Q)$ ist reflexiv mit Dualraum $W^{1,q}(Q)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) und es gilt $u_k \to u$ schwach in $W^{1,p}(Q)$ für eine Teilfolge.
Bemerkung: Zu zeigen: $W^{1,p}(Q)$ für $p \in (1, \infty)$ ist reflexiv. (Übung)
Dann

$$\begin{aligned}
\int_Q f(\xi)dx = \int_Q f(Du) &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_Q f(Du_k) \\
&= \liminf_{k\to\infty} \int_Q f(\xi + D\phi(kx))dx \\
&= \liminf_{k\to\infty} \int_{kQ} f(\xi + D\phi(y)k^{-n}dy = \int_Q f(\xi + D\phi(x))dx.
\end{aligned}$$

Also ist f quasi-konvex.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Ist f quasi-konvex, dann gilt auch

$$f(\xi) \leq \int_Q f(\xi + D\phi(x))dx \quad \text{für alle } \phi \in W^{1,p}(Q, \mathbb{R}^m).$$

Dazu sei $\epsilon > 0$ beliebig und $\psi \in C_c^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$ mit $\|D(\phi - \psi)\|_{L^p(Q)}^p < \epsilon$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
f(\xi) &\leq \int_Q f(\xi + D\phi(x))dx \\
&\leq \int_Q f(\xi + D\psi(x)) + \int_Q |f(\xi + D\phi(x)) - f(\xi + D\psi(x))| \leq \int_Q f(\xi + D\psi(x)) + C\epsilon.
\end{aligned}$$

In der letzten Ungleichung benutzen wir $f \in C^2$.

Da schwach konvergente Folgen beschränkt sind, gilt

$$\|u_k\|_{L^p} + \|Du_k\|_{L^p} \leq C. \tag{14}$$

Wegen Bedingung (13) folgt, dass $\mathcal{F}(u) \leq \hat{C} < \infty$. Also existiert $\mu := \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u_k) \to \mu, \\ Du_k \to Du \text{ schwach in } L^p(\Omega) \ \text{ wegen (14)}, \\ u_k \to u \in L^p_{loc}(\Omega) \ \text{ wegen (14) \& Konvergenzsatz von Lebesgue.} \end{cases} \tag{15}$$

Weiter behaupten wir

$$|Df(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^{p-1}) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^{m \times n}. \tag{16}$$

Betrachte dazu die konkave Funktion

$$g(t) = f(\xi + tA) \quad \text{mit } \operatorname{rg}(A) = 1, |A| = 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} Df(\xi)A &= g'(0) \\ &\leq \frac{1}{t} g(t) \quad \text{für } t > 0, \text{ da } g(t) \text{ konvex.} \\ &\leq \frac{C}{t}(|\xi + tA|^p + 1) \leq \frac{C}{t}(|\xi|^p + t^p + 1). \end{aligned}$$

Wähle $t = |\xi| + 1$ und erhalte $Df(\xi)A = C(|\xi|^{p-1} + 1)$. Da wir A als Matrix wählen können, die überall 0 bis auf einen Eintrag, folgt

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha^i}(\xi) \right| \leq C(|\xi|^{p-1} + 1). \tag{17}$$

Der Kompaktheitssatz für Radonmaße liefert nach Übergang zu einer Teilfolge

$$(1 + |Du|^p + |Du_k|^p) d\mathcal{L}^n \to \mu \ \text{ Radonmaß.} \tag{18}$$

Da μ ein Radonmaß, ist die Menge aller $s \in \mathbb{R}$ mit $\mu(\{x \in \Omega : x_\alpha = s\}) > 0$ abzählbar, wobei $1 \leq \alpha \leq n$.
Seien D die dyadischen Zahlen, also

$$D = \left\{ s \in \mathbb{R} : 2^j s \in \mathbb{Z}^n \text{ für ein } j \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Betrachte die Äquivalenzrelation $s_1 \sim s_2 \iff s_1 - s_2 \in D$.
Die Äquivalenzklassen sind von der Form $s+Q$ mit $s \in [0,1]^n$, wobei je zwei verschiedene irrationale Zahlen in $[0,1]^n$ verschiedene Äquivalenzklassen erzeugen. Inbesondere ist eine Äquivalenzklasse abzählbar, und es gibt überabzählbarviele Äquivalenzklassen.
Also gibt es ein $\hat{s} \in [0,1)^n$ mit $\mu(\{x \in \Omega : x_\alpha = s_\alpha \text{ für } \alpha = 1, \ldots, n\}) = 0$ für alle $s \in \hat{s} + D$.
Sonst gilt $\mu(\{x \in \Omega : x_\alpha = s_\alpha \text{ für } \alpha = 1, \ldots, n\}) > 0$ für alle $s \in t + D$ und für alle $t \in [0,1]$. Also hätten alle Punkte in $\mathbb{R}^n$ positives μ-Maß, was der Eigenschaft widerspricht ein Radonmaßzu sein.
Nach Verschieben des Koordinatensystems gilt

$$\mu(\{x \in \Omega : x_\alpha = s\}) = 0 \text{ für } 1 \leq \alpha \leq n \text{ und für alle } s \in D. \tag{19}$$

18. Vorlesung.

Beweis (Fortsetzung). Zuvor haben wir eine Familie von Würfeln W mit Ecken in $s+D$ ($s \in [0,1]$) konstruiert, so dass $\mu(\partial Q) = 0$ für alle $Q \in W$. Ohne Einschränkung sei $s = 0$. Sei W_j die Menge von Würfeln Q mit Kantenlänge 2^{-j} und $j \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt auch

$$\mu(\partial Q) = 0 \text{ für alle } Q \in W_j, \text{ und alle } j \in \mathbb{N}_0. \tag{20}$$

Setze $Du(x) := 0$ für alle $x \notin \Omega$ und $p_j = \frac{1}{\mathrm{vol}(Q)} \int_Q Du$ falls $x \in Q$ mit $Q \in W_j$.

Behauptung: $p_j \to Du$ in $L^p(\Omega)$.

Wir zeigen: $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $f_j = \frac{1}{\mathrm{vol}(Q)} \int_Q f$ falls $x \in Q$ mit $Q \in W_j$, dann $f_j \to f$ in L^p.

Schritt 1: Die Behauptung stimmt für $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$.

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $Q \in W_j$ mit $x \in Q$. Dann

$$|f(x) - f_j(x)| = \left| \int_Q (f(x) - f(y)) dy \right| \le \sup_{x,y \in Q} |f(x) - f(y)| \to 0 \text{ gleichmässig bzgl. } x$$

falls $j \to \infty$, da f gleichmässig stetig. Insbesondere folgt also, dass $f_j \to f$ in L^∞.

Schritt 2: Es gilt $\|f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

$$\|f_j\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sum_{Q \in W_j} \int_Q |f_j|^p = \sum_{Q \in W_j} |Q| \cdot \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f|^p \right| \le \sum_{Q \in W_j} \int_Q |f|^p = \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Schritt 3: Beweis $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ durch Approximation. Sei $\widetilde{f} \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \|f - f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\le \left\| f - \widetilde{f} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\| \widetilde{f} - \widetilde{f}_j \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\| f_j - \widetilde{f}_j \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\overset{\text{Schritt 2}}{\le} 2 \left\| f - \widetilde{f} \right\|_{L^p} + \left\| \widetilde{f} - \widetilde{f}_j \right\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Mit $j \to \infty$ folgt aus Schritt 1

$$\limsup_{j \to \infty} \|f - f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le 2 \left\| f - \widetilde{f} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Da $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt in $L^p(\mathbb{R}^n)$, folg die Behauptung. □

Behauptung: Nach Wahl einer Teilfolge gilt auch

$$f \circ p_j \to f \circ Du \text{ in } L^1(\Omega). \tag{21}$$

Denn $f \circ p_j \to f \circ Du$ punktweise f.ü., und mit (13) folgt die Aussage, da $p_j \to Du$ in L^p und mit dem Konvergenzsatz von Vitali (oder auch Lebesgue).

Sei $\epsilon > 0$ gegeben, und mit j hinreichend groß, gilt dann

$$\|p_j - Du\|_{L^p(\Omega)} + \|f(p_j) - f(Du)\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon. \tag{22}$$

Weiter wähle $U \subset \Omega$, so dass $\overline{U}$ kompakt und $\overline{U} \subset \Omega$ mit

$$\int_{\Omega \setminus U} f(Du) < \epsilon \tag{23}$$

Da $\overline{U}$ kompakt, wird U von endlich vielen $Q_l \in W_j$ mit $l = 1, \ldots, m$ überdeckt. Sei $0 \le \chi \le 1$ eine Abschneidefunktion mit Träger in der Vereinigung der Q_l, wobei $\mathsf{spt}\chi \subset \bigcup_{l=1}^m \mathring{Q}_l$. $\mathring{Q}$ bezeichnet das Innere von Q.

Setze $v_k = \chi \cdot (u_k - u)$ sowie $(Du)_l = \frac{1}{|Q_l|} \int_{Q_l} Du$. Es folgt

$$\mathcal{F}(u_k) \overset{f \ge 0}{\ge} \sum_{l=1}^m \int_{Q_l} f(Du_k) =: \sum_{l=1}^m \int_{Q_l} f(Du + Dv_k) + E_k^1.$$

wobei $E_k^1 = \sum_{l=1}^m \int_{Q_l} (f(Du_k) - f(Du + Dv_k))$.
Setze weiter

$$\sum_{l=1}^m \int_{Q_l} f(Du + Dv_k) = \sum_{l=1}^m \int_{Q_1} f((Du)_l + Dv_k) + E_k^2,$$

wobei $E_k^2 = \sum_{l=1}^m \int_{Q_l} [f(Du + Dv_k) - f((Du)_l + Dv_k)]$. Jetzt verwenden wir die Quasi-konvexität:

$$\sum_{l=1}^m \int_{Q_l} f((Du)_l + Dv_k) \geq \sum_{l=1}^m \int_{Q_l} f((Du)_l) \geq \int_U f(p_j) =: \mathcal{F}(u) + E_k^3,$$

wobei

$$E_k^3 = \int_U f(p_j) - \int_\Omega f(Du).$$

Insgesamt ergibt sich die Ungleichung

$$\mathcal{F}(u_k) \geq \mathcal{F}(u) + E_k^1 + E_k^2 + E_k^3.$$

Wir zeigen nun, dass die Fehlerterme gegen 0 konvergieren (falls $u_k \to u$ schwach).

Zuerst folgt für $v_k = \chi(u_k - u)$:

$$Du + Dv_k = Du_k \ \text{ auf } \{x : \chi(x) = 1\} \quad \text{und} \quad Dv_k = D\chi(u_k - u) + \chi(Du_k - Du).$$

Es folgt mit (13):

$$|E_k^1| = \left| \sum_{l=1}^m \int_{Q_l} [f(Du_k) - f(Du + Dv_k)] \right| \leq C \sum_{l=1}^m \int_{Q_l \cap \{\chi < 1\}} [1 + |Du_k|^p + |Du|^p + |D\chi|^p |u_k - u|^p] \,.$$

Für $k \to \infty$ folgt aus der Definition μ, mit (15) und dem Portmonteau Lemma:

$$\liminf_{k\to\infty} \left[C \sum_{l=1}^m \int_{Q_l \cap \{\chi<1\}} [1 + |Du_k|^p + |Du|^p] + \int_{Q_l \cap \{\chi<1\}} |D\chi|^p |u_k - u|^p \right] \geq C \sum_{l=1}^m \mu(Q_l \cap \{\chi < 1\}).$$

$$\limsup_{k\to\infty} |E_k^1| \leq C \sum_{l=1}^m \mu(Q_l \cap \{\chi < 1\}). \tag{24}$$

Als nächstes betrachten wir E_k^2:

$$|E_k^1| \leq \sum_{l=1}^m \int_{Q_l} |f(Du + Dv_k) - f((Du)_l + Dv_k)|$$

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_l} |f(Du + Dv_k) - f((Du)_l + Dv_k)| \\
&= \int_{Q_l} \left| \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(tDu + (1-t)(Du)_l + Dv_k) \right| \\
&\leq \int_{Q_l} \left| \int_0^1 Df(tDu + (1-t)(Du)_l + Dv_k) dt \right| |Du - (Du)_l| \, dx \\
&\overset{(3)}{\leq} C \int_{Q_l} \left[1 + |Du|^{p-1} + |Du_k|^{p-1} + |D\chi|^{p-1} |u_k - u|^{p-1} \right] |Du - (Du)_l| dx.
\end{aligned}$$

Beachte dazu, dass $\int_{Q_l} |(Du)_l|^{p-1} = \int_{Q_l} |\frac{1}{|Q_l|} \int_{Q_l} |Du|^{p-1} = \int_{Q_l} |Du|^{p-1}$.
Durch Summation über Q_l folgt

$$\begin{aligned}|E_k^2| &\leq C \int_\Omega \left[1 + |Du|^{p-1} + |Du_k|^{p-1} + |D\chi|^{p-1}|u_k - u|^{p-1}\right] |Du - p_j| dx \\ &\leq C \left[\int_\Omega (1 + |Du|^p + |Du_k|^p + |D\chi|^p |u_k - u|^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |Du - p_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Mit (15), (18) und (22) folgt

$$\limsup_{k\to\infty} |E_k^2| \leq C\epsilon\mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Schließlich

$$E_k^3 = \int_U f(p_j) - \int_\Omega f(Du) = -\int_{\Omega\setminus U} f(Du) + \int_U (f(p_j) - f(Du)).$$

Die Wahl von U und j ergibt

$$|E_k^3| \leq \left|\int_{\Omega\setminus U} f(Du)\right| + \int_\Omega |f(p_j) - f(Du)| \leq 2\epsilon.$$

Zusammen ergibt sich nun

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k) + C\sum_{l=1}^m \mu(Q_l \cap \{\xi < 1\}) + C\epsilon\mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}} + 2\epsilon.$$

Beachte, dass χ beliebig war. Deshalb wähle $\chi_k \uparrow \sum_{l=1}^m 1_{\overset{\circ}{Q_l}}$. Es folgt

$$\mu(Q_l \cap \{\chi_k < 1\}) \to \mu(\partial Q_l) = 0$$

nach Wahl des Gitters. Nun folgt mit $\epsilon \to 0$ die Behauptung. $\square$

19. Vorlesung.

Wiederholung. Wir haben gezeigt: $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ ist quasikonvex $\Longleftrightarrow \mathcal{F} = \int_\Omega f(Du)$ ist unterhalbstetig bzgl. schwacher Konvergenz in $W^{1,p}(\Omega)$.

Folgerung 4.15. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ quasikonvex, $f \geq 0$ und f erfülle die Wachstumsbedingung (13). Außerdem sei f koerziv. Das heißt, es gilt*

$$f(p) \geq \lambda |p|^q \qquad \text{für ein } q \in (1,\infty).$$

Für $u_0 \in W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ betrachte die Klasse

$$\mathcal{C} = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) : u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m), \mathcal{F}(u) < \infty \right\}.$$

Ist $\mathcal{C} \neq \emptyset$, so gibt es ein $u \in \mathcal{C}$ mit $\mathcal{F}(u) = \inf_{v\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(v)$.

Problem: Quasi-konvexität ist schwierig zu überprüfen.

Deshalb führen wir im Folgenden das Konzept der Polykonvexität ein.

Definition 4.16. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ heißt polykonvex, falls eine Funktions $g : \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$f(p) = g(T(p))$$

wobei $T : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$, so dass $T(p) = (p, \operatorname{adj}_2(p), \dots, \operatorname{adj}_{m\wedge n}(p))$. Hier ist $m\wedge n = \min(m,n)$. adj steht für die Matrix aller $s \times s$ Unterdeterminanten der Matrix $p \in \mathbb{R}^{m\times n}$, und

$$\tau(n,m) = \sum_{s=1}^{m\wedge n} \binom{m}{s}\binom{n}{s}.$$

Bemerkung 4.17. (i) g ist nicht eindeutig bestimmt.
(ii) Für $n = m = 2$ ist $\tau(2,2) = 5$, da $\binom{2}{1} = 2$ und $\binom{2}{1} = 1$, und $T(p) = (p, \det p)$.

Satz 4.18. *Sei $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Dann gilt: falls f polyconvex, so ist f quasikonvex.*

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall $m = n = 2$. Es gibt ein konvexes g, so dass $f = g \circ T$.

Lemma 4.19. *Sei $Q = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, und $\phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt*

$$T(p) = \int_Q T(A + D\phi(x))dx.$$

Beweis (Lemma).

$$\det D\phi = \partial_1\phi_1\partial_2\phi_2 - \partial_2\phi_1\partial_1\phi_2 = \partial_1(\phi_1\partial_2\phi_2) - \partial_2(\phi_1\partial_1\phi_2).$$

Mit partieller Integration erhalten wird

$$\begin{aligned}
\int_Q \det(p + D\phi(x))dx &= \int_Q \left[\det p + p_1^1\partial_2\phi^2 + p_2^2\partial_1\phi^1 - p_2^1\partial_1\phi^2 - p_1^2\partial_2\phi^1 + \det D\phi\right] \\
&= \int_Q \left[\det p + p_1^1\partial_2\phi^2 + p_2^2\partial_1\phi^1 - p_2^1\partial_1\phi^2 - p_1^2\partial_2\phi^1 + \partial_1(\phi_1\partial_2\phi_2) - \partial_2(\phi_1\partial_1\phi_2)\right] \\
&= \det p.
\end{aligned}$$

Mit $\int_0^1 \partial_i\phi(x^1,x^2)dx^i = 0$ folgt daraus bereits die Behauptung. □

Dann folgt mit der Jensen Ungleichung und dem Lemma

$$\int_Q f(p + D\phi(x))dx = \int_Q g(T(p + D\phi(x)))dx \geq g(\int_Q T(A + D\phi(x))dx = g(T(p)) = f(p).$$

Also ist f quasi-konvex.

Um das allgemeine Resultat zu beweisen, benötigen wir einige Aussagen über Differentialformen.

Alternierende Formen. $\Lambda^m\mathbb{R}^n$ bezeichnet den Vektorraum aller alternierenden m-linearen Abbildungen $\alpha : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \mathbb{R}^n}_{m\text{-mal}} \to \mathbb{R}$. Das heißt $\alpha(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\alpha(\dots, w, \dots, v, \dots)$.

Im allgemeinen gilt für $\sigma \in S_n$, dass $\operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_m) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)})$.
Für Linearformen $\alpha_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, m$ definiert man $\beta = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ durch

$$\beta(v_1, \dots, v_m) = \det\left(\{\alpha_i(v_j)\}_{i,j=1,\dots,m}\right).$$

Aus den Eigenschaften der Determinante folgt, dass $\beta \in \Lambda^m\mathbb{R}^m$.

Satz. *Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$, und $e^1, \dots, e^n$ die dazu duale Basis von $\Lambda^1\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)'$, also $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Dann ist $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_m} : i_1 < \dots < i_m\}$ ist eine Basis von $\Lambda^m\mathbb{R}^n$.*

Satz. *Es gibt genau eine bilineare Abbildung*

$$\Lambda^k\mathbb{R}^n \times \Lambda^l\mathbb{R}^n \to \Lambda^{l+k}\mathbb{R}^n, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

mit der Eigenschaft

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k) \wedge (\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_l) = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_l.$$

Beweis. Seien $\alpha \in \Lambda^k\mathbb{R}^n$, $\beta \in \Lambda^l\mathbb{R}^n$ mit entsprechenden Basisdarstellungen.

$$\alpha = \sum_I \alpha_I e^I \quad \text{und} \quad \beta = \sum_J \beta_J e^J.$$

Es muss dann gelten

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} \alpha_I \beta_J e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \wedge e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l}.$$

Nun definieren wir die Abbildung durch diese Formel. Es bleibt zu zeigen, dass die geforderten Eigenschaften gelten. □

Differentialformen. Sei Ω offen. Eine Abbildung $\alpha : \Omega \to \Lambda^k\mathbb{R}^n$ heißt k-Form. Für $i = 1, \dots, n$ setzen wir $dx^i = e^i$. Es gilt dann, dass jede Differentialform α dargestellt werden kann durch

$$\alpha = \sum_{I = i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Die $\alpha_{i_1,\dots,i_k} : \Omega \to \mathbb{R}$ heißen Koeffizientenfunktionen. Wir sprechen von einer C^k-form, L^p-Form, usw., falls die Koeffizienten in C^k, L^p usw. liegen.

Die äußere Ableitung $d\alpha$ einer k-Form $\alpha \in C^1(\Omega, \Lambda^k\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$d\alpha = \sum_{i=1}^n \sum_I \partial_i \alpha_I \wedge dx^i \wedge dx^I$$

wobei $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ mit $I = i_1 < \dots i_k$.

Satz. *Es gilt*

(i) *$dd\alpha = 0$ für alle C^2-k-Formen α.*
(ii) *$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{deg\alpha}\alpha \wedge d\beta$.*

Beweis. (i) folgt direkt aus der Definition alternierenden Formen, von d und wegen $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$.
(ii) folgt aus

$$d(\alpha \wedge \beta) = \sum_{i=1}^n \partial_i(\alpha_I \beta_J) dx^i \wedge dx^I \wedge dx^J.$$

□

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Eine n-Form lässt sich schreiben als $\alpha = \alpha_{1,\dots,n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Dann setzen wir

$$\int_\Omega \alpha = \int_\Omega \alpha_{1,\dots,n}(x) dx.$$

Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\alpha \in C_0^1(\Omega, \Lambda^{n-1}\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\int_\Omega d\alpha = 0$.*

Beweis. Satz von Stokes.

20. Vorlesung.

Satz 4.20. *Sei $l \in \{1, \dots, m\}$. Sei $l < p < \infty$ und $u_k \to u$ schwach in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dann gilt für $q = \frac{p}{m} \in (1, \infty)$ und jeden Multi-Index $I = i_1 < \dots < i_l$:*

$$\alpha_k := du_k^{i_1} \wedge \dots \wedge du_k^{i_l} \to du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_l} =: \alpha \quad \textit{schwach in } L^q(\Omega, \Lambda^m \mathbb{R}^n)$$

nach Wahl einer Teilfolge.

Beweis. Sei ohne Einschränkunk $l = m$ und $I = (1, \dots, m)$. Falls $m = l > n$ gibt es nichts zu zeigen, weil die Dachprodukte alle verschwinden. Schritt 1: Für $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und $\eta \in C_c^\infty(\Omega, \Lambda^{n-m}\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_\Omega \eta \wedge du^1 \wedge \dots \wedge du^m = (-1)^{n-m+i} \int_\Omega u^i d\eta \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \hat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m.$$

Beweis. Sei zunächst $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dann folgt aus der Produktregel für d und $dd = 0$

$$\begin{aligned} d(u^i \eta \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \hat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m) &= d(u^i \eta) \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \hat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \\ &= (-1)^{n-m+i-1} \eta \wedge du^1 \wedge \dots \wedge du^i \wedge \dots \wedge du^m \\ &\quad + u^i d\eta \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \hat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m. \end{aligned}$$

Integrations ergibt mit $\int d\alpha = 0$ die Behauptung. Für allgemeines $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ folgt die Aussage durch Approximation.

Schritt 2: Beweis der schwachen Konvergenz für $\eta \in C_c^\infty(\Omega, \Lambda^{n-m}\mathbb{R}^n)$

Beweis.

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \eta \wedge du_k^1 \wedge \dots \wedge du_k^m - \int_\Omega \eta \wedge du^1 \wedge \dots \wedge du^m = \sum_i^m \int_\Omega \eta \wedge du^1 \wedge \dots \wedge d(u_k^i - u^i) \wedge \dots \wedge du^m \\ &= \sum_i^m (-1)^{n-m+i} \int_\Omega (u_k^i - u^i) d\eta \wedge du^1 \wedge \dots \wedge du^{i-1} \wedge du_k^{i+1} \wedge \dots \wedge du^m. \end{aligned}$$

Dann können wir wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \eta \wedge du_k^1 \wedge \dots \wedge du_k^m - \int_\Omega \eta \wedge du^1 \wedge \dots \wedge du^m \right| \\ &= \left| \sum_i^m (-1)^{n-m+i} \int_\Omega (u_k^i - u^i) d\eta \wedge du^1 \wedge \dots \wedge du^{i-1} \wedge du_k^{i+1} \wedge \dots \wedge du^m \right| \\ &\leq C \int_\Omega |u_k - u| |d\eta| (|Du_k|^{m-1} + |Du|^{m-1}) \\ &\leq C \|d\eta\|_{L^\infty} \|u_k - u\|_{L^{\frac{p}{p-m+1}}(\mathsf{spt}\mu)} (\|Du_k\|_{L^p} + \|Du\|_{L^p}) \to 0 \end{aligned}$$

Da $u_k \to u$ in $L^p_{loc}(\Omega)$ nach Rellich, und da $p - m + 1 > 1$. In der ersten Abschätzung haben wir die Young'sche Ungleichung $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$ für $a, b > 0$. Denn setzen wir $p = \frac{m-1}{i-1}$, dann ist

$$p' = \frac{m-1}{i-1} \left(\frac{m-1}{i-1} - 1 \right)^{-1} = \frac{m-1}{m-i}$$

und es folgt

$$a^{i-1} b^{m-i} \leq C(p) \left(a^{m-1} + b^{m-1} \right).$$

Schritt 3: Verallgemeinerung für $\eta \in L^{q'}(\Omega, \Lambda^{n-m}\mathbb{R}^n)$.

Sei zunächst $\widetilde{\eta} \in C_c^\infty(\Omega, \Lambda^{n-m}\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \eta du_k^1 \wedge \cdots \wedge du_k^m - \int_\Omega \eta du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega \widetilde{\eta} du_k^1 \wedge \cdots \wedge du_k^m - \int_\Omega \widetilde{\eta} du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \right| \\
&\quad + \left| \int_\Omega (\eta - \widetilde{\eta}) du_k^1 \wedge \cdots \wedge du_k^m - \int_\Omega (\eta - \widetilde{\eta}) du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega \widetilde{\eta} du_k^1 \wedge \cdots \wedge du_k^m - \int_\Omega \widetilde{\eta} du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \right| + C \int_\Omega |\eta - \widetilde{\eta}|(|Du_k|^m + |Du|^m) \\
&\leq \left| \int_\Omega \widetilde{\eta} du_k^1 \wedge \cdots \wedge du_k^m - \int_\Omega \widetilde{\eta} du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \right| + C \left\| \eta - \widetilde{\eta} \right\|_{L^{q'}} (\|Du_k\|_{L^p}^m + \|Du\|_{L^p}^m)
\end{aligned}$$

In der letzten Ungleichung wenden wir Hölder Ungleichunge an für $p/m = q$ und $q' = \frac{m}{p}(\frac{m}{p} - 1)^{-1}) = \frac{m}{m-p+1} = \frac{1}{1-(p-1)/m}$. Nach Wahl einer Teilfolge (siehe Schritt 2) verschwindet der erste Term für $k \to \infty$. Dann folgt die Behauptung, da $C_c^\infty(\Omega, \Lambda^{n-m}\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^{q'}(\Omega, \Lambda^{n-m}\mathbb{R}^n)$. $\square$

Wir brauchen noch den Pullback einer alternierenden Multilinearform: Sei $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Wir definieren $\Lambda^k\xi : \Lambda^k\mathbb{R}^m \to \Lambda^k\mathbb{R}^n$ durch $\Lambda^k\xi(\gamma)(v_1, \ldots, v_k) = \gamma(\xi v_1, \ldots, \xi v_k)$. Die Abbildung $\xi \mapsto \Lambda^k\xi$ ist linear. Für Multi-Indizes $I = i_1 < \cdots < i_k$ und $J = j_1 < \ldots j_k$ gilt:

$$\Lambda^k\xi(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k})(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k})(\xi e_{j_1}, \ldots, \xi e_{j_k}) = \det\left(\{e^{i_\alpha}(\xi e_{j_\beta})\}\right) = \det\left(\xi_{j_\beta}^{i_\alpha}\right).$$

Das heißt: Hat ξ die Matrixdarstellung $(\xi_j^i)_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n}$ bezüglich der Basis $(e_i)_{i=1,\ldots,m}$ in $\mathbb{R}^m$ und $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ in $\mathbb{R}^n$, so ist die Matrixdarstellung von $\Lambda^k\xi$ gegeben durch die $k \times k$ Subdeterminanten der Matrix ξ, das heißt durch eine $\binom{n}{k} \times \binom{m}{k}$ Matrix.

Wir schreiben $\Lambda^*\xi = (\Lambda^1\xi, \ldots, \Lambda^{m\wedge n}\xi)$ mit der Matrixdarstellung $(\xi, \mathrm{adj}_2(\xi), \ldots, \mathrm{adj}_{m\wedge n}(\xi))$.

Bemerkung 4.21. $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ polykonvex genau dann wenn eine konvexe Funktion

$$g : L(\Lambda^1\mathbb{R}^m, \Lambda^1\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L(\Lambda^{m\wedge n}\mathbb{R}^m, \Lambda^{m\wedge n}\mathbb{R}^n) \to R$$

existiert, so dass $f(\xi) = g(\Lambda^*\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Beweis (Fortsetzung, Satz 4.18). Sei $\phi \in C_c^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$. Wir setzen ϕ $\mathbb{Z}^n$-periodisch fort und betrachten wieder

$$u_k(x) = \xi x + \frac{1}{k}\phi(kx) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \xi \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Es gilt $u_k \to u$ schwach in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $u(x) = \xi x$ für alle $p \in [1, \infty)$. Nach vorherigen Satz gilt

$$\Lambda^l Du_k(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_l}) = du_k^{i_1} \wedge \cdots \wedge du_k^{i_l} \to \Lambda^l Du(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_l})$$

schwach in $L^q(\Omega, \Lambda^l\mathbb{R}^n)$ mit $q = \frac{p}{l}$ und $p \in (l, \infty)$ für jeden Multi-Index $i_1 < \cdots < i_l$ und jedes $l \in \{1, \ldots, m\}$. Da wir p stets größer l wählen können, ist die Konvergenz für alle l mindestens in L^1. Das heißt $\Lambda^*(Du_k) \to \Lambda^*(Du)$ schwach in $L^1(\Omega, \Lambda^*\mathbb{R}^m)$. Nun wenden wir Schritt 1 im Beweis von Satz 4.2 an. Dort hatten wir für ein $f = f(\xi)$ konvex in ξ, dass schwache Konvergenz von $Du_k \to Du$ in L^1, Unterhalbstetikeit impliziert. Für den Beweis war allerdings nur von Bedeutung, dass $\xi_k = Du_k \to \xi = Du$ schwach in L^1, nicht aber die konkrete Gestalt von ξ_k als Differential.

Nun wenden wir die gleiche Idee an für g konvex und $\Lambda^*(Du_k) \to \Lambda^*(Du)$ schwach in $L^1(\Omega, \Lambda^*\mathbb{R}^m)$:

$$\begin{aligned}\int_Q f(\xi) = \int_Q g(\Lambda^*(Du)) &\overset{\text{Satz 4.2}}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \int_Q g(\Lambda^* Du_k) \\ &= \liminf_{k\to\infty} \int_Q f(Du_k) \\ &= \liminf_{k\to\infty} \int_Q f(\xi + D\phi(kx))dx \\ &\overset{y=kx}{=} \liminf_{k\to\infty} \int_{kQ} f(\xi + D\phi(y))k^{-n}dy = \int_Q f(\xi + D\phi(y))dy. \quad \square\end{aligned}$$

Beispiel 4.22 (Flächenfunktional). Sei $m = 3$, $n = 2$ und
$\mathcal{C} = \left\{u : u - u_0 \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), u_0 \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)\right\}$. Dann ist

$$\operatorname{adj}_2(Du) = (a, b, c) = \left(\partial_1 u_2 \partial_2 u_3 - \partial_2 u_2 \partial_1 u_3; \partial_1 u_3 \partial_2 u^1 - \partial_1 u_1 \partial_2 u_3; \partial_1 u_1 \partial_2 u_2 - \partial_2 u_1 \partial_1 u_2\right).$$

Die Oberfläche ist gegeben durch

$$\mathcal{A}(u) = \int_\Omega \sqrt{\det\langle \partial_\alpha u, \partial_\beta u\rangle} = \int_\Omega |\partial_1 u \times \partial_2 u| = \int_\Omega \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Es folgt $Du \mapsto \sqrt{\det\langle \partial_\alpha u, \partial_\beta u\rangle}$ ist poly-konvex mit $g(\operatorname{adj}_2 Du) = |(a, b, c)|$ (allerdings nicht konvex).

21. Vorlesung.

5. Regularitäts Theorie für skalare Variationsprobleme

- Bisher: Existenz eines Minimierer in einer geeigneten Familie von Abbildungen

- Jetzt: Problem der Regularität. Die Existenz ergibt, dass Minimierer nur Sobolevfunktionen sind. Die Frage ist also, sind Minimierer hinreichend glatt und damit klassische Lösung der zugehörigen Euler-Lagrang Gleichung (Hilberts 19. Problem)?

- Vorarbeiten wurden geleistet von: Hilbert (allgemein Lösung für den Fall $n = 1$), Morrey (1940, Lösung für den Fall $n = 2$, $m = 1, 2, 3$).

- Die allgemeine Lösung für $m = 1$ und n wurde von De Giorgi (1956) und - unabhängig - von Nash (1958) gegeben. Wenig später legte Moser außerdem einen alternativen Beweis vor.
- Für $n \geq 3$ und $m \geq 2$ können Variationsproblem singuläre Minimierer haben.

In diesem Abschnitt wollen dieses Regularitäts Resultat von De Giorgi/Nash/Moser diskutieren.

Wir betrachten folgende Situation. Gegeben sei ein Variationsfunktional der Gestalt

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u, \Omega) = \int_\Omega f(x, u, Du)dx$$

wobei $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Caratheodory Funktion ist. Ω ist ein beschränktes Gebiet und u schwach differenzierbar. Damit $f(x, u, Du)$ integrierbar ist und damit $\mathcal{F}(u) < \infty$ für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und ein geeignetes $p \in (1, \infty)$ nehmen wir an, dass

$$|f(x, z, v)| \leq C(|v|^p + 1) \quad \text{für alle } (x, z, v) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

für eine Konstante $C > 0$ und ein $p \in (1, \infty)$. $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ist ein Minimierer von $\mathcal{F}$, falls $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \phi)$ für alle $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Definition 5.1. Wir sagen eine Funktion $u \in W^{1,p}$ ist ein Q-Minimierer für ein $Q > 1$, falls für alle offenen Teilmengen $\Omega' \subset \Omega$ und jedes $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt, dass

$$\mathcal{F}(u, \Omega') \leq Q\mathcal{F}(u + \phi, \Omega').$$

Falls die letzte Ungleichung nur gilt für zulässig $\phi \geq 0$ ($\phi \leq 0$) sagen wir u ist ein Q-Sub-(bzw. Super-)Minimierer.

Beispiel 5.2. Falls wir annehmen, dass $|q|^p \leq f(x, z, q) \leq C|q|^p$ für alle (x, z, q). Dann ist jeder Minimierer von $u \in W^{1,p}(\Omega)$ von $\mathcal{F}$ ein Q-Minimierer der p-Energie

$$\mathcal{E}_p(u, \Omega) := \int_\Omega |Dw|^p dx \quad \text{für } Q = C.$$

Beweis. Sei $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega')$ mit $\Omega' \subset \Omega$ offen. Es gilt $\mathcal{F}(u + \phi; \Omega \backslash \Omega') = \mathcal{F}(u; \Omega \backslash \Omega')$. Dann folgt

$$\int_{\Omega'} |Du|^p dx \leq \mathcal{F}(u; \Omega') \leq \mathcal{F}(u + \phi; \Omega') \leq C \int_{\Omega'} |Du + D\phi|^p dx.$$

Definition 5.3. Für ein $\alpha \in (0, 1]$, ein $S \subset \mathbb{R}^n$ und $u : S \to \mathbb{R}^m$ definieren wir die α-Hölder Halbnorm von u in S durch

$$[u]_{C^{0,\alpha}(S,\mathbb{R}^m)} := \sup_{x \neq y \in S} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\}.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0, 1]$.

(i) $C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ ist die Menge aller $u \in C(\Omega,\mathbb{R}^m)$ mit $[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m)} < \infty$.

(ii) $C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ ist die Menger aller $u \in C^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$, so dass $[\partial_\beta u]_{C^{0,\alpha}(K,\mathbb{R}^m)} < \infty$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset \Omega$ und alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit Länge $|\beta| = k$.

(iii) Analog definieren wir $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ und $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$.

Bemerkung 5.4. Mit der Norm

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m)} = \sum_{0\le|\beta|\le k} \sup_{x\in\Omega} |\partial_\beta f(x)| + \sum_{|\beta|=k} [\partial_\beta f]_{C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m)}$$

sind $C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ (bzw. $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$) Banachräume.

Bezeichnung. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$, $|S| = \mathcal{L}^n(S)$ ihr n-dimensionale Lebesgue-Maß und $u \in L^1(S,\mathbb{R}^m)$. Falls $|S| \in (0,\infty)$, schreiben wir im Folgenden

$$(u)_S := \frac{1}{|S|}\int_S u(x)dx.$$

Das Lebesgue Differenzierungstheorem besagt nun, dass für $f \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$

$$\lim_{r\downarrow 0}(u)_{B_r(x_0)} = u(x_0) \quad \text{für } \mathcal{L}^n\text{-fast jeden Punkt } x_0 \in \Omega.$$

Definition 5.5 (Morrey and Campanato Räume)**.** Sei $p \in [1,\infty)$ und $\lambda > 0$. Wir setzen $B_r(x_0) \cap \Omega = \Omega(x_0,r)$.

(i) Morrey-Raum: $L^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ bezeichnet die Menge aller $u \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$, so dass

$$\|u\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m)} := \sup_{x_0\in\overline{\Omega}, 0<\rho\le \operatorname{diam}\Omega} \rho^{-\lambda}\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u|^p dx < \infty.$$

(ii) Campanato-Raum: $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ bezeichnet die Menge aller $u \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$, so dass

$$[u]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m)} := \sup_{x_0\in\overline{\Omega}, 0<\rho\le \operatorname{diam}\Omega} \rho^{-\lambda}\int_{\Omega(x_0,r)} |u-(u)_{\Omega(x_0,\rho)}|^p dx < \infty.$$

Bemerkung 5.6. Mit den Normen

$$\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m)} \quad \text{bzw.} \quad \|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m)} = \|u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)} + [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m)}$$

sind $L^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ bzw. $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ Banachräume für $p \in [1,\infty)$.

Bemerkung 5.7. (i) Die Definition hängt in beiden Fällen nur vom Verhalten von u für kleine Radien ρ ab.

(ii) Es gelten die Inklusionen

$$L^{q,\mu}(\Omega,\mathbb{R}^m) \subset L^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^{q,\mu}(\Omega,\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m).$$

für $q \ge p$ und $(n-\lambda)/p \ge (n-\mu)/q$. Denn durch Anwendung der Jensen-Ungleichung gilt

$$\left[\int_{B_r(x_0)} |u|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[|B_r(x_0)|\left(\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r x_0} |u|^q\right)^{p/q}\right]^{\frac{1}{p}} = c(n)r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left(\int_{B_r(x_0)} |u|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Daraus folgern wir

$$\left[r^{-\lambda}\int_{B_r(x_0)} |u|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le c(n)\left[r^{-[(\lambda-n)\frac{q}{p}+n]}\int_{B_r(x_0)} |u|^q\right]^{\frac{1}{q}} \le c(n)\left[r^{-\mu}\int_{B_r(x_0)} |u|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

für alle alle $r \in (0,1)$ und μ wie oben. Daraus folgt die Behauptung für Morrey-Räume. Analog zeigt man die Aussage für Campanato-Räume.

Bemerkung 5.8. Ω heißt Alfohrs-regulär, falls $|\Omega(x_0,\rho)| \geq A\rho^n$ für alle $x_0 \in \overline{\Omega}$ und jedes $\rho \leq \operatorname{diam}\Omega$. Das heißt in der Definition von $L^{p,\lambda}$ und $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ könnten wir $\rho^{-\lambda}$ ersetzen durch $|\Omega(x_0,\rho)|^{-\lambda/n}$. Zum Beispiel ist jedes Lipschitz-Gebiet Ahlfors regulär. Wir geben im Folgenden under der Annahme Ω ist Ahlfors-regulär weitere Identifizierungen für Morrey- und Campanato-Räume an ohne Beweis.

(i) Es gilt $L^{p,0} = L^p$ und $L^{p,n} = L^\infty$. Außerdem ist $L^{p,\lambda} \sim \{0\}$ falls $\lambda > n$.
(ii) Es gilt $L^{p,\lambda} = \mathcal{L}^{p,\lambda}$ falls $\lambda \in [0,n)$.

Satz 5.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und Ahlfor-regulär für eine Konstante A.*
Dann gilt $\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m) \simeq C^{0,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ für alle $\alpha \in (0,1]$.

Beweis. Schritt 1. Zu zeigen ist $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega)$ stetig. Sei $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ und $\rho \in (0,\operatorname{diam}\Omega)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x) - (u)_{\Omega(x_0,\rho)}|^p dx \\
&\quad = \int_{\Omega(x_0,\rho)} \Big|\frac{1}{|\Omega(x_0,\rho)|}\int_{\Omega(x_0,\rho)} [u(x)-u(y)]dy\Big|^p dx \\
&\quad \leq [u]^p_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \int_{\Omega(x_0,\rho)} \Big|\frac{1}{|\Omega(x_0,\rho)|}\int_{\Omega(x_0,\rho)} |x-y|^\alpha dy\Big|^p dx \leq [u]^p_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} |\Omega(x_0,\rho)|(2\rho)^{p\alpha} \\
&\quad \leq c(p,n)[u]^p_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\rho^{n+p\alpha}
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also $[u]_{\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega)} \leq c(p,n)[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$. Und da $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$, folgt die Behauptung.

22. Vorlesung.

Wiederholung: Morrey- und Campanato-Räume.

Sei $p \in [1, \infty)$ und $\lambda > 0$. Wir setzen $B_r(x_0) \cap \Omega = \Omega(x_0, r)$.

(i) Morrey-Raum: $L^{p,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ bezeichnet die Menge aller $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so dass

$$\|u\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m)} := \sup_{x_0 \in \overline{\Omega}, 0 < \rho \leq \operatorname{diam} \Omega} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u|^p dx < \infty.$$

(ii) Campanato-Raum: $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ bezeichnet die Menge aller $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so dass

$$[u]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m)} := \sup_{x_0 \in \overline{\Omega}, 0 < \rho \leq \operatorname{diam} \Omega} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,r)} |u - (u)_{\Omega(x_0,\rho)}|^p dx < \infty.$$

Ω heißt Alfohrs-regulär, falls $|\Omega(x_0, \rho)| \geq A\rho^n$ für alle $x_0 \in \overline{\Omega}$ und jedes $\rho \leq \operatorname{diam} \Omega$.

Bemerkung 5.10. Falls $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $p \in [1, \infty)$, dann gilt für die Super-Niveaumengen von $|u|$ zu $a > 0$ der Markov-Ungleichung:

$$|\{x \in \Omega : |u(x)| \geq a\}| \leq a^{-p} \|u\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)} . \tag{25}$$

Diese Eigenschaft benutzen wir um die schwachen Lebesgue-Räume zu definieren $L^p_w(\Omega, \mathbb{R}^m)$ - die Menge aller meßbaren Abildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ mit

$$\|u\|^p_{L^p_w(\Omega,\mathbb{R}^m)} = \sup_{a \geq 0} a^p |\{x \in \Omega : |u(x)| > a\}| < \infty.$$

Satz 5.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und Ahlfor-regulär für eine Konstante A. Dann gilt $\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^m) \simeq C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ für alle $\alpha \in (0, 1]$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $m = 1$.

Schritt 1. $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega)$ stetig.

Wir haben bereits gesehen, dass $\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^m)} \leq c(n, p)[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m)}$. Außerdem gilt wegen der Hölder-Ungleichung $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$. Also

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,n+\alpha p}(\Omega)} \leq c(n, p, \Omega) \|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} ,$$

d.h. die Inklusion ist stetig.

Schritt 2. Wahl eines guten Representanten in $\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega)$. Sei $u \in \mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega)$, $x_0 \in \overline{\Omega}$ and $0 < r < R \leq \operatorname{diam} \Omega$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} |(u)_{\Omega(x_0,r)} - (u)_{\Omega(x_0,R)}| &\overset{\text{Jensen}}{\leq} \left(\frac{1}{|\Omega(x_0, r)|} \int_{\Omega(x_0,r)} |u(x) - (u)_{\Omega(x_0,R)}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |\Omega(x_0, r)|^{-\frac{1}{p}} R^{\frac{n}{p}+\alpha} \left(R^{-n-p\alpha} \int_{\Omega(x_0,R)} |u(x) - (u)_{\Omega(x_0,R)}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c(n, A) r^{-\frac{n}{p}} R^{\frac{n}{p}+\alpha} [u]_{\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir die Folge $((u)_{\Omega(x_0,r_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $r_k = 2^{-k}R$ und $R \in (0, \operatorname{diam} \Omega)$. Augrund der vorigen Ungleichung haben wir für $0 < k < h$:

$$|(u)_{\Omega(x_0,r_h)} - (u)_{\Omega(x_0,r_k)}| \leq \sum_{j=k}^{h-1} |(u)_{\Omega(x_0,r_{j+1})} - (u)_{\Omega(x_0,r_j)}| \tag{26}$$

$$\leq c(n, A)[u]_{\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega)} R^\alpha \sum_{j=k}^{h-1} 2^{(j+1)\frac{n}{p}} 2^{-j(\frac{n}{p}+\alpha)} \tag{27}$$

$$\leq c(n, A)[u]_{\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega)} R^\alpha 2^{-k\alpha} = c(n, A)[u]_{\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega)} r_k^\alpha \tag{28}$$

unabhängig von der Wahl von $x_0 \in \overline{\Omega}$. Also ist $(u)_{\Omega(x_0,r_k)}$ nicht nur eine Cauchyfolge mit Limes $u^*(x_0)$ (Nach Lebesgue's Differetations Theorem ist das auch ein Representant für u) sondern auch eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen $g_k : x_0 \mapsto (u)_{\Omega(x_0,r_k)}$. (Nach dem Satz über dominierte Konvergenz ist g_k stetig) Also ist der Limes stetig.

Schritt 3. Hölder-Stetigkeit des Representanten u^*. Betrachte $x, y \in \overline{\Omega}$ und $r = |x-y|$. Dann

$$|u*(x) - u*(y)| \leq |u*(x) - (u)_{\Omega(x,2r)}| + |(u)_{\Omega(x,2r)} - (u)_{\Omega(y,2r)}| + |(u)_{\Omega(y,2r)} - f(y)|.$$

Nehmen wir den Limes $h \to \infty$ in (26), können wir die letzte Ungleichung abschätzen durch

$$|u*(x) - u*(y)| \leq |(u)_{\Omega(x,2r)} - (u)_{\Omega(y,2r)}| + 2c(n,A)[u]_{\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega)}|x-y|^{\alpha}.$$

Dann müssen wir noch $|(u)_{\Omega(x,2r)} - (u)_{\Omega(y,2r)}|$ abschätzen. Beachte dass $\Omega(x,2r) \cap \Omega(y,2r) \supset \Omega(x,r) \cup \Omega(y,r)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
|(u)_{\Omega(x,2r)} - (u)_{\Omega(y,2r)}| &= |(u)_{\Omega(x,2r)} - (u)_{\Omega(x,2r)\cap\Omega(y,2r)} + (u)_{\Omega(x,2r)\cap\Omega(y,2r)} - (u)_{\Omega(y,2r)}| \\
&\leq \frac{1}{|\Omega(x,2r)\cap\Omega(y,2r)|}\int_{\Omega(x,2r)\cap\Omega(y,2r)} |(u)_{\Omega(x,2r)} - u(z)| + |u(z) - (u)_{\Omega(y,2r)}|dz \\
&\leq |\Omega(x,r)|^{-1}|\Omega(x,2r)|^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\Omega(x,2r)}|(f)_{\Omega(x,2r)} - f(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + |\Omega(y,r)|^{-1}|\Omega(y,2r)|^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\Omega(y,2r)}|(f)_{\Omega(y,2r)} - f(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c(n,A)[u]_{\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}} r^{-n+n\frac{p-1}{p}+\frac{n+p\alpha}{p}} = c(n,A)[u]_{\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}}|x-y|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Da wir $x, y \in \overline{\Omega}$ beliebig gewählt hatten folgt damit

$$[u^*]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c(n,A)[u]_{\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}}.$$

Schließlich müssen wir nur noch das Supremum von u^* beschränken. Die Markov-Ungleichung (25) für u und $a = \|u\|_{L^p(\Omega)} 2^{\frac{1}{p}}|\Omega|^{-\frac{1}{p}}$ angewendet auf u ergibt, es gibt ein $y \in \Omega$, so dass $u^*(y)$ beschränkt ist durch dieses a. Daraus folgern wir mit der vorigen Abschätzung für alle $x \in \overline{\Omega}$

$$|u^*(x)| \leq |u^*(x) - u^*(y)| + |u^*(y)| \leq c(n,A)[u]_{\mathcal{L}^{p,n+\alpha p}(\Omega)} + c(|\Omega|)\,\|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Also erhalten wir $\|u^*\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq c(n,A,\Omega)\,\|u\|_{\mathcal{L}^{p,n+p\alpha}(\Omega)}$.

23. Vorlesung.

Folgerung 5.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt mit Lipschitz-Rand und $p \in [1,n)$. Dann gilt: $u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ mit $Du \in L^{p,n-p(1-\alpha)}(\Omega,\mathbb{R}^{m\times n})$ impliziert $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ für alle $\alpha \in (0,1]$.*

Beweis. Betrachte die Poincaré-Ungleichung für $v(x) = u(x_0 + rx)$ auf $\Omega(x_0,1)$:

$$\left\|v - (v)_{\Omega(x_0,1)}\right\|_{L^p(\Omega(x_0,1))} \leq c(n,p)\left\|Dv\right\|_{L^p(\Omega(x_0,1))}.$$

Mit der Transformationsformel folgt

$$\begin{aligned}\left\|u - (u)_{\Omega(x_0,r)}\right\|_{L^p(\Omega(x_0,r))} &= r^{\frac{r}{p}}\left\|v - (v)_{\Omega(x_0,1)}\right\|_{L^p(\Omega(x_0,1))}\\ &\leq c(n,p)r^{\frac{n}{p}}\left\|Dv\right\|_{L^p(\Omega(x_0,1))} = c(n,p)r\left\|Du\right\|_{L^p(\Omega(x_0,r))}.\end{aligned}$$

Dann folgt

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,n+\alpha p}(\Omega,\mathbb{R}^m} = \left(\rho^{n+\alpha p}\int_{\Omega(x_0,\rho)}|u-(u)_{\Omega(x_0,\rho)}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\rho^{n+\alpha p+p}\int_{\Omega(x_0,\rho)}|Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Damit können wir $\|u\|_{\mathcal{L}^{p,n+\alpha p}(\Omega,\mathbb{R}^m} = \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,\mathbb{R}^m} + [u]_{\mathcal{L}^{p,n+\alpha p}(\Omega,\mathbb{R}^m}$ durch $\|Du\|_{L^{p,n-p(1-\alpha)}(\Omega,\mathbb{R}^n)}$ und $\|u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^m}$ beschränken. Zusammen mit dem vorigen Satz folgt daraus die Behauptung. □

Bemerkung 5.12. Für u wie in der vorigen Folgerung und $p = 2$ schreibt man auch

$$\{u\}_{\alpha,\Omega} := [Du]_{L^{2,n+2(\alpha-1)}(\Omega(x_0,\mathbb{R}^m))}.$$

Die Kombination der vorigen Folgerung mit der Campanato charakterisieren von α-Hölder Funktionen ergibt:
Sei Ω ein Lipschitzgebiet und $\{u\}_{\alpha,\Omega} < \infty$. Dann hat u einen Hölder-stetigen Representanten und es gilt die Abschätzung

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} \leq C(n,\alpha,\Omega)\{u\}_{\alpha,\Omega}.$$

(Morrey's Dirichlet growth Lemma)

Satz 5.13 (Morrey's Ungleichung, Sobolev Einbettung 2. Teil)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt und offen. $p \in (n,\infty)$. Dann:*

(i) *Die Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m) \to C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ ist stetig mit*

$$\|u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} \leq c(n,N,p,\Omega)\left\|Du\right\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{m\times n})}.$$

(ii) *Falls Ω einen Lipschitz-Rand hat, dann ist die Einbettung $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m) \to C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ stetig und es gilt*

$$\|u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} \leq c(n,N,p,\Omega)\left\|u\right\|_{W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^{m\times n})}.$$

Beweis. Wir beginnen mit (ii). Aus $u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ folgt $Du \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^{m\times n}) = L^{p,0}(\Omega,\mathbb{R}^{m\times n})$. Also folgt aus $\frac{n}{p} = n - n(1-\frac{1}{p})$ zusammen mit Bemerkung (5.7), dass $Du \in L^{1,n(1-\frac{1}{p})}(\Omega,\mathbb{R}^{m\times n})$. Dann ergibt $n(1-\frac{1}{p}) = n - 1(1-(1-\frac{n}{p}))$ und Folgerung 5.11 (mit $p = 1$ und $\alpha = 1-\frac{n}{p} \in (0,1)$), dass $u \in C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m)$. Außerdem gilt die geforderte Abschätzung, und damit ist die Einbettung $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m) \subset W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ stetig.

(i) gilt, das wir jedes $u \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ durch 0 auf ein reguläres Gebiet Ω' fortsetzen können. Diese Fortsetzung erhält die $W^{1,p}$-Norm und wir können (ii) anwenden um eine stetig Einbettung zu erhalten. Schließlich folgt mit Theorem 3.26 (die erste Poincaré Ungleichung):

$$\|u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} \leq c(n,N,p,\Omega)\left\|u\right\|_{W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^{m\times n})} \leq c(n,N,p,\Omega)\left\|Du\right\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{m\times n})}.$$

□

Wir kommen zurück zur Regularitätstheorie: Sei wieder $m = 1$. Wir definieren für $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $B_r(x_0) \subset \Omega$ mit $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ und $k \in \mathbb{R}$

$$A(k, x_0, r) := \{x \in B_r(x_0) : u(x) \geq k\} \quad \& \quad B(k, x_0, r) := \{x \in B_r(x_0) : u(x) < k\}.$$

Es gilt $|A(k, x_0, r)| + |B(k, x_0, r)| = |B_r(x_0)|$ für fast alle $k \in \mathbb{R}$, und die k-super-Niveaumenge von u ist genau die k-sub-Niveaumenge von $-u$.

Lemma 5.14. *Sei $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ein Q-sub-Minimierer von $\mathcal{F}(\cdot; \Omega)$ und es gelt*

$$|z|^p \leq f(x, u, z) \leq L(|z| + 1)^p.$$

Dann gibt es eine konstante $c = c(p, L, Q)$, so dass für alle $k \geq 0$ und jedes Paar von Bällen $B_r(x_0) \subset B_R(x_0) \subset \Omega$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, so dass

$$\int_{A(k,x_0,r)} |Du|^p dx \leq c(R - r)^{-p} \int_{A(k,x_0,R)} (u - k)^p dx + c|A(k, x_0, R)|.$$

Zum Beweis benötigen wir ein technisches Lemma.

Lemma 5.15. *Es sei $\phi(\rho)$ eine nicht-negative, reel-wertige, beschränkte Funktion auf $[r, R]$. Wir nehmen an, dass für alle ρ, σ mit $r \leq \rho < \sigma \leq R$ gilt*

$$\phi(\rho) \leq \left[A_1(\sigma - \rho)^{-\alpha_1} + A_2(\sigma - \rho)^{-\alpha_2} + A_3\right] + \vartheta\phi(\rho)$$

für Konstanten $A_1, A_2, A_3 \geq 0$ und Exponenten $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq 0$ und einen Parameter $\vartheta \in [0, 1)$. Dann gilt

$$\phi(r) \leq c(\alpha_1, \vartheta)\left[A_1(R - r)^{-\alpha_1} + A_2(R - r)^{-\alpha_2} + A_3\right].$$

Beweis. Definiere $(\rho_i)_{i\mathbb{N}}$ durch $\rho_i = r + (1 - \lambda^i)(R - r)$ für ein $\lambda \in (0, 1)$. Dann ist $\rho_0 = r$, ρ_i ist wachsend und $\rho_i \to R$ für $i \to \infty$. Außerdem gilt

$$\rho_i - \rho_{i-1} = (R - r)(1 - \lambda^i - 1 + \lambda^{i-1}) = (R - r)\lambda^{i-1}(1 - \lambda).$$

Nun wenden wir die Annahme iterative an auf $\rho = \rho_i$ und $\sigma = \rho_{i-1}$:

$$\begin{aligned}
\phi(r) &\leq A_1(1 - \lambda)^{-\alpha_1}(R - r)^{-\alpha_1} + A_2(1 - \lambda)^{-\alpha_2}(R - r)^{-\alpha_2} + A_3 + \vartheta\phi(\rho_1) \\
&\leq \sum_{i=0}^{k-1}\left[\vartheta^i(1 - \lambda)^{-\alpha_1}\lambda^{-(i-1)\alpha_1}A_1(R - r)^{-\alpha_1} + \vartheta^i(1 - \lambda)^{-\alpha_2}\lambda^{-(i-1)\alpha_2}A_2(R - r)^{-\alpha_2} + \vartheta^i A_3\right] + \vartheta^k\phi(\rho_k) \\
&=(1 - \lambda)^{-\alpha_1}\sum_{i=0}^{k-1}\vartheta^i\left[\lambda^{-(i-1)\alpha_1}A_1(R - r)^{-\alpha_1} + (1 - \lambda)^{\alpha_1-\alpha_2}\lambda^{-(i-1)\alpha_2}A_2(R - r)^{-\alpha_2} + (1 - \lambda)^{\alpha_1}A_3\right] + \vartheta^k\phi(\rho_k) \\
&\leq(1 - \lambda)^{-\alpha_1}\sum_{i=0}^{k-1}\vartheta^i\lambda^{-i\alpha_1}\left[A_1(R - r)^{-\alpha_1} + A_2(R - r)^{-\alpha_2} + A_3\right] + \vartheta^k\phi(\rho_k)
\end{aligned}$$

Jetzt wählen wir $\lambda \in (0, 1)$ so dass $\lambda^{-\alpha_1}\vartheta < 1$. Dann konvergiert die Reihe auf der rechten Seite und für $k \to \infty$ folgt die Behauptung mit $c(\alpha_1, \vartheta) = \frac{(1-\lambda)^{-\alpha_1}}{(1-\vartheta\lambda^{-\alpha_1})}$.

Beweis. Sei o.E. $x_0 = 0$. Wähle $\delta < \sigma$ mit $\delta, \sigma \in [r, R]$. Wir wählen eine Abschneidefunktion $\eta \in C_0^\infty(B_\sigma(0), [0, 1])$ mit $\eta = 1$ auf $B_\rho(0)$ und $|D\eta| \leq 2(\sigma - \rho)^{-1}$. Betrachte die Testfunktion $\phi = -\eta(u - k)_+ \in W^{1,p}(\Omega)$. $\phi = 0$ auf $A(k, 0, \sigma)^c$. Da u ein Q-sub-Minimierer ist folgt

$$\int_{A(k,0,\sigma)} |Du|^p \leq \int_{A(k,0,\sigma)} f(x, u, Du) \leq Q\int_{A(k,0,\sigma)} f(x, u + \phi, Du + D\phi) \leq LQ\int_{A(k,0,\sigma)} (1 + |D(u + \phi)|^p).$$

Auf $A(k, 0, \sigma)$ gilt

$$D(u + \phi) = Du - \eta D(u - k)_+ - (D\eta)(u - k)_+ = Du - \eta Du - (D\eta)(u - k).$$

Daraus folgt mit $|D\eta| \le 2(\sigma-\rho)^{-1}$ auf $A(k,0,\sigma)$

$$|D(u+\phi)|^p \le c(p)\left[(1-\eta)^p|Du|^p + (\sigma-\rho)^{-p}(u-k)^p\right].$$

Da $\eta = 1$ auf $A(k,0,\rho)$ ergibt das

$$\int_{A(k,0,\rho)} |Du|^p \le c(p,L,Q)\left[\int_{A(k,0,\sigma)} (1+(\sigma-\rho)^{-p}(u-k)^p) + \int_{A(k,0,\sigma)\setminus A(k,0,\rho)} |Du|^p\right].$$

Wir addieren auf beiden Seiten das Integral von $c(p,L,Q)|Du|^p$ über $A(k,0,\rho)$ und dividieren durch $1+c(p,L,Q)$:

$$\int_{A(k,0,\rho)} |Du|^p \le \underbrace{\frac{c(p,L,Q)}{1+c(p,L,Q)}}_{\widetilde{c}(p,L,Q)} \int_{A(k,0,\sigma)} \left[1+(\sigma-\rho)^{-p}(u-k)^p\right] + \frac{c(p,L,Q)}{1+c(p,L,Q)} \int_{A(k,0,\sigma)} |Du|^p$$

Nun wenden wir das vorige Iterationslemma an auf $\phi(\rho) = \int_{A(k,0,\rho)} |Du|^p$, wobei $\vartheta = \frac{c(p,L,Q)}{1+c(p,L,Q)}$, $A_1 = \widetilde{c}(p,L,Q)\int_{A(k,0,\sigma)}(u-k)^p)$, $A_2 = 0$, $A_3 = \widetilde{c}(p,L,Q)|A(k,0,\sigma)|$ und $\alpha_1 = p$. Es folgt dann

$$\int_{A(k,0,r)} |Du|^p \le \widetilde{c}(p,L,Q)(R-r)^{-p}\int_{A(k,0,\sigma)} (u-k)^p + \widetilde{c}(p,L,Q)|A(k,0,R)|.$$

Das war zu zeigen. $\square$

24. Vorlesung.

Folgerung 5.16. *Sei $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ein Q-super-Minimierer von $\mathcal{F}(\cdot; \Omega)$ und es gelt*

$$|z|^p \leq f(x,u,z) \leq L(|z|+1)^p.$$

Dann gibt es eine konstante $c = c(p, L, Q)$, so dass für alle $k \leq 0$ und jedes Paar von Bällen $B_r(x_0) \subset B_R(x_0) \subset \Omega$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ gilt

$$\int_{B(k,x_0,r)} |Du|^p dx \leq c(R-r)^{-p} \int_{B(k,x_0,R)} (u-k)^p dx + c|B(k,x_0,R)|.$$

Beweis. Is u ein Q-super-Minimierer, dann ist $-u$ ein Q-sub-Minimierer, für das Funktional $\mathcal{F}'(w, \Omega) = \int_\Omega f(x, -w, -Dw)dx$. Mit der Substitution folgt die Behauptung aus dem Lemma 5.14.

Definition 5.17. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Wir sagen u gehört zur De Giorgi Klasse $DG_p^+(\Omega)$ falls eine Konstante $C_0 > 0$, $k_0 \in \mathbb{R}$ und $R_0 > 0$ gibt, so dass für jedes paar von Bällen $B_r(x_0) \subset B_R(x_0) \subset \Omega$ mit $\overline{B_\sigma(x_0)} \subset \Omega$ und $R \leq R_0$, und jedes $k \geq k_0$ gilt

$$\int_{A(k,x_0,r)} |Du|^p \leq C_0(R-r)^{-p} \int_{A(k,x_0,R)} (u-k)^p dx + C_0|A(k,x_0,R)|.$$

Wir sagen $u \in DG_p^-(\Omega)$ falls $-u \in DG_p^+(\Omega)$, und $DG_p(\Omega) = DG_p^+(\Omega) \cap DG_p^-(\Omega)$. Ungleichungen von diesem Typ nennt man auch Cacciopoli-Typ Ungleichungen.

Satz 5.18. *Sei $u \in DG_p^+(\Omega)$. Dann ist $u_+ \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ und für jeden Ball $B_R(x_0) \subset \Omega$ mit $R \leq R_0$ gilt*

$$\sup_{B_{R/2}(x_0)} u(x) \leq k_0 + c_1(n,p,C_0)R + c_1(n,p,C_0) \left(R^{-n} \int_{A(k,x_0,R)} |u-k_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} R^{-n}|A(k_0,x_0,R)|.$$

Für den Beweis benötigen wir das folgende technische Lemma.

Lemma 5.19. *Sei $\phi(h,\rho)$ ein nicht-negative, reel-wertige Funktion für $h \geq k_0$ und $\rho \in [r,R]$. Wir nehmen an ϕ ist monoton fallend in h, monotone wachsend in ρ, und für alle $k > h > k_0$ und für alle $\rho < \sigma$ mit $\rho, \sigma \in [r,R]$ gilt*

$$\phi(k,\rho) \leq \left[A_1(k-h)^{-\alpha_1}(\sigma-\rho)^{-\alpha_2} + A_2(k-h)^{-\alpha_1-\alpha_2}\right]\phi(h,\sigma)^\beta$$

mit Konstanten $A_1 > 0, A_2 > 0$, positiven Exponenten α_1, α_2 und einem Parameter $\beta > 1$. Dann gilt

$$\phi(k_0+d, r) = 0$$

wobei d gegegen ist durch $d^{\alpha_1} = A_1(R-r)^{-\alpha_2} 2^{\frac{\beta(\alpha_1+\alpha_2)}{\beta-1}-1}\phi(k_0,R)^{\beta-1} + (A_1^{-1}A_2)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(R-r)^{\alpha_1}$.

Beweis. Wir definieren Folgen $(k_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ und $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$k_i := k_0 + d(1-2^{-i}) \quad \& \quad \rho_i := r + 2^{-i}(R-r).$$

Insbesondere $\rho_0 = R$. Die Folge k_i ist wachsend mit Grenzwert $k_0 + d$ und die Folge ρ_i is fallend mit Grenzwert r. Außerdem gilt

$$k_i - k_{i-1} = d(1-2^{-i}-1+2^{-i+1}) = d2^{-i} \quad \& \quad \rho_{i-1} - \rho_i = (R-r)2^{-i}.$$

Anwendung der Voraussetzung des Lemmas auf $k = k_i$, $h = k_{i-1}$ und $\rho = \rho_i$, $\sigma = \rho_{i-1}$ für beliebiges $i \in \mathbb{N}$ ergibt

$$\begin{aligned}
\phi(k_i,\rho_i) &\leq \left[A_1(k_i-k_{i-1})^{-\alpha_1}(\rho_{i-1}-\rho_i)^{-\alpha_2} + A_2(k_i-k_{i-1})^{-\alpha_1-\alpha_2}\right]\phi(k_{i-1},\rho_{i-1})^\beta \\
&= \left[A_1(d2^{-i})^{-\alpha_1}((R-r)2^{-i})^{-\alpha_2} + A_2(d2^{-i})^{-\alpha_1-\alpha_2}\right]\phi(k_{i-1},\rho_{i-1})^\beta \\
&= \left[A_1 d^{-\alpha_1}(R-r)^{-\alpha_2} + A_2 d^{-\alpha_1-\alpha_2}\right] 2^{i(\alpha_1+\alpha_2)}\phi(k_{i-1},\rho_{i-1})^\beta \\
&\leq (1 + \frac{A_2}{A_1}\frac{1}{d^{\alpha_2}}(R-r)^{\alpha_2})A_1 d^{-\alpha_1}(R-r)^{-\alpha_2}2^{(\alpha_1+\alpha_2)i}\phi(k_{i-1},\rho_{i-1})^\beta.
\end{aligned}$$

Da $d^{-1} \leq \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}} (R-r)^{-1}$, folgt

$$\phi(k_i, \rho_i) \leq A_1 d^{-\alpha_1}(R-r)^{-\alpha_2} 2^{1+(\alpha_1+\alpha_2)i} \phi(k_{i-1}, \rho_{i-1})^\beta$$

Nun zeigen wir per Induktion, dass

$$\phi(k_i, \rho_i) \leq 2^{-i\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta-1}} \phi(k_0, \rho_0).$$

Für $i = 0$ ist die Ungleichung erfüllt. Für den Induktionschritt $i-1 \to i$ wenden wir die Definition von d an. Laut Definition von d gilt

$$d^{-\alpha_1} \leq \frac{1}{A_1 \phi(k_0, R)^{\beta-1}} (R-r)^{\alpha_2} 2^{-\frac{\beta(\alpha_1+\alpha_2)}{\beta-1}+1}.$$

Dann können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\phi(k_0+d, r) \leq \phi(k_i, \rho_i) &\leq A_1 d^{-\alpha_1}(R-r)^{-\alpha_2} 2^{1+(\alpha_1+\alpha_2)i} \phi(k_{i-1}, \rho_{i-1})^\beta \\
&\leq A_1 d^{-\alpha_1}(R-r)^{-\alpha_2} 2^{1+(\alpha_1+\alpha_2)i} 2^{-(i-1)\beta\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta-1}} \phi(k_0, \rho_0)^{\beta-1} \phi(k_0, \rho_0) \\
&\leq 2^{-i\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta-1}} \phi(k_0, R).
\end{aligned}$$

Jetzt folgt die Behauptung, wenn $i \to \infty$. ☐

Beweis (von Satz 39). Ohne Einschränkung sei $x_0 = 0$. Sei $R \leq R_0$, so dass $B_R(0) \subset \Omega$, und $k > k_0$. Dann sei $\rho < \sigma \in [R/2, R]$ und eine Abschneidefunktion $\eta \in C_0^\infty(B_{(\rho+\sigma)/2}, [0,1])$ mit $\eta = 1$ auf B_ρ und $D\eta \leq 4(\sigma-\rho)^{-1}$. Durch Anwendung der Hölder Ungleichung, der Sobolev Ungleichung, und der Cacciopoli Ungleichung können wir folgt abschätzen.

$$\begin{aligned}
&\int_{A(k,0,\rho)} (u-k)^p dx \overset{\text{Def } \eta}{\leq} \int_{A(k,0,(\rho+\sigma)/2)} \eta^p (u-k)^p dx \\
\left(p^* = \tfrac{np}{n-p}\right) &\overset{\text{Hölder}}{\leq} |A(k,0,\sigma)|^{1-\frac{p}{p^*}} \left(\int_{A(k,0,(\rho+\sigma)/2)} [\eta(u-k)]^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \\
&\overset{\text{Sobolev}}{\leq} c(n,p)|A(k,0,\sigma)|^{1-\frac{p}{p^*}} \left[\int_{A(k,0,(\rho+\sigma)/2)} |Du|^p dx + (\sigma-\rho)^{-p} \int_{A(k,0,\sigma)} (u-k)^p dx\right] \\
&\leq c(n,p,C_0)|A(k,0,\sigma)|^{\frac{p}{n}} \left[(\sigma-\rho)^{-p} \int_{A(k,0,\sigma)} (u-k)^p dx + |A(k,0,\sigma)|\right]. \qquad (29)
\end{aligned}$$

Wegen der Markov Ungleichung gilt ür $k > h \geq k_0$

$$|A(k,0,\sigma)| \leq (k-h)^{-p} \int_{A(k,0,\sigma)} (u-h)^p \leq (k-h)^{-p} \int_{A(h,0,\sigma)} (u-h)^p.$$

Außerdem gilt

$$\int_{A(k,0,\sigma)} (u-k)^p \leq \int_{A(k,0,\sigma)} (u-h)^p \leq \int_{A(h,0,\sigma)} (u-h)^p.$$

Diese beiden Ungleichungen können wir nun mit der Abschätzung (29) kombinieren:

$$\begin{aligned}
\int_{A(k,0,\rho)} (u-k)^p dx &\leq c(n,p,C_0)|A(k,0,\sigma)|^{\frac{p}{n}} \left((\sigma-\rho)^{-p} + (k-h)^{-p}\right] \int_{A(h,0,\sigma)} (u-h)^p dx \\
&\leq c(n,p,C_0) \left[(\sigma-\rho)^{-p}(k-h)^{-\frac{p^2}{n(1+\gamma)}} + (k-h)^{-p-\frac{p^2}{n(1+\gamma)}}\right] \\
&\qquad \times |A(k,0,\sigma)|^{\frac{p}{n}-\frac{p}{n(1+\gamma)}} \left(\int_{A(h,0,\sigma)} (u-h)^p\right)^{1+\frac{p}{n(1+\gamma)}}.
\end{aligned}$$

Jetzt multiplizieren wir mit $|A(k,0,\rho)|^\gamma$ und setzen $\phi(k,\rho) = |A(k,0,\rho)|^\gamma \int_{A(k,0,\rho)} (u-k)^p$. Dann ergibt die letzte Abschätzung:

$$\phi(k,\rho) \le c(n,p,C_0) \left[(\sigma-\rho)^{-p} (k-h)^{-\frac{p^2}{n(1+\gamma)}} + (k-h)^{-p-\frac{p^2}{n(1+\gamma)}} \right] \phi(h,\sigma)^{1+\frac{p}{n(1+\gamma)}}$$

für alle $\rho < \sigma \in [R/2, R]$ und $k > h \ge k_0$. Nun wenden wir das technische Lemma an, wobei $\alpha_1 = \frac{p^2}{n(1+\gamma)}$, $\alpha_2 = p$, und $\beta = 1 + \frac{p}{n(1+\gamma)}$. Wir erhalten, dass $\phi(k, R/2) = 0$ für $k \ge k_0 + d$. Das ist

$$\sup_{B_{R/2}} u \le k_0 + c(n,p,C_0) R^{-\frac{n(1+\gamma)}{p}} |A(k_0,0,R)|^{\frac{\gamma}{p}} \left(\int_{A(k_0,0,R)} (u-k_0)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c(n,p,C_0)R.$$

Für $\gamma = p$ folgt die Behauptung. $\square$

25. Vorlesung. Unser nächstes Ziel ist Hölder-stetigkeit zu zeigen für eine geeinete Klasse von De Giorgi Funktionen. Für eine lokal beschränkte Funktion $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ und $B_R(x_0) \Subset \Omega$ definieren wir

$$\begin{aligned} M(x_0, R) &= \sup_{B_R(x_0)} u \\ m(x_0, R) &= \inf_{B_R(x_0)} u \\ \operatorname{osc}(x_0, R) &= M(x_0, R) - m(x_0, R). \end{aligned}$$

Lemma 5.20. *Sei $u \in DG_p^+(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ und $B_{2R}(x_0) \Subset \Omega$ mit $2R \le R_0$ und $2R < 1$. Wir nehmen an, dass $|A(\overline{k}, x_0, R)| < \gamma |B_R(x_0)|$ für ein $\gamma \in (0,1)$ und $\overline{k} = (M(x_0, 2R) + m(x_0, 2R))/2 \ge k_0$. Falls für $l \in \mathbb{N}$*

$$osc(x_0, 2R) \ge 2^l R,$$

dann gilt

$$|A(k, x_0, R)| \le c_2(n, p, C_0, \gamma) l^{-\frac{n(p-1)}{(n-1)p}} R^n \qquad \textit{für alle } k \ge M(x_0, 2R) - 2^{-l-1} osc(x_0, 2R).$$

Bemerkung 5.21. Eine Kombination von Sobolev (Theorem 3.13) und Poincaré (Theorem 3.27) Ungleichung liefert das Folgende. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und $|\Omega_0| = |\{x \in \Omega : u(x) = 0\}| = \gamma |\Omega|$ für ein $\gamma \in (0, 1]$. Dann gilt

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega, \mathbb{R}^m)} \le c(n, m, p, \Omega, \gamma) \|Du\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})}.$$

wobei $p^* = \frac{np}{n-p}$. Übungen.

Beweis. O.E. sei $x_0 = 0$. Für $k > h \ge \overline{k}$ definieren wir

$$v := \begin{cases} k - h & \text{falls } u \ge k, \\ u - h & \text{falls } h < u < k, \\ 0 & \text{falls } u \le h. \end{cases}$$

Da $v = 0$ in $B_R \backslash A(h, 0, R) \supset B_R \backslash A(\overline{k}, 0, R)$, verschwindet v auf ein Menge von Maß größer als $(1 - \lambda)|B_R|$. Also können wir die Sobolev-Poincaré Ungleichung und die Hölder Ungleichung anwenden. Es folgt:

$$\begin{aligned} (k-h)|A(k, 0, R)|^{1-\frac{1}{n}} &\le \left(\int_{B_R} v^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} \\ &\le c(n, p, \gamma) \int_{B_R} |Dv| dx \\ &= c(n, p, \gamma) \int_{A(h,0,R) \backslash A(k,0,R)} |Du| dx \\ &\le c(n, p, \gamma) |A(h, 0, R) \backslash A(k, 0, R)|^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_{A(h,0,R)} |Du|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Da $u \in DG_p^+(\Omega)$ und $h \ge k_0$, können wir das Integral auf der rechten Seite wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \left[\int_{A(k,0,R)} |Du|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} &\le \left[C_0 R^{-p} \int_{A(h,0,2R)} |u - h|^p dx + C_0 |A(h, 0, 2R)| \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left[c(n, C_0, \gamma) \left[R^{n-p} |M(0, 2R) - h|^p + R^n \right] \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\le c(n, C_0, \gamma) \left[R^{\frac{n-p}{p}} |M(0, 2R) - h| + R^{\frac{n}{p}} \right] \end{aligned}$$

Damit folgt

$$(k-h)^{\frac{p}{p-1}}|A(k,0,R)|^{\frac{(n-1)p}{n(p-1)}} \leq c(n,p,\gamma,C_0)\left(|A(h,0,R)|-|A(k,0,R)|\right)R^{\frac{n-p}{p-1}}\left[(M(0,2R)-h)^{\frac{p}{p-1}}+R^{\frac{np}{p-1}}\right].$$

Für eine Konstante $c := c(n,p,\gamma,C_0)$ abhängig von n,p,C_0 und γ. Nun definieren wir

$$k_i = M(0,2R) - 2^{-i-1}\mathrm{osc}(0,2R).$$

Insbesondere folgt $M(0,2R) - k_{i-1} = 2^{-i}\mathrm{osc}(0,2R) = 2(k_i - k_{i-1})$. Wir wenden die vorige Ungleichung an für $k = k_i$ und $h = k_{i-1}$ und erhalten

$$|A(k_l,0,R)|^{\frac{(n-1)p}{n(p-1)}} \leq |A(k_i,0,R)|^{\frac{(n-1)p}{n(p-1)}} \leq c\left(|A(h,0,R)|-|A(k,0,R)|\right)R^{\frac{n-p}{p-1}}\left[1+(2^{i+1}\mathrm{osc}(0,2R)^{-1}R)^{\frac{p}{p-1}}\right]$$

für alle $i \in \{1,\dots,l\}$. Summation von 1 nach l und Anwendung der Annahme ergibt:

$$l|A(k_l,0,R)|^{\frac{(n-1)p}{n(p-1)}} \leq c|A(k_0,0,R)|R^{\frac{n-p}{p-1}} \leq c(n,p,C_0,\gamma)R^{\frac{(n-1)p}{p-1}}$$

und schließlich folgt die Behauptung von der Monotonie der Niveaumengen. □

Satz 5.22 (De Giorgi)**.** *Sei $u \in DG_p(\Omega)$, so dass die Cacciopoli-Typ Ungleichung erfüllt ist für alle $k \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein $\alpha = \alpha(p,n,C_0)$, so dass $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$.*

Lemma 5.23. *Sei $\phi(\rho)$ nicht-negativ, reel-wertig, montone wachsend auf $[0,R_0]$. Wir nehmen an, es gibt $\tau \in (0,1)$, so dass für alle $R \leq R_0$ gilt*

$$\phi(\tau R) \leq (\tau^{\alpha_1}+\epsilon)\phi(R) + AR^{\alpha_2}$$

für eine Konstante $A \geq 0$, und $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$, und $\epsilon \in [0,\epsilon_0]$ für ein $\epsilon_0 > 0$. Falls $\epsilon_0(\tau,\alpha_1,\alpha_2)$ hinreichend klein, dann gilt für alle $r \leq R \leq R_0$

$$\phi(r) \leq c(\tau,\alpha_1,\alpha_2)\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_2}\phi(R) + Ar^{\alpha_2}\right].$$

Beweis (von Satz 5.22). Wir wissen bereits, dass u beschränkt ist auf $\Omega' \Subset \Omega$. Das heißt, wir müssen nur noch eine geeignete Hölder Semi-Norm $[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega')}$ beschränken. Sei wieder $x_0 = 0 \in \Omega$ und wir betrachten einen Ball $B_{2R} \Subset \Omega$ für $R \leq 2R_0$ und $2R < 1$.

Wir betrachten wieder $k_i = M(0,2R) - 2^{-i-1}\mathrm{osc}(0,2R)$ wie oben mit $i \in \mathbb{N}_0$. Die quantitative L^∞-Abschätzung liefert uns:

$$\sup_{B_{R/2}} u \leq k_i + c_1(n,p,C_0)R + c_1(n,p,C_0)\left(R^{-n}\int_{A(k_i,0,R)}|u-k_i|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|A(k_i,0,R)|}{R^n}\right)$$

$$\leq k_i + c_1(n,p,C_0)R + \widetilde{c_1}(n,p,C_0)\sup_{B_R}(u-k_i)\left(\frac{|A(k_i,0,R)|}{R^n}\right)^{1+\frac{1}{p}}.$$

Sei $l \in \mathbb{N}$, so dass

$$2\widetilde{c_1}\left[c_2 l^{-\frac{n(p-1)}{(n-1)p}}\right]^{1+\frac{1}{p}} \leq 1.$$

wobei c_2 die Konstante aus Lemma 5.20 ist mit $\gamma = \frac{1}{2}$. l hängt nur von n,p und C_0 ab, und ist insbesondere unabhängig von B_R. Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. $\mathrm{osc}(0,2R) < 2^l R$: In diesem Fall können wir folgern, dass

$$\mathrm{osc}(0,R/2) \leq \mathrm{osc}(0,2R) < 2^l R.$$

2. $\mathrm{osc}(0,2R) \geq 2^l R$: In diesem Fall betrachte $\overline{k} = (M(x_0,2R) + m(x_0,2R))/2$ und wir nehmen an, dass

$$|A(\overline{k},0,R)| \leq \frac{1}{2}|B_R|$$

sonst betrachte $-u$ statt u.

Die Wahl von l, die quantitative L^∞-Abschätzung, und Lemma 5.20 ergibt dann

$$\sup_{B_{R/2}} u = M(0, R/2) \leq k_l + c_1(n,p,C_0)R + \frac{1}{2}(M(0,R) - k_l).$$

Nach Abziehen von $m(0, R/2) \geq m(0, 2R)$ auf beiden Seiten folgt mit der Definition von k_l

$$\operatorname{osc}(0, R/2) \leq c_1(n,p,C_0)R + (1 - 2^{-l-2})\operatorname{osc}(0, 2R).$$

Also haben wir in beiden Fällen die Abschätzung

$$\operatorname{osc}(0, R/2) \leq (1 - 2^{-l-2})\operatorname{osc}(0, 2R) + c(n,p,C_0)R = 4^{-\alpha_0}\operatorname{osc}(0, 2R) + c(n,p,C_0)R$$

wobei $\alpha_0 = -\log_4(1 - 2^{-l-2}) = \alpha(n,p,C_0) > 0$. Also können wir das technische Lemma 5.23 anwenden und erhalten

$$\operatorname{osc}(0, \rho) \leq c(\alpha_0, \alpha)\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha \operatorname{osc}(0, 2R) + c(n,p,C_0,\Omega)\rho^\alpha\right]$$

für jedes $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Also gilt für alle $y \in B_{2R}(x) \Subset \Omega$, dass

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x,y|^\alpha} \leq c(\alpha_0, \alpha)\left[\frac{1}{R}\operatorname{osc}(0, 2R) + c(n,p,C_0,\Omega)\right].$$

Das heißt wir können die α-Hölder-Norm beschränken durch eine Konstante, die nur von n, p, C_0, Ω und Ω' abhängt (aber divergieren kann falls $\operatorname{dist}(\Omega', \Omega) \to 0$).

26. Vorlesung.

Wiederholung. - Minimierer eines Variations-Funktional Q-Minimierer sind.
- Q-Minimierer erfllen eine Cacciopoli-Ungleichung, und sind in der De Georgi Klasse $DG(\Omega)$.
- Falls $u \in DG(\Omega)$, dann ist u lokal beschränkt und wir können die Schranke angeben.

Satz 5.22 (De Giorgi)**.** *Sei $u \in DG_p(\Omega)$, so dass die Cacciopoli-Typ Ungleichung erfüllt ist für alle $k \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein $\alpha = \alpha(p, n, C_0)$, so dass $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$.*

Für $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ und $B_R(x_0) \subset \Omega$ mit $\overline{B_R(x_0)}$ definieren wir

$$\begin{aligned} M(x_0, R) &= \sup_{B_R(x_0)} u \\ m(x_0, R) &= \inf_{B_R(x_0)} u \\ \operatorname{osc}(x_0, R) &= M(x_0, R) - m(x_0, R). \end{aligned}$$

Wir hatten gezeigt, dass

$$\operatorname{osc}(0, R/2) \leq (1 - 2^{-l-2})\operatorname{osc}(0, 2R) + c(n, p, C_0)R = 4^{-\alpha_0}\operatorname{osc}(0, 2R) + c(n, p, C_0)R$$

wobei $\alpha_0 = -\log_4(1 - 2^{-l-2}) = \alpha(n, p, C_0) > 0$, wobei $l \in \mathbb{N}$, so dass

$$2\widetilde{c_1}\left[c_2 l^{-\frac{n(p-1)}{(n-1)p}}\right]^{1+\frac{1}{p}} \leq 1.$$

und c_2 ist die Konstante aus Lemma 5.20 mit $\gamma = \frac{1}{2}$.Nun können wir für $\operatorname{osc}(r) = \phi(r)$ das folgende Lemma verwenden.

Lemma 5.23. *Sei $\phi(\rho)$ nicht-negativ, reel-wertig, montone wachsend auf $[0, R_0]$. Wir nehmen an, es gibt $\tau \in (0, 1)$, so dass für alle $R \leq R_0$ gilt*

$$\phi(\tau R) \leq (\tau^{\alpha_1} + \epsilon)\phi(R) + AR^{\alpha_2}$$

für eine Konstante $A \geq 0$, und $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$, und $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ für ein $\epsilon_0 > 0$. Falls $\epsilon_0(\tau, \alpha_1, \alpha_2)$ hinreichend klein, dann gilt für alle $r \leq R \leq R_0$

$$\phi(r) \leq c(\tau, \alpha_1, \alpha_2)\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_2}\phi(R) + Ar^{\alpha_2}\right].$$

Beweis. Wir wählen $\alpha_3 \in (\alpha_2, \alpha_1)$ und bestimmen dazu ein $\epsilon_0 \in (0, 1)$, so dass $\tau^{\alpha_1} + \epsilon_0 = \tau^{\alpha_3}$. Durch Induktion ergibts sich für jedes $R \leq R_0$ und jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \phi(\tau^{k+1}R) &\leq \tau^{\alpha_3}\phi(\tau^k R) + A\tau^{k\alpha_2}R^{\alpha_2} \\ &\leq \cdots \leq \tau^{(k+1)\alpha_3}\phi(R) + A\tau^{k\alpha_2}R^{\alpha_2}\sum_{i=0}^{k}\tau^{i(\alpha_3-\alpha_2)} \\ &\leq \tau^{(k+1)\alpha_2}\phi(R) + c(\tau, \alpha_2, \alpha_3)A\tau^{k\alpha_2}R^{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Reihe konvergiert. Für ein beliebiges $r \in (0, R]$ bestimmenen wir nun $k \in \mathbb{N}_0$ so dass $\tau^{k+1}R < r \leq \tau^k R$. Da ϕ monoton wachsend ist folgt die Behauptung aus

$$\phi(r) \leq \phi(\tau^k R) \leq \tau^{k\alpha_2}\phi(R) + c(\tau, \alpha_2, \alpha_3)A\tau^{k\alpha_2}R^{\alpha_2} \leq \tau^{-\alpha_2}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_2}\phi(R) + cAr^{\alpha_2}\right]$$

□

In unserer Situation ist $\alpha_2 = 1$, $\epsilon = 0 < \epsilon_0$ beliebig und $\tau = \frac{1}{4}$. Wir erhalten

$$\operatorname{osc}(0, \rho) \leq c(\alpha_0, \alpha)\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha}\operatorname{osc}(0, 2R) + c(n, p, C_0, \Omega)\rho^{\alpha}\right]$$

für jedes $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Also gilt für alle $y \in B_{2R}(x) \Subset \Omega$, dass

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x, y|^{\alpha}} \leq c(\alpha_0, \alpha)\left[\frac{1}{R}\operatorname{osc}(0, 2R) + c(n, p, C_0, \Omega)\right].$$

Folgerung 5.24 (De Giorgi, Nash). *Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$, ein Minimierer von*

$$\mathcal{F}(v,\Omega) = \int_\Omega f(x,u,Du)$$

wobei $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Caratheodory funktion ist, so dass

$$|z|^p \leq f(x,u,z) \leq L(1+|z|^p) \quad \textit{für alle } (x,u,z) \textit{ und ein Konstante } L > 0.$$

Dann gibt es ein $\alpha = \alpha(n,p,L) \in (0,1)$, so dass $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$.

Beweis. Minimiere von $\mathcal{F}$ sind Q-Minimiererer. Also gilt $u \in DG_p(\Omega)$. □

Bemerkung 5.25.
(i) Das Resultat ist optimal im Sinne, dass ein Minimierer α-Hölder-stetig ist für ein $\alpha \in (0,1)$, aber nicht für jedes $\alpha \in (0,1)$. Siehe dazu Übungsaufgabe 3 auf Blatt 10.
(ii) Im Fall $p > n$ folgt aus dem zweiten Sobolevsche Einbettungssatz (Satz 5.13) bereits das jedes $u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ lokal α-Hölder-stetig ist für $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.
(iii) Für den vektorwertigen Fall $n \geq 3, m \geq 1$ sind Minimierer von Variationsproblem im Allgemeinen nicht Hölder-stetig. Der Fall $n = 2$ wurde von Morrey gelöst.

Satz 5.26 (Morrey). *Sei $u \in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ ein Minimierer von*

$$\mathcal{F}(v,\Omega) = \int_\Omega f(x,u,Du)$$

mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wobei $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Caratheodory funktion ist, so dass

$$\frac{1}{\Lambda}|z|^2 \leq f(x,u,z) \leq \Lambda|z|^2 + C \textit{ für alle } (x,u,z) \textit{ und Konstanten } C,\Lambda > 0.$$

Dann gibt es ein $\alpha = \alpha(n,p,L) \in (0,1)$, so dass $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^m)$.

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ und dann o.E. $x_0 = 0$. Sei $B_R \Subset \Omega$. Wir wählen eine nicht-negative Abschneidfunktion $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ mit $\eta = 1$ auf $B_{R/2}$. Dann betrachten wir für einen Minimierer u $(u-k)\eta$ und berechnen

$$\begin{aligned} & D((u-k)\eta) = Du\eta + (u-k)D\eta \\ \implies & |D(u-(u-k)\eta))|^2 \leq |Du|^2(1-\eta^2) + (u-k)^2|D\eta|^2 - 2\eta|u-k||Du||D\eta| \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_{B_{R/2}} |Du|^2 \leq \Lambda^2 \int_{B_R} |Du + D\phi|^2 + \Lambda C \int_{B_R} \leq C(\Lambda) \int_{B_R \setminus B_{r/2}} |Du|^2 + C(\Lambda) \int_{B_R \setminus B_{r/2}} |u-k|^2 + C(\Lambda)R^2.$$

Poincaré Ungleichung ergibt

$$\int_{B_{r/2}} |Du|^2 \leq C(\Lambda) \int_{B_R \setminus B_{r/2}} |Du|^2 + C(\Lambda)R^2.$$

Die holefilling-Technik ergibt

$$\int_{B_{r/2}} |Du|^2 \leq \frac{C}{C+1} \int_{B_R} |Du|^2 + \frac{C}{C+1}R^2 = \frac{C}{C+1} \int_{B_R} |Du|^2 + \frac{C}{C+1}R^2,$$

Nun wenden wir erneut das technische Lemma 5.23 an und erhalten die Existenz von $\alpha(\Lambda, C)$, so dass

$$\int_{B_r} |Du|^2 \leq c(\Lambda, C, R) r^{2\alpha} \quad \text{für alle } r < R.$$

Also können wir die Morrey Norm von Du auf dem Ball B_R von oben beschränken. Mit Folgerung 5.11 (Morrey's Dirichlet Growth Lemma) erhalten wir die Behauptung. □

Satz 5.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt mit Lipschitz-Rand und $p \in [1,n)$. Dann gilt: $u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ mit $Du \in L^{p,n-p(1-\alpha)}(\Omega,\mathbb{R}^{m\times n})$ impliziert $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ für alle $\alpha \in (0,1]$.*

27. Vorlesung. Wir kommen zur Frage höherer Regularität.

Dazu betrachten wir jetzt ein System elliptischer partieller Differentialgleichungen in Divergenzform:

$$-\operatorname{div} a(x,u,Du) = a_0(x,u,Du) \quad \text{in } \Omega \tag{30}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und zusammenhängend. Hier seien $a_0 : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^m$ und $a : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ meßbar bezüglich x und stetig bezüglich (u,z). Außerdem wollen wir die folgenden Wachstumsbedingugnen annehmen.

$$|a_0(x,u,z)| \leq L(1+|z|)^{p-1} \quad \& \quad |a(x,u,z)| \leq L(1+|z|)^{p-1} \tag{31}$$

für ein $p \in (1,\infty)$ und alle $(x,u,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann ist die partielle Differentialgleichung in folgendem schwachen Sinne zu verstehen. $u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ ist eine schwache Lösung von (30) unter den obigen Annahmen falls für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega a(x,u,Du)\cdot D\phi = \int_\Omega a_0(x,u,Du)\phi dx.$$

Diese Gleichung gilt dann auch für $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, denn die Wachstumsbedingungen (31) garantieren die Endlichkeit der auftretenden Integrale. Zum Beispiel gilt

$$\int_\Omega a(x,u,Du)\cdot D\phi \leq L\int_\Omega (1+|Du|)^{p-1}|D\phi| < \infty.$$

Der Zusammenhang zu Variationsproblemen ist durch das folgende Lemma gegeben.

Lemma 5.27. *Falls $u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ ein Minimierer von $\mathcal{F}(v,\Omega) = \int_\Omega f(x,v,Dv)$ mit einer in u und in z differenzierbaren Caratheodory Funktion, so dass*

$$f(x,u,z) \leq L(1+|z|)^p, \quad |D_u f(x,u,z)| \leq L(1+|z|)^{p-1} \quad \textit{und} \quad |D_z f(x,u,z)| \leq L(1+|z|)^{p-1}.$$

Dann löst u in schwachem Sinne die Gleichung $\operatorname{div}((D_z f)(x,u,Du)) = (D_u f)(x,u,Du)$. Das heißt

$$-\int_\Omega D_z f(x,u,Du)\cdot D\phi = \int_\Omega D_u f(x,u,Du)\phi dx \quad \textit{für alle } \phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Beweis. Vergleiche mit der Formel für die erste Variation aus Kapitel 1. Der Unterschied ist, dass u und ϕ hier nur in $W^{1,p}(\Omega)$ liegen. Die Wachstumsschranken für $f, D_z f$ und $D_u f$ garantieren dann die Existenz der auftretenden Integrale. □

Erinnerung: u ist ein Q-Minimierer von $\mathcal{F}$, falls für alle offenen Teilmengen $\Omega' \subset \Omega$ und jedes $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt, dass

$$\mathcal{F}(u,\Omega') \leq Q\mathcal{F}(u+\phi,\Omega').$$

Lemma 5.28. *Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (30) mit a, a_0 wie oben und außerdem gilt*

$$a(x,u,z)\cdot z \geq |z|^p \quad \textit{für alle } (x,u,z) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

Dann ist u ein Q-Minimierer von

$$\mathcal{E}(w,\Omega) := \int_\Omega (1+|Dw|)^p dx$$

mit $Q = Q(n,p,L,\Omega,\|Du\|_{L^p(\Omega)})$.

Beweis. Sei $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega')$ mit $\Omega' \subset \Omega$ offen. Da u eine schwache Lösung ist, erhalten wir

$$\int_{\Omega'} a(x,u,Du)\cdot Du = \int_{\Omega'} a(x,u,Du)\cdot(Du+D\phi)dx - \int_{\Omega'} a_0(x,u,Du)\phi dx.$$

Aus den Annahmen für a und a_0, und nach Anwendung der Hölder-Ungleichung folgt

$$\int_{\Omega'} |Du|^p dx \leq L \int_{\Omega} (1+|Du|)^{p-1}|Du + D\phi| dx + L \int_{\Omega'} (1+|Du|)^{p-1}|\phi| dx$$
$$\leq c(p,L) \left(\int_{\Omega'} (1+|Du|)^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega'} (|Du+D\phi|^p + |\phi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Das Integral mit $|\phi|$ kann mit der Poincaré-Ungleichung wie folgt abgeschätzt werden:

$$\int_{\Omega'} |\phi|^p dx \leq c(n,p,\Omega) \int_{\Omega'} (|Du|^p + |Du + D\phi|^p)\, dx.$$

Damit erhalten wir

$$\left(\int_{\Omega'} (1+|Du|)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c(p,L) \int_{\Omega'} (1+|Du|)^p dx \left(\int_{\Omega'} |Du|^p dx \right)^{-1} \left(\int_{\Omega'} (2|Du+D\phi|^p + |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

und

$$\int_{\Omega'} (1+|Du|)^p dx \leq c(p,L) \left(\int_{\Omega} (1+|Du|)^p dx \right)^p \left(\int_{\Omega} |Du|^p dx \right)^{-p} \left(\int_{\Omega'} (2|Du+D\phi|^p + |Du|^p dx \right)$$
$$\leq c(p,L,n,\Omega,\|Du\|_{L^p(\Omega)}) \int_{\Omega'} (|Du+D\phi|^p + 1) dx$$

□

Folgerung 5.29. *Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (30) mit a, a_0 wie oben und außerdem gilt*

$$a(x,u,z) \cdot z \geq |z|^p \text{ für alle } (x,u,z) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Dann gibt es einen positiven Exponenten $\alpha = \alpha(p,n,L,\Omega,\|Du\|_{L^p(\Omega)})$, so dass $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$. Falls $a_0 = 0$, dann $\alpha = \alpha(p,n,L,\Omega)$.

Wir wollen nun höhere Regularitt für Minimierer von Variationsproblemen zeigen und beschränken uns dafr auf den Fall $p = 2$. Zur Einfachheit nehmen wir außerdem an, dass $f(x,u,z)) = f(z)$. Das heißt, die zugehörige Euler-Lagrang Gleichung vereinfacht sich zu

$$\operatorname{div}((D_z f)(x,u,Du)) = 0.$$

Wir wollen den folgenden Satz beweisen.

Satz 5.30. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein C^∞-Funktion, so dass*

(i) $|D_z f(z)| \leq L|z|$ *für jedes $z \in \mathbb{R}^n$.*

(ii) $\frac{1}{\Lambda}|\xi|^2 \leq D_z^2 f(z)\xi \cdot \xi \leq \Lambda|\xi|^2$ *für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

für Konstanten $L, \Lambda > 0$.

Ω sei ein beschränktes Gebiet, und $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ein Minimierer von $\mathcal{F}(v,\Omega) = \int_\Omega f(Dv)$, das heißt

$$\mathcal{F}(u,\Omega) \leq \mathcal{F}(u+\phi,\Omega) \quad \text{für alle } \phi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.

Der Beweis erfolgen in mehreren Schritten. Entscheidend ist dabei die jeweilige lokale Hölderstetigkeit der Minimierer.

28. Vorlesung.

Lemma 5.31. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein C^∞-Funktion, so dass*

(i) $|D_z f(z)| \leq L|z|$ *für jedes $z \in \mathbb{R}^n$.*

(ii) $\lambda|\xi|^2 \leq D_z^2 f(z)\xi \cdot \xi \leq \Lambda|\xi|^2$ *für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

für Konstanten $L, \lambda, \Lambda > 0$.

Ω sei ein beschränktes Gebiet, und $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ein Minimierer von $\mathcal{F}(v, \Omega) = \int_\Omega f(Dv)$. Dann gilt $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$, und die Ungleichung

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq c\,\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\,.$$

für Ω' offen mit $\Omega' \Subset \Omega$, wobei $c = c(L, \lambda, \Lambda, \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega))$, sowie

$$\int_\Omega (D_{\xi^\beta} D_{\xi^\alpha} f)(Du) D_\beta(D_s u) D_\alpha \phi dx = 0 \quad \text{für alle } s \in \{1, \ldots, n\} \tag{32}$$

und für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Das heißt für $s \in \{1, \ldots, n\}$ erfüllt $\partial_s u = v_s$ das elliptische System

$$\operatorname{div}(B \cdot Dv_s) = \partial_\alpha(B^{\alpha,\beta}\partial_\beta v_s) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{33}$$

mit Koeffizienten $(D_{\xi^\beta} D_{\xi^\alpha} f)(Du) = B^{\alpha,\beta} \in W^{1,2}(\Omega)$.

Bemerkung 5.32. Das Lemma gilt auch im Fall, dass $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ wobei f statt (ii) die Legendre Bedingung

$$\lambda|\xi|^2| \leq (D_\xi^2 f)\xi_i^\alpha \cdot \xi_j^\beta \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \text{für jedes } \xi \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Zur Erinnerung: Die Legendre-Hadamard Bedingung ist erfüllt, falls

$$\frac{1}{\Lambda}|\xi|^2|\eta|^2 \leq (D_{\xi_i^\alpha} D_{\xi_j^\beta} f)\xi^i\xi^j\eta_\beta\eta_\beta \leq \Lambda|\xi|^2|\eta|^2 \quad \text{für jedes } \xi \in \mathbb{R}^m \text{ und } \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Das System (33) von partiellen Differentialgleichungen schreibt sich dann, also

$$\operatorname{div}(B \cdot Dv_s^j) = \partial_\alpha(B_{i,j}^{\alpha,\beta}\partial_\beta v_s^j) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

wobei $v_s^j = D_s u^j$ und $B_{i,j}^{\alpha,\beta} = (D_{\xi_j^\beta} D_{\xi_i^\alpha} f)(Du)$.

Definition 5.33. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, $s \in \{1, \ldots, n\}$ und $h > 0$. Wir definieren den Differenzenquotient duch

$$\tau_{h,s}u(x) := \frac{u(x + he_s) - u(x)}{h}, \quad \forall x \in \Omega_{s,h} := \{x \in \Omega : x + he_s \in \Omega\}$$

wobei $(e_s)_{s=1,\ldots,n}$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^m$.

Proposition 5.34. *Sei $p \in (1, \infty)$ und $\Omega_0 \Subset \Omega$. Dann*

(i) *Is $u \in W^{1,p}(\Omega)$, dann $\tau_{h,s}u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $D\tau_{h,s}u = \tau_{h,s}Du$. Außerdem gilt*

$$\tau_{h,s}(u \cdot v)(x) = u(x + he_s)\tau_{h,s}v(x) + \tau_{h,s}u(x)v(x + he_s).$$

Insbesondere, falls u, v mit kompaktem Träger in Ω und h hinreichend klein: $\int u\tau_{h,s}v = -\int v\tau_{-h,s}$.

(ii) *Es gibt eine Konstante $c(n)$, so dass für jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega_0 \Subset \Omega$ offen und $s = 1, \ldots, n$*

$$\|\tau_{h,s}u\|_{L^p(\Omega_0)} \leq c\,\|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{wobei } h < \frac{dist(\Omega_0, \partial\Omega)}{2}.$$

(iii) *Falls $u \in L^p(\Omega)$, und falls es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, so dass für jedes $h < dist(\Omega_0, \partial\Omega)$, $s = 1, \ldots, n$*

$$\|\tau_{h,s}u\|_{L^p(\Omega_0)} \leq L,$$

dann ist $u \in W^{1,p}(\Omega_0)$, $\|Du\|_{L^p(\Omega_0)} \leq L$ und $\tau_{h,s}u \to D_s u$ schwach in $L^p(\Omega_0)$ falls $h \to 0$.

Beweis (Lemma). Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$, und wähle ein $s \in \{1, \ldots, n\}$. Für $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ definieren wir $\phi(x - he_s) = \psi(x)$. Falls $h > 0$ hinreichend klein ist, ist $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Also folgt aus der Euler-Lagrange Gleichung mit der Transformation $y \mapsto y + he_s$:

$$\int_\Omega \left[D_{\xi^\alpha} f(Du(x + he_s)) - D_{\xi^\alpha} f(Du(x))\right] D_\alpha \phi(x) dx = 0. \tag{34}$$

Es gilt für fast alle $x \in \Omega$ (Beachte, dass $Du \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ nur fast überall definiert ist):

$$D_{\xi^\alpha} f(Du(x + he_s)) - D_{\xi^\alpha} f(Du(x)) = \int_0^1 \frac{d}{dt} D_{\xi^\alpha} f(tDu(x + he_s) + (1 - t)Du(x))dt$$

$$= \int_0^1 D_{\xi^\beta} D_{\xi^\alpha}(tDu(x + he_s) + (1 - t)Du(x))D_\beta[u(x + he_s) - u(x)]dt. \tag{35}$$

Wir definiere

$$\widetilde{B}^{\alpha,\beta}(h, x) = \int_0^1 D_{\xi^\beta} D_{\xi^\alpha} f(tDu(x + he_s) + (1 - t)Du(x))dt$$

mit

$$|\widetilde{B}^{\alpha,\beta}(h, x)| \le M \quad \text{und} \quad \widetilde{B}^{\alpha,\beta}(h, x)\xi^\alpha \xi^\beta \ge \lambda|\xi|^2.$$

wegen den Annahmen für f. Dann gilt wegen (34) und (35)

$$\int_\Omega \widetilde{B}^{\alpha,\beta}(h, x) D_\beta \left[\frac{u(x + he_s) - u(x)}{h}\right] D_\alpha \phi = 0. \tag{36}$$

Betrachte nun die Test-Funktion

$$\phi(x) := \frac{u(x + he_s) - u(x)}{h}\eta^2 = \tau_{h,s}\eta^2$$

wobei $\eta \in C_c^\infty(B_R(x_0))$ ein Abschneidefunktion mit $B_{3R}(x_0) \subset \Omega$, $0 \le \eta \le 1$, $\eta = 1$ auf $B_{R/2}(x_0)$, und $|D\eta| \le \frac{c}{R}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\lambda \int_\Omega \left|\frac{Du(x + he_s) - Du(x)}{h}\right|^2 \eta^2 &\le \int_\Omega \widetilde{B}^{\alpha,\beta}(h, x) D_\beta \left[\tau_{h,s} u(x)\right] D_\alpha \left(\tau_{h,s}\right) \eta^2 \\
&= \int_\Omega \widetilde{B}^{\alpha,\beta}(h, x) D_\beta \left[\tau_{h,s} u(x)\right] \left[D_\alpha(\tau_{h,s}\eta^2) - 2\eta \tau_{h,s} D_\alpha \eta\right] \\
&\le c(n) 2M \int_{B_R(x_0)} \eta \left|\tau_{h,s} Du\right| \left|\tau_{h,s} D\eta\right|
\end{aligned}$$

Anwendung der Hölder-Ungleichung und der Young-Ungleichung $ab \le \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2$ mit $\epsilon = \frac{c(n)\lambda}{4M}$ ergibt:

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(x_0)} \left|\tau_{h,s} Du\right|^2 \eta^2 &\le c(n) \frac{2M}{\lambda} \sqrt{\int_{B_R(x_0)} \eta^2 \left|\tau_{h,s} Du\right|^2 \frac{1}{R^2} \int_{B_R(x_0)} \left|\tau_{h,s} u\right|^2} \\
&\le \frac{1}{2} \int_{B_R(x_0)} \left|\tau_{h,s} Du\right|^2 \eta^2 + \frac{2M}{\lambda} \frac{1}{R^2} \int_{B_R(x_0)} \left|\tau_{h,s} u\right|^2 .
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\frac{1}{2} \int_{B_{R/2}(x_0)} \left|\frac{Du(x + he_s) - Du(x)}{h}\right|^2 \eta^2 \le \frac{4M}{\lambda} \frac{1}{R^2} \int_{B_R(x_0)} \left|\tau_{h,s} u\right|^2 \le \frac{4M}{\lambda} \frac{1}{R^2} \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 =: c_3.$$

Mit einer Konstante c_3 unabhängig von h für alle $s = 1, \ldots, n$. Es folgt mit der Propostion, dass $D\tau_{h,s} u$ schwach gegen ein $w \in L^2(\Omega)$ konvergiert. Dann zeigt man leicht durch Anwendung geeigneter Integralkonvergenzstze, dass $w = DD_s u$ schwach und damit $u \in W^{2,2}(B_{R/2}(x_0))$. Außerdem, aus $h \to 0$ in (36) folgt (32) mit (iii) aus der vorigen Proposition. Denn $\widetilde{B}^{\alpha,\beta}(h, x) D_\alpha \phi \in$

$W_0^{1,2}(\Omega)$ für alle h und da $\widetilde{B}^{\alpha,\beta}(h,x) \to \widetilde{B}^{\alpha,\beta}(0,x)$ in L^2 folgt dies aus der schwachen Konvergenz von $D\tau_{h,s}u$. $\square$

Bemerkung 5.35. Unter den Annahmen von Satz 5.30 folgt mit Folgerung 5.29, dass $Du \in C^{0,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ für einen Hölder-Exponenten $\alpha \in (0,1)$. Also gilt $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ und

$$B_{i,j}^{\alpha,\beta} = (D_{\xi_j^\beta} D_{\xi_i^\alpha} f)(Du) \in C^{0,\alpha}(\Omega).$$

Das heißt, es ist ausreichend Systeme partieller Differentialgleichungen mit Hölder-stetigen Koeffizient zu untersuchen.

29. Vorlesung.

Lemma 5.36. *Es sei* $A = (A^{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,n}$ *eine Matrix mit* $|A^{\alpha,\beta}| \le \Lambda$ *für alle* α, β *sowie*

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} A^{i,j}\xi_i\xi_j \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *eine schwache Lösung von*

$$\operatorname{div}(ADu) = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{37}$$

Dann gilt für jedes $x_0 \in \Omega$ *und jeden Radius* $r < R < dist(x_0, \partial\Omega)$

$$\int_{B_r(x_0)} |Du|^2 \le \frac{c(n,\lambda)}{(R-r)^2} \int_{B_R(x_0)\setminus B_r(x_0)} |u-k|^2.$$

Beweis. Adaptiere die Lösung von Aufgabe 1, Blatt 10.

Lemma 5.37. *Sei* A *eine Matrix wie im vorigen Lemma und* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *ein Lösung von (37). Dann gilt*

$$\int_{B_r(x_0)} |u|^2 \le c(n,\lambda,M)\left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R(x_0)} |u|^2$$

und

$$\int_{B_r(x_0)} |u-(u)_{B_r(x_0)}|^2 \le c(n,\lambda,M)\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(x_0)} |u-(u)_{B_R(x_0)}|^2$$

wobei $B_r(x_0) \subset B_R(x_0) \Subset \Omega$.

Beweis. Für den Beweis siehe zum Beispiel Proposition 5.8 im Buch von Giaquinta und Martinazzi, "An introduction to regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs".

Satz 5.38. *Sei* $\gamma \in (0,1)$. *Sei* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *ein Lösung von*

$$D_\alpha(A^{\alpha,\beta}D_\beta u) = 0$$

mit $A^{\alpha,\beta} \in C^{0,\gamma}_{loc}(\Omega)$, *so dass*

$$A^{\alpha,\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \ge \lambda|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{und } \lambda > 0. \tag{38}$$

und

$$|A^{\alpha,\beta}| \le M \quad \text{für alle } \alpha,\beta = 1,\dots,n \text{ und } M > 0. \tag{39}$$

Dann gilt $D_s u \in C^{0,\delta}_{loc}(\Omega)$ *für ein* $\delta \in (0,\gamma)$.

Beweis. Sei $x_0 \in K$ und $B_R(x_0) \Subset \widetilde{\Omega}$. Wir schreiben

$$D_\alpha(A^{\alpha,\beta}(x_0)D_\beta u) = D_\alpha((A^{\alpha,\beta}(x_0) - A^{\alpha,\beta})D_\beta u) =: D_\alpha G^\alpha. \tag{40}$$

(Korn's trick). Wir betrachten die eindeutige Lösung $w \in W^{1,2}(B_R(x_0))$ von

$$\begin{aligned} D_\alpha(A^{\alpha,\beta}_{i,j}(x_0)D_\beta w) &= 0 \quad \text{in} \quad B_R(x_0)\\ w &= u \quad \text{auf} \quad \partial B_R(x_0). \end{aligned} \tag{41}$$

Einen solchen w existiert wegen dem Satz von Lax-Milgram.

Da w ein System mit konstanten Koeffizient löst, löst auch Dw ein System mit konstanten Koeffizienten. Insbesondere knnen wir das Lemma (5.37) auf Du anwenden und erhalten

$$\int_{B_r(x_0)} |Dw|^2 \le c(n,\lambda,M)\left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R(x_0)} |Dw|^2.$$

$\phi = w - u$ ist eine zulässige Test-Funktion für das System (41). Also gilt

$$\int_{B_R(x_0)} A^{\alpha,\beta}(x_0) D_\alpha w D_\beta w = \int_{B_R(x_0)} A^{\alpha,\beta}(x_0) D_\alpha w D_\beta u$$

Zusammen mit der Bedingung (38) und Young's Ungleichung $ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{\epsilon 2}b^2$ impliziert dies

$$\int_{B_R(x_0)} |Dw|^2 \leq \frac{M}{\lambda}\int_{B_R(x_0)} D_\alpha w D_\beta v \leq \frac{1}{2}\int_{B_R(x_0)} |Dw|^2 + \frac{M}{2\lambda}\int_{B_R(x_0)} |Du|^2.$$

Also

$$\int_{B_R(x_0)} |Dw|^2 \leq \frac{M}{\lambda}\int_{B_R(x_0)} |Du|^2.$$

ϕ löst (40) auf $B_R(x_0)$. Das heißt

$$\int_{B_R(x_0)} A^{\alpha,\beta}(x_0) D_\alpha \phi D_\beta \psi = \int_{B_R(x_0)} G^\alpha D_\alpha \psi$$

für jedes $\psi \in W^{1,2}(B_R(x_0))$ und insbesondere für $\phi = \psi$. Daraus folgt wieder mit der Bedingung (38) und der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x_0)} |D(w-u)|^2 &\leq \frac{1}{\lambda}\int_{B_R(x_0)} A^{\alpha,\beta}(x_0) D_\alpha \phi D_\beta \phi = \frac{1}{\lambda}\int_{B_R(x_0)} G^\alpha D_\alpha \phi \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\left(\int_{B_R(x_0)} |D(w-u)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R(x_0)} \sum_\alpha |G^\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Also

$$\int_{B_R(x_0)} |D(w-u)|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}\int_{B_R(x_0)} |G|^2.$$

Zusammen ergibt das

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x_0)} |Du|^2 &\leq \int_{B_r(x_0)} |Dw|^2 + \int_{B_r(x_0)} |D(u-w)|^2 \\ &\leq c(n,\lambda,M)\left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R(x_0)} |Dw|^2 + c(n,\lambda,M)\int_{B_R(x_0)} |G|^2 \\ &\leq c(n,\lambda,M)\left[\left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 + \int_{B_R(x_0)} |G|^2\right]. \qquad (42)\end{aligned}$$

Schlielich schätzten wir noch den Term mit G ab.

$$\int_{B_R(x_0)} |G^\alpha| = \int_{B_R(x_0)} |(A^{\alpha,\beta}(x_0) - A^{\alpha,\beta}) D_\beta u| \leq R^{2\gamma}\int_{B_R(x_0)} |Du|^2.$$

Es ergibt sich

$$\int_{B_r(x_0)} |Du|^2 \leq c(n,\lambda,M)\left[\left(\frac{r}{R}\right)^n + R^{2\gamma}\right]\int_{B_R(x_0)} |Du|^2.$$

Nun wenden wir erneut das Lemma 5.23 an:

Lemma 5.23. *Sei $\phi(\rho)$ nicht-negativ, reel-wertig, montone wachsend auf $[0, R_0]$. Wir nehmen an, es gibt $\tau \in (0,1)$, so dass für alle $R \leq R_0$ gilt*

$$\phi(\tau R) \leq (\tau^{\alpha_1} + \epsilon)\phi(R) + AR^{\alpha_2}$$

für eine Konstante $A \geq 0$, und $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$, und $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ für ein $\epsilon_0 > 0$. Falls $\epsilon_0(\tau, \alpha_1, \alpha_2)$ hinreichend klein, dann gilt für alle $r \leq R \leq R_0$

$$\phi(r) \leq c(\tau, \alpha_1, \alpha_2)\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_2}\phi(R) + Ar^{\alpha_2}\right].$$

Hier ist $\alpha_1 = n$, $\alpha_2 = 0$ und $A = 0$. Wenn wir $R > 0$ dann hinreichend klein wählen, gilt $R^{2\alpha} < \epsilon_0$. Wir erhalten für $\delta > 0$

$$\int_{B_r(x_0)} |Du|^2 \leq c(n, \lambda, M) \left[\left(\frac{r}{R}\right)^{n-\delta} \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 \right].$$

30. Vorlesung.

Beweis (Fortsetzung). Statt Dw betrachten wir nun $Dw - (Dw)_{B_R(x_0)}$ und wenden den zweiten Teil von Lemma 5.37 an auf Dw:

$$\int_{B_r(x_0)} |Dw - (Dw)_{B_R(x_0)}|^2 \le c(n,\lambda,M) \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(x_0)} |Dw - (Dw)_{B_R(x_0)}|^2 \tag{43}$$

Außerdem gilt

$$\int_{B_R(x_0)} |Dw - (Dw)_{B_R(x_0)}|^2 \le \int_{B_R(x_0)} |Dw - (Du)_{B_R(x_0)}|^2. \tag{44}$$

Den letzen Term können wir folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x_0)} |Dw - (Du)_{B_R(x_0)}|^2 &\le \frac{1}{\lambda} \int_{B_R(x_0)} A^{\alpha,\beta}(x_0)(D_\alpha w - (D_\alpha u)_{B_R(x_0)})(D_\beta w - (D_\beta u)_{B_R(x_0)}) \\
&\le \frac{1}{\lambda} \int_{B_R(x_0)} A^{\alpha,\beta}(x_0)(D_\alpha w - (D_\alpha w)_{B_R(x_0)})(D_\beta u - (D_\beta u)_{B_R(x_0)}) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{B_R(x_0)} A^{\alpha,\beta}(x_0)(D_\alpha w)(D_\beta(w-u)) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{B_R(x_0)} A^{\alpha,\beta}(x_0)(D_\alpha w)_{B_R(x_0)}(D_\beta(w-u)).
\end{aligned}$$

Der vorletzte Term ist 0 weil w das System (41) löst, und der letzte Term verschwindet weil $w - u \in W_0^{1,2}(B_R(x_0))$. Das heißt, zusammen mit (44) nach Anwendung der oberen Abschätzung für A und Hölder-Ungleichung erhalten wir die folgenden Abschätzung:

$$\int_{B_R(x_0)} |Dw - (Dw)_{B_R(x_0)}|^2 \le \frac{M^2}{\lambda^2} n^2 \int_{B_R(x_0)} |Du - (Du)_{B_R(x_0)}|^2. \tag{45}$$

Abschließend haben wir noch folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r(x_0)} |Du - (Du)_{B_R(x_0)}|^2 \\
&\le 3 \left[\int_{B_r(x_0)} |Du - Dw|^2 + \int_{B_r(x_0)} |Dw - (Dw)_{B_R(x_0)}|^2 + \int_{B_r(x_0)} |(Dw)_{B_R(x_0)} - (Du)_{B_R(x_0)}|^2 \right].
\end{aligned}$$

Den letzen Term können wir abschätzen durch:

$$\int_{B_r(x_0)} \left| \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} (Dw - Du) \right|^2 \le \int_{B_r(x_0)} |Dw - Du|^2$$

Also

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x_0)} |Du - (Du)_{B_R(x_0)}|^2 &\le 6 \int_{B_r(x_0)} |Du - Dw|^2 + \int_{B_r(x_0)} |Dw - (Dw)_{B_R(x_0)}|^2 \\
&\le c(n,\lambda,M) R^{2\gamma} \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 + \int_{B_r(x_0)} |Dw - (Dw)_{B_R(x_0)}|^2
\end{aligned}$$

Wobei wir in der letzen Ungleichung vorgehen wie in der Abschätzung (42) (A ist γ-Hölder-stetig).

Schließlich schätzen wir $\int_{B_R(x_0)} |Dw - (Dw)_{B_R(x_0)}|^2$ in der letzen Ungleichung mit Hilfe von Lemma

41 ab:

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x_0)} |Du - (Du)_{B_R(x_0)}|^2 \le c(n,\lambda,M) R^{2\gamma} \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 \\ + c(n,\lambda,M)\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(x_0)} |Dw - (Dw)_{B_R(x_0)}|^2 \\ \le c(n,\lambda,M) R^{2\gamma}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{n-\delta} \int_{B_R(x_0)} |Du|^2\right] \\ + c(n,\lambda,M)\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(x_0)} |Du - (Du)_{B_R(x_0)}|^2 \\ \le c(n,\lambda,M)\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(x_0)} |Du - (Du)_{B_R(x_0)}|^2 \\ + c(n,\lambda,M,\|Du\|_{L^2}) R^{2\gamma+n-\delta}\end{aligned}$$

wobei wir (43) verwenden mit $R = r$ und $R = R_0$. Wieder mit Lemma 5.23 folgt

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x_0)} |Du - (Du)_{B_R(x_0)}|^2 \le c(n,\lambda,M)\left(\frac{r}{R}\right)^{2\gamma+n-\delta} \int_{B_R(x_0)} |Du - (Du)_{B_R(x_0)}|^2 \\ + c(n,\lambda,M,\|Du\|_{L^2}) r^{2\gamma+n-\delta}.\end{aligned}$$

Dass heißt Campanato's Charakterisierung von Hölder-stetigkeit (Theorem 5.9) ergibt $D_s u \in C^{0,\delta/2}_{loc}(\Omega)$ falls $\delta/2 \in (0,\gamma)$. □

Satz 5.30. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein C^∞-Funktion, so dass*

(i) $|D_z f(z)| \le L|z|$ *für jedes* $z \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\frac{1}{\Lambda}|\xi|^2 \le D_z^2 f(z)\xi \cdot \xi \le \Lambda|\xi|^2$ *für jedes* $\xi \in \mathbb{R}^n$.

für Konstanten $L, \Lambda > 0$.

Ω *sei ein beschränktes Gebiet, und* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *ein Minimierer von* $\mathcal{F}(v,\Omega) = \int_\Omega f(Dv)$, *das heißt*

$$\mathcal{F}(u,\Omega) \le \mathcal{F}(u+\phi,\Omega) \quad \text{für alle } \phi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.

Beweis (Satz 5.30). Wir wenden Theorem 5.38 an auf $v = Du$ und erhalten $v \in C^{1,\delta}_{loc}(\Omega)$. Also ist $u \in C^{2,\delta}_{loc}(\Omega)$. Wir können die Gleichung, die von Du erfüllt wird, differenzieren bzgl x^t, und erkennen, dass $D_t Du$ ebenfalls eine Gleichung des selben Typs erfüllt. Also is $D_t Du \in C^{1,\delta''}_{loc}(\Omega)$. Wir können in dieser Weise induktiv fortfahren und erhalten das gewünschte Resultat.