
Aufgabe

Wir betrachten $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ mit der Riemannschen Metrik $g^H_{(x,y)} = \frac{1}{y^2}\langle\cdot,\cdot\rangle_{eukl}$ (*Halbraum-Modell des Hyperbolischen Raums*). Die Abbildung $\phi(x, y) = (x, y)$ ist eine Karte.

(a) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole bzgl. ϕ: ${}^\phi\Gamma^1_{11} = {}^\phi\Gamma^2_{12} = {}^\phi\Gamma^1_{22} = 0$, ${}^\phi\Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}$ und ${}^\phi\Gamma^1_{12} = {}^\phi\Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$.

(b) Sei $v_0 = (0, 1) \in T_{(0,1)}H$ und sei $P^\gamma_{0,t}v_0 = v(t)$ der Paralleltransport entlang der Kurve $\gamma(t) = (t, 1)$. Zeigen Sie $g^H_{\gamma(t)}((0, 1), v(t)) = \cos t$.

Hinweise: $v(t) = (a(t), b(t))$ erfüllt eine gewöhnliche Differentialgleichung. Um diese zu lösen machen Sie den Ansatz $a(t) = \cos\theta(t)$, $b(t) = \sin\theta(t)$. Bestimmen Sie θ.