
Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$. $\nabla^2 f \in \Gamma(T^0_2 M)$ bezeichnet die Hesseform von f.

f heißt konvex, falls für jedes $p \in M$ die symmetrische Bilinearform $\nabla^2 f|_p$ positiv semidefinit ist. Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt total konvex, falls jede Geodätische $c : [a,b] \to M$ mit $c(a), c(b) \in U$ ganz in U verläuft. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in C^\infty(M)$ und $c : (a,b) \to M$ eine Geodätische, so gilt $\nabla^2 f|_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = (f \circ c)''(t)$.

(b) f ist konvex genau dann, wenn für jede Geodätische $c : (a,b) \to M$ $f \circ c : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex ist.

(c) Ist f konvex, so ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}((-\infty, t))$ total konvex ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitssphäre mit der induzierten Metrik. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $p \in \mathbb{S}^n$ is $\exp_p$ auf ganz $T\mathbb{S}^n_p$ definiert und $\exp_p|_{B_\pi(0_p)} : B_\pi(0_p) \to \mathbb{S}^n \backslash \{-p\}$ ist ein Diffeomorphismus.

(b) Berechnen Sie für $q \in \mathbb{S}^n \backslash \{-p\}$ die Hesseform von
$$Q(x) := \langle (\exp_p|_{B_\pi(0_p)})^{-1}(x), (\exp_p|_{B_\pi(0_p)})^{-1}(x) \rangle.$$
Für welche q is die Hesseform $\nabla^2 Q|_q$ positiv definit und für welche q positiv semi-definit. *Anleitung: Zeigen Sie erst, dass* $Q(x) = (\arccos\langle x, p\rangle)^2$. *Berechnen Sie dann die Hessform mit Hilfe von Aufgabe 1 (a). Betrachten Sie die radial und orthogonal Komponente in* $T_x\mathbb{S}^n$ *bzgl.* $c_v'(1)$ *wobei* $v = (\exp_p|_{B_\pi(0_p)})^{-1}(x)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei (M,g) eine zusammenhängende Riem. Mgft.

(a) Zeigen Sie, dass (M,g) vollständig ist genau dann, wenn gilt: $A \subset M$ beliebig ist kompakt genau dann, wenn A abgeschlossen und beschränkt bzgl. d_g ist.

(b) Seien g und $\tilde g$ Riemannsche Metriken auf M. Zeigen Sie: Ist $\tilde g(v,v) \geq g(v,v)$ für alle $v \in TM$ und ist (M,g) vollständig, dann ist auch $(M, \tilde g)$ vollständig.

(c) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit mit Inklusionsabbildung $\iota : M \to \mathbb{R}^n$. Sei $g = \iota^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ die von der Euklidischen Metrik induzierte Riemannsche Metrik. Zeigen Sie: Ist M als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so ist (M,g) vollständig.

Abgabe am Dienstag, 04. Juli bis 12 Uhr beim Assistenten.