Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wir betrachten stetige Pfade $\gamma : [a,b] \to X$. Beachte, dass eine Partition Z ein Tupel $(t_0,\dots,t_N)$ mit $t_0 = a \le t_1 \le \dots \le t_N = b \in [a,b]$ ist. Wir definieren $|Z| = \max_{i=1,\dots,N} |t_i - t_{i-1}|$ und $L^Z(\gamma) = \sum_{i=1}^N d(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i))$. Die induzierte Länge von γ ist $L_d(\gamma) = \sup_{Z \text{ Partition}} L^Z(\gamma)$. Zeige, dass

$$L(\gamma) = \lim_{i\to\infty} L^{Z_i}(\gamma)$$

wobei $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ Partitionen sind, so dass $|Z_i| \downarrow 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $(V,|\cdot|)$ ein endlich dimensionaler normierter Vektorraum und $\gamma : [a,b] \to V$ ein differenzierbarer Pfad. Sei (V,d) der metrische Raum, der zu $(V,|\cdot|)$ gehört, d.h. $d(\cdot,\cdot) = |\cdot - \cdot|$. Sei $L_d(\gamma)$ die induzierte Länge. Zeige, dass

$$L_d(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Betrachte $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ mit der induzierten euklidischen Metrik d_2. Zeige, dass

(a) $(\mathbb{S}^1, d_2)$ kein Längenraum ist.

(b) Die induzierte intrinsische Distanz $\hat{d}_2$ ist gegeben durch $\hat{d}_2(x,y) = \arccos\langle x,y\rangle_2$, wobei $\langle x,y\rangle_2$ das euklidische Skalarprodukt ist.

Aufgabe 4 (Bonus) (1 Punkt)
Zeige: Wenn ein Längenraum (X,d) homöomorph zu einem Intervall ist, dann ist er isometrisch zu einem Intervall.

Abgabe am Mittwoch, 15. November bis 12 Uhr beim Assistenten.