
Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(a) Finden Sie für die folgenden komplexen Zahlen jeweils die Darstellung $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$:
$$(1+i)^{-1}, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3, \quad (1+i\sqrt{5})^8.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$ die folgende Ungleichung gilt
$$\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right| < 1.$$

Aufgabe 2 (1+3=4 Punkte)

(a) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Drücken Sie $\cos(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta)$ jeweils als Funktion von $\cos(\alpha), \cos(\beta), \sin(\alpha)$ und $\sin(\beta)$ aus.
Hinweise: Sie können die Identität $e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it}$, $s, t \in \mathbb{R}$, verwenden.

(b) Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z$. Schreiben Sie w jeweils in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte + 1 Bonuspunkt)
Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen f von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ komplex differenzier bzw. holomorph sind:

1. $f(z) = |z|^2$,
2. $f(z) = z\mathrm{Re}z$,
3. $f(z) = \frac{z}{|z|}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,
4. $f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3$,
5. $f(z) = \max\{(|z|-1)^3, 0\}$.