

Aufgabe 1 (4 Punkte) Berechnen Sie

1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^4 + 10x^2 + 9} dx,$$

2.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^3} dx,$$

3.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)^{-1}.$$

Hinweis: Integrieren Sie über die Kurve γ_r , welche gegeben ist als Verkettung des Segments von 0 bis $r \in \mathbb{R}$, des Kreisbogens um 0 mit Radius r von r nach $z_n = r \exp(2\pi i/n)$ und des Segments von z_n nach 0.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Folgern Sie den Fundamentalsatz der Algebra aus dem Satz von Rouché.

Abgabe bis Mittwoch, 25. Januar, 16 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.