Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei (X, d) ein ∞-Pseudometrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Relation $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) < \infty$ eine Äquivalenzrelation ist und die Beschränkung von d auf jede Äquivalenzklasse eine (endliche) Pseudometrik ist.

(b) Sei (X, d) ein Pseudometrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Relation $xRy \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ eine Äquivalenzrelation ist, und $\hat{d}([x], [y]) = d(x, y)$ ist eine Metrik auf $\hat{X}/R$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Der Durchmesser einer Menge S in einem metrischen Raum X ist definiert als $\operatorname{diam}(S) = \sup_{x,y} |xy|$. Zeigen Sie, dass der metrische Raum X genau dann vollständig ist, wenn er die folgende Eigenschaft besitzt: Wenn $\{X_n\}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X ist, so dass $X_{n+1} \subset X_n$ für alle n gilt und $\operatorname{diam}(X_n) \to 0$ für $n \to 0$, dann enthalten die Mengen X_n einen gemeinsamen Punkt.

(b) Zeigen Sie: Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a)
1. Wenn X kompakt ist, dann ist $\operatorname{diam}_X < \infty$.
2. Es existieren zwei Punkte $x, y \in X$ so, dass $|xy| = \operatorname{diam}_X$.

(b) Definieren Sie $\operatorname{rad}_X = \inf_{x \in X} \sup_{y \in X} |xy|$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rad}_X = \inf\{r > 0 : X \subset B_r(x) \text{für } x \in X\}$.

(c) Für zwei Teilmengen $A, B \subset X$ definieren Sie $d(A, B) = \inf\{|xy| : x \in A, y \in B\}$. Zeigen Sie, dass es $x \in A$ und $y \in B$ gibt, so dass $|xy| = d(A, B)$, wenn A und B kompakt sind. Erfüllt d die Dreiecksungleichung?

Aufgabe 4 (Bonus) (2 Punkte)
Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $0 < \lambda < 1$ und $f : X \to X$ eine Abbildung, so dass $|f(x)f(y)| \leq \lambda |xy|$ für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x_0 \in X$ gibt, so dass $f(x_0) = x_0$.

Abgabe am Mittwoch, 1. November bis 12 Uhr beim Assistenten.