Aufgabe 1 (6 Bonuspunkte)
Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) = e^{i\phi}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \quad \text{mit } a \in \mathbb{E}\backslash\{0\},\ \phi \in [0, 2\pi).$$

(a) Zeigen Sie mit dem Maximumprinzip, dass $f(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ und $f(\partial\mathbb{E}) \subset \partial\mathbb{E}$.

(b) Zeigen Sie: Ist $\cos^2 \frac{\phi}{2} = 1 - |a|^2$, so hat $f(z)$ einen Fixpunkt vom Betrag 1, sonst gibt es 2 Fixpunkte z_1, z_2 mit $|z_1| \cdot |z_2| = 1$.

(c) Zeigen Sie in einem Fixpunkt z die Gleichung

$$w^2 + \frac{2\cos\phi/2}{\sqrt{1-|a|^2}}w + 1 = 0 \quad \text{für } w = e^{-\frac{i\phi}{2}}\frac{\overline{a}z - 1}{1-|a|^2} \quad \text{also } w^{-2} = f'(z).$$

(d) Für ein Fixpunkt $z \in \mathbb{E}$ gilt $|f'(z)| = 1$, für ein Fixpunkt auf $\partial\mathbb{E}$ gilt $f'(z) \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (4 Bonuspunkte)
Beweisen Sie eine Verallgemeinerung des Maximum-Prinzips: Sei G ein beschränktes Gebiet und $f_1, \ldots, f_n$ holomorphe Funktionen in G, die sich stetig auf den Rand ∂G fortsetzen lassen. Dann nimmt

$$\phi(z) = |f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)|$$

sein Maximum auf ∂G an.

Freiwillige Abgabe, beim Dozenten oder Assistenten bis zum Ende der Vorlesungszeit.