Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(a) Sei $f \in C^\infty(M)$. Der Tensor $\nabla^2 f \in \Gamma(T_2^0 M)$ gegeben durch

$$\nabla^2 f(X, Y) := \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle,$$

heißt Hesseform von f. Berechnen Sie $\nabla^2 f$ in lokalen Koordinaten und zeigen Sie, dass ∇^2 symmetrisch ist und im Fall $(M, g) = (\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_{eucl}$ mit der zweiten Ableitung übereinstimmt.

(b) Sei $f \in C^\infty(M)$ und $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = const$. Zeigen Sie: Die Integralkurven von ∇f sind Geodätische.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien (M_i, g_i), $i = 0, 1$, zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $M_0 \times M_1$ die Produktmannigfaltigkeit zusammen mit der Produktmetric $g = \pi_0^* g_0 + \pi_1^* g_1$ wobei $\pi_i : M_0 \times M_1 \to M_i$ die Projection auf den $i$ten Faktor bezeichnet. Sei $\phi_i : U_i \to V_i$ eine Karte auf M_i, $i = 0, 1$.

(a) Berechnen Sie die Christoffelsymbole des Levi-Civita Zusammenhangs von $(M_0 \times M_1, g)$ bzgl. der Karte $\phi = (\phi_0, \phi_1)$ aus den Christoffelsymbolen von g_i bzgl. der Karte ϕ_i.

(b) Zeigen Sie: $c = (c_0, c_1) : (a, b) \to (M_0 \times M_1, g)$ ist genau dann eine Geodätische, wenn $c_0 : (a, b) \to (M_0, g_0)$ und $c_1 : (a, b) \to (M_1, g_1)$ Geodätische sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Zum *Satz von Noether.*

(a) Sei (M, g) eine Riem. Mannigfaltigkeit und $X \in \Gamma(TM)$. Zeigen Sie: Die Funktion $F : TM \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(v) = \langle X \circ \pi(v), v \rangle$ ist genau dann ein Integral des Geodätischen Flusses (d.h. $\langle X(c(t)), c'(t) \rangle = const$ für jede Geodätische c), wenn X ein Killingvektorfeld ist.

(b) *Satz von Clairaut.* Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Rotationsfläche. Ist c eine Kurve auf M, so sei $\theta(t)$ der Winkel in $c(t)$ von $c'(t)$ und dem durch $c(t)$ verlaufenden Rotationskreis. $r(t)$ ist der Abstand von $c(t)$ zur Rotationsachse. Zeigen Sie mit Teil (a), dass $r(t) \cos \theta(t)$ konstant ist, falls c eine Geodätische ist.

Abgabe am Dienstag, 27. Juni bis 12 Uhr beim Assistenten.