Übung zur Geometrie der metrischen Räume — Wintersemester 2023/24, Blatt 3
Dr. Christian Ketterer — 2. November 2023

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei (A, L) eine Längenstruktur auf einem topologischen Hausdorff-Raum X und sei d_L die daraus abgeleitete Längenmetrik. Zeige:

(a) (X, d_L) ist ein metrischer Raum.

(b) Jede offene Menge in X ist auch in (X, d_L) offen. Somit ist die von d_L induzierte Topologie feiner als die ursprüngliche Topologie auf X.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei (A, L) eine Längenstruktur auf einem topologischen Hausdorff-Raum X.

(a) Jeder zulässige Pfad endlicher Länge ist auch bezüglich der Längenmetrik d_L stetig.

(b) Zeige, dass (X, d_L) lokal wegpunktzusammenhängend ist, d.h., jede Umgebung eines beliebigen Punktes enthält eine wegpunktzusammenhängende Umgebung dieses Punktes (bezüglich d_L).

(c) Betrachte den Fächer", d.h., $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_i \cup [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, wobei $X_i = \{t(\cos(1/i), \sin(1/i)) : t \in [0, 1]\}$. Zeige, dass die induzierte Topologie von $\mathbb{R}^2$ auf X nicht die Topologie der Längenmetrik sein kann.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Beweise, dass $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, \pi t \sin(\frac{1}{t}) & t \in (0, 1] \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

ein stetiger Pfad ist, aber unendliche Länge bezüglich der euklidischen Länge hat.

Aufgabe 4 (Bonus) (2 Punkte)
Sei (A, L) eine Längenstruktur auf einem topologischen Hausdorff-Raum X. Wir sagen, dass zwei Punkte $x, y \in X$ zur selben Zugänglichkeitskomponente gehören, wenn sie durch einen zulässigen Pfad endlicher Länge verbunden werden können. Zeige:

(a) Zugänglichkeit durch Pfade ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Zugänglichkeitskomponenten stimmen mit den Endlichkeitskomponenten von d_L überein (die Endlichkeitskomponenten sind die Komponenten der Äquivalenzklasse aus Aufgabe 1 (a) auf Blatt 2).

(c) Zugänglichkeitskomponenten sind in wegzusammenhängenden Komponenten enthalten (die mit zusammenhängenden Komponenten übereinstimmen), sind jedoch im Allgemeinen nicht identisch mit ihnen.

Abgabe am Mittwoch, 8. November bis 12 Uhr beim Assistenten.