

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Es sei  $c \in \Omega$  eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion  $f : \Omega \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$ . Zeigen Sie für die Laurentreihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu}(z-c)^{\nu}$$

von  $f$  um  $c$ :

1.  $c$  ist hebbbar genau dann, wenn  $a_{\nu} = 0 \forall \nu < 0$ ,
2.  $c$  ist ein Pol der Ordnung  $m$  genau dann, wenn  $a_{\nu} = 0 \forall \nu < -m$  und  $a_{-m} \neq 0$ ,
3.  $c$  ist eine wesentliche Singularität genau dann, wenn  $a_{\nu} \neq 0$  für unendlich viele  $\nu < 0$ .

**Aufgabe 2** (*Regel von Hospital*) (4 Punkte)

Seien  $f, g$  in einer punktierten Umgebung von  $z_0 \in \mathbb{C}$  holomorph, und  $z_0$  sei eine  $k$ -fache Nullstelle von  $f$  und  $g$  (bzw.  $k$ -fache Polstelle von  $f$  und  $g$ ). Zeigen Sie:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)},$$

und  $z_0$  ist hebbare Singularität von  $f/g$ .

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die Laurentreihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2} \text{ auf } A_{1,2}(0).$$

- (b) Berechnen Sie den Hauptteil der Laurentreihe von

$$f(z) = \frac{z-1}{(\sin z)^2} \text{ auf } A_{0,\pi}(0).$$

- (c) Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k(z+2)^k.$$

*Abgabe bis Mittwoch, 14. Dezember, 16 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.*