Problem 1 (4 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Wenn d strikt intrinsisch ist, dann existiert für alle $x, y \in X$ ein α-Mittelpunkt $z \in X$ für alle $\alpha \in (0, 1)$, d.h. $d(x, z) = \alpha d(x, y)$ und $d(z, y) = (1 - \alpha)d(x, y)$.

(b) Angenommen, (X, d) ist vollständig. Wenn für alle $x, y \in X$ ein ϵ-Mittelpunkt $z \in X$ für alle $\epsilon > 0$ existiert, dann ist d intrinsisch, d.h. eine Längenmetrik.

Problem 2 (4 Punkte)
Ein vollständiger metrischer Raum (X, d) ist ein Längenraum genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ und zwei Punkte $x, y \in X$ eine endliche Folge von Punkten $x = x_1, \ldots, x_k = y$, $k \in \mathbb{N}$, existiert, so dass $d(x_i, x_{i+1}) \leq \epsilon$ für alle $i \in \{1, \ldots, k - 1\}$ und $\sum_{i=1}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x, y) + \epsilon$. Wenn (X, d) strikt intrinsisch ist, wird die letzte Ungleichung zu $\sum_{i=1}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x, y)$.

Problem 3 (4 Punkte)

(a) Sei X ein Längenraum und Y ein metrischer Raum. Sei $f : X \to Y$ eine lokal Lipschitz stetige Abbildung mit Lipschitz-Konstante $C > 0$. Zeige, dass f Lipschitz-stetig mit derselben Lipschitz-Konstante ist.

(b) Sei (X, d) ein Längenraum und A eine zusammenhängende offene Teilmenge von X. Dann induziert d auf A eine endlichwertige intrinsische Metrik $d_A : A \times A \to [0, \infty)$. Außerdem hat jeder Punkt $p \in A$ eine Umgebung $U \subset A$, so dass für alle zwei Punkte $p, q \in U$ gilt: $d(p, q) = d_A(p, q)$.

Problem 4 (Bonus) (1 Punkt)
Beweise, dass die Vervollständigung eines Längenraums ein Längenraum ist.

Abgabe am Mittwoch, 22. November bis 12 Uhr beim Assistenten.