---

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Sei $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\rho(r) = r$ und $\mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{S}^{n-1}$ bezeichnet das zugehörige *warped product* wobei $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x\rangle_{eucl} = 1\}$ mit der eingeschränkten Euklidischen Metrik. Wir definieren $\Phi : \mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ durch $\Phi(r, w) = rw$. Zeigen Sie: $\Phi$ ist eine Isometrie zwischen der warped product Metrik und der Euklidischen Metric $\langle \cdot, \cdot\rangle_{eucl}$ auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Sei $M$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $i^*\langle \cdot, \cdot\rangle_{eucl} = g$ die durch die Einbettung $i : M \to \mathbb{R}^n$ induzierte Riemannsche Metrik. Wir bezeichnen mit $TM^\perp = \bigcup_{p\in M} T_pM^\perp$ das Normalenvektorbündel mit der zugehörigen Projektionsabbildung $\pi^\perp : TM^\perp \to M$ wobei $T_pM^\perp = \{v \in T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n : \langle v, w\rangle_{eucl} = 0 \ \forall w \in TM\}$.

Zeigen Sie, dass auf dem Normalenbündel wie folgt ein Zusammenhang definiert werden kann:

$$(X, Y) \in \Gamma(TM) \times \Gamma(TM^\perp) \mapsto \nabla^\perp_X Y := \left(\bar{\nabla}_X Y\right)^\perp \in \Gamma(TM^\perp),$$

wobei $\bar{\nabla}$ den Standardzusammenhang auf $T\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $\nabla$ ein Zusammenhang auf $TM$. Es seien glatte, lokale Basisvektorfelder $(E_i)_{i=1,\dots,m}$ und $(\tilde{E}_i)_{i=1,\dots,m}$ für $TM$ auf einer offenen Menge $U \subset M$ gegeben. Es gibt eine Matrix-wertige Funktion $A : U \to Gl(m, \mathbb{R})$ mit glatten Einträgen $A_i^j \in C^\infty(U)$, so dass $\tilde{E}_i = A_i^j E_i$ auf $U$. Es seien $\Gamma_{ij}^k$ und $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ die zugehörigen Christoffelsymbole. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = (A^{-1})_l^k A_i^r A_j^s \Gamma_{rs}^l + (A^{-1})_l^k A_i^r E_r(A_j^s).$$

*Abgabe am Montag, 23. Mai bis 12 Uhr beim Assistenten.*