
Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine glatte Kurve und X ein Vektorfeld längs γ. Sei $\phi = (x^1, \dots, x^m) : U \to V$ eine Karte. Dann gilt $X(t) = \sum_{i=1}^m X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma(t)$ und $\phi \circ \gamma(t) =: (\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t))$. Zeigen Sie mit Hilfe der Augabe 3, Blatt 4, dass die Definition

$$\nabla_{\gamma'(t)} X|_t = \sum_{k=1}^m \left((X^k)'(t) + \sum_{i,j=1}^m {}^\phi\Gamma_{ij}^k \circ \gamma(t) (\gamma')^i X^j(t) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \circ \gamma(t)$$

unabhängig von der Karte ϕ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ der Levi-Civita Zusammenhang und $\gamma : (a, b) \to M$ eine glatte Kurve. Zeigen Sie:

(a) Falls $\varphi : (c, d) \to (a, b)$ und $V \in \Gamma(\gamma^* TM)$ parallel längs γ, so ist $\tilde{V}(t) := V \circ \varphi(t)$ parallel längs $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi$.

(b) Für $X \in \Gamma(TM)$ gilt, dass

$$\nabla_{\gamma'(s)} X = \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} P_{t,s}^\gamma X \circ \gamma(t)$$

(*Der Paralleltransport bestimmt den Zusammenhang*).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^∞-Abbildung (ein reguläres, glattes Flächenstück), sei $X_i = \frac{\partial X}{\partial x^i}$, $i = 1, 2$, und $N := \frac{X_1 \times X_2}{\|X_1 \times X_2\|_{eucl}}$ wobei $\times$ das Kreuzprodukt zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Für $i, j, k = 1, 2$ seien Γ_{ij}^k definiert durch

$$X_{ij} := \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k X_k + h_{ij} N.$$

Zeigen Sie: Die Koeffizienten Γ_{ij}^k sind die Christoffelsymbole der induzierten Riemannschen Metric $X^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{eucl}$ auf U bezüglich der Kart $\phi(x^1, x^2) = (x^1, x^2)$.

Zusatzaufgabe (4 Zusatzpunkte)

(a) Berechnen Sie die Christoffelsymbole des Standardzusammenhangs $\bar{\nabla}$ auf $T\mathbb{R}^3$ bzgl. der auf Blatt 1, Aufgabe 1, definierten Koordinaten (Polarkoordinaten).

(b) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie die Aussage in 3.6 Lemma: Sei $\gamma \in C^\infty(I, M)$, $V, W \in \Gamma(\gamma^*TM)$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_{\gamma(t)}(V(t), W(t)) = g_{\gamma(t)}(\nabla_t V|_t, \nabla_t W|_t).$$

Abgabe am Dienstag, 6. Juni bis 12 Uhr beim Assistenten.