
Aufgabe 1 (4 Punkte) *Existenz konvexer Umgebungen.*
Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$, und sei $U \subset T_pM$ offen, so dass $\exp_p|_U : U \to V = \exp_p(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $Q : V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$Q(x) = \langle (\exp_p|_U)^{-1}(x), (\exp_p|_U)^{-1}(x) \rangle.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $v \in T_pM$ gilt $\nabla^2 Q(v, v) = 2\langle v, v \rangle$.

(b) Es gibt eine Umgebung $V' \subset V$ von p, so dass $Q|_{V'} : V' \to \mathbb{R}$ konvex ist.

(c) Es gibt eine Umgebung W von p, so dass für alle $x, y \in W$ gilt: Es gibt in M genau eine Kürzeste zwischen x und y, und diese liegt in W.

Hinweis: Aufgabe 1, Blatt 9.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein m-dimensionaler Euklidischer Vektorraum und $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Sei $S^{m-1} = \{v \in V : |v| = 1\}$ die Einheitssphäre in V. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{\mathrm{vol}_{m-1}(S^{m-1})} \int_{S^{m-1}} b(v, v) d\,\mathrm{vol}^{S^{m-1}} = \frac{1}{m} \mathrm{Spur} b$$

wobei $d\,\mathrm{vol}^{S^{m-1}}$ das Volumenelement auf S^{m-1} mit der von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ induzierten Metrik ist.

(b) Sei (M, g) eine m-dimensional Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $v \in T_pM$ mit $|v| = 1$. Zeigen Sie

$$\mathrm{ric}(v, v) = \frac{m-1}{\mathrm{vol}_{m-2}(S^{m-2})} \int_S K(\mathrm{Span}(u, v)) d\,\mathrm{vol}^S(u)$$

wobei $S = \{u \in T_pM : \langle u, v \rangle = 0, |u| = 1\}$ die Einheitssphäre im orthogonalen Komplement von $v \in T_pM$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei G eine Liegruppe, versehen mit einer binvarianten Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeigen Sie:

(a) Für $u, v, w, z \in T_eG$ gilt:

$$R(u, v)w = -\frac{1}{4} [[u, v], w] \quad \text{and} \quad \langle R(u, v)w, z \rangle = \frac{1}{4} \langle [u, v], [z, w] \rangle.$$

Sind u, v orthonormal, so gilt $K(\mathrm{Span}\{u, v\}) = \frac{1}{4} |[u, v]|^2$.

(b) $SO(3)$ mit der biinvarianten Metrik von Aufgabe 3, Blatt 3, hat konstante Schnittkrümmung. Berechnen Sie diese Konstante.

Abgabe am Dienstag, 11. Juli bis 12 Uhr beim Assistenten.